

**Mémoire présenté devant le CNAM pour l'obtention du Master
Droit Economie Gestion, mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 13 mai 2024

Par : Daniel ZERBIB

Titre: Pour quel profil de compagnies, une modélisation stochastique du
risque de crédit dégrade-t-elle sa solvabilité ?

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Président du Jury :

M. Stéphane LOISEL

signatures

Entreprise :

Nom : FORSIDES FRANCE

Directeur de mémoire en entreprise :

Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires :

M. Faris ROUCHATI

M. Lionel LAURENT

Mme Florence PICARD

Nom : Arnaud COHEN

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Membres présents du jury du
Cnam :

M. Olivier DESMETTRE

M. David FAURE

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels (après
expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du responsable entreprise


FORSIDES FRANCE SAS au capital de 548 100 €
RCS - PARIS 8247 13371 - Code APL : 7022Z
11 rue Général Foy - 75008 Paris
Tél. : +33 (0)1 42 97 91 70

Signature du candidat

Résumé

Ce mémoire s'est attaché à comprendre pour quels types de portefeuilles d'actifs et/ou profils de passif, la nécessité d'une modélisation stochastique du risque de crédit s'impose davantage dans le cadre de calculs de valorisation économique sous contrainte réglementaire de solvabilité. En effet, dans le cadre de contrats d'assurance vie avec participation aux bénéfices (et plus spécifiquement les contrats d'épargne), l'assuré dispose d'un certain nombre de garanties (rachat, taux minimum,...) qui induisent une asymétrie dans le partage de la richesse et notamment des produits financiers. Ainsi, une modélisation qui ferait l'impasse sur le caractère volatil du rendement de certains actifs (comme les obligations) tendrait à sous-estimer le coût des options et garanties des contrats. Là où dans un modèle déterministe, des défauts moyens sont constatés sur les obligations, une modélisation stochastique permet de simuler des changements de rating et variations de spread ainsi que la survenance de défauts. Le modèle stochastique de crédit étudié dans ce mémoire est une extension du modèle de Jarrow-Lando-Turnbull proposé par Dubrana. C'est un modèle de transition avec des probabilités de passage stochastiques. Ainsi, il prend en compte la volatilité des valeurs de marché des obligations en plus de la volatilité sur les produits financiers due aux défauts. Mots clés : JLT, Dubrana, BE, NAV, spread, épargne, sensibilités, diversification, risque de crédit, stochastique

Abstract

This paper set out to understand for which types of asset portfolios and/or liability profiles, the need for stochastic modelling of credit risk is more essential in the context of economic valuation calculations under regulatory solvency constraints.. In fact, in the context of with profit participation life insurance contracts (and more specifically savings contracts), the policyholder has a certain number of guarantees (surrender, minimum rate, etc.) which lead to an asymmetry in the sharing of wealth and in particular financial income. A model that ignored the volatility of returns on certain assets (like bonds) would tend to underestimate the cost of contract options and guarantees. Whereas in a deterministic model, average defaults are accounted for bonds, stochastic modelling can simulate rating changes and spread variations as well as the occurrence of defaults. The stochastic credit model studied in this paper is an extension of the Jarrow-Lando-Turnbull model proposed by Dubrana. It is a transition model with stochastic transition probabilities. It takes into account the volatility of bond market values in addition to the volatility of financial products due to defaults. Key words: JLT, Dubrana, BE, NAV, spread, savings, sensitivities, diversification, credit risk, stochastic

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Véronique MATTEI et Arnaud COHEN qui m'ont fait confiance et permis de rejoindre FORSIDES puis m'ont encouragé à suivre la formation d'actuariat du CNAM, Arnaud ayant ensuite été mon directeur de mémoire, impliqué et toujours de très bon conseil. Un grand merci à lui ainsi qu'à David GRAIZ pour leur soutien et conseils au cours de ces années depuis la rédaction du mémoire jusqu'à la soutenance.

Je remercie également chaleureusement Guillaume GERBER qui a été mon premier encadrant chez FORSIDES et qui m'a fait bénéficier de sa grande pédagogie et de toute son expertise pour me faire grandir au cours de mes premières années au sein de FORSIDES.

Je remercie tous les collègues/ex-collègues qui m'ont aidé ou délivré leurs conseils pour la réalisation de ce mémoire. Je pense notamment à Déborah AFLALO ou encore Mohamed SI-HAMDI.

Enfin, je remercie l'équipe pédagogique du CNAM et en particulier Stéphane LOISEL pour ces précieux conseils.

Table des matières

Résumé.....	1
Abstract	2
Remerciements	3
Introduction.....	7
I. Le calcul des indicateurs de solvabilité sous Solvabilité 2.....	9
1) Notions essentielles et notations.....	9
2) Le calcul des fonds propres	9
2.1 Principes généraux d'évaluation de la NAV.....	9
2.2 Le cas de l'épargne en euros : approche par Monte-Carlo et actif-passif.....	10
II. La modélisation du risque de crédit.....	15
1) Définition du risque de crédit	15
2) La nécessité d'une modélisation stochastique sous Solvabilité 2.....	16
3) Principes généraux	16
3.1 Fonctionnement d'une obligation risquée.....	16
3.2 Valeur de marché d'une obligation risquée	17
3.3 Spread de crédit	18
4) Les grandes familles de modèles utilisés en assurance	19
3.1 Modèle déterministe.....	19
3.2 Modèle à transition de rating.....	19
3.3 Modèle à intensité de défaut.....	20
5) Le modèle JLT (Jarrow, Lando, Turnbull).....	20
5.1 Le modèle JLT en temps discret	20
5.2 Le modèle JLT en temps continu	23
5.3 Modélisation de la prime de risque – Extension de Dubrana	24
5.4 Calibrage des paramètres.....	26
5.5 Risque-neutralisation des obligations par le calibrage de la prime de risque initiale du processus CIR.....	27
5.6 Implémentation du JLT	28
III. Projections ALM et JLT	33
1) Principes généraux	33
2) L'actif.....	33
2.1 La projection des obligations.....	33
2.2 Actions, immobilier, fonds alternatifs, private equity.....	37

2.3	Monétaire.....	37
3)	Le passif et autres postes du bilan	38
4)	Les interactions actif-passif.....	38
4.1	Politique d'allocation cible d'actif	39
4.2	Politique d'achat/vente.....	39
4.3	Politique de revalorisation des contrats	39
4.4	Prise en compte de la contrainte de PB minimum règlementaire.....	40
4.5	Autres règles de gestion.....	41
5)	Problématiques liées à l'implémentation du JLT	42
IV.	Cadre de l'étude	43
1)	Rappel de la problématique	43
2)	Les hypothèses générales de projection	43
3)	La génération des scénarios économiques	43
3.1	Introduction.....	43
3.2	Courbe des taux de référence	44
3.3	Générateur de scénarios économiques (ESG).....	45
4)	Les paramètres du JLT : mu, sigma et alpha.....	50
V.	Résultats et discussion	52
1)	Constitution du portefeuille de la compagnie	52
1.1	Le bilan comptable	52
1.2	Répartition du portefeuille en pourcentage de la valeur comptable (VNC)	53
1.3	Répartition de la poche obligataire en termes de rating	53
1.4	Duration, spread et rating moyen du portefeuille	54
1.5	Portefeuille d'actif en chiffres	55
1.6	Portefeuille de passif : chiffres et règles de gestion	55
1.7	Hypothèses de calcul.....	56
2)	Indicateurs étudiés.....	56
3)	Résultat.....	59
4)	Les différentes sensibilités	60
4.1	Impact des paramètres du modèle	61
4.2	Sensibilités sur la structure du portefeuille d'actif	64
4.3	Sensibilités à l'optionnalité du passif	68
VI.	Limites de l'étude	72
	Conclusion	73

Bibliographie..... 75

Introduction

L'assurance-vie représente près de 1 900 Milliards d'euros d'encours en France à fin 2021. Pour gérer de tels encours, les assureurs vie ont mené et mènent encore d'importants travaux de modélisation actif-passif et de calculs stochastiques afin d'apprécier au mieux les conséquences de leurs décisions de gestion et ainsi les optimiser sous contrainte réglementaire. Cette dernière s'est vue renforcée par l'entrée en vigueur de Solvabilité 2 en 2016 qui requiert également de tels modèles actif-passif et des calculs stochastiques pour évaluer les provisions techniques et les montants de capital de solvabilité requis de façon la plus juste possible. Ces calculs stochastiques permettent de prendre en compte notamment des coûts d'options et garanties inclus dans les contrats. Si certains acteurs, notamment ceux qui effectuaient des calculs de valorisation de type MCEV (Market Consistent Embedded Value), étaient déjà sensibilisés à ce type d'approche, pour un grand nombre d'acteurs de taille plus modeste, cela a constitué un véritable bouleversement.

La modélisation de la volatilité induite par le caractère aléatoire des rendements financiers des actifs de l'assureur va conduire à tenir compte de scénarios défavorables dans lesquels l'assureur réalisera des pertes à cause des options et garanties de ces contrats. A l'inverse, dans les scénarios favorables (et possiblement y compris dans le scénario déterministe moyen), il devra, pour des contraintes réglementaires et/ou commerciales, au contraire partager les bénéfices enregistrés. Cette modélisation permet donc de bien capter l'asymétrie du point de vue de l'assureur.

Ainsi, une modélisation qui ferait l'impasse sur le caractère volatil du rendement de certains actifs tendrait à sous-estimer le coût des options et garanties des contrats car elle ne capterait pas suffisamment certains scénarios défavorables. C'est la raison pour laquelle l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), en tant que superviseur national, a insisté auprès de la place pour que les différents acteurs ne se contentent pas d'une modélisation du risque de crédit déterministe.

Ce dernier se matérialise principalement sur les titres obligataires qui constituent une large majorité des portefeuilles des assureurs vie (77% en 2021 après ouverture en transparence des titres d'OPC). La problématique de la modélisation du risque de crédit s'est posée d'autant plus en cette période de taux historiquement bas au cours de laquelle les assureurs ont été particulièrement amenés à chercher des actifs à plus fort rendement mais donc également avec un risque plus élevé en se tournant tout particulièrement vers des obligations plus risquées. A titre d'illustration, selon une étude menée par l'ACPR sur l'environnement de taux bas, la part des obligations notées AAA dans les portefeuilles obligataires des assureurs est passée d'environ 40% en 2011 à environ 10% en 2015 et s'est depuis stabilisée. La nécessité d'une modélisation stochastique du risque de crédit à des fins d'optimisation économique sous contrainte réglementaire de solvabilité pour les assureurs vie s'en voit donc renforcée afin de pouvoir évaluer correctement les conséquences d'investissements obligataires plus risqués.

Ce mémoire s'attachera donc à montrer dans quelle mesure la prise en compte d'une modélisation stochastique du risque de crédit par rapport à une modélisation déterministe est nécessaire pour évaluer la solvabilité d'une compagnie d'assurance vie, et pour quel profil de compagnies en particulier. Le cas d'étude retenu est celui d'une activité d'épargne en euros et la question de la nécessité d'une modélisation stochastique du risque de crédit sera posée pour plusieurs types de portefeuilles d'actifs et/ou profils de passif.

C'est pourquoi ce mémoire commencera par introduire le cadre de l'étude qu'est la réglementation prudentielle Solvabilité 2 avec notamment les indicateurs de solvabilité associés. La nécessité d'une approche stochastique pour obtenir ces indicateurs y sera expliquée. Puis, des modélisations du risque de crédit déterministe et stochastique seront présentées. Le lien entre ces deux premières parties pourra ensuite être fait en expliquant comment est intégrée la modélisation du risque de crédit dans les projections actif-passif permettant de calculer les indicateurs de solvabilité. Le cas d'étude sera alors défini plus précisément, c'est-à-dire les caractéristiques du calcul de référence : la description de la compagnie, son portefeuille de passif et d'actif, les hypothèses de gestion, l'environnement économique dans lequel se place l'étude et donc la manière dont les scénarios économiques sont générés de façon à permettre l'évaluation des indicateurs de solvabilité. Le cas d'étude défini, les résultats du calcul de référence pourront être présentés avec le modèle déterministe et avec le modèle stochastique. La comparaison entre ces deux modélisations sera alors analysée dans des conditions différentes (portefeuilles d'actif, de passif et d'environnement économique...) de sorte à être en mesure de répondre à notre problématique portant sur l'identification des cas dans lesquels il apparaît davantage nécessaire de prendre en compte une modélisation stochastique du risque de crédit, ce qui sera discuté dans une dernière partie avant de conclure.

I. Le calcul des indicateurs de solvabilité sous Solvabilité 2

Afin d'évaluer la solvabilité des compagnies d'assurance (et de réassurance), la norme Solvabilité 2 a défini un ratio de solvabilité basé sur le calcul de certaines grandeurs que ce chapitre va s'attacher à décrire. Ces calculs constitueront les indicateurs qui permettront de comparer la solvabilité de la compagnie d'assurance considérée selon le modèle de risque de crédit et ainsi permettre de répondre à la problématique posée dans ce mémoire.

1) Notions essentielles et notations

Dans le cadre du pilier 1, la compagnie évalue sa solvabilité qu'elle reporte ensuite au public ou au superviseur dans le cadre du pilier 3.

Le principe de cette évaluation est de valoriser l'ensemble du bilan de la compagnie et notamment ses fonds propres en valeur économique au plus juste puis vérifier que le montant de fonds propres obtenu est suffisant pour financer les pertes à horizon 1 an dans un scénario « très dégradé », en l'occurrence dans le 995/1000^{ème} pire scénario, ou autrement dit la Value At Risk (VaR) à 99,5% sur 1 an des pertes de fonds propres. Les fonds propres économiques se calculent comme un actif net et sont désignés en Solvabilité 2 par l'acrostiche **NAV** pour Net Asset Value, notation qui sera reprise dans ce mémoire. Si les projections font apparaître des profits futurs, des impôts différés passif viennent diminuer les fonds propres. On parle alors de NAV hors impôts différés. Dans la suite du mémoire, le terme NAV désignera la NAV hors impôts différés par abus de langage sauf indication contraire. Cet actif est valorisé en valeur de marché, notée **VM** dans la suite et les provisions au passif sont évaluées au plus juste ou Best Estimate, noté **BE** dans la suite. Le montant de pertes de fonds propres correspondant à la VaR 99,5% à 1 an constitue le **SCR** pour Solvency Capital Requirement.

Le taux de couverture de la compagnie se définit alors comme le ratio des fonds propres sur le SCR :

$$\text{Taux de couverture} = \frac{\text{NAV}}{\text{SCR}}$$

Ce taux doit être supérieur à 100% sous peine de recevoir des consignes de gestion par le superviseur national car en-dessous de 100%, la compagnie serait considérée comme non-solvable.

2) Le calcul des fonds propres

2.1 Principes généraux d'évaluation de la NAV

Comme énoncé précédemment, les fonds propres sont évalués de façon économique comme étant la différence des actifs valorisés en valeur de marché et des passifs évalués en Best Estimate. Le BE correspond à la valeur actuelle probable des flux de trésoreries futurs afférents aux contrats d'assurance et/ou de réassurance en stock à la date de reporting. La projection des flux de trésorerie se fait en hypothèse de continuité d'activité sans prise en compte d'affaires nouvelles et jusqu'à extinction des engagements en cours (ou à défaut jusqu'à un horizon à partir duquel le BE n'évolue plus que de façon non significative). Les flux de passifs sont actualisés avec la courbe des taux sans

risque réglementaire communiquée et mise à jour par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority, Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles) mensuellement. Ces taux seront notés par la suite $(r(0, T))_T$.

2.2 Le cas de l'épargne en euros : approche par Monte-Carlo et actif-passif

2.2.1 La spécificité de l'épargne en euros

Les contrats en euros sont des contrats d'assurance vie où le souscripteur peut y investir son épargne. La principale caractéristique des contrats en euros est la sûreté des placements. En effet, ces contrats sont caractérisés par un capital garanti brut de frais.

Ces contrats offrent l'avantage d'être très liquides, à savoir que l'assuré peut décider à tout instant, de racheter en partie ou dans la totalité son contrat.

L'assureur verse alors à l'assuré la provision mathématique du contrat, en déduisant d'éventuelles pénalités de rachat et prélèvements sociaux. Certains contrats d'assurance vie en euros peuvent également proposer un taux technique en dessous duquel le taux de revalorisation crédité aux contrats ne pourra pas descendre. Le taux technique peut être de deux types :

- à durée limitée, prenant alors fin après une durée précisée dans le contrat ;
- viager, étant valable jusqu'à résiliation du contrat par l'assuré.

Il est donc possible d'observer sur certains portefeuilles d'assurance vie, des taux techniques viagers non nuls qui avaient été souscrits lorsque les rendements étaient élevés. Les assureurs vie peuvent donc avoir des difficultés à revaloriser à ces taux élevés si ces derniers ne sont pas en phase avec leurs produits financiers.

Aussi, en plus de la garantie en capital des contrats, les assureurs ont une obligation de partage de leurs bénéfices avec les assurés.

Deux types de participation aux bénéfices (PB) :

- PB minimale contractuelle : les clauses contractuelles peuvent préciser le mécanisme de calcul et d'affectation de la participation aux bénéfices
- PB minimale réglementaire : la réglementation définit un niveau minimum de participation aux bénéfices (articles A331-4 à A331-8 du Code des Assurances) : en l'occurrence, ils se doivent de reverser minimum 85 % du résultat financier et 90 % du résultat technique.

À noter que ces chiffres représentent un minimum, libre à chaque compagnie d'assurance vie d'en reverser plus si elle le souhaite, par exemple dans un objectif de demeurer concurrentielle par rapport aux autres compagnies.

L'article A 132-7 du code des assurances stipule également que le montant de participation aux bénéfices peut être affecté à deux provisions techniques possibles :

- à la Provision Mathématique (PM) du contrat, c'est alors la partie des bénéfices qui sera directement redistribuée à l'assuré ;
- à la Provision pour Participation aux Excédents (PPE), l'assurance vie dispose alors d'un délai de 8 ans maximum pour redistribuer aux assurés cette partie. Cette provision permet ainsi de lisser les montants versés aux assurés mais sa reprise ne compte pas dans le montant de PB distribué lorsqu'il s'agit de déterminer la PB minimale réglementaire de l'année.

La participation aux bénéfices de l'entreprise est généralement distribuée à chaque clôture d'exercice.

La PB minimale contractuelle

Elle est définie par les conditions générales et/ou particulières du contrat. Elle peut être calculée au niveau du contrat (canton) ou d'un ensemble de contrats.

La somme des participations contractuelles doit être supérieure ou égale à la participation minimale réglementaire.

La PB minimale réglementaire

Le calcul se fait au niveau de l'entreprise d'assurance, et non par contrat ou groupe de contrat comme pour la PB minimale contractuelle.

Les assureurs doivent reverser au minimum 85 % du résultat financier des actifs adossés aux provisions techniques et 90 % du résultat technique aux assurés.

Etant donné le fonctionnement de ces contrats décrit ci-dessus, les contrats d'épargne en euros, contiennent en synthèse les options et garanties suivantes :

- L'option de rachat consistant à octroyer aux bénéficiaires du contrat la possibilité de percevoir la valeur de rachat à une date quelconque. Par défaut, le contrat s'arrête au moment du décès de l'assuré auquel cas les bénéficiaires récupèrent la valeur de rachat.
- Des taux techniques ou taux minimum garantis (TMG) de revalorisation de l'épargne accumulée, qui selon les contrats peuvent être strictement supérieurs à 0% bruts de chargements (sachant qu'ils sont par défaut au moins égaux à 0%)
- Les taux techniques et de participation aux bénéfices minimal contractuels et réglementaires : L'assureur est contraint de revaloriser l'épargne de l'assuré en fonction de ses en plus du taux technique (qui lui est servi même en l'absence de bénéfices).

La valorisation de ces trois options et garanties ne peut se faire de façon déterministe sous peine de la sous-estimer et ce, pour les raisons suivantes :

- L'option de rachat à tout moment entraîne que les assurés peuvent décider de racheter de façon massive suite à un événement économique donné. Par exemple, une hausse brutale des taux sans risque peut avoir pour conséquence un rachat massif des assurés qui s'orienteront vers des supports sans risque comme le livret A qui pourront leur donner de meilleurs rendements. Or, le comportement des assurés n'étant pas linéaire (ci-dessous un exemple de

fonction de rachat dynamique qui fait partie de celles préconisées par l'ACPR pour les calculs Solvabilité 2), un seul scénario déterministe ne permettrait pas de capter les conséquences sur les rachats et donc sur les résultats de la compagnie de la variabilité des taux sans risque.

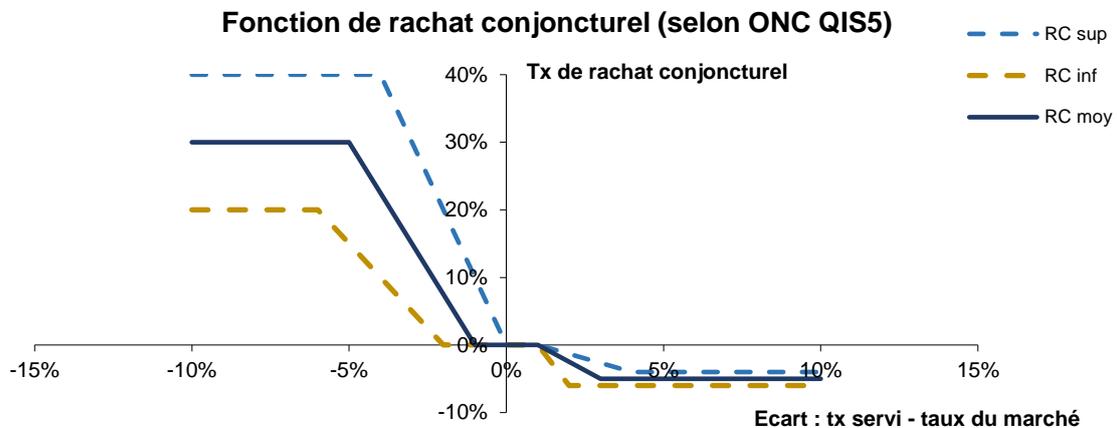


Figure 1 : fonctions de rachats dynamiques préconisées par l'ACPR

- Le taux technique et le taux de participation aux bénéfices minimal règlementaire : Un scénario déterministe dans lequel les produits financiers permettent pendant toute la durée de projection de financer le taux technique ne permettrait pas de capter le coût de cette garantie car dans ce cas, des bénéfices financiers sont réalisés et donc forcément partagés avec l'assuré en vertu de l'obligation règlementaire de distribuer au minimum 85% des bénéfices financiers. En revanche, dans des scénarios où les produits financiers ne seraient pas suffisants pour financer le taux technique (même égal à 0%), l'assureur le financerait par ses fonds propres via un résultat négatif. Or, cette perte n'est pas partagée avec l'assuré. C'est donc plus précisément le coût généré par l'asymétrie de partage des bénéfices entre assureur et assuré qu'un scénario déterministe ne serait pas en mesure de capter.

Comme décrit ci-dessus, le calcul des fonds propres économiques nécessite le calcul des provisions techniques. Or, pour les évaluer au plus juste comme requis par la norme, il convient de valoriser l'ensemble des engagements de l'assureur, y compris les options et garanties prévues explicitement ou pas dans les contrats d'assurance citées ci-dessus.

2.2.2 Illustration théorique simplifiée de la nécessité d'une évaluation stochastique des engagements

Les compagnies d'assurance vie sont tenues de reverser aux assurés au minimum 85 % du résultat financier et 90 % du résultat technique de l'entreprise.

Ainsi, lorsque l'entreprise effectue un résultat financier ou technique positif une année, elle se doit d'en reverser une partie aux assurés.

Cependant, lorsque la compagnie d'assurance enregistre une année un résultat technique et/ou financier négatif, elle assume à elle seule cette perte financière. C'est ce que l'on appelle l'asymétrie de partage du sort.

Du fait de l'asymétrie de partage du sort, nous tenterons à travers un exemple très simplifié ne prenant pas en compte les différents frais, de comprendre pourquoi il est nécessaire d'effectuer de nombreuses simulations lorsque l'on souhaite projeter la situation financière d'une compagnie d'assurance vie.

Hypothèses communes :

- Taux garanti : 0% des PM
- Rendements financiers annuels moyens 1% des PM
- Taux de distribution de PB : 85%
- Quote-part assuré des produits financiers : 100% (canton sans fonds propres)

Comptes de résultats simplifiés				
Cas déterministe	Cas stochastique			
<ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 1% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $85\% \times (1\% - 0\%) = 0,85\%$ Résultat assureur = $1\% - 0,85\% = 0,15\%$ Résultat assuré = 0,85%	<table border="1"> <tr> <td> Scénario 1 <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 3% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $\text{Max}(0; 85\% \times (3\% - 0\%)) = 2,55\%$ Résultat assureur = $3\% - 2,55\% = 0,45\%$ Résultat assuré = 2,55% </td> </tr> <tr> <td> Scénario 2 <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : -1% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $\text{Max}(0; 85\% \times (-1\% - 0\%)) = 0\%$ Résultat assureur = -1% Résultat assuré = 0% </td> </tr> <tr> <td> Scénario moyen <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 1% • Résultat assureur = -0,275% • Résultat assuré = 1,275% </td> </tr> </table>	Scénario 1 <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 3% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $\text{Max}(0; 85\% \times (3\% - 0\%)) = 2,55\%$ Résultat assureur = $3\% - 2,55\% = 0,45\%$ Résultat assuré = 2,55%	Scénario 2 <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : -1% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $\text{Max}(0; 85\% \times (-1\% - 0\%)) = 0\%$ Résultat assureur = -1% Résultat assuré = 0%	Scénario moyen <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 1% • Résultat assureur = -0,275% • Résultat assuré = 1,275%
Scénario 1 <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 3% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $\text{Max}(0; 85\% \times (3\% - 0\%)) = 2,55\%$ Résultat assureur = $3\% - 2,55\% = 0,45\%$ Résultat assuré = 2,55%				
Scénario 2 <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : -1% • Intérêts techniques : 0% • Participation aux bénéfices : $\text{Max}(0; 85\% \times (-1\% - 0\%)) = 0\%$ Résultat assureur = -1% Résultat assuré = 0%				
Scénario moyen <ul style="list-style-type: none"> • Produits financiers : 1% • Résultat assureur = -0,275% • Résultat assuré = 1,275% 				

Dans les deux cas ci-dessus, le résultat financier a été calculé pour des produits financiers moyens de 1 % et un TMG de 0 %. Dans le cas stochastique, deux simulations ont été effectuées. Nous pouvons observer que pour le cas déterministe, le résultat financier obtenu est de 0,15 % alors que pour le cas stochastique, en faisant la moyenne du scénario 1 et du scénario 2, on obtient un résultat financier inférieur, de - 0,28 %. N'effectuer qu'une seule simulation engendrerait alors un biais dans le résultat financier, résultant de l'asymétrie de partage du sort. C'est pourquoi, avec le mécanisme de participation aux bénéfices, il est nécessaire d'effectuer un grand nombre de simulations et d'en faire ensuite la moyenne pour capter le coût pour l'assureur des options et garanties induites dans les contrats d'assurance.

2.2.3 Approche par Monte-Carlo

Il résulte de ce qui vient d’être expliqué qu’une approche stochastique permettant de prendre en compte un ensemble de configurations économiques est nécessaire (et même requise dans ce cas par Solvabilité 2) pour évaluer le BE et donc la NAV au plus juste.

Pour cela, les flux de passif sont projetés jusqu’à l’horizon de projection choisi à l’aide d’un outil de modélisation actif-passif permettant de simuler le comportement de l’assureur, la constitution de ces comptes et de ses entrées-sorties de cash et ce, dans un certain nombre de scénarios économiques suffisant pour assurer une stabilité du calcul du BE.

La génération aléatoire de ces scénarios économiques doit répondre aux trois critères suivants, comme l’article 22 du règlement délégué paragraphe 3 le précise :

« (a) il génère des prix d’actifs cohérents avec les prix des actifs observés sur les marchés financiers;

(b) il ne suppose aucune opportunité d’arbitrage;

(c) le calibrage des paramètres et des scénarios est cohérent avec la courbe des taux sans risque pertinents utilisée pour calculer la meilleure estimation visée à l’article 77, paragraphe 2, de la directive 2009/138/CE. ».

On parle d’univers de projection risque-neutre censé permettre une meilleure comparabilité des valorisations de passif des différentes compagnies.

Le graphique ci-dessous permet de schématiser l’approche stochastique visant à valoriser les passifs d’épargne en euros décrite dans ce paragraphe :

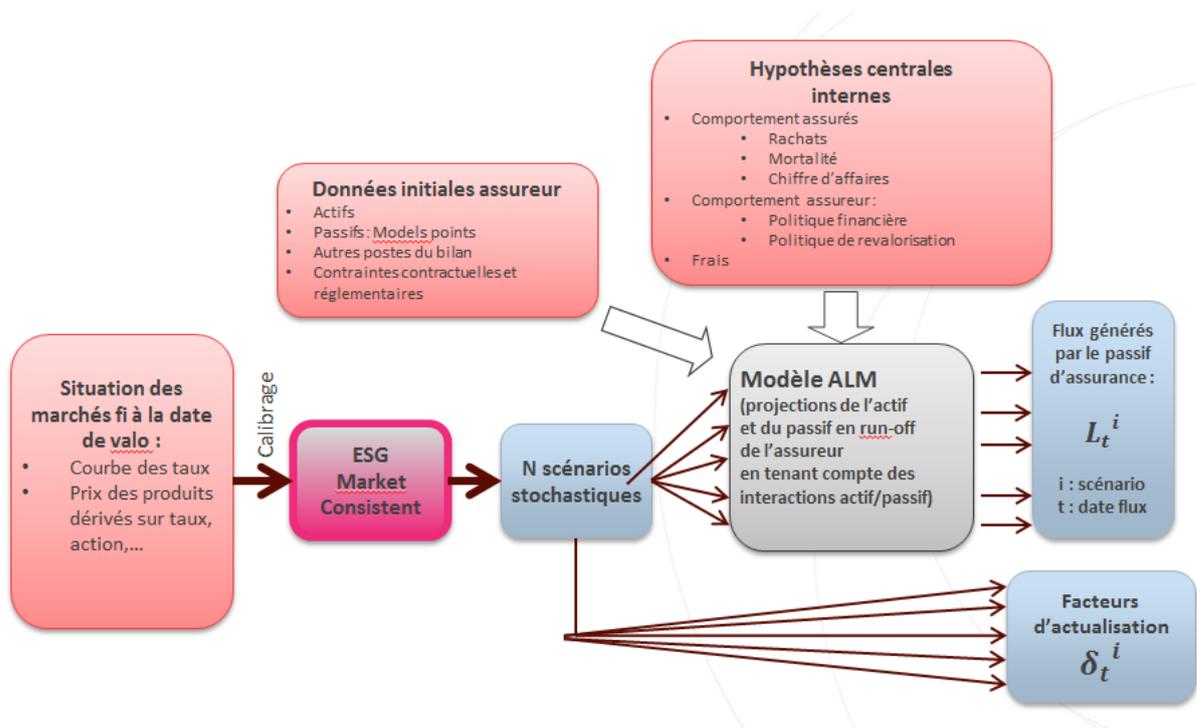


Figure 2 : Schéma de valorisation stochastique des passifs épargne euro

II. La modélisation du risque de crédit

Comme indiqué en introduction, les portefeuilles des assureurs vie sont majoritairement investis en obligations. Les obligations sont essentiellement exposées au risque de taux et au risque de crédit (éventuellement au risque action pour les convertibles et au risque inflation pour les indexées inflations). La modélisation stochastique du risque de taux a fait l'objet de nombreux travaux et est largement développée parmi les acteurs de place et ce, depuis plusieurs années. En revanche, la modélisation stochastique du risque de crédit est beaucoup moins développée bien que ce risque touche une part significative des portefeuilles des assureurs. Cette partie s'attachera en premier lieu à définir le risque de crédit et les notions associées puis à présenter les modèles existants et plus particulièrement celui qui sera à l'étude dans le cadre de ce mémoire.

1) Définition du risque de crédit

Le risque de crédit se traduit à prime abord comme la perte potentielle pour un investisseur que peut subir son portefeuille à la suite d'un événement de crédit touchant la contrepartie.

Le risque de crédit se décompose en trois sous-risques :

- Le risque de changement de notation, qui est le risque de dégradation de la valeur d'un actif causée par un changement de rating d'un émetteur.
- Le risque d'écartement des spreads, qui est le risque de dégradation de la valeur d'un actif à la suite d'une augmentation du spread de crédit, qui correspond au rendement supplémentaire que demande le marché par rapport au taux considéré « sans risque ».
- Le risque de défaut de l'emprunteur qui est le risque d'une perte financière liée à l'incapacité d'un débiteur à faire face à ses engagements.

Les acteurs principaux du marché de crédit sont les prêteurs et les emprunteurs ainsi que les agences de notation chargées d'évaluer le risque de non-remboursement de la dette par un état ou une entreprise. La notation de crédit est une méthode qualitative, permettant aux agences de notation d'apprécier la solvabilité des émetteurs. Ainsi, les principales agences de notation sont :

- Standard & Poor's
- Moody's
- Fitch.

D'une part, ces agences attribuent une note de crédit aux émetteurs (États, entreprises, collectivités locales etc.) correspondant aux capacités de remboursement de leurs engagements envers leurs créanciers. D'autre part, elles attribuent également une note aux émissions (obligations, titres de créance etc.) correspondant à la qualité de crédit de ces émissions. Plus l'obligation émise est bien notée, moins elle est risquée et a un rendement plus faible. Dans leurs rapports annuels, les agences de notation publient également les probabilités de transition qui représentent les probabilités de changement de rating, qui sont des estimations basées sur des données historiques.

2) La nécessité d'une modélisation stochastique sous Solvabilité 2

La modélisation déterministe du risque de crédit est couramment utilisée pour des projections risque neutre. Chaque année, des défauts moyens sont constatés égaux au produit du nominal et du taux de défaut induit.

Une modélisation stochastique permettant de simuler des changements de rating et variations de spread comme c'est le cas des modèles à intensité va entraîner davantage de variations de valeur de marché des obligations dans les projections. En revanche, la modélisation de la survenance de défauts comme c'est le cas des modèles à transition va introduire de la volatilité dans les produits financiers. L'objectif étant de modéliser au mieux la volatilité induite par le risque de crédit à la fois sur les produits financiers et les valeurs de marché afin de s'assurer de capter le mieux possible les coûts d'options et garanties des contrats d'épargne, une extension du modèle de Jarrow-Lando-Turnbull (décrit dans les paragraphes suivants) proposé par Dubrana permet de modéliser de façon stochastique les probabilités de passage et ainsi prendre en compte également la volatilité des valeurs de marché des obligations.

Les modèles évoqués seront décrits dans les paragraphes suivants de façon plus détaillée.

3) Principes généraux

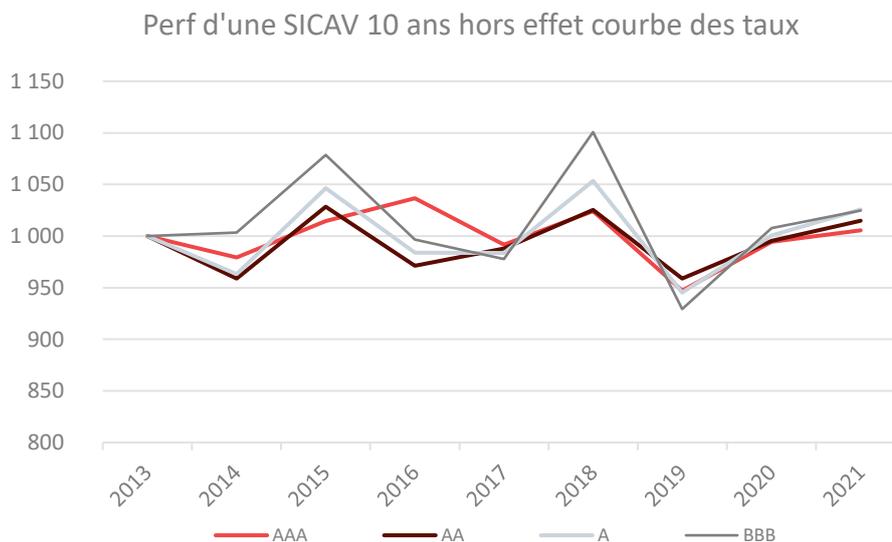
Plusieurs approches ont été proposées pour modéliser le risque de crédit, nous allons nous intéresser à celle de Jarrow, Lando et Turnbull [1997], qui permet de prendre en compte les risques de migration et d'établir un lien entre la probabilité de défaut et les spreads de crédit. Avant cela, nous allons tout d'abord définir brièvement les obligations et donner leurs caractéristiques, ainsi que présenter le modèle de crédit déterministe existant.

3.1 Fonctionnement d'une obligation risquée

Les obligations sont des titres de créances, émises généralement par les sociétés et les États pour emprunter des fonds sur les marchés. Une obligation est dite corporate, si elle est émise par une entreprise, elle est dite souveraine ou de première catégorie si elle est émise par un État ou garantie par un État. Les obligations sont généralement cotées sur les marchés financiers, leur valeur varie en fonction de l'évolution des taux du marché, ce qui permet aux investisseurs de les acheter et de les vendre avant leur échéance. On distingue principalement plusieurs types d'obligations : les obligations à taux fixe, à taux variable, indexées sur l'inflation et les obligations zéro-coupon.

Les obligations sont généralement affectées d'un risque de défaut si la société émettrice fait faillite et n'arrive pas honorer ses engagements vis-à-vis de ses créanciers, d'un risque d'écartement de spread ou d'un risque de dégradation de la valeur à la suite d'un changement de notation de l'émetteur. Cependant, le défaut ne concerne le prêteur que si la date de défaut noté T arrive entre le moment d'achat t_0 et la date d'échéance T . Dans ce cas, l'acheteur de l'obligation ne recevra plus de coupons futurs à leurs dates de tombées prévues, ni le nominal à maturité. Certaines obligations incluent un recouvrement en cas de défaut, ainsi le détenteur percevra uniquement une partie du nominal connue au moment de l'achat de l'obligation.

Pour illustrer la matérialisation du risque d'écartement des spreads (défini ci-dessus II.1) sur des obligations risquées, la valeur de marché d'une obligation fictive à taux fixe à 2% de maturité 10 ans glissante et de nominal 1000€ a été simulée selon sa notation AAA, AA, A ou BBB sur la base des évolutions historiques des spreads déduits des évolutions des indices obligataires Iboxx correspondant par rapport aux indices Iboxx souverains, sur la période 2013-2021. Pour cet exemple, la valorisation des obligations s'est faite avec une même courbe des taux à chaque année afin de mettre en évidence l'effet d'écartement des spreads exclusivement :



Les évolutions historiques des spreads montrent comme l'on pouvait s'y attendre qu'avec une notation BBB, les valorisations se trouvent davantage volatiles qu'avec une notation AAA et de façon générale, plus l'obligation est mal notée, plus elle a tendance être risquée et par conséquent sa valorisation davantage volatile.

3.2 Valeur de marché d'une obligation risquée

La valeur de marché VM_t à une date donnée t d'une obligation risquée, est calculée comme la valeur actuelle des flux futurs espérés. En $t=0$, la valeur de marché d'une obligation est sa valeur d'achat.

Notons :

- N : le nominal de l'obligation.
- C : le coupon versé.
- $\delta(t;T)$: facteur d'actualisation à la date t pour une maturité T
- P^* : probabilité risque-neutre.
- F_t : une filtration, qui représente l'ensemble des informations connues à l'instant t .
- τ : la date du défaut de l'obligation
- R : le recouvrement en cas de défaut de l'obligation.

Alors :

$$\begin{aligned} VM_t &= \sum_{t_i \leq T} C \delta_{(t,t_i)} \mathbb{P}^*(\tau > t_i | F_t) + N \delta_{(t,T)} \mathbb{P}^*(\tau > T | F_t) + R \times N \times \delta_{(t,T)} \mathbb{P}^*(\tau < T | F_t) \\ &= \sum_{t_i \leq T} C \delta_{(t,t_i)} \mathbb{P}^*(\tau > t_i | F_t) + N \delta_{(t,T)} (1 - (1 - R) \mathbb{P}^*(\tau > T | F_t)) \end{aligned}$$

Pour un zéro coupon ZC (N, T, R), si on note f_T le flux à percevoir à maturité alors :

$$f_T = N \mathbb{1}_{\tau > T} + RN \mathbb{1}_{\tau < T} = (1 - (1 - R) \mathbb{1}_{\tau < T}) N$$

Si l'obligation zéro-coupon est une corporate, son nominal donc se voit dégrader. En environnement risque neutre, la valeur de marché à $t=0$ du ZC s'écrit :

$$\begin{aligned} VM_{t=0} &= \mathbb{E}[\delta_{0,T} f_T] \\ &= \delta_{0,T} \mathbb{E}[f_T] \\ &= N \delta_{0,T} (1 - (1 - R) \mathbb{P}(\tau < T)) \end{aligned}$$

Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} VM_t &= N \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\tau > T} + R \mathbb{1}_{\tau < T}) \delta_{t,T} | F_t] \\ &= N (\delta_{(t,T)} \mathbb{P}^*(\tau < T | F_t) + R \delta_{(t,T)} \mathbb{P}^*(\tau > T | F_t)) \\ &= N \delta_{(t,T)} (1 - (1 - R) \mathbb{P}^*(\tau < T | F_t)) \end{aligned}$$

3.3 Spread de crédit

Le spread de crédit ou l'écart de crédit d'une obligation corporate, est l'écart entre le taux de rendement promis de cette dernière et le taux de rendement sans risque (taux de rendement d'une obligation d'état ayant les mêmes caractéristiques par exemple).

$$s = r_{\max} - r$$

En pratique, en Solvabilité 2, les taux sans risque utilisés sont ceux fournis dans la courbe des taux EIOPA, qui est considérée comme la courbe des taux sans risque. En effet, en réalité, bien que la faillite d'un Etat soit très peu probable, cette probabilité reste non nulle.

Pour un ZC de maturité T et de nominal 1, le spread équivalent certain s_T est tel que la valeur de marché du ZC s'écrit de la façon suivante :

- Cas discret :

$$VM_0 = \frac{1}{(1 + r_T + s_T)^T}$$

Dans un souci de simplification, dans la suite du document on utilisera la formule équivalente au 1^{er} ordre :

$$VM_0 = \frac{1}{((1 + r_T)(1 + s_T))^T}$$

- Cas continu :

$$VM_0 = e^{-(r_T + s_T)T}$$

Avec :

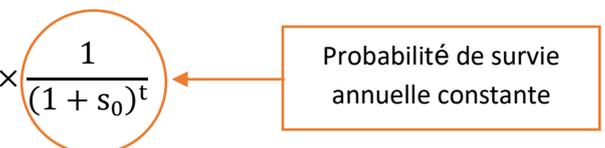
- r_T : le taux sans risque de maturité T
- s_T : le spread de crédit
- T : la maturité

4) Les grandes familles de modèles utilisés en assurance

3.1 Modèle déterministe

La modélisation déterministe du risque de crédit est couramment utilisée pour des projections risque neutre. Le défaut ou le changement de notation d'une obligation n'est pas modélisé en tant que tel.

La modélisation consiste à calibrer un spread sur la base de la valeur de marché initiale de chaque obligation (VM_0) et à le projeter constant avec :

$$VM_0 = \sum_{t=t_0}^M f_t \times \frac{1}{(1 + r(0, t))^t} \times \frac{1}{(1 + s_0)^t}$$


- s_0 : Le spread fixe par obligation calculé à l'instant $t=0$ à partir de la valeur de marché et reste constant durant toute la durée de la projection
- Un rating initial et fixe durant toute la durée de projection
- Un taux de défaut annuel de chaque obligation projetée en fonction du spread fixe pour toute la durée de projection : $1 - \frac{1}{(1+s_0)}$

Chaque année, des défauts moyens sont constatés égaux au produit du nominal et du taux de défaut induit.

3.2 Modèle à transition de rating

Le principe du modèle à transition tel que le JLT (Jarrow - Lando - Turnbull) est de simuler les changements d'état (les différents ratings ou le défaut) des obligations risquées à l'aide d'une matrice, appelée matrice de transition.

Pour le processus de migration de crédit, le modèle prend en entrée la matrice de transition historique publiée chaque année par les agences de notation.

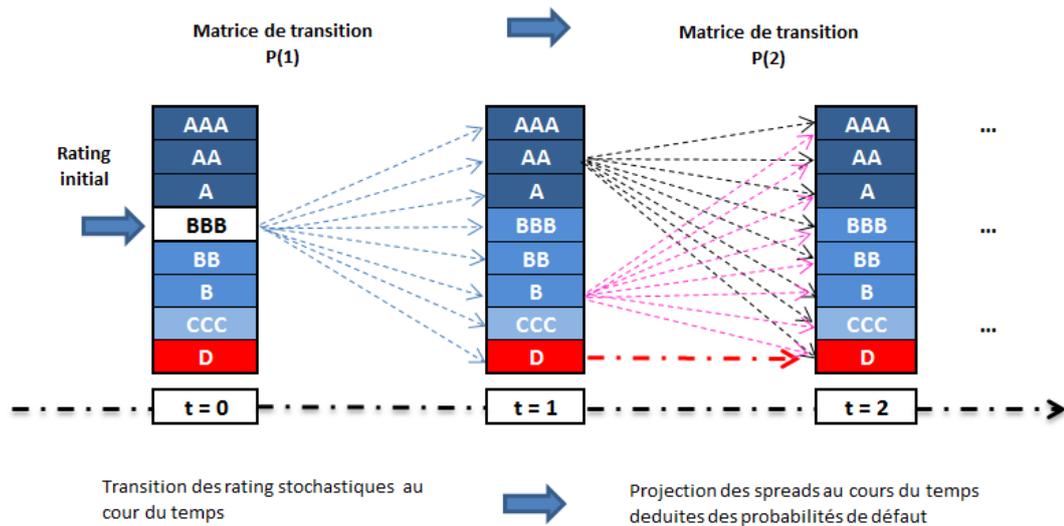


Figure 3 : Modélisation du changement de rating

3.3 Modèle à intensité de défaut

Le principe des modèles à intensité de défaut est de modéliser la probabilité de faire défaut de façon stochastique et d'ainsi introduire de la volatilité dans les spreads et par conséquent dans la valeur de marché des obligations.

En revanche, ces modèles ne permettent pas de simuler le changement d'état des obligations, et en particulier pas de réel défaut.

5) Le modèle JLT (Jarrow, Lando, Turnbull)

5.1 Le modèle JLT en temps discret

Dans cette section, nous considérons l'espace d'états fini $S = (1, \dots, K)$. S est l'ensemble des états de classes de rating possibles pour une obligation, où l'état K correspond au défaut et l'état 1 correspond à la notation AAA. La modélisation de migration et de défaut est faite par une chaîne de Markov homogène.

La matrice de transition historique Q

La matrice de transition historique $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq K}$, de dimension $K \times K$ est estimée sur des données historiques et contient des valeurs proches de 0 sur les éléments hors diagonale.

Cette matrice s'écrit sous la forme suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} & \cdots & q_{1,K} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} & \cdots & q_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{K-1,1} & q_{K-1,2} & q_{K-1,3} & \cdots & q_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Avec $q_{i,j} \geq 0, \forall i, j$ et pour tout $i : \sum_{j=1}^K q_{i,j} = 1$.

La probabilité $q_{i,j}$ est la probabilité de transition de l'état i à l'état j au cours d'une année.

On considère que l'état K (= l'état de défaut) est un état absorbant c'est-à-dire qu'une fois qu'on l'atteint, on y reste à coup sûr, on ne plus revenir dans un autre état.

Si une obligation fait défaut au cours d'une année, alors $q_{K,j} = 0$ pour tout $j = 1, \dots, K-1$ et $q_{K,K} = 1$.

Autrement dit, une fois qu'une obligation fait défaut, elle ne peut que rester en état de défaut.

La matrice de transition risque-neutre \tilde{Q}

Le marché complet et l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), sont des hypothèses fondamentales en univers risque neutre. Ces hypothèses permettent l'existence et l'unicité d'une probabilité risque-neutre avec laquelle nous pouvons transformer la probabilité historique.

Soit $\tilde{Q}_{t,t+1} = (\tilde{q}_{i,j}(t, t+1))_{i,j \in S}$ la matrice de transition risque-neutre du temps t au temps $t+1$.

$$\tilde{Q}_{t,t+1} \text{ s'écrit : } \tilde{Q}_{t,t+1} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{1,1}(t, t+1) & \tilde{q}_{1,2}(t, t+1) & \tilde{q}_{1,3}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1,K}(t, t+1) \\ \tilde{q}_{2,1}(t, t+1) & \tilde{q}_{2,2}(t, t+1) & \tilde{q}_{2,3}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2,K}(t, t+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{q}_{K-1,1}(t, t+1) & \tilde{q}_{K-1,2}(t, t+1) & \tilde{q}_{K-1,3}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{K-1,K}(t, t+1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Avec $\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \geq 0, \forall i, j$ et pour tout $i : \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = 1$.

Cependant, le processus engendré par cette nouvelle matrice de transition n'est pas forcément markovien. Ainsi, pour préserver la propriété de Markov, le modèle JLT fait l'hypothèse que la prime de risque permettant le passage de la matrice de transition historique Q à la matrice de transition risque-neutre \tilde{Q} , est un facteur multiplicatif qui ne dépend que de l'information au temps t :

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = \pi_i(t) q_{i,j}, \quad \text{pour tout } i, j \text{ avec } i \neq j$$

Où $\pi_i(t)$ est la prime de risque.

Nous pouvons donc l'écrire sous forme matricielle :

$$\tilde{Q}_{t,t+1} - I = \Pi(t)[Q - I]$$

Avec : $\Pi(t) = \text{diag}(\pi_1(t), \dots, \pi_{K-1}(t), 1)$ et I la matrice identité de taille $K \times K$.

Dans beaucoup d'approches, comme dans le cas de notre modélisation, un seul processus π est modélisé pour toutes les notations.

Probabilité de défaut et spread de crédit

Notons X le processus de la notation.

$\tau_D = \inf(s \geq t : X_s = K)$ définit le premier temps de défaut.

La probabilité que le défaut ne survienne pas avant T en partant d'un état i au temps t sera donc :

$$\tilde{Q}_t^i(\tau_D > T) = \sum_{j \neq K} \tilde{q}_{i,j}(t, T) = 1 - \tilde{q}_{i,K}(t, T)$$

Sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , le modèle JLT fait l'hypothèse que le taux d'intérêt et le processus de défaut sont indépendants.

En supposant que le recouvrement n'aura lieu qu'à l'échéance de l'obligation, le prix d'une obligation zéro-coupon risquée est :

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} (\mathbb{1}_{\tau_D > T} + \delta \mathbb{1}_{\tau_D \leq T}) \right] \\ &= P^0(t, T) \left(\delta + (1 - \delta) \tilde{Q}_t^i(\tau_D > T) \right) \end{aligned}$$

Avec :

- $r(s)$: le taux sans risque
- $\tau_D = \inf(s \geq t : X_s = K)$: définit le premier temps d'état de défaut, avec X le processus de notation
- δ : le taux de recouvrement
- $P^0(t, T)$: le prix d'une obligation zéro-coupon sans risque

Comme défini précédemment, le spread représente l'écart entre le taux sans risque et le taux risqué.

On distingue dans la pratique différentes notions de spread.

La notion de spread qui est utilisée par le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull est la notion de spread forward.

Le taux forward sans risque se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$f(t, T, T + 1) = -\ln \left(\frac{P^0(t, T + 1)}{P^0(t, T)} \right)$$

Ainsi donc, à l'aide de de l'équation du prix d'une obligation zéro-coupon risquée, on obtient que :

$$\tilde{f}(t, T, T + 1) = f(t, T, T + 1) + \mathbb{1}_{\tau_D > t} \ln \left(\frac{\delta + (1 - \delta) \mathbb{Q}[\tau_D > T]}{\delta + (1 - \delta) \mathbb{Q}[\tau_D > T + 1]} \right)$$

D'où la formule suivante du spread forward :

$$s^f(t, T) = \ln \left(\frac{\delta + (1 - \delta) \mathbb{Q}[\tau_D > T]}{\delta + (1 - \delta) \mathbb{Q}[\tau_D > T + 1]} \right)$$

Après avoir donc présenté le modèle JLT en temps discret, on va maintenant le présenter en temps continu.

5.2 Le modèle JLT en temps continu

La modélisation en temps continu présente plusieurs avantages par rapport à celle en temps discret, notamment l'avantage d'avoir des estimations plus réalistes pour la probabilité des événements rares. La modélisation du processus de migration des ratings est faite par une chaîne de Markov homogène en temps continu. La matrice génératrice de cette chaîne, de dimension $K \times K$ s'écrit :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \cdots & \lambda_{1,K} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \cdots & \lambda_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \lambda_{K-1,3} & \cdots & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Avec : $\lambda_{i,j} \geq 0, \forall i, j, i \neq j$, et pour tout $i = 1, \dots, K$: $\lambda_{i,i} = -\sum_{j=1, j \neq i}^K \lambda_{i,j}$.

Λ est un générateur d'une chaîne de Markov continue et $e^{t\Lambda}$ est une matrice de transition pour tout t .

Les termes $\lambda_{i,j}$ représentent l'intensité de passer de l'état i à l'état j .

Définition

L'intensité du défaut, notée $\lambda(t)$, correspond au taux de défaut instantané. Elle est définie à la date t de sorte que le produit $\lambda(t)\Delta t$ soit la probabilité de défaut dans l'intervalle compris entre t et $t + \Delta t$, conditionnelle à l'absence de défaut avant t .

Si on note $P(t)$ la probabilité de survie cumulée jusqu'à la date t , c'est-à-dire la probabilité que le défaut ne survienne pas avant la date t , alors :

$$P(t + \Delta t) - P(t) = -P(t)\lambda(t)\Delta t$$

En passant à la limite, on peut écrire :

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)\lambda(t)$$

Alors on déduit la probabilité de survie : $P(t) = e^{(-\int_0^t \lambda(s) ds)}$

Ainsi, $Q(t)$ la probabilité défaut jusqu'à la date t , s'écrit :

$$\begin{aligned} Q(t) &= 1 - e^{(-\int_0^t \lambda(s) ds)} \\ &= 1 - e^{\bar{\lambda}(t)t} \end{aligned}$$

Avec : $\bar{\lambda}(t)$ l'intensité de défaut moyenne entre 0 et t .

Dans notre cas, la matrice de transition historique initiale est donnée, ainsi nous cherchons à obtenir le générateur à partir de cette matrice.

C'est la prime de risque qui modifie la matrice de transition historique afin d'obtenir la matrice de transition risque neutre. Dans notre modélisation, les modifications sont effectuées sur les valeurs propres.

Au départ, le modèle JLT suppose que la matrice Λ est en monde-réel et diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice de passage Σ formé des vecteurs propres de Λ et une matrice diagonale D telles que :

$$\Lambda = \Sigma \times D \times \Sigma^{-1}$$

Ainsi, la matrice génératrice en univers risque-neutre est :

$$\tilde{\Lambda} = \Sigma \times \Pi(t) \times D \times \Sigma^{-1}$$

Avec : $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_K)$, où $(d_j)_{j \in \{1, \dots, K\}}$ sont les valeurs propres

5.3 Modélisation de la prime de risque – Extension de Dubrana

La prime de risque est modélisée comme un facteur multiplicatif sur les valeurs propres du générateur historique Λ .

Ainsi comme vu précédemment :

$$\tilde{\Lambda} = \Sigma \times \Pi(t) \times D \times \Sigma^{-1}$$

Avec D une matrice diagonale contenant les valeurs propres :

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_K(t) \end{bmatrix}$$

Et $\Pi(t)$,

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} \pi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi(t) \end{bmatrix}$$

Le modèle JLT historique considère que la prime de risque $\pi(t)$ est déterministe. Une extension du modèle JLT, proposée par Dubrana, suppose que la prime de risque $\pi(t)$ est stochastique et est modélisée par un processus de CIR (Cox, Ingersoll et Ross).

L'équation de la prime de risque est la suivante :

$$\begin{cases} d\pi(t) = \alpha(\mu - \pi(t))dt + \sigma\sqrt{\pi(t)}dW_t \\ \pi(0) = \pi_0 \geq 0 \end{cases}$$

Sous la contrainte : $\sigma^2 < 2\mu\alpha$,

Et avec :

- $\pi(t)$: la prime de risque.
- α : le paramètre de la vitesse du retour à la moyenne.
- μ : le paramètre de la moyenne à long terme.
- σ : le paramètre de volatilité.

Le processus CIR présente plusieurs avantages. Il garantit la positivité du processus, ainsi que la propriété du retour à la moyenne, ce qui est adéquat avec la réalité économique. Aussi, à long terme, il garantit le retour à la moyenne historique du spread.

Enfin, le processus CIR permet de calculer explicitement le prix des obligations risquées.

Afin d'obtenir l'expression de la probabilité de défaut, nous définissons l'équation de la matrice de transition :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t, T) &= \mathbb{E}_t \left[e^{\int_t^T \tilde{\Lambda}(s) ds} \right] \\ &= \Sigma \mathbb{E}_t \left[e^{\int_t^T \Pi(s) ds} \right] \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

D'où, l'expression de la probabilité de défaut correspondant aux $K - 1$ premiers éléments de la dernière colonne de la matrice $\tilde{Q}(t, T)$:

$$\tilde{q}_{i,K}(t, T) | \pi(t) = \sum_{j=1}^{K-1} \epsilon_{i,j} \tilde{\epsilon}_{j,K} \left(\mathbb{E}_t \left[e^{\int_t^T \pi(s) ds} \right] \right)$$

Avec :

- d_j : la $j^{\text{ème}}$ valeur propre.
- $\epsilon_{i,j}$: l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice des vecteurs propres Σ .
- $\tilde{\epsilon}_{j,K}$: l'élément de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $K^{\text{ème}}$ colonne de la matrice inverse des vecteurs propres Σ^{-1} .

Le processus CIR nous permet d'exprimer $\mathbb{E}_t \left[e^{d_j \int_t^T \pi(s) ds} \right]$ explicitement en fonction des paramètres, comme cette expression le montre :

$$\mathbb{E}_t \left[e^{d_j \int_t^T \pi(s) ds} \right] = e^{(A_j(t,T) - B_j(t,T)\pi(t))}$$

Avec :

- $A_j(t, T) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2v_j e^{\frac{1}{2}(\alpha+v_j)(T-t)}}{(\alpha+v_j)(e^{v_j(T-t)} - 1) + 2v_j} \right)$
- $B_j(t, T) = -\frac{2d_j(e^{v_j(T-t)} - 1)}{(\alpha+v_j)(e^{v_j(T-t)} - 1) + 2v_j}$
- $v_j = \sqrt{\alpha^2 - 2d_j\sigma^2}$

Ainsi, la probabilité de défaut en fonction des paramètres du modèle s'exprime de la façon suivante :

$$\tilde{q}_{i,K}(t, T) | \pi(t) = \sum_{j=1}^{K-1} \epsilon_{i,j} \tilde{\epsilon}_{j,K} \left(e^{(A_j(t,T) - B_j(t,T)\pi(t))} \right)$$

Avec : i le numéro du rating de départ de l'obligation.

A noter, dans le cadre de ce mémoire, ce sera l'extension de Dubrana du modèle JLT qui sera étudiée. Par abus de langage, lorsque le modèle JLT sera mentionné, cela fait référence au modèle JLT avec l'extension de Dubrana pour la modélisation du processus de prime de risque.

5.4 Calibrage des paramètres

Pour le calibrage du modèle JLT, il est nécessaire de calibrer les paramètres du processus CIR α , μ et σ , ainsi que la prime de risque initiale π_0 .

Concernant les paramètres du processus α , μ et σ , les paramètres par défaut fournis par les agences de notation ont été retenus. En effet, comme nous le verrons par la suite, l'impact de ces paramètres sur la modélisation stochastique du risque de crédit est très marginal. C'est pourquoi nous avons donc choisi de ne pas recalibrer ces paramètres et de retenir ceux fournis par Moody's Analytics.

Paramètre		Valeur
Vitesse de retour à la moyenne	α	0,10 %
Moyenne à long terme	μ	5 %
Volatilité	σ	0,75 %

Tableau 1 : Paramètres utilisés pour le modèle JLT

Le calibrage de la prime de risque initiale π_0 sera réalisé sur chaque obligation en portefeuille et lui sera donc spécifique. C'est le calibrage de ce paramètre qui permettra d'assurer la risque-neutralisation de chaque obligation comme cela sera décrit au paragraphe suivant

5.5 Risque-neutralisation des obligations par le calibrage de la prime de risque initiale du processus CIR

Du fait que l'on dispose d'une forme explicite des probabilités de passage en fonction des paramètres de modèle α, μ, σ qui sont communs à toutes les obligations, le principe de cette méthode pour calibrer la prime de risque initiale π_0 est de minimiser l'écart entre le prix théorique de chaque obligation en portefeuille calculée par le modèle JLT et la valeur de marché initiale VM_0 de celle-ci :

$$VM_0 = P^{\text{theorique}}(0, T)$$

$$VM_0 = \sum_{i=0}^{[T]} \tau \times N_i \times P(0, i) + N_T \times P(0, T)$$

Avec

- T la durée entre t et la date d'échéance de l'obligation
- N_i , le nominal au temps i (en pratique, il est constant car il n'y a pas d'obligation indexée sur l'inflation considérée dans cette étude)
- τ , le taux de coupon de l'obligation
- $P(0, i)$: le prix zéro coupon risqué en date i défini en partie II - 5).2 lors de la description du modèle JLT.

$$P(0, i) = P^0(0, i) \times (\delta + (1 - \delta)\tilde{q}_{\text{rat}, K}(0, i) | \pi_0)$$

$$P(0, i) = P^0(0, i) \times \left(\delta + (1 - \delta) \times \sum_{j=1}^{K-1} \epsilon_{\text{rat}, j} \tilde{\epsilon}_{j, K} \left(e^{(A_j(0, i) - B_j(0, i)\pi_0)} \right) \right)$$

Où rat est le rating de départ de l'obligation

Ainsi, π_0 est obtenu directement en résolvant numériquement l'équation suivante pour chaque obligation :

$$VM_0 = \sum_{i=0}^{[T]} \tau \times N_i \times P^0(0, i) \times \left(\delta + (1 - \delta) \times \sum_{j=1}^{K-1} \epsilon_{\text{rat},j} \tilde{\epsilon}_{j,K} \left(e^{(A_j(0,i) - B_j(0,i)\pi_0)} \right) \right) \\ + N_T \times P^0(0, T) \times \left(\delta + (1 - \delta) \times \sum_{j=1}^{K-1} \epsilon_{\text{rat},j} \tilde{\epsilon}_{j,K} \left(e^{(A_j(0,T) - B_j(0,T)\pi_0)} \right) \right)$$

Ce calibrage permet de garantir le caractère risque-neutre de chacune des obligations en portefeuille.

A noter, ici on cherche à calibrer le π_0 pour chacune des obligations du portefeuille. En l'absence de solution à l'équation précédente pour une obligation donnée, la modélisation du risque de crédit de cette dernière sera déterministe.

5.6 Implémentation du JLT

Parallèlement à l'intégration du JLT dans le moteur ALM de Forsides programmé en C#, le modèle JLT a également été implémenté sur une maquette EXCEL – VBA pour mieux appréhender son fonctionnement, visualiser directement l'impact de changement de paramètres sur la valorisation moyenne des obligations dans le temps et également pour valider par la suite le développement dans le modèle ALM. A noter que le fonctionnement du modèle ALM sera décrit dans son ensemble plus en détail dans la section suivante (III), l'objet de cette partie étant de décrire de façon spécifique le principe d'implémentation du JLT et les étapes qui ont été nécessaires.

Maquette Excel

L'implémentation du modèle JLT sur une maquette Excel se fait en quatre étapes :

- Etape 1

D'abord, nous partons de la matrice de transition fournie par l'agence de notation Standard & Poor's :

Rating initial	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	87,06%	0,48%	0,03%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
AA	9,06%	87,23%	1,60%	0,09%	0,03%	0,02%	0,00%	0,00%
A	0,53%	7,77%	88,58%	3,25%	0,11%	0,07%	0,10%	0,00%
BBB	0,05%	0,47%	5,00%	86,49%	4,55%	0,15%	0,17%	0,00%
BB	0,11%	0,05%	0,26%	3,56%	77,82%	4,54%	0,55%	0,00%
B	3,14%	3,95%	4,46%	6,35%	16,31%	86,93%	27,78%	0,00%
CCC	0,05%	0,02%	0,02%	0,10%	0,55%	4,96%	43,11%	0,00%
D	0,00%	0,03%	0,05%	0,16%	0,62%	3,33%	28,29%	100,00%

Tableau 2 : Matrice de transition historique de Standard & Poor's

Cette matrice fournit les probabilités historiques de passage (transition) des ratings des obligations corporates à horizon d'un an.

A noter que les probabilités de transition vers la notation B sont particulièrement élevées car cet état regroupe en fait les obligations notées B mais également les obligations non notées. En effet, comme

en Solvabilité 2, le choc associé aux non notées est équivalent à celui des obligations notées B et que le modèle ALM ne gère pas de classe non notée, la classe des non notées a été regroupée avec celle des B.

Ensuite, sont calculées :

- La matrice des vecteurs propres Σ :

Rating initial	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0,00	-0,01	-0,01	-0,01	-0,03	0,11	-0,99	0,00
AA	0,04	0,01	0,10	-0,16	0,94	-0,23	-0,20	0,00
A	0,59	0,51	0,45	0,36	0,26	0,19	0,10	0,00
BBB	-1,23	-0,15	0,06	0,06	0,00	-0,01	-0,01	0,00
BB	3,05	-0,59	-0,03	0,23	0,04	-0,04	-0,03	0,00
B	-2,09	1,15	-0,59	0,44	0,13	-0,08	-0,06	0,00
CCC	3,80	2,10	1,16	0,33	-0,16	-0,24	-0,14	0,00
D	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tableau 3 : Matrice des vecteurs propres

- L'inverse de la matrice des vecteurs propres Σ^{-1} :

Rating initial	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0,00	0,00	0,01	-0,42	0,12	-0,02	0,01	0,00
AA	0,00	-0,01	0,07	-1,07	-0,45	0,23	0,13	0,00
A	0,00	0,06	0,31	1,70	-0,20	-0,62	0,33	0,00
BBB	0,01	-0,29	0,51	2,52	1,30	0,66	0,06	0,00
BB	-0,06	0,82	0,68	-0,70	-0,05	0,06	-0,27	0,00
B	0,58	-0,66	2,33	-3,59	-1,07	-0,42	-0,89	0,00
CCC	-0,94	-0,09	0,22	-0,40	-0,12	-0,05	-0,09	0,00
D	0,41	0,16	-4,13	1,96	0,47	0,15	0,72	1,00

Tableau 4 : Matrice inverse des vecteurs propres

- La matrice diagonale des valeurs propres D :

Rating initial	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,91	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AA	0,00	-0,32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A	0,00	0,00	-0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BBB	0,00	0,00	0,00	-0,13	0,00	0,00	0,00	0,00
BB	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,16	0,00	0,00	0,00
B	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,19	0,00	0,00
CCC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,08	0,00
D	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau 5 : Matrice des valeurs propres

- Etape 2

La prime de risque initiale π_0 est calibrée. Puis le processus de la prime de risque (processus CIR) π_t est simulé et permettra de simuler des matrices de transition à chaque pas de temps.

- Etape 3

Les probabilités de défaut associées à chaque rating sont simulées pour chaque année jusqu'à maturité.

- Etape 4

Enfin, le prix de l'obligation risquée est calculé à chaque pas de temps dans chaque simulation.

Intégration dans le modèle ALM

L'outil ALM interne à Forsides est développé en C# (C sharp), qui est un langage de programmation orienté objet (POO). La POO est un modèle de langage de programmation qui s'articule autour d'objets. Dans le code C#, ces objets sont définis par des classes, qui à leur tour contiennent des constructeurs et un certain nombre de méthodes afin d'assurer l'interaction avec les autres classes. Le schéma dans la figure ci-dessous, permet de visualiser l'organisation hiérarchique (en termes d'héritages) des classes modélisant les obligations et cela avant l'implémentation du modèle de crédit JLT :

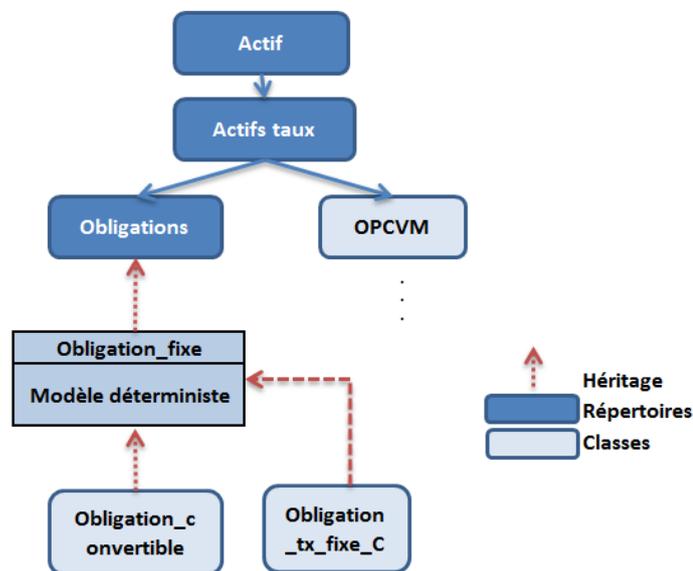


Figure 4 : Schéma d'organisation des classes avant implémentation du modèle JLT

Dans notre modélisation, afin d'inclure le modèle de crédit JLT dans le moteur ALM, nous avons ajouté une classe intermédiaire ModelerC qui va assurer l'interaction entre les deux classes de modèle de crédit et la classe obligation. Cette façon de faire nous permet de mieux organiser le code et surtout de garder les deux modèles de crédit.

Le schéma dans la figure ci-dessous, permet de visualiser l'organisation hiérarchique des classes modélisant les obligations après l'implémentation du modèle de crédit JLT :

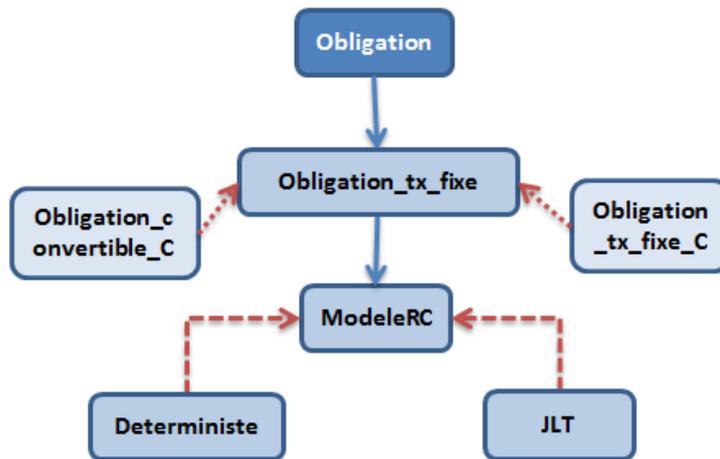


Figure 5 : Schéma d'organisation des classes après implémentation du modèle JLT

Tests de validation

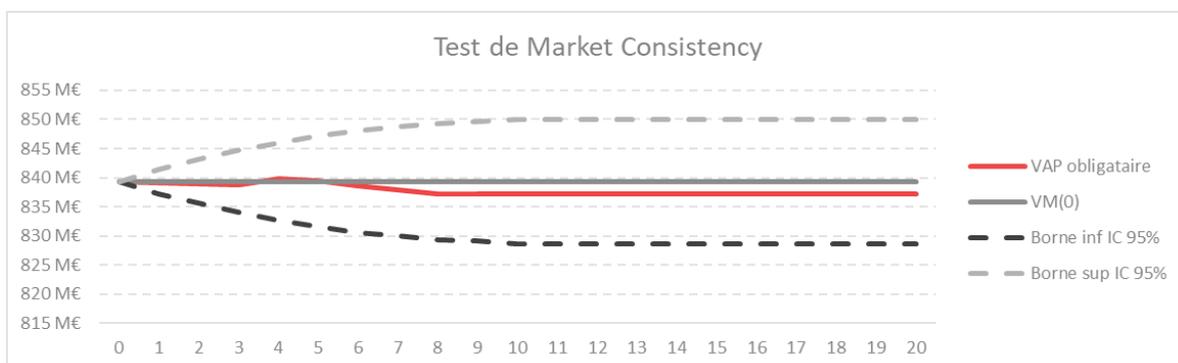
L'un des tests réalisés pour valider l'implémentation du modèle est le test de Market Consistency. Il a consisté à vérifier que pour chaque pas de temps T, la somme des flux actualisés générés par les obligations (coupons, remboursements, recouvrements et ventes obligataires) jusqu'à T et de la valeur de marché obligation actualisée en T redonne bien en moyenne la valeur de marché initiale. Autrement dit, en notant $\widehat{VM}_0(\text{obligations})$ un estimateur de la valeur de marché initiale des obligations et NB_simus le nombre de simulations :

$$\forall T > 0, \quad \widehat{VM}_0(\text{obligations}) = \frac{1}{\text{Nb_simus}} \sum_{i=1}^{\text{Nb_simus}} \sum_{t=0}^T (\text{Coupons}_i(t) + \text{Remboursements}_i(t) + \text{Recouvrements}_i(t) + \text{Cession obligataires}_i(t) + \text{VM obligations}(t))$$

On cherche à vérifier que $\widehat{VM}_0(\text{obligations})$ estime bien $VM_0(\text{obligations})$.

Pour réaliser ce test, il a fallu désactiver les achats obligataires et sortir les distributions de chacun des composants de l'estimateur.

Ci-dessous les résultats du test :



Le test a pu être validé avec une confiance à 95%. A noter qu'après 10 ans, il n'y a plus d'obligations en stock.

Toutefois, il reste à valider l'implémentation des achats obligataires. Pour cela, le test d'écart VAP/VM (test de fuite) sur le modèle a été réalisé après intégration d'achats obligataires. Ce test consiste à vérifier qu'en moyenne l'ensemble des flux projetés dans le modèle correspond en moyenne à la richesse de départ, à savoir la valeur de marché initiale des actifs. Autrement dit, le modèle ne perd, ni n'ajoute de flux ne provenant pas des actifs de départ.

En l'occurrence, le test de fuite montre qu'en moyenne, la VAP s'éloigne de la VM initiale de seulement 0,09%, ce qui est tout à fait acceptable (notamment au regard du repère de 0,2% sur le BE donné par l'ACPR dans une [notice sur les bonnes pratiques concernant les GSE](#)).

Spécificité de l'implémentation retenue

L'approche retenue dans cette étude (dite « approche par obligation » dans la suite de ce paragraphe) apparaît différente de celle a priori plus répandue au vu de la littérature actuarielle sur l'implémentation du modèle JLT, consistant à gérer les simulations de trajectoires de transition d'état (changement de rating ou défaut) par classe d'obligations dans le GSE (dite « approche proportionnelle » dans la suite de ce paragraphe) plutôt que de simuler obligation par obligation directement dans le modèle ALM comme cela a été réalisé dans cette étude.

Par exemple, dans [ce mémoire](#) qui utilise l'approche proportionnelle, il mentionne en page 90 que cette approche « consiste à considérer qu'une obligation ne migre pas dans un rating particulier mais dans toutes les notations à la fois (défaut compris) » et que « cette approche se justifie aussi par le fait qu'elle soit tout à fait adaptée à l'utilisation d'un modèle point obligataire agrégé permettant de réduire le temps de calcul sans perte d'informations excessive ».

L'un des avantages de « l'approche proportionnelle » par rapport à l'approche « par obligation » est qu'elle permet de tenir compte directement d'un « effet marché » sur les différents chocs simulés dans les scénarios, puisqu'une trajectoire défavorable pour une classe d'obligation va affecter en même temps toutes les obligations de cette classe.

Cependant, l'approche « par obligation » présente au moins deux avantages qui ont été décisifs dans le choix de retenir cette approche dans ce mémoire :

- Par rapport au simple changement de rating, ce qui a un réel impact direct et matériel sur les produits financiers une année donnée est l'occurrence de défauts. Or, en n'appliquant pour chaque obligation qu'une proportion de défaut, l'approche proportionnelle risque de moins capter ce qui peut être de nature à affecter le plus significativement les produits financiers et donc la participation aux bénéfices, le résultat de l'année et le Best Estimate.
- L'approche « par obligation » ayant été moins traitée dans la littérature actuarielle, il pourrait s'avérer intéressant d'en étudier les impacts

III. Projections ALM et JLT

Comme évoqué dans le paragraphe précédent, l'implémentation du JLT se fait dans le modèle de projection ALM car il simule de façon stochastique les événements de crédit obligation par obligation. C'est pourquoi il est nécessaire d'explicitier tout d'abord en quoi consiste un modèle ALM puis son fonctionnement dans le cadre de notre étude. C'est objet de cette section III.

1) Principes généraux

L'Asset and Liability Management (ALM) ou gestion actif-passif correspond au pilotage conjoint des actifs et des passifs d'une institution financière. Parmi les différents objectifs d'une modélisation ALM, voici les principaux :

- Simuler les équilibres du régime d'assurance dans une optique moyen/long terme : projection du bilan, compte de résultat en prenant en compte les interactions entre l'actif et le passif, calcul d'indicateur de risque ;
- Mesurer et maîtriser les risques en fonction d'un cadre donné : vision Solvabilité II, définition d'un cadre de risque dans la limite d'une appétence définie ;
- Définition d'une allocation stratégique d'actifs optimale : définition des contraintes de rendement, définition des classes d'actifs cibles ;
- Tests de rentabilité technique : permet de définir des hypothèses techniques et des chocs, et d'en mesurer l'impact sur la rentabilité d'un portefeuille.

Dans la suite, la méthodologie de projection ALM décrite correspond à celle implémentée dans SALLTO, l'outil interne de Forsides. Après avoir décrit la projection des différentes classes d'actif en détail, la projection des model point de passif et autres postes du bilan seront brièvement décrits. Ensuite, la modélisation de l'interaction actif-passif, des actions de gestion de l'assureur seront explicités pour terminer sur un focus sur les problématiques rencontrées lors de l'intégration du modèle de risque de crédit stochastique dans le modèle.

2) L'actif

Les actifs non amortissables, actions/OPC action et monétaire, sont regroupés par classes (ou poches), chacune de ces classes évoluant comme un actif unique, infiniment divisible.

Les obligations à taux fixe ou indexées sont en revanche modélisées ligne à ligne, de sorte que chaque obligation évolue selon ses caractéristiques propres avec un impact sur la réserve de capitalisation et sur le compte de régularisation, contenant les stocks de coupon couru et de surcote / décote. L'amortissement de surcote/décote est étalé selon la méthode actuarielle. Dans le bilan initial, le spread de chaque obligation est calculé à partir de la courbe des taux sans risque et de sa valeur de marché de sorte à respecter la contrainte de martingalité de l'obligation.

2.1 La projection des obligations

Notation : Dans la suite **RC** fait référence à « modèle de Risque de Crédit ».

Dans cette section et plus généralement dans ce mémoire, seul le cas des obligations classiques à taux fixe est traité. Par défaut, dans ce mémoire, le terme obligation se fera donc référence à une obligation à taux fixe.

A chaque date de projection t , pour **chaque obligation**, et ce jusqu'à sa maturité, on recalcule les éléments suivants :

La maturité résiduelle T :

T = durée entre t et la date d'échéance de l'obligation

Puis pour $t \leq T$:

Le nominal N_t

⇒ **RC Déterministe**

$$N_t = N_{t-1} \times (1 - d)$$

Où

d : taux de défaut défini constant sur toute la durée de projection

d est tel que :

$$1 - d = \frac{1}{1 + s}$$

Où s , le spread de l'obligation à $t=0$ est déterminé à partir de sa valeur de marché initiale et de ses caractéristiques (cf. ci-dessous)

⇒ **RC Stochastique**

$$N_t = \begin{cases} 0, & \text{en cas de défaut dans le scénario} \\ N_{t-1}, & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, le nominal est constant dans le modèle stochastique utilisée ici notamment car il n'y a pas d'obligation indexée sur l'inflation considérée dans cette étude)

La valeur de marché plein coupon en t

⇒ **RC Déterministe**

$$VM_t = \sum_{i=t}^{[T]} \frac{\tau \times N_i}{((1 + R(0, i))(1 + s))^i} + \frac{N_T}{((1 + R(0, T))(1 + s))^T}$$

Avec

- $R(0, t)$: le taux zéro coupon sans risque de maturité t
- s : le spread de l'obligation à $t=0$ est déterminé à partir de sa valeur de marché initiale et de ses caractéristiques. Il est ensuite projeté constant.

⇒ **RC Stochastique**

$$VM_t = \sum_{i=t}^{[T]} \tau \times N_i \times P(0, i) + N_T \times P(0, T)$$

Avec

- $P(0, i)$: le prix zéro coupon risqué en date i défini en partie II - 5) lors de la description du modèle JLT. A noter que le recouvrement ne concerne que le remboursement et pas les coupons. Cela signifie que pour les $P(0, i)$ avec $i < T$, le taux de recouvrement δ est nul et est non-nul seulement pour $P(0, T)$.

La valeur d'achat VA_t

⇒ **RC Déterministe**

$$VA_t = VA_{t-1} \times (1 - d)$$

Où

d : taux de défaut défini constant sur toute la durée de projection

⇒ **RC Stochastique**

$$VA_t = \begin{cases} 0, & \text{en cas de défaut dans le scénario} \\ VA_{t-1}, & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur nette comptable plein coupon en t

⇒ **RC Déterministe / Stochastique**

$$VNC_t = \sum_{i=t}^{[T]} \frac{\tau \times N_i}{(1 + a)^i} + \frac{N_T}{(1 + a)^T}$$

Où

- τ : le taux de coupon de l'obligation
- a : le taux actuariel à l'achat
- N : le nominal de l'obligation

Le coupon détaché

⇒ **RC Déterministe**

$$\text{Coupon détaché}_t = \tau \times N_t \times (1 + R(t - 1, t))^{t - \text{date tombée de coupon}}$$

Où

N_t est le nominal de l'obligation à la date de tombée de coupon défini plus haut, calculé en situation de RC déterministe.

On peut observer que l'on tient compte, au niveau du nominal, des défauts intervenus jusqu'à la date de tombée du coupon

⇒ **RC Stochastique**

$$\text{Coupon détaché}_t = \tau \times N_t \times (1 + R(t - 1, t))^{t - \text{date tombée de coupon}}$$

Où

N_t est le nominal de l'obligation à la date de tombée de coupon défini plus haut, calculé en situation de RC Stochastique.

Si le coupon tombe avant t , on fait en effet l'hypothèse que celui-ci est remplacé au monétaire jusqu'à t .

Le remboursement de l'obligation

⇒ **RC Déterministe**

$$\text{Remboursement} = N_T \times (1 + R([T] - 1, [T]))^{T - [T]}$$

⇒ **RC Stochastique**

$$\text{Remboursement} = \begin{cases} \delta \times N_T \times (1 + R([T] - 1, [T]))^{T - [T]}, & \text{en cas de défaut dans le scénario} \\ N_T \times (1 + R([T] - 1, [T]))^{T - [T]} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le stock de coupon couru en t

$$\text{Coupon couru}_t = \tau \times N_t \times (t - \text{date de tombée du coupon})$$

Où

N_t correspond au nominal et est défini précédemment en fonction de la modélisation du risque de crédit : déterministe ou stochastique.

Le stock de surcote-décote déjà amortie en t

$$\text{stock de surcote décote}_t = \begin{cases} \text{Remboursement} - VA_t; & \text{s'il y a eu remboursement pendant l'année} \\ \text{VNC}_t - \text{coupon couru}_t - VA_t; & \text{sinon} \end{cases}$$

Où les différentes variables ont été explicitées précédemment

L'amortissement de surcote/décote au titre de l'année écoulée

Amortissement du surcote/décote_t = Stock de surcote/décote_t – stock de surcote/décote_{t-1}

2.2 Actions, immobilier, fonds alternatifs, private equity

2.2.1 Modélisation des indices

Les poches actions, immobilier, fonds alternatifs et private equity sont modélisées de manière identique. Pour cela, les informations suivantes concernant l'actif considéré sont réactualisées chaque année :

- La valeur de marché VM,
- La valeur comptable VC
- Le taux de dividende ou de loyer (supposé constant tout au long de la projection).

A noter qu'en adéquation avec la classification Solvabilité 2, les actions sont séparées en trois groupes :

- les actions globales,
- les actions participatives,
- les actions autres

2.2.2 Evaluation des valeurs des poches chaque année

A chaque date de projection t, on calcule pour chaque indice par exemple les actions :

- $VC_{Action}(t) = VC_{Action}(t - 1)$
- $VM_{Action}(t) = VM_{Action}(t - 1) \times (1 + Tx \text{ revalo action}) \times (1 - Tx \text{ Dividendes})$
- $Dividendes_{Action}(t) = VM_{Action}(t - 1) \times (1 + Tx \text{ revalo action}) \times Tx \text{ Dividendes}$

Pour l'immobilier en particulier :

- $VC_{Immo}(t) = VC_{Immo}(t - 1)$
- $VM_{Immo}(t) = VM_{Immo}(t - 1) \times (1 + Tx \text{ revalo Immo}) \times (1 - Tx \text{ Loyer})$
- $Loyers_{Immo}(t) = VM_{Immo}(t - 1) \times (1 + Tx \text{ revalo Immo}) \times Tx \text{ Loyer}$

2.3 Monétaire

Pour modéliser le monétaire, sa valeur de marché et sa valeur comptable sont réactualisées chaque année de la façon suivante :

- $VC_{Monétaire}(t) = VC_{Monétaire}(t - 1)$
- Si $VM_{Monétaire}(t - 1) > 0$
 - $VM_{Monétaire}(t) = VM_{Monétaire}(t - 1)$
 - $Dividendes_{Monétaire}(t) = Tx \text{ revalo Monétaire} \times VM_{Monétaire}(t - 1)$

- Si $VM_{\text{Monétaire}}(t - 1) < 0$
 - $VM_{\text{Monétaire}}(t) = VM_{\text{Monétaire}}(t - 1)$ et on calcule l'intérêt à payer
 - $\text{Intérêts}(t) = \text{T}x \text{ revalo Monétaire} \times VM_{\text{Monétaire}}(t - 1)$

3) Le passif et autres postes du bilan

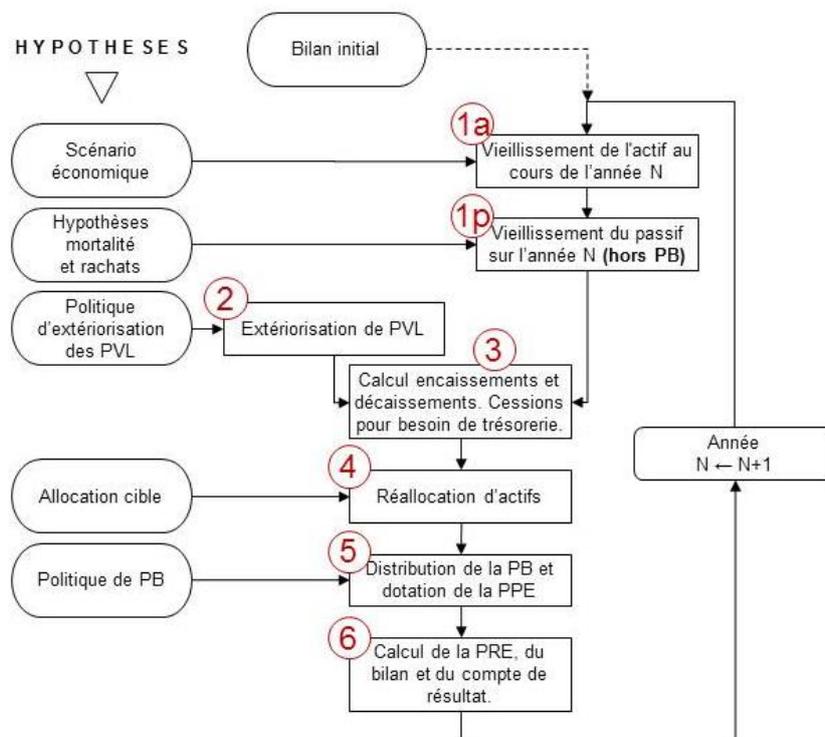
Pour simuler l'évolution des provisions mathématiques, les contrats ayant des caractéristiques comparables (type de contrat, taux technique, taux de chargement) sont regroupés au travers de model points qui permettent de calculer l'ensemble des flux survenant tout au long de la vie des contrats ainsi que la PB qui leur est attribuée.

Au niveau des fonds propres, l'outil simule uniquement l'évolution de la réserve de capitalisation (RK). Hors RK, le niveau des fonds propres reste constant car l'outil est paramétré pour externaliser l'intégralité des résultats et pour compenser les pertes éventuelles par un apport de fond propres.

Les autres postes de passif, à savoir les autres dettes, constituent un bas de bilan passif qui n'est pas projeté. Leurs valeurs Solvabilité 2 sont supposées égales à leurs valeurs comptables respectives.

4) Les interactions actif-passif

L'ordre des principales étapes du moteur actif-passif permettant de projeter d'une année à la suivante la vie de la compagnie, les flux entrants et sortants et la constitution de ses comptes est synthétisé dans le schéma suivant :



4.1 Politique d'allocation cible d'actif

Plusieurs stratégies d'allocation sont possibles dans l'outil ALM : allocation dynamique, allocation cible, allocation marginale... Dans le cadre de ce mémoire, nous exploiterons la méthodologie dite « d'allocation marginale ». Cela consiste à réinvestir, à chaque pas de temps, l'excédent de trésorerie dans les différents types d'actifs selon un paramétrage défini en input.

4.2 Politique d'achat/vente

Cession d'actifs

Pour calculer le solde de trésorerie, la différence entre les encaissements financiers et les décaissements de l'assureur est calculée.

Si le solde est négatif, l'assureur doit dégager des liquidités en vendant des actifs :

- D'abord du monétaire si cela suffit,
- Si cela ne suffit pas, les autres classes d'actifs hors immobilier sont vendues avec la même proportion de sorte à combler le solde négatif si cela est possible,
- Si cela ne suffit pas, l'immobilier sera vendu de sorte à combler le solde négatif si cela est possible
- Enfin si cela reste insuffisant, un emprunt au taux monétaire est effectué.

Si l'assureur a procédé à des cessions d'obligations à taux fixe :

- Les plus-values réalisées sont passées en réserve de capitalisation,
- Les moins-values réalisées donnent lieu à reprise sur la réserve de capitalisation. Après épuisement de la réserve de capitalisation, l'impact financier passe dans les charges.

Réallocation de la trésorerie

La trésorerie est réallouée en fonction de la politique de l'allocation cible (Cf. paragraphe précédent). Dans notre cas, elle est entièrement réallouée en obligation à taux fixe, de maturité 10 ans et de rating A. A noter, que lors de ce réinvestissement, 5 obligations seront achetées.

Extériorisation des plus-values latentes

Par hypothèse, aucune extériorisation de plus-values latentes systématique (sauf besoin de liquidité comme spécifié ci-dessus) n'est effectuée sur le portefeuille à chaque pas de temps.

4.3 Politique de revalorisation des contrats

La règle de revalorisation cible y compris intérêts techniques correspond à l'utilisation de la formule suivante :

$$\max(\text{Taux cible}_{N-1} - 20 \text{ bps}, \text{taux technique}, \min(\text{taux 10 ans moyen} - \text{taux chargement}; \text{Taux cible}_{N-1} + 20 \text{ bps}))$$

Le taux N-1 est initialisé en début de projection à 1%.

On considère les taux contractuels de distribution des produits financiers suivants (i.e égaux aux taux minimum règlementaires) :

Taux contractuel produits financiers	85%
Taux contractuel gestion technique	90%

La mécanique de distribution de participation aux bénéfices est décrite ci-dessous. L'objectif de cette étape est de calculer les taux de PB que l'assureur va distribuer aux assurés au regard des produits financiers réalisés, des contraintes règlementaires et contractuelles et des taux du marché. En effet, si l'assureur sert un taux plus faible que le taux attendu par ses assurés, il s'expose au risque de les voir racheter leur contrat pour replacer leur argent à un taux plus avantageux.

- Le premier élément de participation aux bénéfices, que l'assureur se doit d'incorporer aux provisions mathématiques, est la composante de la PPE arrivée à maturité.
- Ensuite pour chacun des modèles points, un taux de PB cible (au-delà du taux technique) est calculé.
- A partir de ces taux cibles, un montant cible global dont l'assureur doit disposer pour servir ces taux de PB cibles est calculé.
- Ensuite, l'ensemble des produits financiers que l'assureur a réalisés durant l'année (dividendes, loyers, coupons détachés, convergence des obligations, intérêts des emprunts, plus ou moins-values réalisées, impact financier des moins-values obligataires non absorbées par la réserve de capitalisation) est déterminé et on en déduit la part de ces produits financiers qui revient contractuellement aux assurés.
- Les engagements de taux minimum garanti de l'assureur au titre de l'année écoulée sont également calculés, à savoir les intérêts techniques noté IT (revalorisation des PM au taux technique) et le montant correspondant aux IT inclus dans les prestations.
- Si les richesses ne sont pas suffisantes et que les taux techniques ne sont pas financés, il y a un apport de fonds propres. En aucun cas, la PPE ne peut être utilisée pour couvrir les taux techniques.

4.4 Prise en compte de la contrainte de PB minimum règlementaire

Dans le calcul du minimum de PB règlementaire, il n'y a pas de chargements sur encours inclus dans le résultat de gestion et ce, même quand il est possible de les prélever. Seuls les frais de gestion viennent diminuer la contribution du résultat technique au minimum règlementaire.

Les produits financiers sur la PPE et la réserve de capitalisation sont supposés distribués à l'assuré via les participations aux bénéfices.

Le compte de PB minimal réglementaire est établi en calculant d'une part la participation au résultat technique :

$$\text{Participation au résultat technique} = \begin{cases} 90\% \times \text{Solde technique si positif} \\ 100\% \times \text{Solde technique si négatif} \end{cases}$$

Où :

$$\text{Solde technique} = \text{Marge d'acquisition} + \text{Résultat tech d'assurance (sur rentes)} - \Delta\text{PRE} - \text{Frais de gestion réels}$$

Et d'autre part la participation au résultat financier :

$$\text{Participation au résultat financier} = 85\% \times (\text{PM} + \text{PPE}) \times \frac{\text{Résultat financier}}{\underbrace{\frac{\text{VNC actif(N-1)}}{\text{Taux de produits fi net}}}_{\text{Solde financier}}}$$

En combinant les deux résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} &\text{Solde du compte de participation réglementaire} \\ &= \text{Participation au résultat technique} \\ &+ \text{Participation au résultat financier} \\ &- \text{PB sur sortie} \\ &- \text{Report du solde négatif du compte de PB minimal(N - 1)} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} &\text{Montant minimal de PB} = \\ &(\text{Solde du compte de participation réglementaire} - \text{Intérêts techniques})^+ \end{aligned}$$

Le montant de PB à distribuer correspond alors au maximum entre :

- Le montant minimal de PB
- La réserve de PB distribuable après les éventuelles extériorisations de plus-values supplémentaires :

$$\begin{aligned} &\text{Réserve de PB distribuable} \\ &= \text{Résultat technique d'assurance (sur rentes)} \\ &+ \text{taux contractuel \%} \times \frac{\text{Provisions hors UC + PPE}}{\text{Taille du passif}} \times \text{Résultat financier} \\ &- \text{chargements sur encours} \end{aligned}$$

4.5 Autres règles de gestion

Par ailleurs, les règles de gestion suivantes sur la PPE ont été retenues dans la projection :

- La PPE est rollée mais la PPE arrivant à maturité 8 ans est incorporée aux PM.
- Si le montant de PPE est supérieur à 5% de la PM, une règle de redistribution d'un tiers de l'excédent au-dessus de 5% de la PM est mise en place

5) Problématiques liées à l'implémentation du JLT

Les principales difficultés rencontrées lors de l'implémentation sont les suivantes :

- Risque-neutralisation des obligations : La vérification de la risque-neutralisation des obligations via le test de fuite (consistant à qu'en moyenne l'ensemble des flux projetés dans le modèle correspond en moyenne à la richesse de départ, à savoir la valeur de marché initiale des actifs, cf. page 31) a présenté des difficultés dans le sens où il n'était pas possible de comparer les flux moyens de chaque obligation avec un scénario équivalent certain car aucun scénario ne peut reproduire des flux moyens. En effet, en ce qui concerne l'impact du modèle sur les flux¹, soit elle fait défaut et les flux sont nuls (au recouvrement près), soit elle ne fait pas défaut et c'est le flux complet qui sera comptabilisé. Cela a été d'autant plus difficile à analyser pour les réinvestissements puisque pour respecter les conditions d'application de la loi des grands nombres, il n'était pas possible de se suffire d'une seule obligation réinvestie. Dans le cadre de ces calculs, il fallait a minima réinvestir 5 obligations (cf. partie VI) à chaque réinvestissement pour pouvoir converger, ce qui complexifiait d'autant l'analyse des scénarios.
- Reproductibilité des calculs : Il a été difficile d'identifier la façon de fixer les graines de simulations de sorte à s'assurer de la reproductibilité des résultats sans bien sur biaiser les calculs. En effet, chaque obligation a son propre aléa dans chaque simulation. En l'occurrence, la solution a été de fixer une graine pour chaque obligation, ces graines-là ayant été elles-mêmes fixées de façon aléatoire dans chaque scénario à partir d'une graine primaire définie au départ de la simulation.
- Temps de calcul : Etant donné que chaque obligation est projetée avec un aléa spécifique sur le risque de crédit et notamment un calcul spécifique de probabilités de passage à chaque pas de projection, la version initiale du code tournait avec un temps de calcul très long (plusieurs heures pour un BE avec 6 obligations en stock). Il a fallu repenser la factorisation des calculs de probabilités de passage entre les différentes obligations et aboutir finalement à un temps de calcul d'environ une minute pour un BE avec 6 obligations.

¹NB : le modèle n'a pas seulement un impact sur les flux de façon directe via les défauts puisqu'il prend également en compte :

- D'une part de l'aléa sur les matrices de transition qui sont impliquées dans la valorisation des obligations à chaque pas de temps. En effet, en page 25 de mon mémoire, j'affiche la formule de la probabilité de défaut par pas de temps qui dépend des éléments de la matrice inverse des vecteurs propres elle-même déduite de la matrice de transition qui est elle-même stochastique. Cette probabilité de défaut est ensuite utilisée dans la formule de valorisation des obligations (cf. p.21 et 33)
- D'autre part, la possibilité de changement de rating et donc d'augmenter ou diminuer la probabilité de défaut l'année suivante en plus de l'impact sur la valorisation évoquée au point précédent

IV. Cadre de l'étude

1) Rappel de la problématique

Pour rappel, l'objectif est de montrer dans quelle mesure la prise en compte d'une modélisation stochastique du risque de crédit par rapport à une modélisation déterministe est nécessaire pour évaluer la solvabilité d'une compagnie d'assurance vie. Le cas d'étude retenu est celui d'une activité d'épargne en euros et la question de la nécessité d'une modélisation stochastique du risque de crédit sera posée pour plusieurs types de portefeuilles d'actifs et/ou profils de passif. Aussi, il serait utile d'en conclure pour quel type de compagnie la modélisation stochastique du risque de crédit est-elle la plus nécessaire. Afin de projeter le bilan de cette compagnie fictive avec l'outil ALM propre à Forsides, SALLTO, un certain nombre d'input et d'hypothèse sont nécessaires. Cette section s'attachera à présenter en détail l'environnement de simulation, les différentes hypothèses retenues et le portefeuille de référence pour les calculs.

2) Les hypothèses générales de projection

La courbe des taux utilisée est celle des taux sans risque de l'EIOPA au 31 décembre 2021. Cette courbe est utilisée notamment pour l'actualisation des engagements de l'assureur. Nous avons comme dit précédemment dans ce rapport, choisi de projeter notre bilan de manière stochastique. Les calculs en stochastique se font avec un pas annuel sur 1 000 trajectoires issues des scénarios économiques en univers risque-neutre générés par le Générateur de Scénarios Économiques (ESG) propre à Forsides.

3) La génération des scénarios économiques

3.1 Introduction

Comme expliqué au paragraphe 1.2.2, une approche par Monte-Carlo en simulant le fonctionnement de portefeuilles d'épargne dans un ensemble de scénarios économiques est nécessaire pour évaluer les coûts d'options et garantie des contrats d'épargne. Un scénario économique correspond, sur un certain horizon, à une projection d'un ensemble de grandeurs financières et économiques.

Ces scénarios économiques sont simulés à l'aide d'un Générateur de Scénarios Economiques (GSE). C'est un modèle de projection sur un horizon donné de trajectoires aléatoires de différentes variables financières :

- Zéros-coupons nominaux et réels
- Indice action
- Indice immobilier
- Indice d'inflation
- Spread de crédit, évènements de défauts obligataires selon les modèles de crédit (en l'occurrence dans le JLT développé par Forsides, les évènements de crédit sont simulés obligation par obligation directement et non pas dans le GSE).

Selon le besoin d'utilisation, la projection de ces variables peut se faire sous la probabilité historique ou la probabilité risque-neutre :

- En monde réel :

Avec un paramétrage calibré sur des historiques de marché, ou sur des anticipations à dire d'expert, les projections visent à refléter les évolutions probables des variables financières. Il s'agit dès lors de disposer de scénarios financiers les plus réalistes possibles en termes de primes de risque, de volatilité, de queue de distribution, de dépendances. Les scénarios monde-réel sont utilisés par les assureurs en combinaison avec leur modèle ALM pour les études actif-passif visant à calculer des distributions et des indicateurs de risque (quantiles, VaR) et de rentabilité.

- En monde risque-neutre :

Le calcul du Best Estimate² (BE) vie dans Solvabilité 2, qui correspond à l'évaluation de la valeur actuelle probable des flux du passif, requiert, dans le cadre d'une estimation Monte-Carlo, l'utilisation de scénarios économiques stochastiques simulés dans un univers risque-neutre. Ces scénarios viennent en effet alimenter le modèle actif-passif qui projette les flux du BE. Pour que cette méthode d'évaluation issue de la théorie de la finance de marché soit correctement mise en œuvre, le jeu de scénarios économiques ainsi que la façon dont il est utilisé dans le modèle ALM doit respecter certaines contraintes : le calcul des valeurs économiques repose sur l'hypothèse centrale d'absence d'opportunité d'arbitrage qui conduit à modéliser les facteurs de risque sous une probabilité risque neutre, alors que l'analyse de la distribution de ces valeurs requiert la projection de ces mêmes facteurs sous la probabilité historique. Les actifs ont, en monde risque neutre, une performance moyenne égale au taux sans risque (les primes de risque sont nulles), ce qui permet de réaliser des évaluations en actualisant les flux futurs au taux sans risque. En outre, pour garantir une évaluation cohérente avec les prix observés sur les marchés, les modèles doivent être calibrés à partir de ces prix de marché.

C'est un univers de projection adapté aux problématiques de valorisation de compagnies d'assurance. En effet, l'absence d'opportunité d'arbitrage est une hypothèse qui facilite des calculs de valorisation des actifs financiers. De plus, l'absence de prime de risque permet de comparer les valorisations entre elles.

Nous allons dans ce mémoire nous placer en univers risque-neutre pour la projection des indices financiers. En effet, c'est ce mode qui nous permettra dans le cadre de notre étude d'effectuer les calculs Solvabilité 2

La manière dont fonctionne le Générateur de Scénarios Economiques (ESG) propre à Forsides va être détaillée à présent.

3.2 Courbe des taux de référence

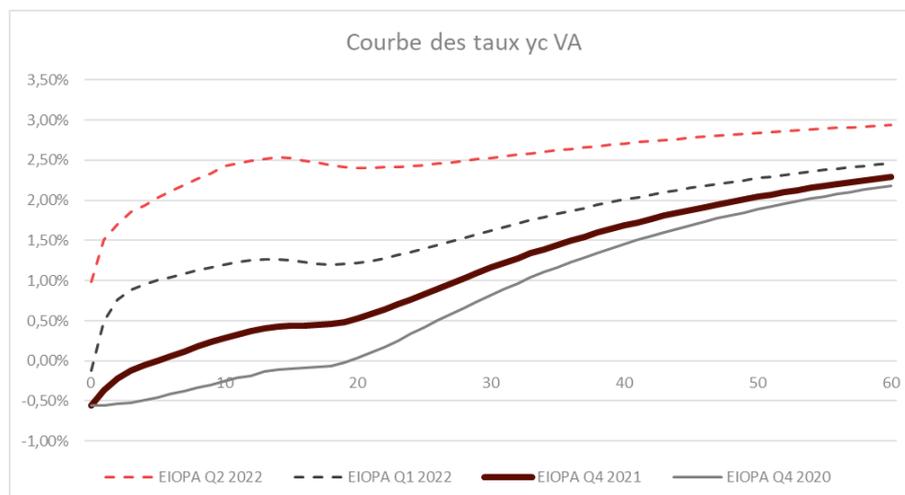
La courbe des taux sans risque de référence est issue de la courbe des taux swaps au 31/12/2021. En cohérence avec l'approche développée dans le cadre de la réforme Solvabilité II, la courbe des taux est extrapolée avec un point d'entrée à 20 ans qui converge sur 40 ans selon la technique de Smith- Wilson, vers le taux forward ultime qui s'établit à 3,6 %. Cette courbe est publiée par l'EIOPA chaque mois.

² La directive Solvabilité 2 donne la définition suivante de la provision **Best Estimate** : « La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente » (cf. paragraphe I.2.1).

La courbe des taux de référence inclut une correction pour volatilité (« volatility adjustment ») selon les exigences réglementaires prudentielles et un ajustement pour risque de crédit :

- Volatility adjustment : 0,03%
- Credit risk adjustment : 0,10%

Comparée à celle de l'année précédente, la courbe des taux EIOPA qui résulte des ajustements et de l'extrapolation est la suivante :



A noter que les taux ont encore augmenté depuis la date de calcul retenue du 31/12/2021, comme le montre la courbe au 30/06/2022 ci-dessus. Comme ce sera abordé en section VI, les résultats présentés sont tributaires de l'environnement économiques et notamment des conditions de taux.

3.3 Générateur de scénarios économiques (ESG)

L'évaluation s'appuie sur un modèle stochastique basé sur une approche risque-neutre. Cette approche consiste à définir le prix d'un actif comme l'espérance de ses flux futurs actualisés au taux de référence.

Les scénarios sont issus du générateur interne FORSIDES. Ce générateur permet l'obtention de 5000 trajectoires économiques risque neutre pour les éléments suivants :

- Prix de zéro coupon (maturité 1 à 30)
- Indices action (2 types d'indice selon le profil du portefeuille)
 - Globales
 - Autres
- Indice immobilier
- Indice monétaire
- Déflateurs

3.3.1 Le modèle de taux

Le modèle de taux utilisé pour générer le scénario économique est le modèle DLMM (Displaced LIBOR Market Model). Il s'agit d'une extension du modèle LMM, que l'on présentera dans un premier temps. Nous exposerons ensuite les particularités du modèle DLMM.

1- Modèle LMM

Définition

Le modèle de taux Libor Market Model (LMM) est un modèle dit de « marché ». Il propose un modèle de diffusion du taux forward $F_k(t) = F(t; T_{k-1}; T_k)$ qui est le suivant :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{j=m(t)}^k \frac{\tau_j \sigma_j(t) \sigma_k(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) dW_k(t)$$

Où :

- $\tau_j = T_j - T_{j-1}$,
- $\sigma_k(t)$ volatilité de $F_k(t)$,
- $W_k(t)$ mouvement brownien standard sous la probabilité spot-Libor,
- $m(t)$ est la prochaine date de réajustement. Avec les notations précédentes, c'est le plus petit k tel que $k \geq t$;

Pour initialiser la diffusion, il suffit d'utiliser la relation suivante entre taux forward et prix des ZC en $t=0$:

$$F_k(t)P(t, T_{k+1}) = \frac{P(t, T_k) - P(t, T_{k+1})}{\tau_k}$$

Spécifications des volatilités des taux Forward LMM

Avant de procéder au calibrage, il est important d'examiner la structure de la volatilité du taux forward $F_t(t)$. Les taux forward étant projetés avec un pas annuel, cela implique que $\sigma_k(t)$ est constante sur l'année en cours. Cela se traduit sous la forme :

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,i} \text{ pour } t \in [i - 1, i]$$

Les volatilités marchés sont calculées à partir des prix de swaptions. C'est une matrice triangulaire inférieure qui est ici calculée à l'aide d'un algorithme en cascade.

Pour rappel, un *swaption* est un produit financier dérivé de taux qui se présente sous forme d'option. L'acquisition d'un *swaption* donne le droit à son détenteur de rentrer à une date donnée dans un contrat *swap* de taux dont la maturité est fixée en amont. Un *swaption* peut être *payer* ou *receiver*. Dans un *swaption payer*, le détenteur a la possibilité de rentrer dans un swap où il paye le taux fixe et reçoit le taux variable. Pour le *swaption receiver*, c'est l'inverse, c'est-à-dire que le détenteur peut payer le taux variable et recevoir le taux fixe.

Pour information :

- La matrice de volatilité des taux *forward* est partiellement remplie. L'algorithme en cascade rectangulaire possède des limites d'utilisation qui se traduisent par des « trous » dans le

tableau. Les valeurs manquantes seront considérées comme égale à 0 (taux *forward* déterministe).

- De nombreuses autres spécifications de volatilités peuvent être envisagées, nous pouvons considérer des cas simples de volatilités constantes ou constantes par morceaux. Différents types de formes paramétriques permettant de reproduire les observations empiriques sont proposées dans la littérature.

Calibrage de la surface de volatilité du forward à l'aide des swaptions

La calibration des $\sigma_k(t)$ requiert des données marché *swaptions*. La méthode d'estimation des volatilités utilisée est la méthode dite en cascade.

Rebonnato (1998) propose une approximation (non-existence d'une formule exacte) de la volatilité implicite d'une swaption en fonction des taux forward, des volatilités forward et des taux swap.

$$(V_{\alpha,\beta})^2 \approx \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}}{T_{\alpha}S_{\alpha,\beta}^2(0)} \sum_{h=0}^{\alpha} \tau_{h-1,h}\sigma_{i,h+1}\sigma_{j,h+1}$$

- $w_i(0) = \frac{P(0,T_{\alpha+1+i})}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} P(0,T_k)}$ est le poids de la swaption considérée en $t=0$
- T_{α} est la maturité de la swaption (premier paiement du swap)
- $S_{\alpha,\beta}(0)$ est le taux swap en 0 portant sur la période $[\alpha, \beta]$
- $\tau_{h-1,h} = T_h - T_{h-1}$

Brigo propose d'utiliser $\rho_{i,j} = 1$ en première approche et cette hypothèse est utilisée.

Il est proposé une structure de volatilité dite en escalier, avec, $\sigma_i(t) = \sigma_{i,\beta(t)}$. Un polynôme est résolu itérativement pour déterminer la volatilité solution de l'équation. Il peut arriver que la solution ait une partie imaginaire non nulle. Dans ce cas, la volatilité est alors supposée nulle.

Les volatilités $\sigma_{i,j}$ sont alors obtenues à partir des volatilités implicites des swaptions via l'algorithme en cascade rectangulaire (*Rectangular Cascade Calibration Algorithm*, cf Brigo et Mercurio p 330).

Ci-dessous les résultats de la calibration des volatilité forward pour le modèle LMM.

Maturité	Horizon de projection																													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	46%																													
2	47%	49%																												
3	47%	47%	54%																											
4	44%	48%	53%	56%																										
5	47%	35%	48%	53%	50%																									
6	36%	35%	40%	49%	52%	47%																								
7	43%	32%	23%	40%	48%	52%	34%																							
8	30%	42%	26%	27%	38%	46%	46%	35%																						
9	33%	25%	41%	23%	39%	34%	37%	50%	8%																					
10	43%	18%	24%	39%	16%	42%	38%	43%	57%																					
11	30%	34%	18%	27%	36%	31%	25%	41%	35%	35%	23%																			
12	30%	30%	26%	22%	27%	34%	28%	33%	38%	35%	36%	14%																		
13	31%	31%	26%	29%	21%	33%	27%	38%	28%	33%	32%	52%																		
14	34%	33%	29%	28%	56%	1%	26%	46%	32%	33%	23%	35%	66%																	
15	38%	37%	32%	31%	26%	30%	35%	46%	38%	21%	47%	35%	37%	70%																
16	40%	36%	33%	32%	26%	37%	23%	46%	50%	42%	6%	42%	41%	34%	103%															
17	39%	35%	33%	31%	25%	36%	38%	16%	47%	67%	31%		41%	38%	18%	45%														
18	36%	32%	28%	31%	23%	33%	35%	21%	30%	39%	28%	60%		29%	32%	24%	93%													
19	31%	28%	24%	22%	24%	28%	30%	17%	23%	10%	51%	5%	73%		10%	42%	6%													
20	28%	24%	21%	19%	25%	20%	26%	15%	19%	15%	12%	38%		73%		15%	16%	38%	55%											
21	23%	23%	19%	17%	23%	18%	23%	13%	17%	14%	14%	15%	19%		83%		22%		33%	19%										
22	20%	20%	20%	16%	21%	17%	13%	20%	16%	13%	13%	18%	10%		72%			35%		17%	17%									
23	18%	18%	18%	18%	20%	16%	12%	17%	17%	12%	12%	13%	13%	22%	1%		77%		29%	17%	17%	17%								
24	18%	18%	18%	18%	18%	15%	12%	17%	12%	17%	11%	12%	12%	13%	25%		8%	62%		15%	15%	15%	15%							
25	17%	17%	17%	17%	17%	17%	11%	16%	12%	4%	25%	12%	12%	13%	12%	19%		23%	47%	15%	15%	15%	15%	15%						
26	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	12%	4%	6%	30%	11%	13%	13%	11%	12%		37%	14%	14%	14%	14%	14%	14%					
27	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	12%	3%	5%	5%	36%	10%	15%	10%	12%		137%	19%	19%	19%	19%	19%	19%					
28	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	16%	3%	5%	5%	5%	43%	9%	13%	10%	9%		12%	12%	12%	12%	12%	12%	12%				
29	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	4%	5%	5%	5%	49%	6%	17%	9%	12%		13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%			
30	14%	14%	14%	14%	14%	14%	14%	14%	14%	4%	5%	5%	5%	59%	6%	14%	9%			13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%	13%

La présentation des résultats n'est ici pas intégralement présentée, l'horizon de projection est bien plus étendu.

Limites et avantages

Une fois les volatilités du modèle LMM estimées, les taux forward peuvent être projetés. Le modèle permet de bien répliquer les surfaces de volatilité de marché. Cependant, le modèle peut générer des taux forward explosifs.

2- Extension DLMM

La distribution du modèle LMM est log-normale et définit un taux positif. Le précédent contexte de taux historiquement bas voire négatif implique d'apporter quelques changements à ce modèle afin que ce dernier permette la diffusion de taux négatif. Pour ce faire, on intègre la notion de shift, le modèle est ainsi ajusté d'un paramètre s , le shift. En intégrant ce nouveau paramètre, la modèle est redéfini comme suit :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + s)dW_k(t)$$

Le paramètre de shift s est généralement défini à dire d'expert en fonction du contexte marché. Il est défini comme un « % » afin de « décaler » la courbe des taux.

Après intégration du shift, il est toujours possible de déterminer les volatilités par un algorithme en cascade comme décrit ci-dessus.

3.3.2 Le modèle action

Pour modéliser les actions le modèle le plus simple est le modèle de Black-Scholes. C'est le modèle de référence pour la simulation des cours des actions. L'hypothèse de base est que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique. La diffusion proposée est :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- S_t : le cours du sous-jacent
- μ : la tendance du sous-jacent (espérance rendement)
- σ : la volatilité du sous-jacent
- W_t : mouvement brownien standard

Ce modèle est l'un des modèles les plus simples à calibrer puisqu'il repose sur deux paramètres (μ et σ) constants dans le temps.

Ce processus possède une solution explicite :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

En univers risque neutre, on fait l'hypothèse que les agents sont indifférents au risque, **ainsi ils n'attendent pas de compensation pour un risque supporté, et donc le rendement de tous les actifs vaut le taux sans risque**. Il est ainsi supposé que les prix des sous-jacent simulés à l'aide du modèle de Black & Scholes évoluent suivant cette dynamique :

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r(t, t+dt) - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \sqrt{dt} N\right)$$

Où $r(t, t + dt)$ est le taux moyen sans risque sur $[t, t + dt]$ et N une variable aléatoire de loi normale standard réduite.

Calibrage

Sous la probabilité risque-neutre, le prix d'une option (ici un *call*) de maturité T , de strike K est donné par la formule de B&S. La volatilité implicite est alors déduite par la relation de minimisation suivante :

$$\widehat{\sigma}_{vol} = \operatorname{argmin} \sum (C_{BS} - C_{MKT})^2$$

Où :

- C_{BS} le prix du call sous le modèle de Black & Scholes,
- C_{MKT} le prix de du call observé sur le marché

Les scénarios ont été construits en utilisant une volatilité de 18,43 % pour les actions. Cette volatilité a été calibrée sur la base des prix du call et du put, à la monnaie, sur Eurostoxx 50, de maturité 1 an à fin 2021.

Limites et avantages

L'avantage de ce modèle se trouve au niveau de sa simplicité et de sa facilité de calibrage et de sa compréhension. Cependant, ce modèle repose sur des hypothèses très restrictives. En pratique, la volatilité n'est pas constante (*smile* de volatilité). De plus, on peut observer que les queues de distribution du rendement sont plus épaisses que celles de la loi normale.

3.3.3 Le modèle Immobilier

De même que pour les indices actions, les indices immobiliers ont été obtenus à partir du modèle de Black-Scholes.

L'indice immobilier est modélisé par le processus stochastique I_t dont l'équation différentielle stochastique est celle de Black & Scholes améliorée. La volatilité est constante et le taux court est stochastique.

$$\frac{dI_t}{I_t} = r_t^{\text{nom}} dt + \sigma dW_t^I$$

$$\langle dW_t^I, dW_t^{\text{nom}} \rangle = \rho^{I,n} dt$$

Calibrage

La volatilité constante σ est un paramètre du modèle difficile à calibrer car peu de données sont observables.

Pour l'heure, aucune méthode de calibration n'est implémentée au sein du GSE. Une valeur de place $\sigma = 15\%$ a été retenue dans le cadre des calculs de ce mémoire.

4) Les paramètres du JLT : mu, sigma et alpha

Pour rappel, dans le scénario central les paramètres du modèle JLT sont les suivants, selon les valeurs par défaut fournis par les agences de notations :

Nom du paramètre	Valeur
μ	5%
σ	0,75%
α	0,10%

Avant de mettre en place une méthode de calibrage des paramètres du modèle JLT, en particulier du processus CIR que suit la prime de risque, la sensibilité des résultats à ces paramètres a été testée afin d'évaluer dans quelle mesure il était nécessaire de consacrer une partie de ce rapport au calibrage étant donné la complexité que cela pourrait engendrer.

Pour rappel, ci-dessous la dynamique de la prime de risque :

$$d\pi(t) = \alpha(\mu - \pi(t))dt + \sigma\sqrt{\pi(t)}dW_t$$

Comme évoqué précédemment, un paramètre π_0 spécifique à chaque obligation est également calibré à partir de la valeur de marché et des caractéristiques de l'obligation.

V. Résultats et discussion

Dans cette cinquième partie, les résultats de l'étude seront présentés et analysés.

Dans un premier temps, il s'agira de définir le portefeuille constitué pour cette étude, puis de présenter les différents indicateurs qui seront étudiés ainsi que les différentes sensibilités effectuées. Enfin, les résultats issus de l'outil ALM, SALLTO seront analysés.

1) Constitution du portefeuille de la compagnie

Dans cette partie nous allons décrire le portefeuille utilisé dans le cadre de notre étude ainsi que les différentes hypothèses faites pour cette dernière.

1.1 Le bilan comptable

Le portefeuille a été constitué en se basant sur les données de marché de l'assurance à fin 2020, selon Good Value for Money (GVfM). Le modèle de risque de crédit a été testé sur un support euro appelé aussi fonds en euros. Un support euro est généralement composé principalement d'obligations (actifs liquides et moins risqués). L'objectif d'investissement dans un tel support est la revalorisation régulière et sans risque du capital investi, et cela avec un taux minimum garanti défini contractuellement.

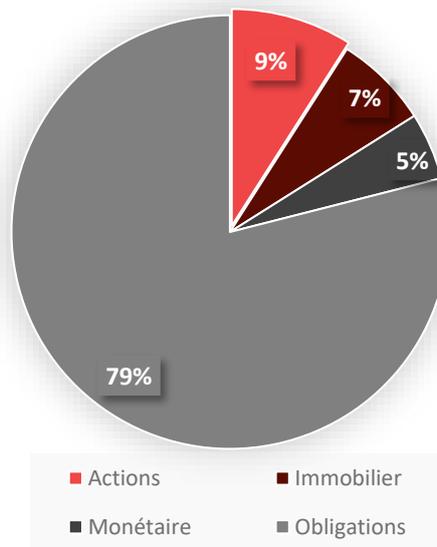
Ci-dessous, une illustration du bilan comptable de la compagnie :

ACTIF		PASSIF	
Total PVL	VC		VC
Placements		Fonds Propres	
Monétaire	57 M€	Capital	84 M€
Immobilier	81 M€	RK	15 M€
Actions	103 M€	Report	0 M€
OPCVM	0 M€	Résultat	6 M€
Obligations	909 M€	Total Provisions	
		PPE	45 M€
		PM	1000 M€
TOTAL ACTIF	1 150 M€	TOTAL PASSIF	1 150 M€

1.2 Répartition du portefeuille en pourcentage de la valeur comptable (VNC)

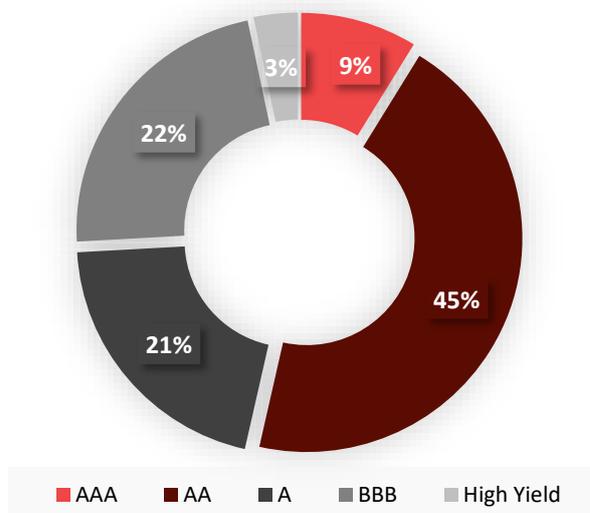
Les compagnies d'assurance doivent s'assurer de détenir les meilleurs actifs possibles, et cela non seulement en termes de couple rentabilité/risque, mais également au regard des engagements souscrits par ces dernières et des contraintes comptables et réglementaires.

Ainsi, les données de marché nous ont conduit à répartir notre portefeuille d'actifs de la manière suivante :



1.3 Répartition de la poche obligataire en termes de rating

Les compagnies d'assurance détiennent 3% ou moins de leur poche obligataire (en termes de valeur bilan) en titres de notation BB ou inférieure et plus de 50% pour des titres ayant une notation AA ou AAA.



Le portefeuille est constitué de 6 obligations différentes (une pour chacun des rating) représentatives des obligations présentes sur le marché. On a donc des obligations de maturités allant de 3 à 10 ans et de taux nominaux variant de 1% à 10%.

Ci-dessous les caractéristiques de ces obligations :

Obligation	Date d'échéance	Taux nominal	Rating
1	31/12/2024	1,00%	AAA
2	31/12/2031	2,00%	AA
3	31/12/2029	2,45%	A
4	31/12/2026	3,80%	BBB
5	31/12/2024	5,50%	BB
6	31/12/2024	10,00%	B

Un portefeuille de seulement 6 obligations reste trop théorique (bien que pédagogique pour zoomer sur les impacts de la modélisation avec le JLT). C'est pourquoi, une diversification consistant à répliquer ces 6 obligations 16 fois pour obtenir une centaine d'obligations, a été retenue pour le scénario de référence. Des sensibilités au nombre d'obligations ont été réalisées pour mesurer également l'impact potentiel sur des compagnies de taille différente.

1.4 Duration, spread et rating moyen du portefeuille

Le portefeuille constitué pour cette étude possède certaines caractéristiques. Parmi elles, une duration, un spread moyen et un rating moyen.

La duration d'une obligation ainsi que la maturité d'une obligation sont deux notions différentes.

En effet, alors que la maturité d'une obligation mesure le temps nécessaire jusqu'à ce que le montant principal de l'obligation soit remboursé, la duration d'une obligation est, elle, un concept plus abstrait qui peut se traduire comme la durée de vie moyenne de ses flux financiers pondérée par sa valeur actualisée.

La duration se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$\text{Duration} = \frac{\sum_{i=1}^T \frac{i \times F_i}{(1+r)^i}}{\sum_{i=1}^T \frac{F_i}{(1+r)^i}}$$

Avec :

- F_i : les flux perçus l'année i

- r : le taux actuariel de l'obligation tel que le prix observé de l'obligation corresponde à la valeur actualisée de celle-ci
- T : la maturité de l'obligation

Dans le cas du portefeuille construit, les caractéristiques pour la poche obligataire sont les suivantes :

	Taux fixes
VA	909 M €
VNC	909 M €
VM	1 046 M €
Duration	7,05
Spread moyen	0,3%
Rating moyen	A

Les spreads ont été calibrés de sorte à être cohérents avec ceux d'obligations réelles de caractéristiques semblables au 31/12/2021.

Par ailleurs on considère pour l'ensemble des obligations un taux de recouvrement égal à 35%.

A noter également que la duration du passif est de 11 ans.

1.5 Portefeuille d'actif en chiffres

La répartition des actifs détenus par la compagnie correspond bien à l'allocation définie précédemment. Cependant, la valeur de marché des actifs est déterminée en tenant compte des Plus-Values Latentes (PVL) moyennes du marché sur chaque type d'actif.

La valeur de marché (VM) totale à l'actif de notre compagnie est de 1 357 Millions d'euros.

	VNC	VM	Répartition en %	PVL
Monétaire	58 M€	58 M€	4,24%	0%
Actions globales	104 M€	149 M€	10,97%	44%
Immobilier	81 M€	104 M€	7,69%	30%
Obligs taux fixe	909 M€	1 046 M€	77,11%	15%
Total	1 150 M€	1 357 M€	100,00%	18%

Une hypothèse de taux de frais financiers de 0,13% de la valeur de marché, ce qui représente 0,176% des PM à $t=0$, est retenue pour la gestion de ce portefeuille.

1.6 Portefeuille de passif : chiffres et règles de gestion

Le passif du portefeuille est constitué de sorte que le bilan soit à l'équilibre (que le passif soit égal à l'actif en valeur comptable) tout en s'appuyant sur les données de marché afin d'obtenir un portefeuille de marché moyen à fin 2020.

Certaines hypothèses sur les règles de gestion et sur des règles de calcul ont également été faites :

Caractéristiques

Type contrat	Epargne
Nombre de contrats	20 000
Age moyen assurés	50 ans
TMG moyen	0,2% brut
Duration	11 ans

Frais & chargements

Chargements sur encours	0,80%
Frais sur encours	0,30%
Frais unitaires	100

Lois comportementales

Table de décès	TGF05
Taux de rachat structurel	8%
Rachat dynamique	loi moyenne ACPR

Passif (% total bilan)

PM initiale montant	1 Md €
PM initiale	87%
PPE	4%
Réserve de capitalisation	1%
Capital	7%
Résultat	1%

1.7 Hypothèses de calcul

La courbe des taux sans risque utilisée est celle de l'EIOPA au 31 décembre 2021. Cette courbe sert notamment pour l'actualisation des engagements de l'assureur.

Les calculs en stochastique se font sur 1 000 trajectoires issues des scénarios économiques en univers risque-neutre générés par le Générateur de Scénarios Économiques (ESG) propre à Forsides sur un horizon de projection de 60 ans avec un pas de projection annuel.

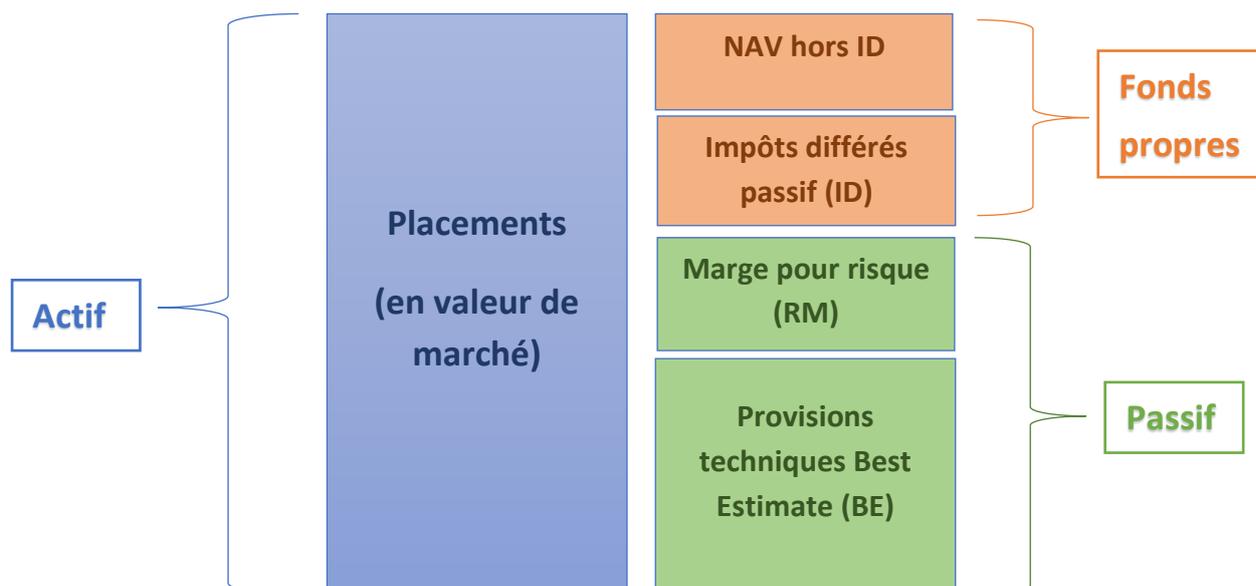
2) Indicateurs étudiés

Pour mesurer l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit, plusieurs indicateurs ont été retenus et vont être définis ici.

1. NAV + RM

Pour mesurer l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit l'indicateur que l'on analysera principalement est la NAV + RM.

Pour rappel, un bilan prudentiel peut se schématiser de la façon suivante.



Les différents tests de sensibilité impacteront à la fois le Best Estimate (BE) mais également le SCR et par conséquent la RM.

Ainsi, en retenant la NAV comme indicateur, les impacts sur le BE mais également des impacts sur le SCR seront pris en compte par le biais de la RM.

Dans le cadre de ce mémoire et afin de ne pas complexifier l'analyse des résultats, nous avons choisi de ne mesurer que l'impact sur le BE. Afin d'isoler ces mouvements, l'indicateur que l'on retiendra est alors la NAV + RM. En effet, certains effets inhérents au calcul du SCR peuvent s'avérer contre-intuitifs et complexifier l'analyse.

Pour illustrer ce point, nous nous plaçons dans le cadre de la sensibilité à une allocation obligatoire plus risquée décrite en V.4.2.1 qui a consisté à augmenter à la fois le taux de coupon et par voie de conséquence le spread des obligations en laissant la valeur de marché inchangée. Avec le risque de crédit déterministe comme avec le JLT, la NAV + RM diminue avec l'augmentation des taux de coupons et donc du risque des obligations à rendement moyen équivalent, comme cela sera montré. Toutefois, le SCR ne fait pas qu'augmenter et le taux de couverture ne fait pas que diminuer :

	RC Det - Central	RC Det Coupon + 0,5%	RC Det Coupon +1%
BE	1 185,3 M€	1 186,3 M€	1 188,9 M€
SCR	73,2 M€	73,8 M€	71,8 M€
NAV	143,9 M€	143,1 M€	142,1 M€
NAV + RM	171,5 M€	170,5 M€	167,8 M€
Taux de couverture	197%	194%	198%

En effet, deux effets contradictoires sont en jeu sur le SCR :

- L'effet d'absorption par les passifs diminue, ce qui contribue à augmenter le SCR net

- En revanche, l'augmentation des taux de coupon diminue la durée des obligations en pondérant davantage les coupons par rapport au remboursement à échéance. Cela a pour conséquence un choc de spread plus faible quand les taux de coupon augmentent

Ces deux effets contradictoires expliquent le caractère non-monotone du SCR et donc du taux de couverture. C'est ce type d'effet de bord produisant des résultats contre-intuitifs et jugés non utiles par rapport à l'objectif de ce mémoire que nous avons souhaité écarter en retenant l'indicateur NAV + RM qui ne tient pas compte du SCR.

2. Nombre d'obligations JLT

Comme mentionné précédemment lors de la définition du modèle de risque de crédit JLT et dans le calibrage des paramètres du CIR, même lorsque l'on modélise le risque de crédit de façon stochastique, il se peut que certaines obligations soient modélisées de manière déterministe. En effet, lors du calibrage de la prime initiale de chaque obligation, s'il n'existe pas de solution à l'équation de calibration de π_0 , cette dernière sera modélisée avec un risque de crédit déterministe.

Lors de l'analyse des résultats il est important de connaître le nombre d'obligations dont le risque de crédit est modélisé de façon stochastique, car cela peut affecter la mutualisation du risque de crédit.

3. Nombre de défauts à 1, 10 et 60 ans

Un autre indicateur pertinent dans l'analyse des mouvements liés à la modélisation du risque de crédit est le nombre de défauts et leur date de survenance.

On va ainsi comparer le nombre de défauts au bout d'un an, de 10 ans et à la fin de la projection (à 60 ans).

Dans le cas d'une modélisation déterministe du risque de crédit, le nombre de n'est pas à considérer car seul un taux de défaut constant par obligation est appliqué à chacune d'elles à chaque année de projection. En effet, pour rappel, la modélisation déterministe ne modélise pas la survenance du défaut comme c'est le cas dans le JLT.

4. Duration occurrence de défaut

Cet indicateur est dans le même esprit que le nombre de défauts à 1, 10 et 60 ans. Il s'agit de mesurer la répartition dans le temps de l'occurrence de défaut, c'est-à-dire de définir en moyenne quelle est la durée de la survenance des défauts.

A nouveau, dans le cas d'une modélisation déterministe du risque de crédit, cet indicateur sera nul comme expliqué précédemment.

Afin d'avoir un élément de comparaison entre la modélisation déterministe et stochastique du risque de crédit, un dernier indicateur a été mis en place.

5. Duration montant de défaut

Il s'agit ici de mesurer la répartition dans le temps des montants de défauts. En modélisation déterministe comme en modélisation stochastique du risque de crédit, il y a des montants de

défauts sur toute la durée de la projection. L'objectif est de savoir comment ces montants de défauts se répartissent sur la durée de la projection selon le modèle de projection.

3) Résultat

Dans un premier temps, il s'agit de mesurer l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit en scénario central, c'est-à-dire avec les caractéristiques du portefeuille définies plus haut.

Ci-dessous les résultats d'une modélisation stochastique du risque de crédit comparés à une modélisation déterministe du risque de crédit.

	RC Déterministe	JLT Central
NAV	144 M€	142 M€
NAV + RM	171 M€	170 M€
BE	1 185,3 M€	1 186,7 M€
SCR	73 M€	73 M€
Taux de couverture	197%	194%
Nb obligations JLT	0	80
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0
Duration montant de défauts	3,8	12,2
Vol VM oblig à 1 an	5,4%	5,4%
Vol VM oblig à 5 ans	13,6%	14,0%
Vol VM oblig à 10 ans	27,3%	27,8%

Interprétation :

Une légère baisse du taux de couverture de la compagnie est observée en passant à une modélisation stochastique du risque de crédit essentiellement due à l'augmentation du BE.

La modélisation avec le JLT semble déformer la répartition dans le temps des montants de défauts en les reportant à plus tard comme le montrent les durées de montants de défauts : on passe d'une durée du montant de défaut de 3.8 ans en situation de risque de crédit déterministe à une durée de 12.2 ans pour la modélisation stochastique.

Toutefois, il est important de garder en mémoire que le montant de défauts moyen sur l'ensemble de la vie de l'obligation est identique quel que soit le modèle.

En effet, le montant de défauts peut s'écrire ainsi :

$$VM_0 - \sum_t F_t \times P^0(0, t) = \text{Montant de défauts}$$

Le montant moyen de défaut est égal entre une modélisation stochastique et une modélisation déterministe du risque de crédit. C'est la répartition de ces défauts et leur volatilité qui diffère.

On peut ainsi observer une légère hausse de la volatilité de la valeur de marché à 5 ans et à 10 ans, ce qui renvoie à ce qui a été dit précédemment : la modélisation stochastique du risque de crédit induit un aléa supplémentaire sur la valeur de marché des obligations.

Finalement, l'impact du passage d'une modélisation déterministe à une modélisation stochastique du risque de crédit reste mesuré dans la configuration considérée. Étant donné le peu d'impact sur les résultats, la question se pose de quels paramètres ont vocation à accentuer l'impact et en déduire par conséquent quels types de portefeuille d'assurance sont le plus impactés par une modélisation stochastique du risque de crédit.

Il est également possible que l'impact réduit puisse être lié à la spécificité de l'implémentation retenue (cf. § « Spécificité de l'implémentation retenue » en section III.5) qui ne tient notamment pas compte de corrélations entre les événements de crédits des obligations à une année donnée. Pour tenter d'évaluer l'impact de cette limite de la modélisation, l'une des sensibilités décrite dans le paragraphe suivant, la sensibilité consistant à concentrer la valeur de marché obligataire totale dans un nombre plus restreint d'obligations en portefeuille, permettra de donner un majorant de cet impact. En effet, ces « agrégats d'obligations » pourraient être assimilés à un ensemble d'obligations d'un même groupe de risque/secteur parfaitement corrélés.

4) Les différentes sensibilités

Plusieurs tests de sensibilité ont été réalisés, afin de mettre en lumière certains cas de figure dans lesquels la modélisation du risque de crédit avait un impact différent sur les indicateurs Solvabilité II.

Le scénario central de référence présenté ci-dessus sera désigné « central ».

En se demandant si l'impact réduit dans le cas central pouvait s'expliquer par le paramétrage du modèle, ou bien par les caractéristiques de l'actif (niveau de risque, diversification) ou encore par la faible optionnalité du passif, les tests de sensibilité suivants ont été réalisés :

- Sur les paramètres du modèle : α , μ et σ ;
- Sur les caractéristiques de l'actif : sur les taux de spread des obligations du portefeuille ainsi que sur le nombre d'obligations présentes dans le portefeuille
- Sur le niveau du taux garanti et sur le passage en garantie nette.

4.1 Impact des paramètres du modèle

Etant donné le faible impact du modèle de de crédit stochastique dans le scénario de référence, la question qui s'est posée était de savoir si cela n'était pas expliqué par jeu de paramètres du CIR projetant les probabilités de passage qui générerait trop peu de volatilités sur la valorisation des obligations.

En outre, avant de mettre en place une méthode de calibrage des paramètres du modèle JLT, en particulier du processus CIR que suit la prime de risque, la sensibilité des résultats à ces paramètres a été également testée dans le but d'évaluer dans quelle mesure il était nécessaire de consacrer une partie de ce rapport au calibrage étant donné la complexité que cela pourrait engendrer.

Pour rappel, ci-dessous la dynamique de la prime de risque :

$$d\pi(t) = \alpha(\mu - \pi(t))dt + \sigma\sqrt{\pi(t)}dW_t$$

C'est pourquoi un spectre de valeurs pour chacun des paramètres a été testé, dont voici la liste :

- Pour le paramètre α de « vitesse de retour à la moyenne » du processus CIR régissant la diffusion de la prime de risque des obligations nous avons effectué des sensibilités avec les valeurs suivantes :

Sensibilité	Central	1	2	3	4
Valeur de α	0,10%	0,05%	0,15%	0,20%	1%

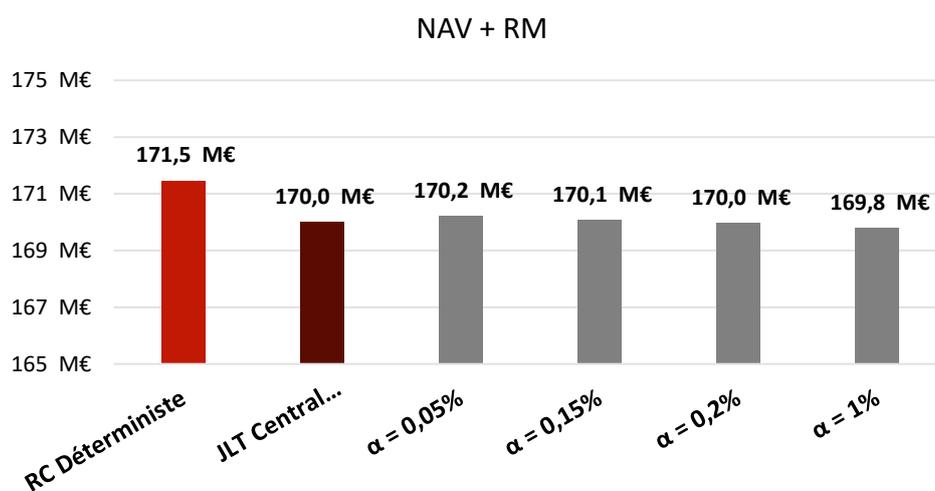
- Pour le paramètre μ de « moyenne à long terme » du processus CIR régissant la diffusion de la prime de risque des obligations, nous avons effectué des sensibilités avec les valeurs suivantes :

Sensibilité	Central	1	2	3	4
Valeur de μ	5 %	0,10%	1%	10%	50%

- Pour le paramètre σ de volatilité du processus CIR régissant de la diffusion de la prime de risque des obligations, nous avons effectué des sensibilités avec les valeurs suivantes :

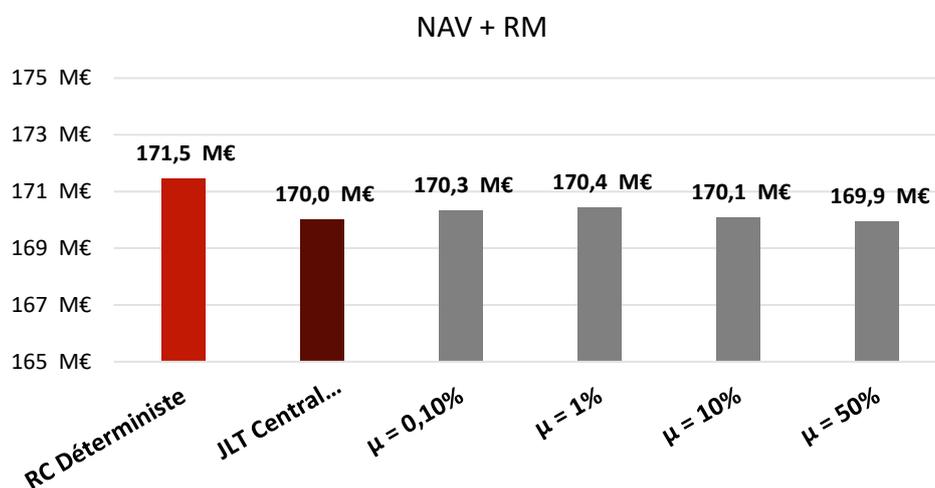
Sensibilité	Central	1	2	3	4
Valeur de σ	0,75%	0,10%	0,25%	1%	2%

1. Paramètre alpha



	RC Déterministe	JLT - Central $\alpha = 0,10\%$	$\alpha = 0,05\%$	$\alpha = 0,15\%$	$\alpha = 0,2\%$	$\alpha = 1\%$
Nb obligations JLT	0	80	80	80	80	64
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2	6,2	6,2	6,2	5,2
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5	11,7	11,6	11,6	10,3
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0	18,2	18,2	18,0	18,8
Duration montant de défauts	3,8	12,2	12,3	12,3	12,3	11,9

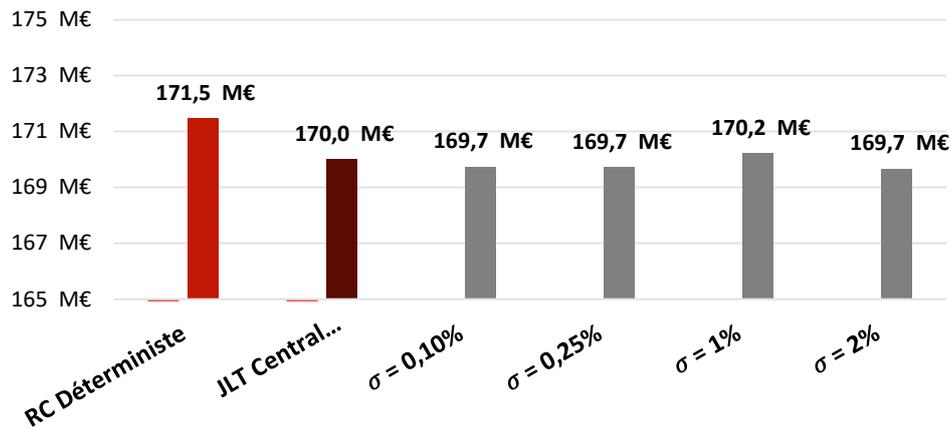
2. Paramètre mu



	RC Déterministe	JLT - Central $\mu = 5\%$	$\mu = 0,10\%$	$\mu = 1\%$	$\mu = 10\%$	$\mu = 50\%$
Nb obligations JLT	0	80	48	48	80	80
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4	1,5	1,5	1,4	1,4
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2	5,2	5,2	6,2	6,2
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5	10,6	10,6	11,6	11,7
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0	19,0	19,3	18,1	18,2
Duration montant de défauts	3,8	12,2	11,9	12,0	12,4	12,4

3. Paramètre sigma

NAV + RM



	RC Déterministe	JLT Central $\sigma = 0,75\%$	$\sigma = 0,10\%$	$\sigma = 0,25\%$	$\sigma = 1\%$	$\sigma = 2\%$
Nb obligations JLT	0	80	64	64	80	80
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4	1,5	1,5	1,4	1,4
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2	5,3	5,2	6,2	6,2
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5	10,6	10,8	11,6	11,7
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0	19,1	19,5	18,3	18,3
Duration montant de défauts	3,8	12,2	12,4	12,3	12,5	12,2

Interprétation :

Les paramètres du modèle JLT (alpha, mu et sigma) ne semblent pas avoir d'impact significatif sur les indicateurs Solvabilité II.

Cela s'explique par le fait qu'en fin de compte, quels que soient la valeur des paramètres utilisés, les taux de défauts simulés en moyenne correspondent aux taux de défaut moyen implicitement contenus dans la valeur de marché. En effet, comme expliqué pour le scénario de référence, les valeurs de marché initiales des obligations étant inchangées, le calibrage de $\pi(0)$ de sorte à égaliser le prix modèle avec la valeur de marché initiale pour chaque obligation va certes être modifié mais toujours de sorte le moyen de défaut jusqu'à maturité demeure inchangé.

En revanche, ces paramètres sont de nature à influencer sur la volatilité des valeurs de marché des obligations puisque seules les probabilités de passage vont évoluer (sous contrainte que l'espérance demeure égale à $VM(0)$). Ainsi, la matrice de transition va, certes, évoluer différemment selon les paramètres choisis mais la probabilité moyenne de défaut d'ici la maturité ne changera pas.

Par conséquent, si l'assureur n'est pas amené à vendre ou même s'il est amené à vendre même en moins-values, il faut encore que sa réserve de capitalisation soit insuffisante pour que l'impact se matérialise en résultat. Force est de constater que de tels scénarios s'avèrent être trop peu fréquents pour avoir un impact sur les indicateurs de solvabilité.

Il est important de relever qu'en fonction des valeurs des paramètres alpha, mu et sigma, le nombre d'obligations modélisées avec le risque de crédit JLT n'est pas constant. Cela est dû au fait, qu'avec ces nouvelles valeurs des paramètres, il y a plus d'obligations pour lesquelles on ne trouve pas de solution au calibrage de $\pi(0)$ de sorte à égaliser le prix modèle avec la valeur de marché initiale.

Les impacts des paramètres alpha, mu et sigma, aussi marginaux soient-ils, sont en fin de compte principalement liés au nombre d'obligations modélisées en déterministe.

C'est pourquoi, on retiendra que les paramètres de calibrage du processus CIR régissant la diffusion de la prime de risque des obligations ont un impact non significatif sur l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit et justifie pourquoi l'effort n'a pas été concentré sur le calibrage de ces paramètres.

Conclusion sur l'apport de l'extension de Dubrana :

L'extension de Dubrana avait vocation à affiner la volatilité liée au risque de crédit en rendant les matrices de transition et donc en particulier les probabilités de défaut/survie stochastiques. Cela induit davantage de volatilité dans la valorisation des obligations. En revanche, les calculs tendent effectivement à montrer que cet affinage de la modélisation de la volatilité des valorisations des obligations n'a pas d'impact matériel sur les indicateurs S2 retenus. Par contre, il pourrait effectivement en avoir potentiellement davantage dans le cas d'introduction de corrélations entre obligations.

4.2 Sensibilités sur la structure du portefeuille d'actif

Il ressort des précédentes sensibilités que le calibrage du modèle n'a pas d'influence sur les résultats notamment car le montant de défauts $VM_0 - \sum_t F_t \times P^0(0, t)$ est inchangé. C'est pourquoi il peut être pertinent de se demander si, avec des flux F_t différents et donc des montants de défaut différents, les conclusions sur l'impact du JLT restent les mêmes. Pour arriver à cette fin, il s'agira ici de tester le modèle avec des flux différents en l'occurrence des coupons différents pour une même valeur de marché de départ, ce qui revient à supposer une allocation obligataire plus dynamique que dans le portefeuille de référence.

Pour rappel, comme mentionné précédent, le portefeuille d'actif modélisé correspond à la réplication d'un portefeuille de 6 obligations avec, dans le scénario central, les caractéristiques suivantes :

Obligation	Date d'échéance	Taux nominal	Nominal	VA pied de coupon	Prochain coupon	VM pied de coupon	Rating	Spread
1	31/12/2024	1,00%	4,97 M€	4,97 M€	0,05 M€	5,39 M€	AAA	-1,50%
2	31/12/2031	2,00%	25,43 M€	25,43 M€	0,51 M€	29,80 M€	AA	0,04%
3	31/12/2029	2,45%	11,68 M€	11,68 M€	0,29 M€	13,36 M€	A	0,51%
4	31/12/2026	3,80%	12,82 M€	12,82 M€	0,49 M€	14,70 M€	BBB	0,87%
5	31/12/2024	5,50%	1,19 M€	1,19 M€	0,07 M€	1,35 M€	BB	1,08%
6	31/12/2024	10,00%	0,69 M€	0,69 M€	0,07 M€	0,78 M€	B	5,21%

4.2.1 Allocation obligataire plus dynamique

De façon à capter l'effet d'une allocation obligataire plus risquée, dans le sens où le supplément de rendement des obligations s'accompagne aussi de davantage de risque, le test qui a été réalisé consiste à augmenter à la fois le taux de coupon et par voie de conséquence le spread en laissant la valeur de marché inchangée. Cela exprime que le sur-rendement de l'obligation est exactement compensé par

l'augmentation du spread et donc du risque de crédit sur l'obligation puisque la valeur de marché reste identique, en cohérence avec l'environnement risque-neutre.

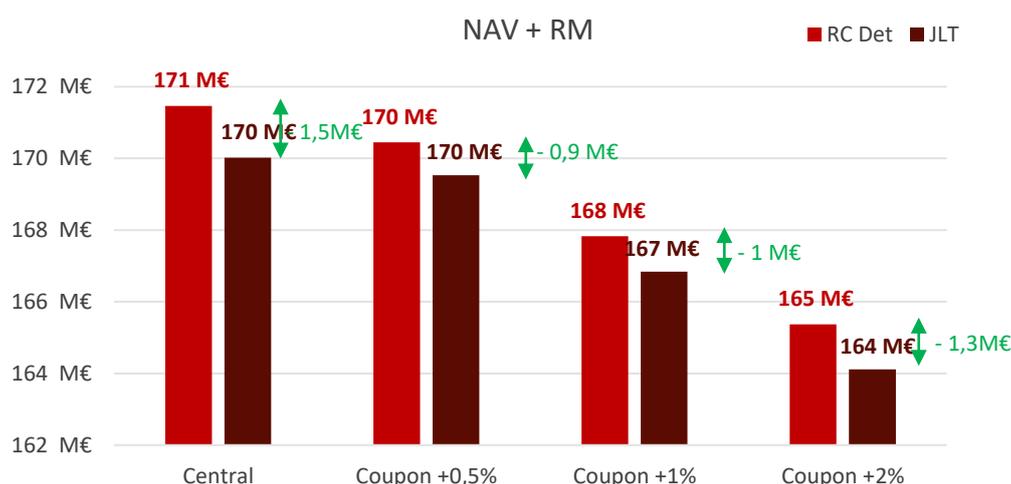
A noter que, dans le scénario central, le spread moyen (au sens du modèle déterministe) de notre portefeuille est de 0,3%.

Nous avons donc voulu tester le fait de modifier ce spread moyen, en modifiant le taux de coupon des obligations en mettant les valeurs suivantes :

Sensibilité n°	1	2	3
Variation du spread moyen	+ 0,5%	+ 0,9%	+ 1,8%

Ces spreads ont été obtenus en surcotant de respectivement de +0,5%, +1% et +2% les taux nominaux (= taux de coupon) de chacune des obligations du portefeuille.

Nous obtenons alors les résultats suivants :



	RC Det	JLT	RC Det + 0,5% cpn	JLT + 0,5% cpn	RC Det + 1% cpn	JLT + 1% cpn	RC Det + 2% cpn	JLT + 2% cpn
Nb obligations JLT	-	80	-	48	-	48	-	48
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4	0,0	1,7	0,0	2,0	0,0	2,5
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2	0,0	6,3	0,0	7,3	0,0	9,2
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5	0,0	11,7	0,0	12,7	0,0	14,6
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0	0,0	17,7	0,0	16,4	0,0	14,5
Duration montant de défauts	3,8	12,2	4,2	8,4	4,3	7,2	4,3	6,0

Interprétation :

Avant de mesurer les impacts de l'allocation plus dynamique, il est important de remarquer que le nombre d'obligations modélisées en stochastique n'est pas le même entre le scénario central et les sensibilités +0,5% , +1% et +2% de taux de coupon. En effet, dans ces cas-là, la prime de risque initiale

$\pi(0)$ de nombreuses obligations n'a pu être calibrée et elles sont donc projetées avec le modèle de crédit déterministe. Ainsi, si dans le cas central, 80 obligations sur 96 étaient modélisées en stochastique, il ne reste plus que 48 obligations dans les sensibilités qui sont modélisées avec le modèle JLT. Ces cas limites surviennent à cause de la contrainte de positivité qui s'applique à la prime de risque.

Il est donc possible de comparer entre elles seulement les sensibilités +0,5%, +1% et +2% de taux de coupon pour lesquelles le nombre d'obligations modélisées de façon stochastique est identique. Cependant, le rapprochement avec les résultats de la situation centrale reste biaisé.

Dans ces sensibilités, on observe que plus le spread augmente (plus la prime de risque augmente dans le cas du modèle JLT), plus la NAV diminue par rapport à une modélisation déterministe du risque de crédit. Toutefois, la diminution reste peu matérielle. On passe d'un écart de BE entre situation déterministe et stochastique de 0,9 M€ lorsque l'on augmente les taux de coupon de 0,5% à un écart de 1,3 M€ pour un taux de coupon réhaussé de 2%.

En effet, en augmentant le taux de coupon, cela induit que les flux associés augmentent également (tombées de coupon). En contrepartie, le montant moyen de défauts augmente car déterminé par la VM qui reste inchangée. Cela implique que la probabilité de faire défaut augmente avec la prise de risque.

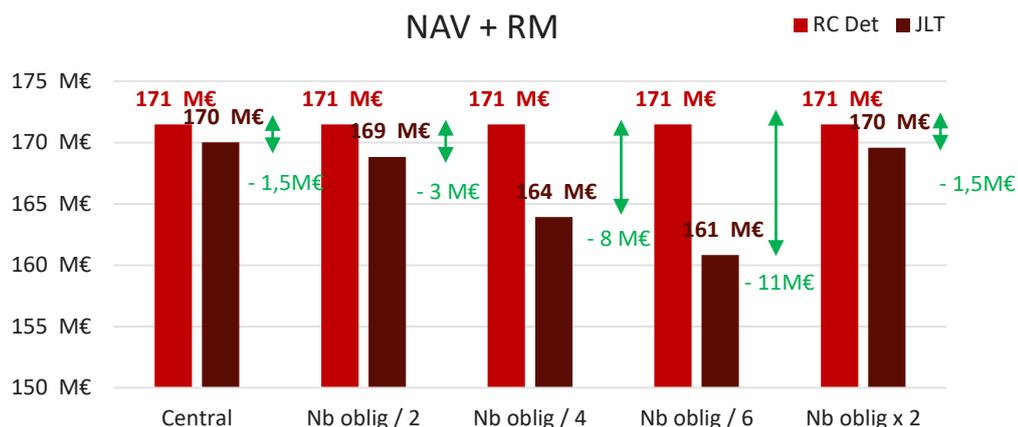
D'autre part, dans le modèle JLT, l'augmentation des spreads entraîne l'augmentation de la prime de risque et en l'occurrence les probabilités de défaut des obligations. Par conséquent, la fréquence de défaut des obligations augmente et ainsi l'apport de fonds propres.

Une conséquence de cette observation est que la modélisation stochastique du risque de crédit est plus pertinente pour les compagnies ayant investi dans une allocation obligataire risquée, en particulier dans le cadre de Solvabilité 2. Cette explication justifie certes le constat de l'augmentation de l'impact du JLT avec le caractère dynamique du portefeuille d'actifs mais reste à relativiser étant donné le faible impact in fine sur la NAV+RM.

4.2.2 Effet diversification

Des sensibilités précédentes, on peut retenir que des configurations peuvent avoir une influence sur l'impact du JLT mais il semble que dans la configuration du portefeuille de référence, ces impacts restent atténués. Il se pourrait alors que le portefeuille obligataire qui possède 96 titres est de fait déjà « trop » diversifié pour que les impacts du JLT soient visibles. Pour vérifier cela, un test de sensibilité consistant à réduire le nombre d'obligations du portefeuille en le divisant par 2, par 4 et par 6 a été effectué. Ainsi, des agrégats d'obligations sont constitués au point de départ et, à chaque pas de temps, chaque agrégat aura son tirage aléatoire pour le changement d'état, ce qui revient à une corrélation de 100% à l'intérieur de l'agrégat. Une multiplication par 2 du nombre d'obligations a également été réalisée pour confirmer la tendance des résultats.

Nous obtenons alors les résultats suivants :



	RC Det	JLT	JLT Nb oblig / 2	JLT Nb oblig / 4	JLT Nb oblig / 6	JLT Nb oblig x 2
Nb obligations JLT	-	80	40	20	10	160
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4	0,7	0,4	0,2	3,0
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2	3,3	1,8	1,0	12,3
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5	8,7	7,2	6,5	17,7
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0	23,3	27,8	30,2	12,9
Duration montant de défauts	3,8	12,2	12,2	12,4	12,2	12,1
Vol VM oblig à 1 an	5,4%	5,4%	5,5%	5,5%	5,5%	5,4%
Vol VM oblig à 5 ans	13,6%	14,0%	14,2%	14,3%	14,1%	13,9%
Vol VM oblig à 10 ans	27,3%	27,8%	27,9%	27,9%	28,0%	27,5%

Interprétation :

Comme on peut s'y attendre, en modélisation déterministe, le nombre d'obligations n'a aucun impact sur les indicateurs solvabilité 2, la NAV + RM reste identique quel que soit le nombre d'obligations du portefeuille.

Par ailleurs, on peut constater que la diversification fait converger les résultats obtenus avec le modèle JLT vers ceux du modèle déterministe où tous les défauts surviennent seulement en moyenne. Si avec 16 obligations en portefeuille, la modélisation stochastique entraînait une baisse de la NAV + RM de 11M€ (soit une baisse de plus de 6%), avec 24 obligations en portefeuille on observe un delta de NAV + RM de 8 M€ (soit une baisse de plus de 4%) et enfin avec une centaine d'obligations, le modèle JLT et le modèle déterministe convergent et on observe un écart de 1,5 M€ (soit près de 0,8%).

En effet, avec un certain nombre d'obligations indépendantes, on finit par se rapprocher de ce modèle puisque chaque année, il y a assez d'obligations en portefeuille pour que la loi des grands nombres s'applique. Ainsi, les défauts simulés sur chacune de ces obligations font que l'on obtient un taux de défaut annuel au global proche du taux moyen comme dans le modèle déterministe.

En définitive, la modélisation stochastique du risque de crédit a un impact conséquent sur les portefeuilles très peu diversifiés, ce qui concerne in fine un nombre restreint d'acteurs.

Toutefois, en concentrant la valeur de marché obligataire totale dans un nombre plus restreint d'obligations en portefeuille, ces agrégats d'obligations pourraient être assimilés à un ensemble

d'obligations plus classique d'un même groupe de risque/secteur parfaitement corrélées. Les sensibilités au nombre d'obligations plus faible ci-dessous pourraient alors avoir une portée plus générale et concerner de plus gros acteurs. Les impacts mesurés ici resteraient en revanche surévalués dans le sens où cela suppose que l'ensemble des obligations en portefeuille appartenant à un même secteur et agrégées dans ces agrégats d'obligations représentatives du secteur seraient parfaitement corrélées ce qui bien sûr est une hypothèse forte par rapport à la réalité.

4.3 Sensibilités à l'optionnalité du passif

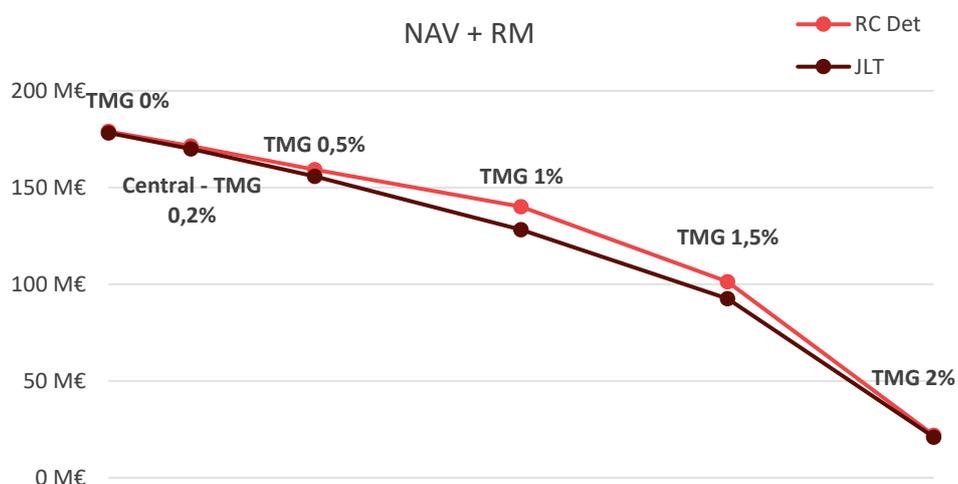
4.3.1 Sensibilités sur le niveau des TMG

La volatilité des actifs semble peu impacter les résultats. Il se peut que la raison provienne du fait que la garantie brute de taux à 0 présente une faible optionnalité au regard de ce que la compagnie est capable de générer comme production financière.

En effet, au premier ordre, avec des PVL de 207M€ sur une durée de passif de 11 ans et avec une PM de 1 Md €, l'assureur serait capable de produire 1,8% au-dessus du taux sans risque qui est à 0,24 %. Avec donc environ 2% de production financière brut de frais financiers, soit 1,82% net de frais financiers, en moyenne par rapport à un engagement de 0,2% moins les chargements de 0,8%, l'optionnalité est relativement faible et explique peut-être le peu d'impact du JLT. C'est pourquoi cette section évaluera les effets d'une augmentation de l'optionnalité sur l'impact du JLT sur les résultats.

Il s'agit ici d'étudier l'impact du TMG (taux minimum garanti) sur la modélisation stochastique du risque de crédit. En ce sens, nous avons fait varier le niveau garanti de 0% à 2% par pas de 50 bps. Pour rappel, le portefeuille de référence garanti un taux de 0,2% brut de chargements et les sensibilités sont également en garantie brute.

Les résultats des projections sont présentés ci-dessous :



	RC Det	JLT	JLT TMG net	JLT TMG 0%	JLT TMG 0,5%	JLT TMG 1%	JLT TMG 1,5%	JLT TMG 2%
Nb obligations JLT	-	80	80	80	80	80	80	80
Nb défauts à 1 an	0,0	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
Nb défauts à 10 ans	0,0	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2
Nb défauts à 60 ans	0,0	11,5	11,6	11,6	11,7	11,6	11,5	11,4
Duration occurrence de défauts	0,0	18,0	17,9	18,1	18,3	17,9	17,8	17,5
Duration montant de défauts	3,8	12,2	12,8	12,2	12,5	12,4	12,7	13,1

Interprétation :

Avant même de regarder l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit, nous pouvons rappeler que le fait d'augmenter le TMG fait réduire de façon significative les fonds propres de l'assureur. En effet, en situation de taux bas, les produits financiers sur le marché ne permettent pas forcément de satisfaire les engagements. Ainsi, le fait d'augmenter les TMG augmente les engagements ce qui fait baisser significativement la NAV + RM, car l'assureur est obligé de financer par ses fonds propres ses engagements vis-à-vis des assurés dans un nombre plus important de scénarios, que ce soit en situation de modélisation déterministe ou stochastique du risque de crédit.

Par ailleurs, lorsque l'on regarde l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit, les résultats montrent une convergence de la NAV entre les résultats du modèle JLT et ceux du modèle déterministe lorsque les TMG sont inférieurs à 0,5% mais aussi pour un niveau de TMG de 2%.

En effet, dans le cas où les produits financiers permettent de servir « largement » les TMG, (TMG à 0% et 0,2%) l'écart entre une modélisation déterministe et stochastique du risque de crédit reste très mesuré. Les situations de défaut ne mettent pas « en danger » l'assureur qui est en mesure de servir ses engagements.

Concernant le niveau de TMG le plus élevé, à savoir le TMG à 2%, les tests effectués sur l'actif ont montré que si les paramètres de modèle n'ont pas d'effet sur les résultats, en revanche, la prise de risque a un impact sur la modélisation stochastique du risque de crédit. C'est pourquoi l'on pourrait s'attendre à ce que plus les TMG augmentent et donc plus le portefeuille est risqué, plus l'écart entre les résultats avec la modélisation déterministe et le JLT soit marqué. Toutefois, les résultats ci-dessus amènent à des conclusions plus nuancées.

En effet, les niveaux des taux étant assez bas (0,24% pour le taux 10 ans avec VA), avec un TMG à 2%, le coût de la garantie est déjà pris en compte dans le scénario équivalent certain du fait que les produits financiers projetés ne suffisent déjà plus à financer les taux garantis. Ainsi, l'augmentation de l'aléa sur les produits financiers induit par le modèle JLT par rapport au modèle déterministe ne va avoir comme conséquence que de capter l'asymétrie provenant des rares scénarios très favorables au point de partager des bénéfices et de leurs homologues très défavorables tout aussi rares. Étant donnée la faible occurrence de ces scénarios, la différence entre les résultats avec le modèle JLT et ceux avec le modèle déterministe de risque de crédit se réduit fortement.

En revanche, dès lors que l'on se rapproche de l'optionnalité, c'est-à-dire que les produits financiers sont proches du niveau des TMG et où le coût d'option est important, la hausse de la volatilité induite par le risque de crédit a plus d'impact sur les marges de l'assureur. C'est ce qui se produit pour les

niveaux des TMG à 1% et 1,5%. Comme estimé plus haut, les produits financiers étant en moyenne de l'ordre de 1,8% en équivalent certain, en ajoutant davantage d'aléa sur les rendements obligataires et par conséquent sur les produits financiers, les scénarios dans lesquels l'assureur doit couvrir les engagements en apportant des fonds propres sont d'autant plus fréquents. C'est pourquoi on peut observer un écart de NAV + RM entre modèle déterministe et modèle JLT de l'ordre de 12M, soit une baisse de plus de 8,5% pour un contrat dont le TMG serait à 1%.

Ainsi, on peut conclure, l'impact d'une modélisation stochastique du risque de crédit peut devenir matériel lorsque l'on est proche de l'optionnalité.

4.3.2 Remontée des taux d'intérêt

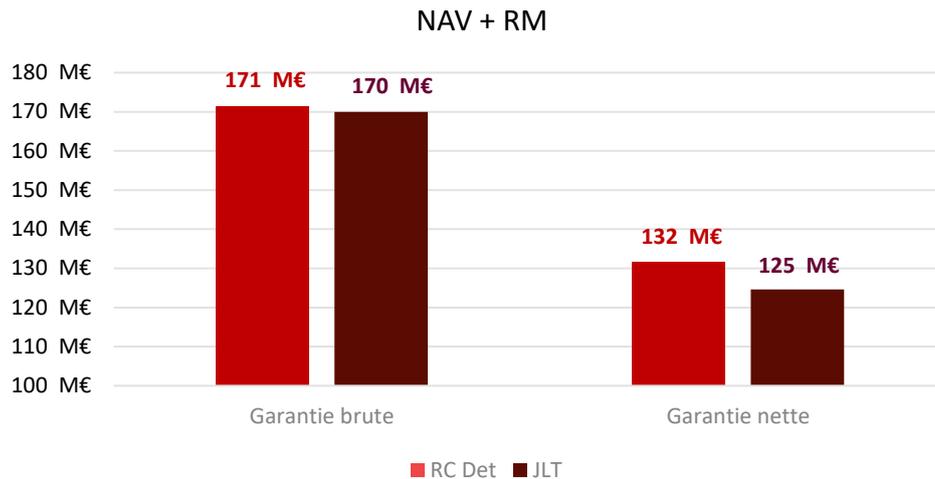
Afin de compléter cette analyse, une sensibilité supplémentaire sur le scénario central a été réalisée afin notamment de réactualiser la conclusion ci-dessus dans le contexte actuel de remontée des taux. Il s'agit d'une situation où les taux auraient été translatés de +2%. On observe alors :

	Central	Taux + 2%
Δ NAV (RC Det - JLT)	-1,5 M€	-0,5 M€

Ainsi, en réhaussant le niveau des taux de 2%, l'écart entre la modélisation déterministe et la modélisation stochastique du risque de crédit se réduit. En effet, dans ce cas de figure, les produits financiers étant plus importants, même en introduisant de l'aléa, l'assureur se retrouve encore plus rarement dans une situation dans laquelle il doit apporter des fonds propres, ce qui conforte l'analyse précédente montrant que la baisse de l'optionnalité a tendance à réduire l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit

4.3.3 Passage en garantie nette

On cherche à étudier ici l'impact de la modélisation stochastique si les engagements envers les assurés étaient nets de chargements.



Interprétation :

Le passage en garantie nette implique un versement minimum fixe aux assurés. De ce fait, lorsque l'année a été bonne, les assurés voient leur versement augmenter. A l'inverse, lorsque l'année est moins bonne, l'assureur se doit de verser un montant fixe aux assurés. Ainsi, alors que pour une garantie brute, l'assureur pouvait déduire ses chargements du montant, il a moins de marge de manœuvre avec un engagement de taux net de frais, ce qui est également de nature à augmenter l'optionnalité des contrats.

Comme observé dans les sensibilités sur le TMG, il en résulte qu'en augmentant l'engagement de l'assureur, la modélisation du risque de crédit impacte davantage les fonds propres de l'assureur.

VI. Limites de l'étude

- Comme expliqué dans le paragraphe II.5.6, la spécificité de l'implémentation du modèle JLT pour ce mémoire présente l'inconvénient de ne pas modéliser nativement les corrélations entre les changements d'état ou entre les spreads des obligations. Bien que, comme expliqué au sujet des sensibilités sur les paramètres de modèles, le montant moyen de pertes des obligations est déterminé à une date donnée par la valeur de marché de l'obligation et la courbe des taux sans risque à date, il se peut que la modélisation de corrélations entre obligations puisse avoir un impact sur les résultats présentés. Par exemple, le fait que les défauts surviennent en même temps devrait avoir tendance à creuser l'asymétrie de partage des bénéfices entre assuré et assureur et par conséquent augmenter le coût de l'engagement pour l'assureur.
- De même, les corrélations entre le risque de crédit des obligations et les autres variables financières (comme les actions) ne sont pas non plus modélisées. Elles pourraient également alourdir le coût de l'engagement pour les raisons évoquées ci-dessus.
- Une autre limite du modèle JLT est qu'il projette le passage des états comme une chaîne de Markov, c'est-à-dire que les états futurs ne dépendent que de l'état présent et pas du passé. Or, il est tout à fait réaliste de considérer au contraire que si l'émetteur de l'obligation est dans une dynamique négative, avec plusieurs dégradations successives par exemple, les investisseurs pourraient être d'autant plus frileux et considérer une probabilité de défaut plus grande.
- La Provision pour Dépréciation Durable n'est pas modélisée. Or, il se peut que les impacts de la volatilité des valorisations obligataires puissent avoir un peu plus d'impact sur les produits financiers si elle était modélisée.
- Les résultats sont également tributaires de l'environnement économique. En l'occurrence, il est tout à fait possible que le contexte économique actuel de remontée des taux et d'inflation entraîne des conséquences sur les variations de spread et sur le marché obligataire en général qui ne sont actuellement pas prévues dans les calculs de ce mémoire. Cela pourrait éventuellement influencer sur les raisonnements et conclusions avancés sur la base des résultats dans ce mémoire.

Conclusion

Afin de répondre à la problématique consistant à déterminer les profils de compagnies et les configurations dans lesquelles une modélisation stochastique du risque de crédit impacterait le plus la solvabilité des portefeuilles d'épargne en euros, nous avons commencé par rappeler les principes de calcul règlementaire des indicateurs de solvabilité sous Solvabilité 2 qui seront analysés en suite. En particulier, nous sommes notamment revenus sur la nécessité d'une approche par Monte-Carlo de sorte à capter l'impact de la volatilité des actifs sur l'optionnalité des contrats. Dans ce cadre, la modélisation de la volatilité des actifs s'avère déterminante en particulier pour les actifs obligataires qui restent la composante majeure des portefeuilles d'épargne en euros. Or, ces actifs étant soumis au risque de crédit, nous avons choisi d'étudier une modélisation du risque de crédit susceptible de capter le plus fidèlement la volatilité à la fois sur la valorisation des obligations et sur les produits financiers générés, en l'occurrence le modèle JLT avec extension de Dubrana qui tient compte de ces deux sources de volatilité.

Après avoir défini les caractéristiques du portefeuille fictif voué à être représentatif du profil moyen d'une compagnie proposant des contrats d'épargne en euros, nous avons présenté les résultats sur ce portefeuille de référence. Ces derniers ont révélé un faible impact du modèle stochastique du risque de crédit.

Nous avons donc exploré quels facteurs seraient de nature à rendre une compagnie davantage sensible à cette modélisation stochastique du risque de crédit.

Nous avons en premier lieu écarté le calibrage des paramètres du modèle qui ont un impact non significatif. Le corollaire de ce constat est que la partie du modèle liée à l'extension de Dubrana qui permet de rendre stochastique les probabilités de passage (et donc d'influer sur la volatilité des valeurs de marché des obligations) introduit une complexité sans impact matériel sur les résultats dans le contexte de cette étude.

Etant donné que c'est donc la volatilité sur les produits financiers qui paraît prépondérante, nous avons testé des portefeuilles obligataires plus dynamiques pour un même montant de plus-values latentes (pour rester comparables), car ils sont susceptibles d'être plus risqués et donc d'entraîner plus de volatilité. Là encore, l'impact de la modélisation stochastique s'est révélé non significatif au regard de l'impact d'autres facteurs.

La diversification des obligations apparaît en revanche avoir des effets significatifs sur la valorisation économique dans le sens où la concentration de la valeur de marché obligataire dans un plus petit nombre d'obligations pénalise les indicateurs Solvabilité 2 de façon matérielle.

Nous nous sommes également demandé si le faible impact de la volatilité du portefeuille d'actifs pouvait s'expliquer par la faible optionnalité du portefeuille de référence. Effectivement, l'optionnalité rend plus sensible les fonds propres économiques de la compagnie donc la solvabilité mais de façon limitée même au plus fort de l'optionnalité.

En synthèse, il apparaît que le facteur principal demeure le nombre d'obligations du portefeuille. Avec un certain nombre d'obligations (déjà avec une centaine), la loi des grands nombres s'applique et limite la volatilité sur les produits financiers induite par les défauts. Or, la volatilité sur les produits financiers demeure la source de volatilité principale en termes d'impact sur les indicateurs de solvabilité par rapport à la volatilité sur les valeurs de marché. En effet, en l'occurrence, avec un petit nombre d'obligations, la volatilité induite par le modèle stochastique sur les produits financiers via les

événements de défaut est importante et l'impact du modèle stochastique du risque de crédit devient majeur.

Cette dernière conclusion reste toutefois à nuancer car il se pourrait qu'en modélisant la corrélation entre les défauts des obligations et les autres classes d'actifs (notamment des baisses sur les marchés actions), les impacts seraient différents mêmes pour des assureurs de taille plus importante.

Dans ce mémoire, nous avons retenu une approche très simplifiée concernant les corrélations entre obligations (corrélations nulles) car l'enjeu principal était de mesurer une alternative à l'approche par bloc qui revient à une mutualisation totale au sein du bloc. Notre approche conduit ainsi à un encadrant de l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit. Pour estimer un majorant, il est possible de garder l'approche ligne à ligne (que nous avons utilisée) en agrégeant des obligations (de même secteur par exemple), ce qui revient à considérer une corrélation maximale entre elles. La sensibilité au nombre de lignes obligataires réalisée permet donc d'apprécier cet élément et d'encadrer l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit.

Enfin, les résultats sont également tributaires de l'environnement économique. En l'occurrence, il est tout à fait possible que le contexte économique de remontée des taux et d'inflation depuis le 31/12/2021 entraîne des conséquences sur les variations de spread et sur le marché obligataire en général qui ne sont actuellement pas prévues dans les calculs de ce mémoire même si la sensibilité sur le niveau des taux (page 70) laisse penser que les conséquences ne semblent pas matérielles sur l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit.

Bibliographie

https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20220713_as139_assureurs_s2_decembre_2021.pdf#page=4

<https://www.goodvalueformoney.eu/documentation/composition-moyenne-des-fonds-en-euros-classiques-a-fin-2020>

Règlement délégué de la Directive Solvabilité II : <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2015:012:FULL&from=EN>

Fischer Black et Myron Scholes : The pricing of options and corporate liabilities. The Journal of Political Economy, pages 637–654, 1973.

Robert A. Jarrow, David Lando et Stuart M. Turnbull : A Markov model for the term structure of credit risk spreads. The Review of Financial Studies, pages 481–523, 1997.

Ludovic Dubrana : A stochastic model for credit spreads under a risk-neutral framework through the use of an extended version of the Jarrow, Lando and Turnbull model. 2011

Damien Brigo, Fabien Mercurio, Interest Rate Models – Theory and Practice, SPRINGER

Tahmoor Qureshi, Scénarios économiques dans un contexte Solvabilité II, mémoire d'actuariat

John Hull, Options, futures et autres actifs dérivés, PEARSON

Roland Portait et Patrice Poncet : Finance de marché, DALLOZ

F. Jamishidian (1997) LIBOR and Swap Market Models and Measures, Finance and Stochastic

S&P Global Rating : www.spglobal.com

[FRANCIS A. LONGSTAFF, SANJAY MITHAL, and ERIC NEIS - Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market](#)

[20201204_article_gse_revue.pdf \(banque-france.fr\)](#)