

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Mathys Frans Carmel BALDACCHINO

Titre Etude du modèle de Black-Litterman et de son application dans le
cadre d'allocation stratégique d'un établissement financier

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

P.-A. Patard

F. Tsayem

F. Rouchati

Membres présents du jury de l'ISFA

D. Dorobantu

signature

Entreprise :

Nom : Caisse des Dépôts et
Consignations

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : ODO Patrice

Signature Patrice ODO

Invité : CAISSE DES DÉPÔTS ET CONSIGNATIONS

Nom : Signé électroniquement le 24/08/2023 15:25:40

Signature :

***Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Patrice ODO
CAISSE DES DÉPÔTS ET CONSIGNATIONS
Signé électroniquement le 24/08/2023 15:27:56

Signature du candidat



Résumé

Dans ce mémoire, nous explorons la problématique de l'allocation d'actifs sous l'angle du modèle développé par les chercheurs *Fischer Black* et *Robert Litterman*. Il est premièrement rappelé et appliqué à un portefeuille d'indices internationaux. Ceux-ci sont composés d'actions de moyennes et grandes capitalisations boursières.

Ensuite nous étudions les paramètres du modèle de référence, et proposons diverses innovations pour mieux retranscrire l'objectif de mélanger approches tactique et stratégique. Nous nous assurons également d'obtenir des estimations empiriques cohérentes de composantes essentielles à l'instar de la matrice de covariance.

Dans un troisième temps, une attention est portée sur la fonction d'utilité et l'intérêt d'une mesure de risque retranscrivant le profil et les contraintes de l'investisseur. Les séries temporelles sont abordées pour les considérer comme génératrices de vues à court terme afin de les intégrer au modèle d'allocation.

Après avoir traité ces sujets, nous nous questionnons sur le choix de l'hypothèse sous-jacente du modèle considérant que les rendements ont une distribution gaussienne. S'en suit une proposition alternative moins réductrice suggérant l'utilisation de vecteurs aléatoires α -stables avec une application directe à nos données. Ceci est ajouté au modèle de *Black – Litterman* de façon expérimentale sur un portefeuille de quatre actifs.

Enfin, nous évoquons l'allocation de la Direction de la Gestion des Actifs du Groupe Caisse des Dépôts ainsi que la faisabilité de la modélisation quantitative d'un portefeuille contraint dans ses variations par des fenêtres d'amplitude et par une pré-allocation plus globale. Quelques pages portent sur le déliassage de séries de rendements pour retrouver le risque réel notamment sur des actifs considérés comme peu aptes au traitement quantitatif.

Des ouvertures et limites sont soulignées tout au long de ces travaux pour permettre au lecteur de reprendre l'étude qui a été menée et de comprendre certains mécanismes d'un modèle complexe, qui aujourd'hui encore est le sujet de nombreuses recherches.

Mots-clés : *Gestion d'actifs, Modèle de Black-Litterman, Modélisation, Stable multivarié, Allocation d'actifs, Optimisation, Rendement-risque, Séries temporelles, Estimation empirique*

Abstract

In this paper, we explore the problem of asset allocation from the perspective of the model developed by researchers *Fischer Black* and *Robert Litterman*. This model will be reviewed and applied to a portfolio of international stock indexes. These are composed of medium and large market capitalizations.

We will then study the parameters of the benchmark model to see whether some innovations better reflect the objective of mixing tactical and strategic approaches. We will also make sure that we obtain consistent empirical estimators of essential components, such as the covariance matrix.

In a third step, attention is drawn to the utility function and the interest of a risk measure that reflects the investor's profile and constraints. Then, time series will be discussed in order to consider them as generators of views to integrate them into the allocation model.

After having dealt with these topics, we question the choice of the underlying hypothesis, considering that the returns follow a Multivariate Gaussian distribution. This will be followed by an alternative proposal suggesting the use of α -stable vectors with a direct application to our data. We will then add this to the Black-Litterman model in an experimental way on a portfolio of four assets.

We will eventually discuss the allocation of the Asset Management Department of the public company Caisse des Dépôts et Consignations as well as the feasibility of modeling a portfolio constrained by a more global pre-allocation. A few pages will be dedicated to unsmoothing methods for return series in order to recover the real underlying risk for some assets like Private Equity.

Openings and limitations will be highlighted throughout this work to allow the reader to continue with the study that has been carried out and to understand certain mechanisms of a complex model which has been the subject of much research over the last few years.

Keywords : *Asset management, Black-Litterman model, Modelling, Multivariate Stable, Asset allocation, Optimisation, Risk-return, Time series, Empirical estimation*

Note de synthèse

L'allocation d'actifs, plus vulgairement la façon dont nous investissons notre argent, résulte de plusieurs arbitrages. Le premier est dans l'approche, elle peut être plutôt tactique ou alors stratégique. Pour des investissements cherchant à exploiter des opportunités à court terme, nous parlerons d'allocation tactique. Des placements basés sur une vision à long terme s'inscriront eux dans une allocation stratégique. Entre ces deux extrémités, il n'est pas chose facile de trouver une combinaison, une interpolation permettant de profiter de bons positionnements tactiques en conservant une direction de fond.

Les chercheurs *Black* et *Litterman* ont alors proposé une solution autorisant l'ubiquité des objectifs sous la forme d'un modèle en considérant que la stratégie (le support) est représentée par le marché efficient. Les vues sur un horizon proche représentant l'autre approche (tactique) sont alors combinées au socle de marché.

Financièrement parlant, l'apport de ce modèle est qu'il cherche à trouver une pondération optimale qui rallie deux profils différents. Cela permet de modifier les rendements attendus et *in fine* l'allocation. Pour ce faire, il faut utiliser l'information du marché en s'appuyant sur la théorie moderne du portefeuille et le modèle d'évaluation des actifs financiers (*MEDAF*) pour obtenir des rendements d'équilibre du marché. Nous supposons que l'investisseur cherche à maximiser son rendement tout en s'exposant raisonnablement en termes de risque. Cela se traduit mathématiquement par une optimisation *Moyenne-Variance* comme proposé par H. Markowitz :

$$\max w' \Pi - \frac{\lambda}{2} w' \Sigma w$$

Si nous considérons que le marché est optimal et que tous les investisseurs qui le composent suivent ce mécanisme, alors en ayant connaissance du risque et du portefeuille de marché (l'allocation globale du marché), nous pouvons retrouver les rendements moyens Π qui correspondent à l'équilibre. Si maintenant nous nous positionnons sur l'autre rive, une anticipation tactique se traduit comme une *vue* sur certains actifs. Celle-ci figure comme étant une prévision de hausse, de baisse ou de sur-performance d'un actif par rapport à d'autres. Nous pouvons alors concevoir cette *vue* comme l'attente de la prévision Q (le rendement associé) formulée avec une part d'incertitude Ω en composant un portefeuille P composé des investissements sur lesquels la vision porte. En ajoutant que μ correspond à la moyenne des rendements, nous pouvons alors écrire :

$$P\mu = Q + e \quad \text{où } e \text{ une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance } \Omega$$

Lorsque plusieurs *vues* sont formulées, le système réel devient alors un système vectoriel. En conditionnant les informations de marché à ces anticipations, il devient alors possible de mélanger les deux sources d'informations pour obtenir un rendement et un risque *composites*, voici le modèle de Black-Litterman :

$$\begin{aligned} \mu_{composite} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q] \\ \Sigma_{composite} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} + \Sigma \end{aligned}$$

A partir de rendements modifiés pour refléter un mélange, nous pouvons utiliser le principe de maximisation du *Rendement moyen* pour un *Risque* modéré en modifiant ces deux composantes. Cela nous permet finalement obtenir un portefeuille *optimal* w^* en résolvant le problème :

$$w^* = [\lambda\Sigma_{composite}]^{-1}\mu_{composite}$$

Visuellement, nous pouvons l'interpréter comme suit :

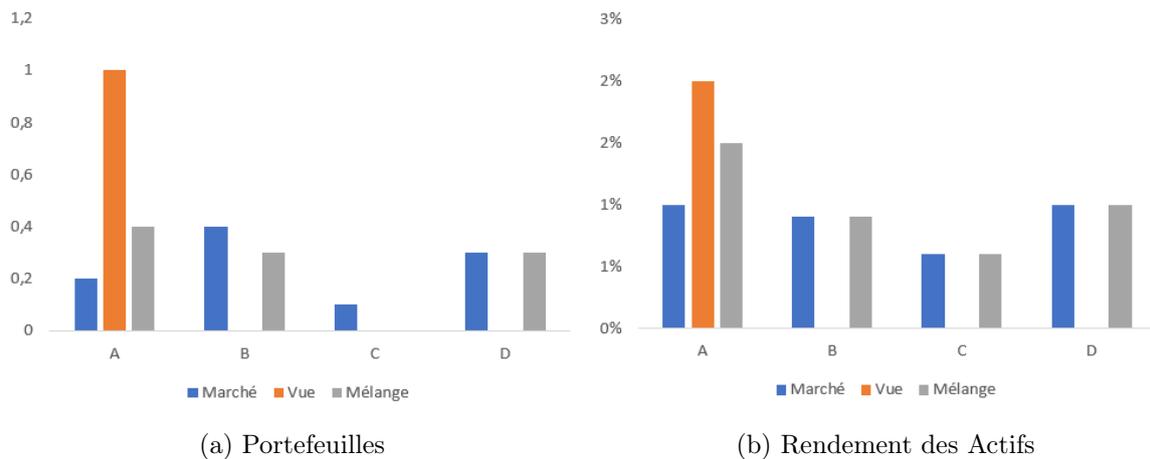


FIGURE 1 – Illustration de l'allocation *mélange*

Le modèle présenté comme ceci semble simple mais de nombreuses spécifications sont nécessaires. Par exemple, l'*incertitude* et sa retranscription sous forme de variation de portefeuille ne sont pas aisées à intégrer et nécessitent une analyse. Nous étudions alors chaque pièce de ce puzzle pour en comprendre le fonctionnement. Pour plusieurs d'entre elles, nous essayons des méthodes différentes du modèle initial, pour chercher une meilleure traduction de notre mélange désiré. Par exemple, nous effectuons une transformation polynomiale sur la *certitude* pour que l'évolution du portefeuille en fonction de la confiance dans les anticipations soit cohérente avec un impact relativement progressif. Cette sur-réaction du modèle à certains paramètres est un point important car c'est un phénomène assez fréquent dans nos parties suivantes, un temps conséquent est demandé à chaque nouveau modèle proposé.

Après avoir cerné les enjeux de chacun des paramètres, nous étudions différentes pistes d'amélioration pour compléter certains manques reprochables à la formulation originale. Nous n'avons aucunement la prétention de remplacer celui-ci mais plutôt d'offrir des alternatives répondant à des besoins différents. Cette idée est le fil directeur de ce mémoire.

Pour concevoir des *vues*, nous avons recours à des modèles auto-régressifs (qui utilisent le passé pour le projeter et générer une prédiction) unidimensionnels et multidimensionnels. Nous comparons les résultats avec les rendements historiques et nous assurons de la cohérence statistique de ceux-ci. Ils sont ensuite utilisés pour obtenir des allocations à cheval entre tactique et stratégique sans avoir besoin de formuler des anticipations subjectives.

Les limites de l'utilisation de la *variance* comme mesure de risque sont ensuite soulignées. Celle-ci capture maladroitement une part de risque positif ce qui peut nuire à l'estimation d'une allocation optimale au sens du couple *Rendement-Risque*. Nous suggérons l'utilisation de la *Conditional Value-at-Risk* (*CVaR*, Capital à risque conditionnel). Nous modifions alors le modèle de Black-Litterman en remplaçant alors la *Variance* par cette mesure de risque cohérente. Les allocations obtenues diffèrent quelque peu et ce changement proposé permet de refléter certaines dépendances dans le risque. L'adaptation proposée permet également d'obtenir une formule modifiée pour le *MEDAF*.

Les hypothèses relatives à la distribution des rendements sont également une limite car il n'est pas vérifiable empiriquement que celle-ci appartienne à la famille des lois Normales, notamment à cause de la présence d'une queue *plus lourde* (les événements rares sont sous-représentés).

Nous faisons alors l'estimation d'un vecteur α -stable pour approcher aléatoirement les rendements en utilisant les travaux de Nolan (2008) [21]. Cela après avoir identifié la possible distribution des rendements comme n'étant pas à caractère elliptique (asymétrie des rendements). Deux méthodes sont utilisées et comparées, la première est empirique tandis que la seconde est projective et nécessite des produits matriciels volumineux. Des résultats en quatre dimensions sont présentés, une première dans l'application de cette famille aux données financières (uniquement décrite en bivarié dans la recherche disponible).

Freinés par la complexité de calcul qui empêche l'étude sur un portefeuille plus complet, nous donnons une critique constructive de notre approche. Le partitionnement d'une sphère est une des limites car l'approche suggérée repose sur un découpage polaire qui ne sectionne pas celle-ci en parts égales. Les vecteurs α -stables sont ensuite simulés en grand nombre pour obtenir une base qui sert dans la résolution du problème d'allocation. Nous proposons de modifier la structure fondamentale des rendements du modèle de Black-Litterman. Dans celui-ci, les rendements R sont supposés comme suit :

$$R \sim N(\mu, \Sigma) \qquad \mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

En étudiant l'intérêt de la *Variance* composite des rendements moyens μ , nous faisons l'hypothèse que la variance empirique suffit car l'impact demeure peu significatif. Cela nous autorise par la suite à considérer le mélange *a posteriori* comme une modification figée de μ . Cela revient à ne plus considérer $\mu_{posteriori}$ comme une variable aléatoire mais comme un vecteur de réels. Grâce à ce relâchement, nous reformulons alors l'hypothèse des rendements R comme suit :

$$R \sim S(\alpha, \mu, \Gamma) \qquad \mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

Une des complications concerne l'estimation de Σ : elle est nécessaire pour l'estimation des rendements d'équilibre mais les distributions α -stables n'admettent pas de moment d'ordre 2 fini (à l'exception de la loi Normale qui est un cas particulier).

Nous supposons alors que la variance empirique des derniers rendements donne une information sur la stabilité actuelle des marchés financiers. Même si celle-ci est supposée être asymptotiquement infinie, elle est localement finie (car empirique avec un nombre d'observations limité). Les résultats sur le vecteur des rendements sont alors que :

$$R \sim N(\mu_{posteriori}, \Sigma) \quad \Rightarrow \quad R \sim S(\alpha, \mu_{posteriori}, \Gamma)$$

Les rendements d'équilibres sont obtenus grâce aux travaux préliminaires sur le changement de mesure de risque. Cette construction alternative permet par la suite d'obtenir des portefeuilles optimaux au sens du couple *Espérance-CVaR* tout en combinant stratégie et tactique. Des résultats sont également présentés et critiqués en offrant une conclusion sur l'idée et les hypothèses proposées.

Enfin dans un dernier temps, une étude complémentaire est tournée sur l'application du modèle de Black-Litterman standard aux problématiques de la Gestion des Actifs du groupe Caisse des Dépôts. Les actifs utilisés sont plus diversifiées et offrent des solutions d'investissement larges. Nous avons un panel élargi de classes tandis que la majeure partie de ce mémoire se concentre sur un portefeuille d'indices internationaux d'actions. Nous ajoutons ici différents produits de taux pour calquer au mieux les actifs disponibles. Nous définissons d'abord le profil investisseur du département Direction des Gestions d'Actifs ainsi que les contraintes des deux directions financières (Direction Financière du Fonds d'Épargne et Direction Financière de la Section Générale). Ensuite, nous déterminons les encadrements à mettre en place sur les portefeuilles issus du modèle quantitatif. Les allocations proposées sont alors commentées et nous permettent finalement de conclure sur l'intérêt d'utiliser un modèle modifié quand les encours sont conséquents et que des exigences restreignent la liberté d'investissement.

Executive summary

Asset allocation, or more simply, the way we invest our money, is the result of several trade-offs. The first is in the approach, whether it is tactical or strategic. For investments that seek to exploit short-term opportunities, we will speak of a tactical allocation, while investments based on a vision will be part of a strategic allocation.

Between these two extremes, it can be quite tricky to find a combination, an interpolation that allows us to take advantage of good tactical positions while maintaining a basic direction. The researchers Black and Litterman proposed a solution allowing the ubiquity of objectives in the form of a model by considering that the strategy, the support, is the efficient market. The visions on a close horizon representing the other approach are then combined with the market base.

Financially speaking, the contribution of this model is that it seeks to find an optimal weighting that brings together two different profiles. It modifies the expected returns and at the end the allocation. To do this, we use market information based on modern portfolio theory and the Capital Asset Pricing Model (CAPM) to obtain market equilibrium returns. We assume that the investor seeks to maximize his return while taking on a reasonable amount of risk. This translates mathematically into a mean-variance optimization as proposed by H. Markowitz :

$$\max w' \Pi - \frac{\lambda}{2} w' \Sigma w$$

If we consider that the market is optimal and that it follows this reasoning, then with knowledge of the risk and the market portfolio (the overall market allocation), we can find the component of average returns Π that corresponds to the equilibrium returns. If we now position ourselves on the other side of the market (as a single investor), a tactical expectation translates into a forecast of a rise, fall or outperformance on certain assets compared to others. We can then think of this view as the expectation of the forecasted returns Q formulated with an element of uncertainty Ω by composing a portfolio P made up of the investments on which the view is based. By adding that μ corresponds to the average of the returns, we can then write :

$$P\mu = Q + e \quad \text{where } e \text{ a random variable with null mean and variance } \Omega$$

When several *views* are formulated, the real system becomes a vector system. By conditioning, it becomes possible to mix the two sources of information to obtain a composite return and risk, here is the Black-Litterman model :

$$\begin{aligned} \mu_{mixture} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q] \\ \Sigma_{mixture} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} + \Sigma \end{aligned}$$

From modified returns to reflect a mixture, we can use the reasoning of maximizing the *average Return* for a moderate *Risk* by modifying these two components to finally obtain an *optimal* portfolio by solving the optimization problem and obtain :

$$w^* = [\lambda\Sigma_{mixture}]^{-1}\mu_{mixture}$$

This translates visually as follows :

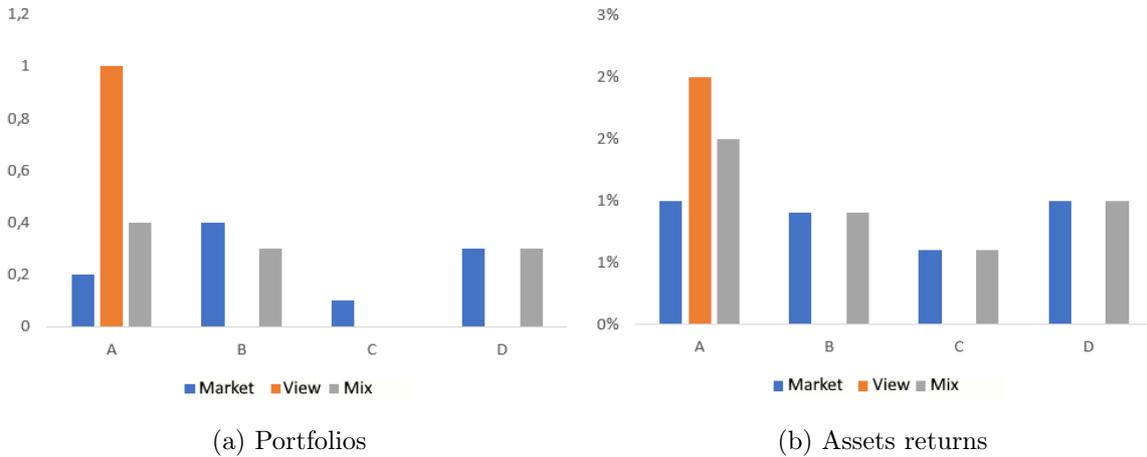


FIGURE 2 – Asset mixing concept

The model presented as such seems simple but many specifications are necessary. As an example, the *uncertainty* and the retranscription of it in the form of portfolio variation require to be analyzed to integrate them consistently. We then study each piece of the puzzle to understand how it works. For several of them, we try different methods from the initial model to find a better translation of our desired mix. For example, we perform a polynomial transformation on the *certainty* so that the evolution of the portfolio according to it is consistent and the impact is progressive. This oversensitivity of the model to certain parameters is an important point because it is a fairly frequent phenomenon in our following parts, a significant amount of time is required for each new model proposed.

After having identified the issues of each of the parameters, we study different ways of improvement to complete certain shortcomings of the original formulation. We do not intend to replace the original formulation but rather to offer alternatives to meet different needs. This idea is the guiding thread of this thesis.

To design interviews, we use auto-regressive unidimensional and multidimensional models (which use the past to project it and generate a prediction). We compare them with historical returns and ensure the consistency of the results. These are then used to obtain allocations that straddle the line between tactical and strategic without the need for personal expectations.

The limitations of using the variance as a risk measure are then highlighted, as it inappropriately captures a share of positive risk. It can be detrimental to the estimation of an optimal allocation in the sense of the risk-return trade-off. We suggest the use of the Conditional Value-at-Risk (*CVaR*) and extend the Black-Litterman model by replacing the Variance with this consistent risk measure. The resulting allocations differ somewhat and this suggested change allows us to reflect some dependencies in risk. The proposed adaptation also provides a formula for the modified *CAPM*.

The assumptions about the distribution of the returns are also a limitation because it is not empirically verifiable that they belong to the normal distributions family, particularly because of the presence of a heavy tail.

We then estimate a multivariate α -stable distribution to approximate the vector of returns using the work of Nolan (2008) [21] after having identified the possible distribution of returns

as not being elliptically distributed. Two methods are used and compared, the first is empirical while the second is projective and requires large matrix products. Results in dimension 4 are presented, a first in the application of this family to financial data (only described in the bivariate case in the available research).

Constrained by the computational complexity that prevents calculations on a more complete portfolio, we give a constructive criticism of our approach. The partitioning of a sphere is one of the limitations as the suggested approach relies on a polar partitioning which does not split the sphere into equal parts.

The α -stable random vectors are then simulated in large numbers to obtain a basis which is used in the resolution of the allocation problem. We propose to modify the fundamental structure of the returns of the Black-Litterman model. In this model, the returns R are assumed as follows :

$$R \sim N(\mu, \Sigma) \qquad \mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

Considering the interest of the composite *Variance*, we make the assumption that the empirical variance is sufficient for the standard model (which is the *a priori* variance). This then allows us to consider the mixture *a posteriori* as simply modifying μ which means that we no longer consider $\mu_{posteriori}$ as a random variable but as a vector of reals. Thanks to this loosening, we then reformulate the hypothesis of the returns R as follows :

$$R \sim S(\alpha, \mu, \Gamma) \qquad \mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

The estimation of Σ raises some complications because it is necessary for the estimation of equilibrium returns, but the α -stable distributions do not admit a finite moment of order 2 (except for the Gaussian distribution which is a special case). We then assume that the empirical variance of the last returns gives information on the current stability of financial markets, and that even though it is supposed to be asymptotically infinite, it is locally finite (because it is empirical with a limited number of observations). The results on the vector of returns are then :

$$R \sim N(\mu_{posteriori}, \Sigma) \quad \Rightarrow \quad R \sim S(\alpha, \mu_{posteriori}, \Gamma)$$

The equilibrium returns are obtained thanks to the preliminary work on the change of risk measure. This alternative construction allows us to obtain optimal portfolios in the sense of the *Expectancy-CVaR* couple while combining strategy and tactics. Results are also presented and criticized by offering a conclusion on the idea and the suggested assumptions.

Finally, a complementary study is made on the application of the standard Black-Litterman model to the problems of the Asset Management of the Caisse des Dépôts group. The assets used are then more diversified and offer broad investment solutions. We have a wider panel of classes, while most of this paper focuses on a portfolio of international equity indexes. We add various fixed income products to best match the available assets. We first define the investor profile of the Asset Management Department as well as the constraints of the two financial departments (Financial Department of the Fonds d'Épargne and Financial Department of Section Générale). Then, we determine the frameworks to be implemented on the portfolios resulting from the quantitative model. The suggested allocations are commented on and it finally allows us to conclude on the interest of using a modified model when the outstandings are substantial and the requirements restrict the freedom of investment.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier M. Patrice ODO et M. Jaouhar MOULDI, respectivement Responsable Adjoint et Responsable du Service Allocation de la Gestion des Actifs de la Caisse des Dépôts et Consignations pour m'avoir permis de réaliser mon alternance au sein de leur équipe. Grâce à eux j'ai pu découvrir l'allocation d'actifs dans sa forme concrète qui a su compléter l'approche scolaire que l'Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) m'a apportée.

Plus largement, je remercie l'ensemble des équipes de la Gestion des Actifs de la Caisse des Dépôts et Consignations pour leur accueil, le temps qu'ils ont su m'accorder pour m'exposer mes missions, les problématiques et indirectement orienter ma réflexion relative à ce mémoire.

Je souhaite par la même occasion remercier l'ensemble des professeurs de l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour le riche contenu qu'ils ont pu m'apporter au cours de ces trois dernières années.

J'adresse également une grande reconnaissance envers M. Christian LATOUCHE, Président Directeur Général de Fiducial, pour m'avoir guidé tout au long de ces dernières années, tant par ses discours, son parcours et ses conseils. Il a amplement contribué à mes choix et m'a appris à réfléchir, réfléchir autrement, avec une vision.

Enfin, j'étends mes remerciements à mon entourage et mon perroquet Bacchus, pour ne pas m'avoir découragé dans mes études, recherches et ambitions. Plus particulièrement, je remercie M. Carmel BALDACCHINO pour m'avoir souvent contredit sur des sujets que je pensais foncièrement maîtriser, car on ne voit jamais que par ses yeux et que ces yeux sont fabriqués par notre expérience qui, pour ma part était principalement scolaire et dépourvue d'un certain réalisme.

Sommaire

Introduction	19
I Présentation de l'allocation d'actifs	21
I.1 Qu'est-ce ?	21
I.2 Qui concerne-t-elle ?	22
I.3 Le cas particulier de la Caisse des Dépôts et Consignations	24
II Revue sommaire de la recherche en allocation d'actifs : <i>Théorie Moderne du portefeuille</i>	26
II.1 Théorie moderne du portefeuille	26
II.2 Rendements d'équilibre du MEDAF	28
III Modèle de Black-Litterman	29
III.1 Modèle de Référence	29
III.2 Formulation détaillée et approche bayésienne :	30
III.3 Version du papier original	32
IV Présentation des données	34
IV.1 Quelques définitions utiles	34
IV.2 Choix des données	35
V Étude des paramètres du modèle	39
V.1 Allocation du modèle de base	40
V.2 Ω , matrice d'incertitude des vues d'experts	42
V.2.1 Incertitude par <i>He</i> et <i>Litterman</i>	42
V.2.2 Incertitude par <i>Meucci</i>	43
V.2.3 Incertitude par <i>Idzorek</i>	45
V.2.4 Etude comparative des méthodes	48
V.3 τ , incertitude des rendements d'équilibre	49
V.4 Paramètres associés au marché : λ et $w_{\text{marché}}$	51
V.5 Σ , matrice de variance-covariance des rendements	53
VI Extensions du modèle	59
VI.1 Prédiction des rendements à l'aide de séries temporelles	59
VI.1.1 Motivations	59
VI.1.2 Rappels sur les séries temporelles	60
VI.1.3 Modèles AR, MA, ARMA & ARIMA	61
VI.1.4 Modèles VAR	65
VI.1.5 Intégration des séries temporelles au modèle d'allocation	70
VI.2 Modification de la fonction d'optimisation	73
VI.2.1 Introduction de la VaR	73
VI.2.2 Introduction de la CVaR	74
VI.2.3 Vers une allocation <i>Espérance-CVaR</i>	75
VI.2.4 Application de la théorie et présentation des résultats	76
VI.3 D'une distribution Gaussienne à une distribution α -stable	80
VI.3.1 Asymétrie et aplatissement (<i>kurtosis</i>) des rendements	80
VI.3.2 Distribution α -stable univariée $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	84
VI.3.3 Caractère Elliptique	87
VI.3.4 Distribution Symétrique α -stable multivariée (S α S)	90
VI.3.5 Distribution α -stable multivariée $S_{\alpha,d}(\Gamma, \mu)$	90

VI.4 Changement de la distribution des rendements dans le modèle de Black-Litterman	96
VII Application à la Gestion des Actifs de la Caisse des Dépôts et Consignations	100
VII.1 Le profil d'investisseur de la Caisse des Dépôts et Consignations	100
VII.2 De nouveaux actifs : Immobilier, Actions et Fonds non cotés	103
VII.2.1 Présentation du problème	103
VII.2.2 Théorie derrière le dé-lissage, le modèle Auto-Régressif inversé	105
VII.2.3 Application aux données françaises	106
VII.3 Encadrement de l'allocation : contraintes d'investissement	107
VII.4 Allocations proposées	108
Conclusion	111
Bibliographie	112
Annexe	114

Table des figures

1	Illustration de l'allocation <i>mélange</i>	5
2	Asset mixing concept	9
3	Allocation du <i>Government Pension Fund-Global</i>	23
4	Allocation d' <i>Allianz Global Investors</i>	24
5	Illustration du concept de Frontière Efficiente	27
6	Synthèse du modèle de Black-Litterman	32
7	Evolution des indices étudiés du <i>31/12/2000</i> au <i>22/06/2022</i>	36
8	Evolution des rendements hebdomadaires des indices MSCI	36
9	Evolution du rendement moyen sur 100 semaines glissantes	37
10	Evolution de l'écart-type sur 100 semaines glissantes	38
11	Matrice de corrélation des actifs	38
12	Allocations proposées pour les indices MSCI	41
13	Portefeuilles de Black-Litterman au <i>26/06/2022</i> en faisant varier la taille de l'échantillon d'estimation	42
14	Sensibilité de l'allocation sans contraintes au paramètre de confiance \mathbf{c}	43
15	Sensibilité de l'allocation avec contraintes au paramètre de confiance \mathbf{c}	44
16	Sensibilité de l'allocation au paramètre de confiance c_d avec $d = 4$	45
17	Portefeuilles de Black-Litterman en faisant varier la confiance associée aux deux anticipations	46
18	Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 1	47
19	Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 2	47
20	Portefeuilles de Black-Litterman en fonction de la version de Ω et de la confiance	49
21	Impact du paramètre τ sur l'allocation finale	50
22	Impact du paramètre τ (en %) sur l'allocation finale	50
23	Evolution de l'aversion au risque en fonction du nombre d'observations n	51
24	Impact du paramètre λ sur les rendements (de 0,5 à 5)	52
25	Sensibilité de l'allocation de Black-Litterman à l'aversion au risque	52
26	Impact du portefeuille de marché sur l'allocation finale	53
27	Représentation graphique du concept de <i>shrinkage</i> sur la matrice de covariance	54
28	Résultats de la méthode de <i>shrinkage</i> sur la matrice de covariance	56
29	Variation relative des éléments de Σ^{-1} (en %)	57
30	Allocations de Black-Litterman en modifiant la matrice de covariance	58
31	Prédictions glissantes des log-rendements des trois indices étudiés	64
32	Résultats du test de la causalité de Granger (à 5%)	67
33	Sélection de l'ordre optimal du modèle $VAR(p)$	68
34	Coefficients du modèle $VAR(1)$ (par MCO)	68
35	Coefficients significatifs du modèle $VAR(1)$	69
36	Comparaison <i>MSCI US</i> modèle $VAR(1)$ (en bleu) contre Historique (40 semaines)	70
37	Allocations contraintes issues de projections de séries temporelles	71
38	Sensibilité de l'allocation au paramètre de confiance avec des prédictions <i>ARMA</i>	72
39	Performance des modèles d'allocation utilisant les prédictions de séries temporelles	72
40	Représentation de la $CVaR$ et sensibilité à son paramètre α	75
41	Evolution de la $CVaR_\alpha$ sur l'indice de marché <i>MSCI ACWI IMI</i>	77
42	Résultats sur le rendements du modèle modifié de Black-Litterman	77
43	Evolution des poids dans le portefeuille final des actifs concernés par une anticipation	78
44	Portefeuilles du modèle modifié de Black-Litterman avec une confiance c de 30% et $\alpha = 20\%$	79

45	Divergence des mesures de centre pour une loi log-normale (source <i>Cmglee</i>)	81
46	Différentes propriétés et familles de distributions	84
47	Estimation des paramètres α -stables des rendements historiques	87
48	Partitionnement des sphères \mathbb{S}^d pour l'estimation de Γ	94
49	Résultats de l'estimation multivariée sous la forme bivariée (1000 points)	95
50	Comparaison des allocations avec les matrices de covariance <i>a posteriori</i> et empirique	97
51	Comparaison des allocations entre hypothèse de normalité et hypothèse α -stable .	98
52	Évolution des allocations α -stables par rapport au degré de confiance	99
53	Synthèse des portefeuilles selon la distribution α -stable des rendements simulée .	99
54	Evolution des indices Actions	102
55	Evolution des indices Taux et Immobilier	103
56	Portefeuilles <i>supposés</i> pour la Gestion des Actifs du groupe Caisse des Dépôts . .	103
57	Log-rendements de l'indice Immobilier EDHEC IEIF	104
58	Délissage des rendements mensuels de l'Immobilier par modèle AR-AR(1)	107
59	Délissage des rendements trimestriels du Private Equity par modèle AR-AR(1) .	107
60	Allocations avec et sans contraintes ASM	108
61	Portefeuilles de Black-Litterman avec des contraintes ASM confiance 30%	109
62	Performance des portefeuilles avec vues $VAR(9)$ et confiance 30%	110
63	Evolutions des paramètres d'asymétrie et de kurtosis des log-rendements	114
65	Evolution des allocation avec des puissances pour une transformation de la confiance <i>c</i>	115
66	Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 1 (avec une anticipation deux fois plus importante)	115
67	Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 2 (avec une anticipation deux fois plus importante)	116
68	BL Idzorek confiance qui bouge sans contraintes	116
69	BL Idzorek confiance qui bouge avec contraintes	116
70	Prédictions à l'aide du modèle VAR(1) sur la période sept. 2021-juin 2022	117
71	Performance des modèles d'allocation à l'aide de séries temporelles (en base 100)	117
72	Table de Dickey-Fuller avec valeurs critiques	118
73	Rendements d'équilibre <i>a priori</i>	119
74	Rendements <i>a posteriori</i>	119
75	Portefeuilles optimaux par optimisation $Rendement - CVaR_\alpha$ (confiance 10%) .	120
76	Portefeuilles optimaux par optimisation $Rendement - CVaR_\alpha$ (confiance 99%) .	120
77	Comparaison entre estimations α -stable et gaussienne (estimation multivariée pro- jetée en univarié) - Partie 1	121
78	Comparaison entre estimations α -stable et gaussienne (estimation multivariée pro- jetée en univarié) - Partie 2	121
79	Portefeuilles proposés avec une souplesse de 20% de variation	122
80	Portefeuilles de Black-Litterman avec des limites de variation de 5%	122
81	Portefeuilles de Black-Litterman avec des limites de variation de 20%	123
82	Allocations optimales avec contraintes ASM et confiance de modèle de 70%	123
83	Performance des portefeuilles avec vues $VAR(9)$ et confiance 70%	123
84	Différences d'allocation en fonction de la spécification de la matrice de covariance sur un échantillon d'estimation de 40 observations	124

Introduction

En France comme dans le monde entier, de la plus grosse entité au particulier, la gestion de portefeuille est un concept que l'on peut apercevoir dans chacun des éléments que notre oeil rencontre.

A la plus petite échelle, il est possible de simplement observer un individu à qui l'on donnerait une quantité d'argent fixée. Cet individu doit dépenser son argent pour subvenir à une grande partie de ses besoins, qu'ils soient essentiels ou purement impulsés par le désir. Il va inconsciemment établir une hiérarchie des exigences de son corps et de sa conscience, et également les contraindre par la quantité d'argent qui lui aura été fournie afin qu'une forme de calcul intranscriptible soit réalisée. Ce calcul cherche à maximiser la solution à son problème sous le sens de la satisfaction que celle-ci apportera à l'individu.

Cet exemple introduit la gestion de capitaux qui elle, agit à un niveau plus élevé, la question reste identique mais dans un contexte différent. Le but n'est alors plus de répondre à un besoin à proprement parler mais de dégager par la solution du problème d'optimisation un profit monétaire. Dans les deux situations, cela revient toutefois simplement à optimiser une fonction d'utilité.

Une fois ce problème décrit, il faut alors le résoudre. Cela n'est pas chose aisée, des méthodes probabilistes peuvent être envisagées au même titre que des raisonnements uniquement basés sur ce qui est observable au moment de la résolution ou encore un simple calcul de répartition dans différentes options d'investissement.

Comme tout établissement d'investissement, la Caisse des Dépôts et Consignations a des fonds (pour compte propre ou qui lui sont confiés sous gestion comme le Livret A) qu'elle investit sur les marchés afin de générer des revenus tout en respectant des contraintes de gestion Actif-Passif ou réglementaires. Chaque année, une allocation est discutée afin de donner un fil directeur et un cadre aux différents gérants travaillant pour la Gestion des Actifs du groupe. L'équipe responsable de ces travaux est le Service Allocation, elle doit également suivre au long du programme annuel l'avancée des investissements. Cette allocation est revue au moins trimestriellement et dans certains cas spécifiques comme lors du récent mouvement des taux. Afin de fournir des éléments quantitatifs lors des échanges et d'appuyer des allocations proposées, le projet d'un outil d'aide à la décision est né. Cet outil a pu être réalisé au cours de cette année en partie par les recherches et études présentées dans ce document. La question qui a motivé l'intégralité de ce travail pourrait simplement se résumer à : *Qu'allons-nous faire de tout cet argent ?* (formulé autrement à 1 minute et 9 secondes **ici**)

La réponse est loin d'être unique mais une piste est proposée au travers de ce mémoire par l'utilisation du modèle de *Black-Litterman*. Celui-ci s'appuie sur la Théorie moderne du portefeuille (formalisée par Harry Markowitz dans les années 50 puis améliorée par différents chercheurs dont William F. Sharpe). La motivation derrière ce modèle est d'obtenir des valeurs pour des rendements espérés à horizon donné et de les utiliser pour résoudre un problème d'optimisation : celui de la maximisation d'une fonction de rendement pénalisée par la prise de risque (*rendement-risque* formalisé par Markowitz notamment). L'intérêt ici est de repartir de celui-ci, de le déconstruire pour produire une nouvelle méthode d'optimisation de l'allocation d'actifs. Une méthode qui reposerait sur des hypothèses différentes, considérables comme moins réductrices et plus réalistes au sens empirique. En effet, soulignée pour la première fois en 1962 par Benoît Mandelbrot, la structure gaussienne de la théorie moderne a de nombreux avantages mais n'est généralement pas valide sur les marchés financiers.

D'autre part, comme toute intrigue d'optimisation, il est possible de travailler avec des contraintes. Comme tout établissement financier, la Caisse des Dépôts et Consignations a des contraintes qui lui sont propres, relativement à sa politique d'investissement comme à son statut public. Nous approchons ces particularités et les intégrons au modèle support de ce mémoire.

Un intérêt sera également porté sur les solutions d'investissement. En effet, certaines classes d'actifs ne sont initialement pas adaptées pour des modèles quantitatifs (l'immobilier ou encore l'investissement non-coté). Cependant, elles représentent au même titre que les actions, une option d'investissement pour l'entité responsable de la gestion de capitaux et doivent alors être considérées. Cela est crucial pour l'allocation proposée soit cohérente. La solution est alors de trouver des méthodes pour rendre quantitativement utilisables ces classes en modifiant des indices représentatifs de celles-ci.

Plus largement, les travaux menés dans ce mémoire vont s'ancrer autour du modèle de Black-Litterman. Ses avantages, inconvénients et limites seront discutés au même titre que l'utilisation qu'il est possible d'en faire. Nous traitons différentes théories, à l'exemple des Séries temporelles et des distributions probabilistes multivariées.

Le but est de donner un cadre et de ratisser les différentes pistes qui ont été creusées dans des articles de recherche pour certaines, de façon neuve pour d'autres. Cela est un défi conséquent car nous abordons des sujets complexes tout en essayant de les rendre facilement utilisables et compréhensibles. L'Annexe a dans ce mémoire le rôle de regrouper divers graphiques qu'il n'était pas possible d'ajouter au corps.

I Présentation de l'allocation d'actifs

La gestion de capitaux est une activité séculaire fondée sur la perspective de valorisation d'une quantité monétaire initiale au travers d'une stratégie déterminée par l'investisseur. Cette dernière est le nid d'une multitude d'interrogations : Pourquoi est-ce une bonne stratégie ? Quelle sera sa rentabilité ? Sera-t-elle la meilleure ? Ce ne sont que des exemples parmi un grand nombre de questions que l'on pourrait se poser sur ce sujet, mais chacune d'entre elle est la source de recherches poussées sur les mécanismes des marchés financiers car même si d'apparence, elles peuvent sembler futiles, elles n'ont en réalité que des réponses complexes qui ne peuvent se synthétiser avec une phrase d'une dizaine de mots. Auparavant purement institutionnelle, la gestion de portefeuille s'est aujourd'hui étendue jusqu'aux particuliers. Quiconque peut désormais investir aisément sur les marchés grâce à l'émergence de néo-courtiers avec un accès facilité à l'information (à condition d'être administrativement autorisé). Par conséquent, bien que l'on puisse se décider à acheter une action d'un mouvement de souris, il faut avant cela réfléchir à celle que l'on souhaite. Si l'ordinateur de l'investisseur est qualifiable de "lent", alors cet épisode de réflexion peut se faire durant le démarrage de ce dernier. Cependant, dès lors que les actifs deviennent variés et que nous disposons d'une grande quantité de fonds, des études poussées s'imposent et le temps de lancement de l'ordinateur demeure bien insuffisant.

Nous allons dans cette partie définir le cadre d'action des méthodes d'allocations qui seront développées dans les sections suivantes. Il est primordial de présenter les notions clés qui seront par la suite utilisées et qui sont les fondations de cet écrit, ce qui l'a motivé.

I.1 Qu'est-ce ?

L'allocation d'actifs désigne la manière dont, au travers d'un portefeuille, une stratégie est mise en place pour investir dans différentes classes d'actifs (par profil, par secteur, par géographie,...). Une classe d'actifs est au sens large un groupe d'actifs (financiers) présentant des caractéristiques similaires, on peut par exemple citer les **actions**, **obligations**, **matières premières** ou encore les **crypto-actifs**, mais il est également possible de distinguer par pays et/ou marché les classes à l'instar de certains indices *Actions Pays Emergents* ou *Obligations Zone Euro 7-10 ans*. L'allocation est portée par le concept de **diversification** entre différentes classes, l'idée sous-jacente est qu'elle permet de jouer sur les caractéristiques de chacune pour trouver un équilibre dans la répartition de l'investissement. En effet, sur certaines années ou périodes, une des classes surperformera toutes les autres, mais à la suivante, elle peut tout-à-fait être en-dessous d'elles. La diversification permet, conformément au profil de l'investisseur, d'obtenir un portefeuille **cohérent**. La répartition a un impact direct sur le **rendement** du portefeuille ainsi que son niveau de **risque**, par exemple, plus un portefeuille comportera des actions, plus le couple rendement et risque sera élevé, d'une façon générale ils fluctuent dans le même sens.

Ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier
Adage favori de *Warren Buffet*, investisseur mondialement reconnu

Plus largement, l'allocation d'actifs est une étape dans le processus de la gestion de portefeuille. En effet, une fois qu'une répartition par groupe est faite, il peut être nécessaire de superviser l'investissement et de le gérer à intervalle régulier. Nous distinguons deux grandes familles de gestion (et une troisième plus spécifique) :

- la gestion **passive**, qui repose sur un investissement stable sans ré-allocation fréquente du portefeuille, elle consiste à investir sur les indices de marché par le moyen de fonds d'investissement que l'on nomme *trackers*. Le but est alors de calquer au mieux le marché et de ne pas s'exposer à des risques liés à des prises de position.

- la gestion **active**, va s'axer sur un rebalancement régulier du portefeuille en tentant à chaque fois de chercher les actifs (ou les classes d'actifs) qui auront la meilleure performance sur une période définie. Contrairement à la gestion passive, la gestion active va chercher à battre un indice de référence.
- la gestion **alternative**, se détache des deux autres car elle vise à générer des performances de façon décorrélée des performances du marché, pour ce faire elle va alors avoir recours à des investissements spéculatifs.

On peut également réaliser un découpage en deux parties de l'allocation d'actifs, la partie **stratégique** et la partie **tactique** :

- l'allocation **stratégique** consiste à pondérer des poches d'actifs à un niveau assez large. Elle se base sur une vision large, long terme et va permettre de définir les grandes lignes de l'allocation : tolérance au risque, objectifs de rendement, horizon de placement et conjoncture économique. Nous pouvons l'assimiler aux grandes lignes de l'allocation.
- l'allocation **tactique** va elle se concentrer sur une répartition plus fine sous les fondations de la partie stratégique détaillée précédemment, elle a une dimension plus quotidienne et vise à générer une valeur supplémentaire en fonction de l'évolution à court terme des marchés financiers.

Toutes ces caractéristiques vont en fait être propres à l'investisseur, il n'est *a fortiori* pas possible de définir une allocation d'actifs sans avoir d'informations sur celui-ci. Voilà pourquoi nous allons maintenant énumérer par regroupements les différents protagonistes de la gestion de portefeuille, du boursicoteur au fonds souverain.

I.2 Qui concerne-t-elle ?

Derrière chaque grande allocation d'actifs se cache un investisseur, celui-ci cherche à investir et peut être amené à mettre en place un raisonnement sur la répartition de ses fonds. Ceci n'est cependant pas le cas pour chacun des acteurs des marchés financiers. A titre d'exemple, plaçons nous dans le cas d'un investisseur conséquent qui vise l'achat d'une société cotée. Celui-ci n'envisage pas de chercher une diversification dans sa démarche mais plutôt de concentrer sa démarche sur la société cotée en question. Premièrement, définissons l'**investisseur** et séparons ensuite les profils afin de pouvoir comprendre les nuances sur la gestion des actifs de chacun :

Un investisseur est une personne, une société ou un fonds qui achète des titres ou d'autres actifs dans l'espoir de tirer profit de la variation de la valeur de ces actifs au fil du temps. Les investissements courants comprennent les actions, les obligations, les fonds négociés en bourse, l'immobilier, les matières premières, les devises, les options et les produits dérivés. L'objectif principal d'un investisseur est de maximiser les rendements financiers potentiels tout en minimisant les risques.(US News, Wayne Duggan)

Derrière le terme d'investisseur **individuel**, nous regroupons les particuliers qui investissent sur les marchés financiers pour leur compte personnel. Ce sont des personnes physiques et nous pouvons également les nommer "petits porteurs" du fait que leurs achats et ventes sont généralement faits en petite quantité. En se référant aux publications de l'Autorité des Marchés Financiers (AMF) des deux dernières années, nous pouvons donner quelques chiffres sur ces investisseurs. Au second trimestre de 2022, un million de particuliers ont réalisé au moins une transaction (achat ou vente) sur les marchés financiers. En y intégrant ceux qui n'en ont pas effectuées, il y a alors environ 2,5 millions d'investisseurs particuliers. La majorité de leurs investissements sont tournés vers le marché *Actions* et ils effectuent en moyenne 80 transactions annuelles, d'un montant médian de 1000 euros. Du fait de leur capital relativement faible, il s'avère que ceux-ci ne se porteront que de façon mineure sur des méthodes d'allocation d'actifs complexes.

Des stratégies sur la répartition du portefeuille sont envisagées mais pour eux, il ne relève pas d'un grand intérêt que de s'orienter vers des modèles quantitatifs. Il n'est d'ailleurs pas rare que ceux-ci placent directement sur des produits financiers calquant des indices (par exemple le *CAC40*) étant donné leur portefeuille ne leur permet pas d'avoir un panier conséquent de différents actifs (la diversification est alors moins évidente).

La deuxième classe d'investisseurs est celle des **institutionnels**, nous y trouvons notamment des *fonds de gestion d'actifs, fonds spéculatifs, fonds souverains, banques et sociétés d'assurances*. Ce sont des organismes financiers (personnes morales) investissant les ressources issues d'une collecte. Il est également possible de rattacher à ce groupe les entreprises prenant des participations financières. Le plus souvent, leur optique de rentabilité est davantage portée sur les moyen et long termes que sur le court terme. Les capitaux engagés pouvant atteindre plusieurs milliers de milliards d'euros, des stratégies poussées peuvent être déployées et l'allocation d'actifs devient alors un art (majeur car il demande une initiation et non pas mineur comme les chansons selon S. Gainsbourg). Pour illustrer certaines différences chez ces institutionnels, deux cas différents.

Commençons par le plus grand fonds souverain au monde par montant de capitalisation, le *Government Pension Fund-Global* norvégien. C'est un fonds recevant l'ensemble des profits liés au pétrole par les impôts norvégiens. Leur politique de gestion vise la diversification avec une limitation d'exposition à 5% de la capitalisation totale de chaque actif. Pour revenir à la France, celui-ci possède plus de 1% du *CAC40*. A un niveau international, il est investi dans plus de 9300 entreprises dans 69 pays différents. Le montant sous gestion est de plus de 1000Md€. Leur répartition par classe d'actifs est la suivante :

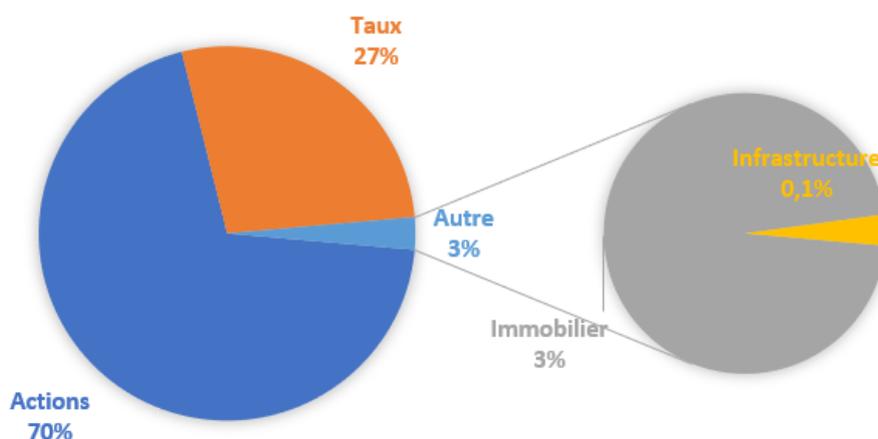


FIGURE 3 – Allocation du *Government Pension Fund-Global*

Cette composition peut être considérée comme *risquée*, cela à cause de la prépondérance d'actions dans le portefeuille. Cependant la diversification conséquente permet de réduire considérablement le risque associé à cette classe d'actifs. Ce fonds souverain affiche des résultats de plus de 5% en moyenne sur les dernières décennies malgré une forte baisse liée à la dureté des marchés au cours de l'année 2022.

Présentons maintenant la division *Asset Management* du groupe Allianz, avec 673Md€ sous gestion (au 31/12/2021), cette division a la répartition suivante :

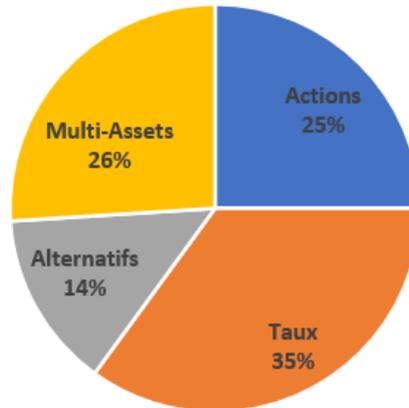


FIGURE 4 – Allocation d’*Allianz Global Investors*

La classe d’*Alternatifs* représente un grand nombre de sous-actifs, à l’exemple des Obligations Catastrophes. L’allocation est ici plus difficile à interpréter car les classes *Multi-Assets* et *Alternatifs* restent vagues mais nous pouvons toutefois souligner une présence majoritaire de *produits de Taux* dans la composition des investissements. Cela est plus proche d’une répartition institutionnelle et standard.

I.3 Le cas particulier de la Caisse des Dépôts et Consignations

Le groupe Caisse des Dépôts est une entité financière publique ancrée dans l’Histoire française. Il a été fondée en 1816 dans un contexte de dette publique conséquente. L’idée fut suggérée par Louis-Emmanuel Corvetto qui était alors Ministre des Finances du cabinet Richelieu au roi régnant Louis XVIII. Ce dernier décida de la création pour financer les dettes publiques par le moyen des consignations et dépôts de notaires. C’est ensuite en 1818 que Benjamin Delessert, banquier, exprimera à M. Corvetto son idée d’étendre le financement de la caisse en créant des caisses d’épargnes et du Livret A qui permettrait aux classes moyennes d’épargner. De nombreuses modifications et améliorations ont été apportées entre temps, mais nous pouvons arriver en 1905 où la Caisse des Dépôts va s’engager dans une contribution à la construction du logement social.

La Caisse des Dépôts est au service de l’intérêt général et du développement économique du pays par le moyen de financements. Même si elle est rattachée à l’Etat, elle est en concurrence sur les marchés financiers avec les grands investisseurs internationaux. Le groupe est divisé en deux parties : la **Section Générale** et le **Fonds d’Epargne**. La Section Générale est la partie majeure du groupe, elle a le statut d’institution financière publique sous la surveillance et la garantie du Parlement qui lui permet d’être listée auprès de la Banque Centrale Européenne au même titre que les banques. Elle est réceptrice des dépôts de notaires, des consignations et est la détentrice de plusieurs compagnies, dont **BPI France**, **La Poste** et la **SFIL**. D’un autre côté le Fonds d’Epargne est chargé d’investir les dépôts de certains produits financiers (Livret A, Livret Développement Durable et Solidaire) d’abord en finançant la construction de logement sociaux, puis en plaçant une autre partie sur les marchés financiers.

Ces deux entités ont des directions financières respectives avec une gestion complètement différente. La Gestion des Actifs du groupe intervient en tant qu'expert de la gestion de portefeuille et est en charge d'investir les fonds mis à disposition par les deux sections. C'est le premier investisseur institutionnel public et le quatrième investisseur institutionnel en France. Les exigences et contraintes sont différentes mais les gérants opèrent pour les deux sections à la fois. Par exemple, les contraintes du Fonds d'Épargne découlent du fait que le Livret A soit indexé sur les taux courts et l'inflation et les français bénéficiant d'un produit garanti par l'État. La Gestion des Actifs doit s'assurer d'adosser sa gestion à ces éléments. Au contraire la Section Générale permet une diversification plus importante en termes de risque et de géographie. La prise en compte du passif de l'investisseur (Caisse de retraite, Fonds euro garantis, Livret A ou Fonds souverain) est un élément déterminant dans l'allocation d'actifs au même titre que le couple *rendement/risque* ou la fonction d'utilité de l'investisseur à étudier.

II Revue sommaire de la recherche en allocation d'actifs : *Théorie Moderne du portefeuille*

II.1 Théorie moderne du portefeuille

La théorie moderne du portefeuille a été développée par Harry Markowitz en 1952, elle définit l'optimisation d'un portefeuille, le principe de diversification en considérant les rendements d'actifs comme des variables aléatoires ainsi que le concept de frontière efficiente. Celle-ci est encore enseignée de nos jours car elle a permis la construction d'autres modèles et a été une des premières applications des mathématiques à la finance.

Cette théorie s'appuie sur le principe d'un couple *rendement-risque* d'un portefeuille en combinant différents actifs entre eux, la résolution passe par une optimisation quadratique. Le portefeuille optimal sera alors celui qui maximise le rendement moyen espéré pénalisé par la variance considérée comme le risque.

Hypothèses :

- Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque, le rendement d'un actif financier pour toute période est par conséquent une variable aléatoire qu'on supposera normale,
- Les rendements des actifs sont corrélés et chaque actif peut être acquis sans limite,
- Les investisseurs ont une aversion au risque fonction de l'espérance de rendement et de son écart-type,
- Les investisseurs sont rationnels
- Les investisseurs ont le même horizon d'investissement (une période).

Formalisation :

Soit un univers d'investissement composé de n actifs financiers risqués ($i = 1, \dots, n$) :

- $R \in \mathbb{R}^n$ la rentabilité aléatoire des actifs appartenant à l'univers d'investissement
- $w \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des poids (on appellera w le portefeuille)
- $e \in \mathbb{R}^n$ le vecteur unitaire (chaque composante vaut 1)
- $E[R]$ l'espérance du vecteur aléatoire des rendements
- $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de variance-covariance des rendements des actifs $i \in 1, \dots, n$ (elle est symétrique et on la suppose inversible) où $\sigma_{ii} = \sigma^2(R_i)$ (la variance de la rentabilité du i -ème actif) et $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ (la covariance des rentabilités des i -ème et j -ème actifs).

A partir de ces notations, on peut définir le risque et la rentabilité d'un portefeuille w par :

$$Rendement(w, R) = w * E[R] = \sum w_i E[R_i] \quad \text{et} \quad Risque(w, R) = w^T \Sigma w = \sum \sum w_j w_i \sigma_{ij}$$

Dans un premier temps nous exprimons le problème d'optimisation de Markowitz ainsi que son dual puis nous finirons par la formulation sous le critère de sélection *espérance-variance*.

Problèmes d'optimisation de base :

A gauche, nous exprimons la maximisation du rendement pour un risque donné (σ_0) tandis qu'à droite nous minimisons le risque pour une espérance donnée (μ_0).

$$(A) : \begin{cases} \arg \max & w^T E[R] \\ \text{s.c.} & w^T e = 1 \\ & w^T \Sigma w \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} \arg \min & w^T \Sigma w \\ \text{s.c.} & w^T e = 1 \\ & w^T E[R] \geq \mu_0 \end{cases}$$

Ces deux problèmes d'optimisation sont à l'origine du principe de **Frontière Efficiente** en saturation des contraintes, cela représente une courbe où tous les portefeuilles présents sont dits

optimaux. Il n'est pas possible, sous les hypothèses données, de trouver un portefeuille **moins risqué** pour un **rendement donné** que celui solution du problème **B**. Et vice-versa : pour un risque donné, il n'est pas possible de trouver un portefeuille plus rentable en moyenne que celui obtenu par le problème **A**. Ces portefeuilles optimaux forment alors une limite sur le tracé du rendement espéré en fonction du risque (graphique issu de [28]) :

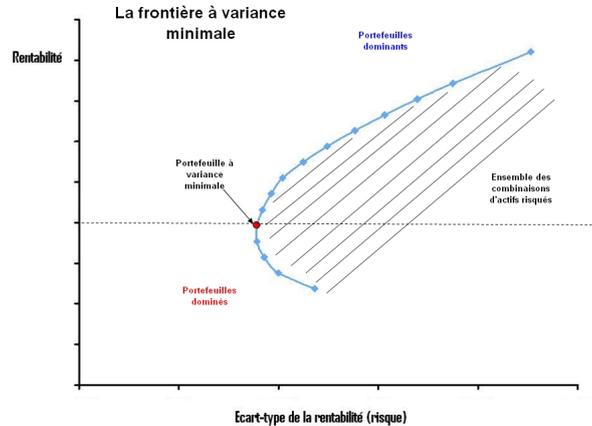


FIGURE 5 – Illustration du concept de Frontière Efficiente

Le critère de décision *moyenne-variance* est basé sur le comportement de l'investisseur, qui se concentre sur une fonction d'utilité ayant pour paramètres l'espérance et la variance du rendement du portefeuille.

On a alors :

$$V(R_w) = f(E_w, \sigma^2(R_w)) \quad \text{avec} \quad \frac{\delta V(R_w)}{\delta E_w} \geq 0 \text{ et } \frac{\delta V(R_w)}{\delta \sigma^2(R_w)} \leq 0$$

On considère le cas particulier où la valeur d'utilité a la forme suivante :

$$V(R_\pi) = E_w - \frac{\lambda}{2} \sigma^2(R_w) = w^T E[R] - \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma w$$

Ici, λ est un paramètre supplémentaire qui représente l'aversion au risque de l'investisseur (le taux marginal de substitution entre l'espérance de rendement et le risque du rendement, le lien entre la rentabilité et la pénalisation par le risque). Le problème devient alors :

$$\begin{cases} \arg \max(w^T E[R] - \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma w) \\ \text{s.c.} \quad w^T e = 1 \end{cases}$$

Il faut alors utiliser le lagrangien du problème et les conditions nécessaires du premier ordre pour trouver une solution explicite qui s'écrit alors comme suit :

$$w = \frac{1}{\lambda} \left(\Sigma^{-1} E[R] - \frac{e^T \Sigma^{-1} E[R] - \lambda \Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e \right)$$

Bien qu'ici nous appliquons une contrainte sur la somme des poids associés aux actifs concernés, le problème d'optimisation décrit ici va être réutilisé dans le modèle de Black-Litterman (mais sans contrainte).

II.2 Rendements d'équilibre du MEDAF

Le MEDAF (Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers, *CAPM* en anglais) est un modèle financier qui estime le rendement espéré par le marché d'un actif en fonction de son risque systématique (Sharpe, W. F. (1964)).

L'idée derrière le MEDAF est qu'il existe une relation linéaire entre le risque et le rendement. L'estimation des rendements d'équilibre sous ce modèle permettra d'avoir un vecteur de rendements *a priori*.

L'investisseur est rémunéré pour le risque systématique associé à son actif étant donné qu'on suppose que celui-ci cherche à optimiser par la diversification son portefeuille et donc à rendre nul le risque idiosyncratique.

On note R_M la rentabilité espérée du marché, R_F le taux sans risque (emprunt d'Etat pour la période suivante) et R_{actif} le rendement d'un actif (R représente le vecteur de N actifs). On exprime ce modèle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(R_{actif}) &= R_F + \beta_{actif}[E(R_M) - R_F] \\ E(R) &= R_{F,N} + \beta[E(R_{M,N}) - R_{F,N}] \\ \beta_i &= \frac{cov(R_M, R_{actif_i})}{var(R_M)} \\ &= \frac{cov(R_{actif_i}, R'w_{mkt})}{\sigma_M^2} \end{aligned}$$

On pose $\Pi = E(R) - R_{F,N} = \beta(E(R_{M,N}) - R_{F,N})$ soit la **prime de risque du marché**. La variance du portefeuille de marché σ_M^2 peut s'exprimer comme $\sigma_M^2 = w'_{mkt} \Sigma w_{mkt}$ où Σ est la matrice de covariance des rendements des actifs. Il est finalement possible d'exprimer Π à partir du portefeuille de marché :

$$\Pi = \frac{E(R_{M,N}) - E(R_{F,N})}{\sigma_M^2} \Sigma w_{mkt}$$

L'aversion au risque du marché que nous notons λ correspond à la fraction de l'équation. L'estimation des rendements d'équilibre peut se faire par régression à partir de données (en estimant β). L'intérêt de définir ce modèle est qu'il joue un rôle crucial dans celui de Black-Litterman.

III Modèle de Black-Litterman

Ce modèle étant le point d'ancrage de ce mémoire, il est essentiel d'y consacrer une partie entière. Tout d'abord, une revue historique de celui-ci et de ses évolutions jusqu'au *XXI^{ème}* siècle. Développé par deux chercheurs de Goldman Sachs (Fischer Black et Robert Litterman) en 1990 et publié pour la première fois en 1992 (en 1991 un article a été publié mais ne formalise pas le modèle, il y est juste décrit, des motivations aux résultats), le modèle de Black-Litterman a initialement pour but de pouvoir mêler rendements d'équilibre et avis de l'investisseur sur les performances des produits disponibles sur le marché. Il combine deux pans de la théorie moderne du portefeuille : l'optimisation moyenne-variance de Markowitz et le MEDAF (CAPM en anglais) de Sharpe et Lintner.

Une notion essentielle dans ce modèle est celle de **Vue**. Au singulier, une vue correspond à une anticipation absolue ou relative du gérant sur un ou plusieurs actifs d'un marché considéré. Cette vision contient les informations suivantes : les actifs concernés, les performances anticipées ainsi que l'incertitude de celles-ci. Ces **vues** peuvent être issues d'experts ou de l'investisseur qui utilise le modèle, mais il est également possible d'utiliser des méthodes quantitatives pour faire de telles anticipations. Ajoutons également que deux formats sont possibles, le premier est **absolu**, il n'évoque qu'un seul actif et sa performance attendue sur la prochaine période. Le second est **relatif**, il concerne plusieurs actifs et établit une performance comparative entre eux au sens de *sur-* ou *sous-* performance. Ces deux approches différentes sont complémentaires au sens où l'anticipation absolue retranscrira une direction des rendements tandis que celle relative s'appuiera également sur une forme de vision de la corrélation des actifs.

Le modèle a été considéré comme une innovation pour les problèmes d'allocation d'actifs pour deux raisons principales :

- le point de départ est le portefeuille d'équilibre du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF/ CAPM) pour l'estimation des rendements. Le fait d'utiliser une "optimisation inverse" en partant de ceux-ci est une amélioration significative car elle permet d'avoir un lien intuitif avec le marché.
- la méthode d'ajout des vues d'investisseurs est claire et leur mélange aux informations de marché est faite de façon transparente et compréhensible. Avant ces travaux, rien de tel n'avait été présenté.

Il est également important de préciser que le modèle a pour principal but d'obtenir des rendements attendus pour la période suivante. L'allocation que l'on attribuera à celui-ci n'est décidée qu'après le calcul des rendements qui est alors la clé de voûte de l'allocation d'actifs. Le modèle MEDAF sert de base : si l'investisseur n'a pas d'anticipation de marché alors les rendements attendus seront ceux obtenus par le MEDAF.

III.1 Modèle de Référence

Le modèle de référence pour les rendements est le pilier du raisonnement complet du modèle de Black-Litterman. Il expose les hypothèses sur les variables et paramètres qui sont aléatoires et/ou modélisés.

Les rendements attendus \mathbf{R} sont supposés normalement distribués avec une espérance μ et une variance Σ . Les deux chercheurs Black et Litterman ajoutent l'hypothèse que μ (le rendement moyen) est une variable aléatoire également normale (de moyenne π et de variance Σ_π) :

$$R \sim N(\mu, \Sigma) \qquad \mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

On peut également voir π comme étant de la forme $\mu = \pi + \epsilon$ où ϵ est un vecteur normal de **moyenne** nulle et de **variance** Σ_π . Cette variable représente ici notre estimation de la moyenne μ . Une hypothèse supplémentaire est que μ n'est pas corrélée à R ce qui permet alors d'obtenir l'égalité suivante :

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi$$

Ceci donne alors le modèle de référence pour celui de Black-Litterman :

$$R \sim N(\pi, \Sigma_r)$$

Il peut sembler aberrant de parler de rendement dans la présentation du modèle. Pour clarifier toute confusion, le rendement désignera davantage la prime de risque (quand nous parlons de Π ou de μ_{BL} , cela se rapporte à la prime de risque comme définie dans l'explication du MEDAF). Cependant les allocations résultant du modèle ne changent pas si l'on ajoute le même terme à chacun des rendements (ou que l'on leur soustrait), l'aversion au risque des investisseurs concentre cette information dans sa formule tirée du MEDAF. Pour la présentation finale des rendements, nous présenterons le rendement complet (non pas l'excès de rendement).

III.2 Formulation détaillée et approche bayésienne :

L'approche décrite ci-dessous s'appuie sur la méthode bayésienne (du fait que l'on cherche à estimer la distribution *a posteriori*), le lecteur peut se tourner vers l'article [26] pour une revue complète du fonctionnement de celle-ci et de la démonstration du résultat sur la distribution *a posteriori*. Nous commençons par revenir sur les points essentiels du modèle de Black-Litterman puis nous expliciterons la distribution résultant du mélange des sources d'information ainsi que l'allocation résultant de l'optimisation *Rendement-Risque*.

Informations du marché (*A priori*) :

En supposant que tous les investisseurs cherchent à maximiser leur profit selon une optimisation Moyenne-Variance sans contrainte, nous nous plaçons dans l'approche de Markowitz, c'est-à-dire le problème suivant :

$$\max w' E[R] - \frac{\lambda}{2} w' \Sigma w$$

Où λ représente le coefficient d'aversion au risque (similaire à celui du MEDAF). Ce problème d'optimisation permet de trouver l'allocation optimale (en dérivant le Lagrangien) :

$$E[R] - \lambda \Sigma w = 0$$

Cependant en l'appliquant au portefeuille de marché w_{mkt} , nous pouvons isoler la composante Π et ainsi obtenir les **Rendements d'équilibre** du MEDAF :

$$\Pi = \lambda \Sigma w_{mkt}$$

Ces informations nous donnent la partie *a priori* du modèle de Black-Litterman (celle de référence pour μ) :

$$\mu \sim N(\Pi, \tau \Sigma)$$

Informations de l'investisseur :

On considère des "vues" qui sont des avis de l'investisseur sur les N actifs du marché considéré.

Elles sont formalisées sous :

- une matrice P (de dimension $K*N$ où K est le nombre d'avis différents sur les actifs) représentant respectivement les portefeuilles à réaliser avec les actifs considérés pour avoir un rendement supposés par l'investisseur,
- un vecteur Q (de dimension $K*1$) qui correspond aux excès rendements attendus par les anticipations de l'investisseur (on retranche aux anticipations le taux r_f sans risque),
- une matrice d'incertitude Ω (de dimension $K * K$) reflétant la confiance accordée aux anticipations (pour la diagonale) ainsi que la covariance entre celles-ci (sur le reste de la matrice).

On suppose à partir de ces éléments que ces vues peuvent être abordées comme un vecteur aléatoire :

$$P\mu = Q + \epsilon \quad \epsilon \sim N(0, \Omega)$$

Alors : $P\mu \sim N(Q, \Omega)$

Combiner les deux sources d'information (*A posteriori*) :

Une fois les informations de marché et de l'investisseur obtenues, nous utilisons alors la formule de **Bayes** pour obtenir la distribution *a posteriori* de R . On retrouve en particulier que

$$\mu|P; Q; \Omega \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{\mu_{BL}})$$

Où

$$\begin{aligned} \mu_{BL} &= ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q) \\ \Sigma_{\mu_{BL}} &= ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1} \end{aligned}$$

Comme $R_{posteriori} = \mu + Z$ où $Z \sim N(0, \Sigma)$, en ajoutant que μ et Z sont des vecteurs aléatoires indépendants, nous obtenons :

$$\begin{aligned} R|P; Q; \Omega &\sim N(\mu_{BL}, \Sigma + \Sigma_{\mu_{BL}}) \\ \Sigma_{posteriori} &= \Sigma + \Sigma_{\mu_{BL}} \end{aligned}$$

Allocation finale :

A partir de cette distribution et de la méthode d'optimisation *Moyenne-Variance*, nous obtenons les poids optimaux selon le modèle de Black-Litterman en exprimant cette fois-ci les poids w_{BL} en fonction de μ_{BL} et de Σ_{BL} :

$$w_{BL} = \arg \max(w' \mu_{BL} - \frac{\lambda}{2} w' \Sigma_{posteriori} w)$$

Soit :

$$w_{BL} = \frac{1}{\lambda} \Sigma_{posteriori}^{-1} \mu_{BL}$$

L'obtention d'une formule fermée pour w_{BL} est conditionnelle à l'absence de contraintes sur l'allocation optimale. Dans un cas plus concret où l'on cherche un portefeuille sans vente à découvert, il n'existe alors pas de solution claire et nous devons utiliser des algorithmes d'optimisation.

Remarque : Concernant la matrice d'incertitude Ω , en fonction des valeurs prises par ses éléments, la distribution *a posteriori* se retrouve fortement impactée. Une incertitude trop élevée rendra négligeable l'impact des vues tandis qu'une certitude très élevée modifiera énormément tous les rendements attendus sans pour autant affecter le poids final des actifs non concernés.

$$R_{posteriori} \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{posteriori}) \rightarrow R \sim N(\Pi, (1 + \tau)\Sigma) \quad \Omega \rightarrow \infty$$

Pour résumer le modèle de Black-Litterman, l'illustration ci-dessous permet de donner une vision synthétique à l'idée derrière celui-ci, il concerne μ et non pas \mathbf{R} directement (cela ne change pas l'interprétation) :

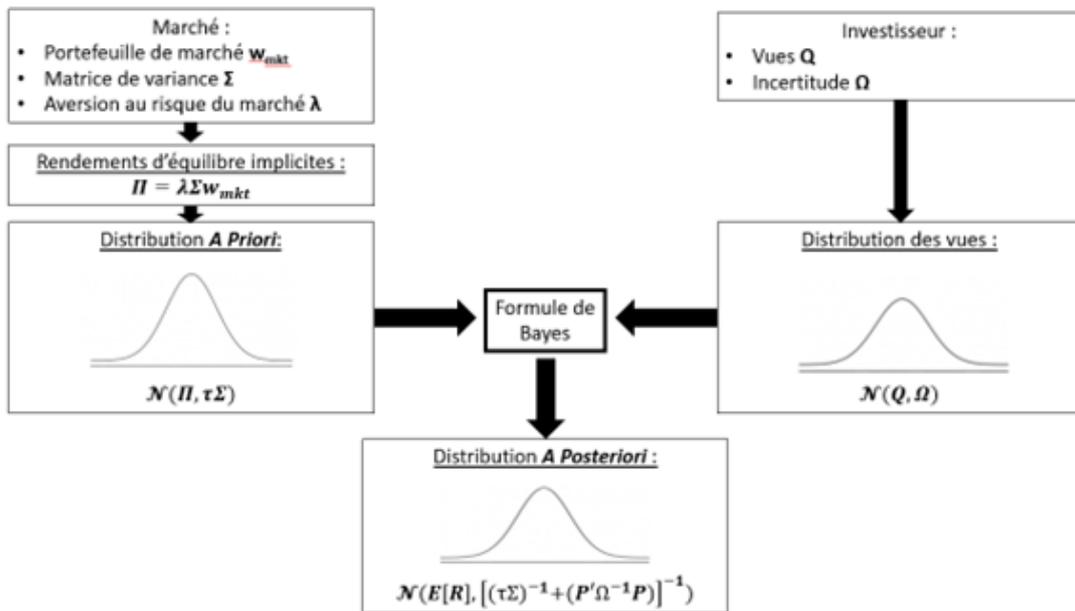


FIGURE 6 – Synthèse du modèle de Black-Litterman

III.3 Version du papier original

Une version alternative est présentée ci-dessous pour que le lecteur comprenne qu'il n'y a pas une unique formulation et que selon les sources, ce ne sont pas toujours les mêmes méthodes de résolution. Dans les deux cas nous partons du modèle de référence présenté plus haut, mais le chemin pour arriver à une estimation de la distribution des rendements *a posteriori* diffère. Afin d'éviter toute confusion, nous nous concentrerons sur la méthode bayésienne présentée auparavant.

La version utilisée dans le papier original de Black et Litterman est quelque peu différente dans la résolution du problème, bien qu'elle atteigne un résultat identique. L'estimation des rendements repose sur le modèle d'estimation de Theil (traduit de *Theil's mixed estimation*) : il sert à estimer des paramètres à partir d'un mélange entre données *a priori* complètes et données *conditionnelles* partielles.

Nous repartons de l'expression $\mu = \pi + \epsilon$ et posons d'abord

$$x\beta = \pi + u$$

Où nous avons :

- π le vecteur d'équilibre ($N \times 1$)
- x une matrice ($N \times N$) I_n qui représentent les facteurs du modèle
- β la moyenne inconnue des rendements
- u une matrice ($N \times N$) de résidus où $E(u) = 0, V(u) = \Phi$ avec Φ inversible

Sachant que β et u sont indépendants et que x est constante, nous obtenons pour la variance de π :

$$V(\pi) = x'V(\beta)x + V(u) \iff V(\pi) = \Sigma + \Phi$$

Où Σ correspond la matrice de covariance historique et Φ la matrice de covariance des résidus de l'estimation de la moyenne.

Nous considérons ensuite l'information subjective (les vues) que nous pouvons exprimer comme suit :

$$P\beta = Q + v$$

Où

Q les rendements des vues
 P les portefeuilles contenant les actifs concernés par les vues
 β la moyenne inconnue des rendements
 v un vecteur de résidus de la régression avec $E(v) = 0, V(v) = \Omega$ où Ω est inversible

A partir des deux modèles linéaires présentés, nous pouvons les combiner et formuler

$$\begin{bmatrix} x \\ P \end{bmatrix} \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \pi \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad V\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

Par méthode des moindres carrés, $\hat{\beta}$ (qui représente la moyenne pondérée entre les deux estimateurs de la moyenne du rendement où les poids sont proportionnels à la précision de ceux-ci) a alors une expression analytique :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left[[x' \quad P'] \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ P \end{bmatrix} \right]^{-1} [x' \quad P'] \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \pi \\ Q \end{bmatrix} \\ &= [\Phi^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} [\Phi^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q] \end{aligned}$$

Cet estimateur minimise la variance et les résidus \tilde{u} associés au modèle en remplaçant β par $\hat{\beta}$ sont d'espérance nulle et de variance $V(\tilde{u}) = [\Phi^{-1} + P'\omega P]^{-1}$. Dès lors nous avons les paramètres associés à la distribution *a posteriori* du modèle sachant que les résidus sont supposés normalement distribués.

IV Présentation des données

IV.1 Quelques définitions utiles

Indice boursier : Un indice boursier représente la valeur d'un portefeuille théorique d'actifs financiers cotés sur les marchés organisés appartenant à une liste d'entreprises ou d'entités sélectionnées selon les modalités qui lui sont propres. C'est un indicateur utilisé par les investisseurs pour analyser, évaluer, comparer un groupe de valeurs boursières et il a pour objectif d'indiquer la tendance globale de l'économie, de la santé d'un secteur d'activité ou d'un marché à l'échelle d'un pays ou d'un continent. Il peut être utilisé comme *benchmark* pour un investisseur afin de se comparer au *marché*. L'indice peut aussi être défini pour d'autres actifs (Indice Obligataire, Indice Immobilier,...).

Total Return : Issu du vocabulaire anglophone comme bon nombre de notions financières et ayant pour équivalent français **rendement total**, cela signifie que l'indice ne tient pas seulement compte de la variation de valeur des titres le composant, il ajoute à cela l'usufruit de ceux-ci c'est-à-dire dividendes et coupons dans le cas d'actions et d'obligations.

Gross/Net : *Gross* est dit d'un indice qui ne prend pas en compte les taxes et impositions recoupées aux performances dégageables des actifs, nous pouvons dire **brut** dans un français commun. Par conséquent, *Net* suppose que le montant des dividendes réinvestis est diminué des taxes.

Rendement : Performance relative d'un produit financier dont la valeur fluctue au cours du temps. Pour un pas de temps τ (supérieur ou égal à 0), en désignant par S_t le prix de l'actif en t , l'expression mathématique du rendement est la suivante :

$$rdt_{t,t-\tau} = \frac{S_t - S_{t-\tau}}{S_{t-\tau}} = \frac{S_t}{S_{t-\tau}} - 1$$

Il est à noter que l'on peut composer le Prix (S_t) selon la méthodologie suivante :

$$S_t = S_{t-\tau} * (1 + r_{t,t-\tau})$$

Log-rendement : Similaire au rendement, le log-rendement raisonne sous une convention continue. Son intérêt réside dans le fait qu'il est stable par somme (en additionnant des log-rendements de deux périodes consécutives, on obtient le log-rendement de la période cumulée) et qu'il s'étend sur l'ensemble des réels contrairement au rendement qui est défini sur $[-1; \infty[$. La formule est la suivante :

$$\logrdt_{t,t-\tau} = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-\tau}}\right)$$

Cubisme : Le cubisme est un mouvement artistique du début du XX siècle, qui constitue une révolution dans la peinture et la sculpture, et influence également l'architecture, la littérature et la musique.

IV.2 Choix des données

Les données retenues pour l'étude sont issues de MSCI, l'idée est d'avoir un indice global (mondial, qui représenterait le marché dans son ensemble) et sa décomposition plus fine avec d'autres indices précis (nationaux ou continentaux, qui représenteraient les opportunités par groupement de pays).

MSCI est une entreprise américaine de services financiers publiant notamment des indices boursiers et offre l'avantage de détailler chacun d'eux et propose un panel très large d'indicateurs avec de multiples nuances (brut, net, en monnaie locale,...).

Les indices choisis sont en **Net Total Return**, cela permet une comparaison plus raisonnable du fait des nuances juridiques entre les pays et de prendre en compte les dividendes par exemple. Celui qui englobe tout, qui représente le marché, est le **MSCI World** (plus précisément le MSCI ACWI IMI, l'indice officiel MSCI World n'englobant que les plus grosses capitalisations des marchés développés nous préférons avoir un indice plus général), il comprend les actions disponibles de 23 marchés de pays développés et 24 émergents (*Large, Mid* et *Small cap*), il couvre approximativement 99% de l'univers global des actions à échelle mondiale. Cet indicateur propose la vision la plus large des actions, il pondère selon la capitalisation des entreprises présentes dans l'indice.

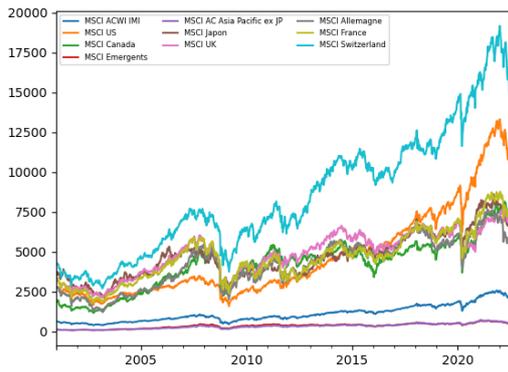
La granularité retenue concernant cet indice a été choisie de façon à ne pas surpondérer les Etats-Unis par rapport aux autres groupes ou pays tout en conservant suffisamment de classes d'actifs pour que l'étude sur le portefeuille optimal ne soit pas menée que sur trois ou quatre classes. Les poids sont tirés d'un document officiel de MSCI datant du 31 mars 2022, ils permettent à défaut d'avoir une valeur précise au jour de la rédaction de ces mots, de servir d'approximation pour la division pseudo-synthétique de l'indice mondial, le détail est disponible en *Annexe A*.

L'ensemble des indices retenus est résumé dans le tableau ci-dessous, avec les zones géographiques qu'ils couvrent ainsi que leur poids dans l'univers des actions mondiales :

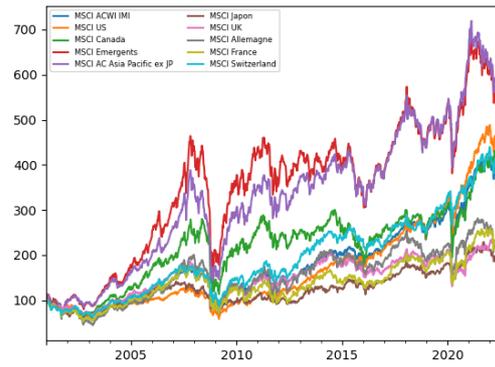
Indice (en Net Total Return)	Couverture géographique	Poids (en %)
MSCI ACWI IMI (USD)	Monde	-
MSCI US	Etats-Unis	60,63
MSCI Emerging Markets (USD)	Pays émergents	11,2
MSCI UK (USD)	Royaume-Uni	5,66
MSCI Japan (USD)	Japon	5,45
MSCI France (USD)	France	3,97
MSCI Switzerland (USD)	Suisse	3,71
MSCI AC Asia ex Japan (USD)	Asie Pacifique (sans Japon)	3,3
MSCI Canada (USD)	Canada	3,18
MSCI Germany (USD)	Allemagne	2,76

Précisons que les marchés émergents sont dominés par la Chine, Taiwan et la Corée (qui pèsent respectivement 3%, 1,9% et 1,4% dans l'indice mondial).

Les données ont été extraites sur *Bloomberg* et s'étendent du *31/12/2000* au *21/06/2022* avec un pas quotidien (cela permet de travailler à échelle mensuelle, hebdomadaire et quotidienne) soit environ 5500 cotations de 10 indices. Pour être plus précis, ce sont les **cotations de fermeture** du marché. Il faut d'abord les remettre à un niveau de départ équivalent pour graphiquement observer l'évolution de ceux-ci, pour ce faire on divise les séries par leur première valeur et on multiplie par 100 (base 100). On obtient alors les évolutions indicelles suivantes :



(a) Indices bruts

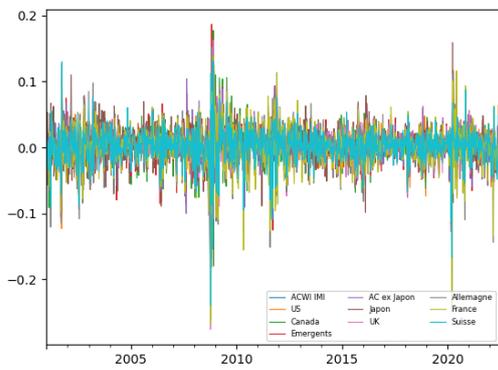


(b) Indices mis à la même échelle

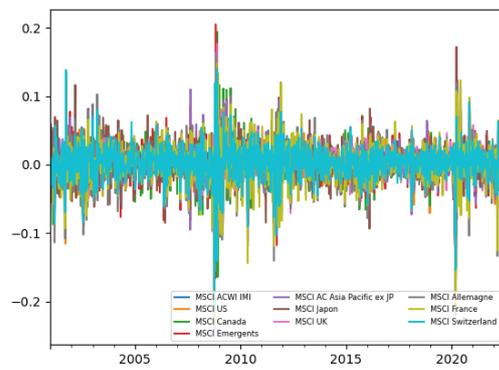
FIGURE 7 – Evolution des indices étudiés du 31/12/2000 au 22/06/2022

En portant un œil bref sur l'évolution des indices, mis à l'échelle ou non, on pourrait penser qu'*a priori* le *MSCI Switzerland* a grandement surperformé les autres indices mais la mise à échelle permet de rendre compte de la fausse idée reçue.

Toutefois, dans le cadre d'une allocation d'actifs, ce n'est pas une variation absolue qui nous intéresse. En effet, dire qu'une action est montée de 5\$ n'apporte pas suffisamment d'information pour déterminer si c'est une bonne ou une mauvaise nouvelle : il faut remettre cette hausse à l'échelle du cours de l'action. Autrement dit, nous devons étudier les rendements des indices aux pas de temps choisis plutôt que leur cours. Pour des valeurs proches de 0, par développement limité nous obtenons que $\log(1 + x) \sim x$, cela se remarque également par les deux graphiques ci-dessous qui représentent les rendements et log-rendements historiques des indices étudiés :



(a) Log-rendements des indices



(b) Rendements des indices

FIGURE 8 – Evolution des rendements hebdomadaires des indices MSCI

Pour la suite, nous resterons avec des rendements **hebdomadaires**, ils présentent plusieurs avantages. Le premier est qu'ils permettent de "lisser" les perturbations quotidiennes, c'est-à-dire qu'ils vont enlever une partie du risque mesurable. Cela a du sens dans la mesure où, le développement du modèle de Black-Litterman a parmi ses objectifs, celui de développer un modèle, disons-le même, un outil d'aide à la décision, et que cet outil doit permettre à la Gestion des Actifs du Groupe Caisse des Dépôts d'avoir un sens du risque/rendement long terme qui leur convient. Les gérants ne font pas de mouvements brusques et l'allocation se base sur une perspec-

tive de rentabilité à moyen terme plutôt que court terme. Dans ce sens les données quotidiennes ne sont pas utiles. Par ailleurs, utiliser des données mensuelles diminuerait de presque cinq fois la taille de la base de données. Pour réaliser des séries temporelles cela se conçoit. Mais pour estimer une densité qui devrait finir par être de la famille des lois α -stables, il nous faut davantage d'observations. En effet avec des données mensuelles nous n'aurions pas assez de risques "rares".

Nous allons utiliser, comme nous travaillons de façon empirique, des estimateurs pour différents moments d'une variable aléatoire X . Notre objectif est que ceux-ci soient cohérents avec la pseudo-valeur que nous cherchons, nous choisissons donc, pour chacun des deux premiers moments, les estimateurs les plus performants (sans biais et/ou convergence rapide). Ils sont résumés ci-dessous :

$\mathbb{E}(X) = \mu$	$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} = \hat{\mu}$
$\text{Var}(X) = \sigma^2$	$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\sigma}^2$

Nous présentons ci-dessous les graphiques d'étude de la stabilité de l'espérance et de l'écart-type dans le temps (sur l'intervalle de nos données). Notre objectif est de voir si des tendances globales se dessinent.

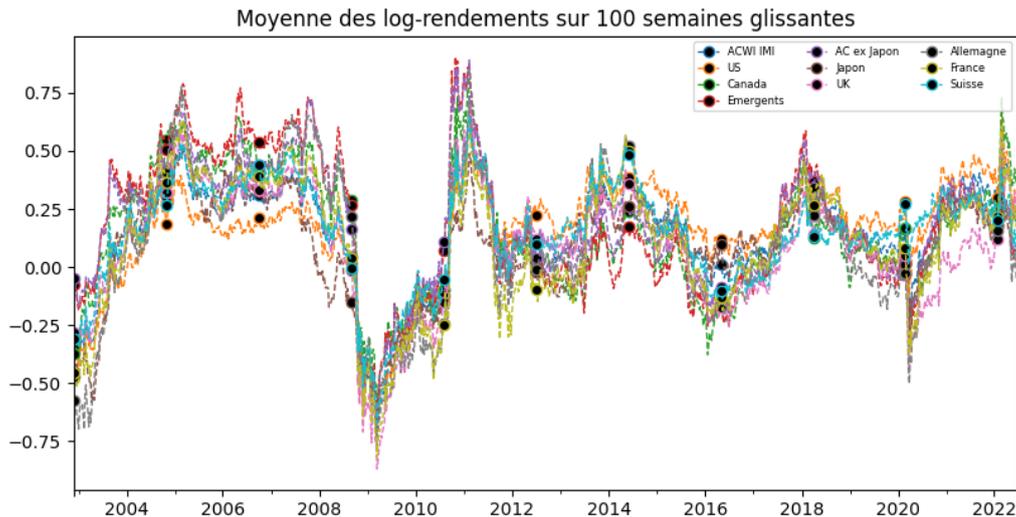


FIGURE 9 – Evolution du rendement moyen sur 100 semaines glissantes

Nous pouvons remarquer que la moyenne glissante est d'apparence très volatile, cela souligne l'importance de ne pas utiliser l'intégralité des données car des *humeurs* de marché passagères sont présentes. Un marché pessimiste ou optimiste va donner aux actifs un comportement différent d'un scénario *calme*. Ces dernières années n'ont pas été lisses d'un point de vue économique et il faut intégrer cette information à notre choix de l'historique utilisé. Comme nous le verrons plus tard, des lois usuelles ne permettront pas d'avoir une vue réaliste en capturant une grande part d'information passée. Nous pouvons identifier très clairement les crises connues (2008 et 2020).

Prenons maintenant la volatilité des actifs pour voir si le comportement est similaire :

(Graphique page suivante)

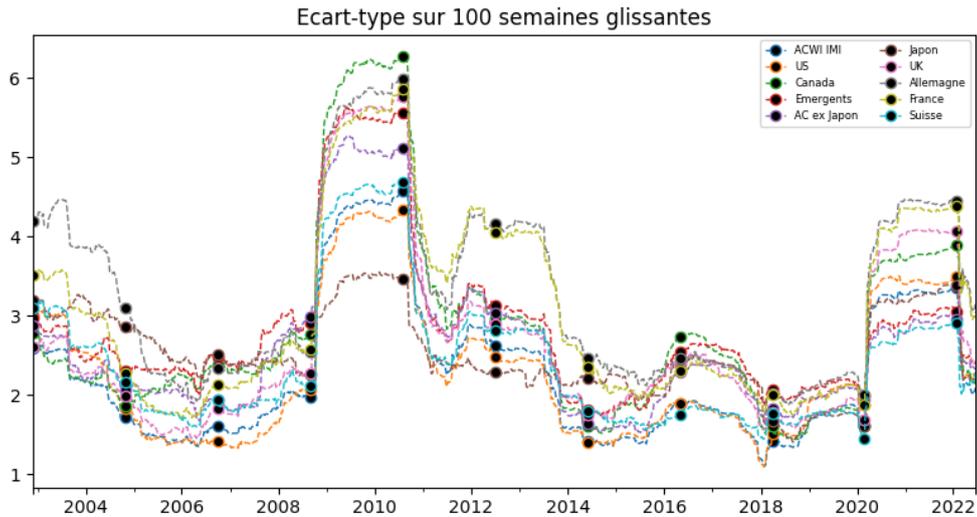


FIGURE 10 – Evolution de l'écart-type sur 100 semaines glissantes

L'évolution de l'écart-type est contraire à celle des rendements, cela s'explique par le fait qu'en cas de grand basculement du marché, la volatilité va s'amplifier. Nous apercevons également un certain détachement autour de 2012, cela correspond très probablement à la crise de la dette souveraine car ce sont les indices de pays européens qui sont touchés. Plus largement, un certain lien semble se profiler.

Comme nous allons travailler majoritairement sur un portefeuille composé uniquement d'actions, nous nous attendons à voir une certaine forme de corrélation. Cela se dessine déjà avec l'évolution des écarts-types mais il est toujours complémentaire d'avoir des valeurs pour la dépendance entre celles-ci :

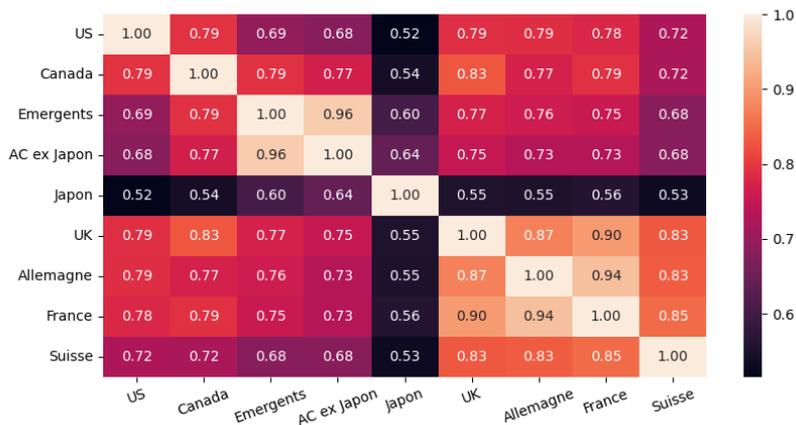


FIGURE 11 – Matrice de corrélation des actifs

A l'exception du *MSCI Japon*, les actifs sont très corrélés entre eux. Nous pouvons par ailleurs identifier un lien **géographique** dans ce panel d'indices : les pays européens ont un lien fort entre eux. De plus l'impact américain sur l'intégralité des autres marchés est assez logique à cause de sa grande capitalisation totale qui a des conséquences directes à la moindre variation sur n'importe quel pays.

V Étude des paramètres du modèle

Le modèle présenté précédemment peut paraître au premier abord assez simple mais flou, en effet les divers paramètres qui sont contenus, même si leur intérêt peut être justifié, ne se calculent pas de façon aisée. Par exemple, prenons l'incertitude d'une vue de l'investisseur, il semble *a priori* très compliqué d'estimer la certitude d'un avis, on n'entend jamais quelqu'un dire "Je pense que le CAC40 va performer de 3% sur le prochain semestre avec une probabilité de 0,6", du moins en cherchant cette phrase sur internet, on ne trouve rien !

Cette partie s'intéresse premièrement au décorticage du modèle précédemment présenté, en prenant soin de présenter les variantes qui ont été proposées ou les flous qui ont été éclaircis. Dans leur papier original, les chercheurs *Black* et *Litterman* ont laissé des zones d'ombre sur le paramétrage et ont alors ouvert le champ des possibles. A travers les prochaines sections, nous allons donc chercher à retrouver des valeurs cohérentes en s'appuyant sur la recherche qui a été menée au cours des dernières décennies dans cette thématique ([18], [26], [1]).

L'objectif de cette section est également de comprendre la plus-value de chacun des paramètres, de voir s'il serait pertinent d'en ajouter ou de les redéfinir pour qu'ils soient plus concrets. Il est assez fréquent dans la littérature concernant le modèle de Black-Litterman de lire que certaines zones d'ombre persistent ou nécessitent des hypothèses ou paramétrages supplémentaires. La prétention n'est pas au rendez-vous pour cette partie, il n'y aura pas de recette miracle du modèle mais une étude poussée pour démystifier l'interaction et l'utilité de celui-ci.

Lorsque nous nous intéresserons à un paramètre particulier, nous considérerons les autres d'une valeur "standard". Ci-dessous nous figeons les paramètres de référence pour cette section :

Paramètre	Valeur
Σ	$\hat{\Sigma}$ où $\sigma_{i,j} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)$
Ω	$\tau \text{diag}(P^t \Sigma P)$
τ	0,05
λ_m	3
w_{market}	Répartition du MSCI World normalisée
$r_f(\text{annuel})$	2%

Une seconde spécification porte sur les anticipations de marché. On considérera pour la suite que :

- L'indice **Suisse** surperforme l'indice **US** de **0,1%** sur la période suivante (ici hebdomadaire) (l'équivalent annuel est de **5,34%**)
- Les indices **France** et **Canada** vont surperformer l'indice **Japon** de **0,2%** sur la prochaine période (l'équivalent annuel est de **10,96%**)

Les matrices retranscrivant ces anticipations sont alors les suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0,1\% \\ 0,2\% \end{pmatrix}$$

Les poids dans la matrice P ont été choisis de façon simple. Avec du recul, il serait plus judicieux de considérer dans une vue **relative** considérant 3 actifs (au moins) que ceux pondérés dans le même sens n'aient pas le même poids mais plutôt un poids relatif à sa présence dans le portefeuille de marché. En effet, considérer des poids similaires pour *MSCI France* et *MSCI Canada* va avoir tendance à surestimer l'impact sur *MSCI France* car son poids dans le portefeuille est plus faible mais que la vue lui accorde plus d'importance relativement au *MSCI Canada*. En général, il est préférable de pondérer en fonction de la capitalisation (ou alors il faut spécifier pourquoi les poids sont attribués autrement).

V.1 Allocation du modèle de base

Dans cette première sous-section, nous nous intéressons aux résultats du modèle avec les paramètres donnés plus haut et les actifs financiers présentés dans la partie précédente. Présentons d'abord les rendements d'équilibre du MEDAF ainsi que ceux donnés par Black-Litterman. Cela permet en premier lieu d'avoir une représentation de l'impact des anticipations de marché.

Comme présenté, les rendements d'équilibre du MEDAF sont estimés à partir du portefeuille de marché que l'on considère comme **optimal** au sens qu'il maximise l'utilité des investisseurs avec un comportement rationnel ayant pour objectif de placer leur capital sur le marché action dans le monde en utilisant une granularité géographique. Le fait que le poids de l'indice US soit relativement important par rapport aux autres modifie grandement les rendements d'équilibre et par conséquent l'allocation issue du modèle. Cela sera l'objet de la sous-section concernant le portefeuille de marché mais il semble essentiel de le préciser dès à présent.

Pour revenir aux résultats du modèle de base de Black-Litterman, nous obtenons les rendements suivants (nous les annualisons pour que les différences soient plus significatives, ils sont estimés à partir de l'intégralité des données) :

Indice	Rendements moyens	Rendements MEDAF	Rendements B-L
US	6,30%	9,54%	9,44%
Canada	6,09%	10,55%	12,41%
Emergents	7,76%	9,73%	11,13%
Asia Pacific ex JP	7,99%	8,89%	10,04%
Japon	2,38%	6,36%	5,50%
UK	3,28%	10,14%	12,59%
Allemagne	3,11%	12,25%	15,28%
France	3,25%	11,46%	14,66%
Suisse	5,79%	8,23%	11,65%

Les rendements moyens (annualisés) sont simplement présentés ici pour montrer qu'ils n'ont pas de réels liens avec ceux issus des modèles. A vrai dire, les rendements d'équilibre sont le résultat de la variance des actifs et du poids dans le portefeuille de marché.

Il est également possible de commenter les deux dernières colonnes par rapport aux vues qui ont été formulées avant. En effet, les actifs impactés **positivement** sont soit ceux dont l'anticipation, soit ceux dont la corrélation est importante à ceux qui ont évolué à la hausse. Cela peut paraître comme faire le lien *cause-conséquence* mais l'obtention des résultats s'appuie sur la matrice de covariance et dès lors que deux actifs ont un coefficient de corrélation est proche de **1**, l'impact est similaire sur ceux-ci.

Une remarque intéressante à faire est sur les rendements attendus du modèle de Black-Litterman concernant les actifs dont les attentes sont **négatives**. Pourquoi le rendement attendu du *MSCI Japon* est beaucoup plus affecté que celui du *MSCI US*? Parce que l'anticipation de sous-performance associée est plus grande. Dès lors, les rendements attendus subissent un impact plus marqué. D'autre part, le poids du *MSCI US* est plus important dans le portefeuille de référence ce qui atténue les variations le concernant. Ces raisons sont simplistes et mettent de côté les corrélations mais permettent de se faire une brève idée.

Après avoir brièvement évoqué les rendements, passons aux allocations proposées. Nous en présentons 2 différentes : **avec** contraintes de positivité (pas de vente à découvert), **sans contraintes** sur les investissements (la somme des poids est égale à **1** dans les deux cas). Bien que la première soit la plus réaliste, le fait qu'elle n'admette pas de formule fermée est quelque peu problématique, nous avons donc recours à des algorithmes d'optimisation. Le modèle était initialement prévu pour comprendre la vente à découvert. Par ailleurs, pour obtenir une somme

des poids égale à 1, il nous faut simplement multiplier les poids finaux par $(1 + \tau)$. La raison derrière cette contrainte est que nous considérons que l'intégralité du capital investi est placée sur les actifs listés et qu'on ne place rien sur un *actif sans risque*.

Nous obtenons les allocations suivantes :

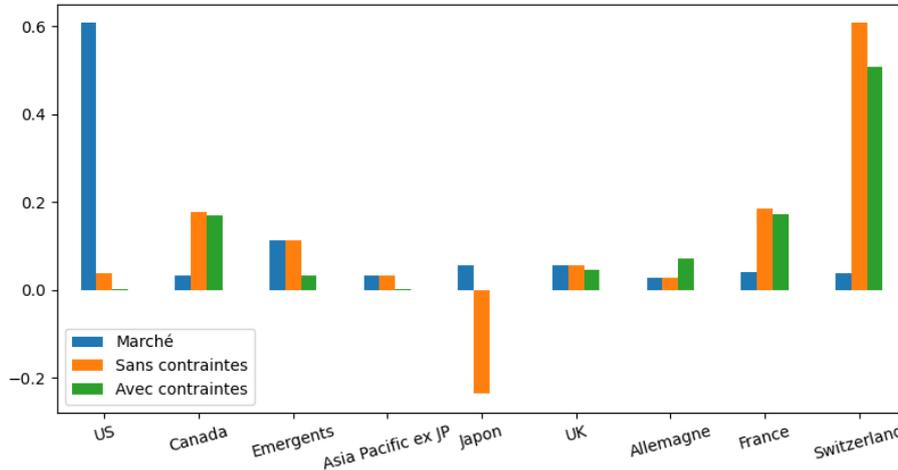


FIGURE 12 – Allocations proposées pour les indices MSCI

Les résultats sont intéressants car ils reflètent correctement nos anticipations du marché. En effet, les actifs pour lesquels nous n'avons pas formulé de **vues** n'ont pas vraiment un poids différent après application du modèle pour la méthode sans contrainte tandis qu'ils sont impactés en allocation contrainte. Cependant, ceux que nous prévoyons comme **sur-performants** (resp. **sous-performants**) ont un poids qui va drastiquement augmenter (resp. diminuer). En rappelant que les indices *MSCI US* et *MSCI Japon* sont les deux pour lesquels nous avons une anticipation négative sur la prochaine période, il est intéressant de remarquer que le premier n'est pas vendu à découvert tandis que le second l'est largement. Deux raisons expliquent ce phénomène : le poids de départ du *MSCI US* est nettement plus conséquent et l'anticipation est moins *marquée*. D'autres informations peuvent également entrer en compte à l'instar des rendements d'équilibre du MEDAF. Comme nous pouvons le voir plus haut, celui du *MSCI US* est plus important que celui du *MSCI Switzerland* et donc dès lors qu'on anticipe une sur-performance en contraste avec le marché d'équilibre, les allocations sont très modifiées.

Un second commentaire sur les allocations porte sur l'impact important des anticipations : leur contribution au portefeuille final peut être considérée comme trop importante. Pour contenir les variations sous la spécification des paramètres donnés, la seule solution est de réduire les rendements (**Q**) des **vues** par un facteur α . L'étude des paramètres et des spécifications différentes peuvent éviter d'avoir recours à cet ajout, cependant sous le modèle de base, l'incertitude des anticipations de marché n'est que mal retranscrite.

Nous n'avons pas évoqué l'importance de la taille de l'échantillon ni la création d'une base **test** et une autre **train** (*training* comme entraînement). Comme notre pas est hebdomadaire et que nous avons environ un millier d'observations, des valeurs qui ont plus de 10 ans peuvent sembler trop lointaines pour le marché actuel. Pour autant il faut en avoir assez pour que l'estimation des rendements reste **stable**.

Présentons simplement une seconde fois les poids issus du modèle de Black-Litterman **avec** et **sans contraintes** mais cette fois-ci en faisant varier l'historique pour commenter l'importance du changement de taille d'échantillon. Nous considérons que nous cherchons une allocation pour la période suivante (donc du 20/06/2022 au 26/06/2022) à partir de plusieurs quantités d'information passée :

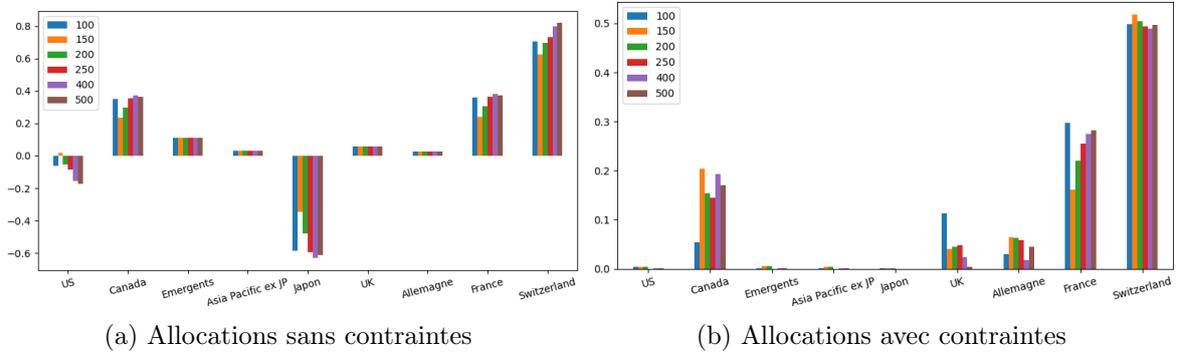


FIGURE 13 – Portefeuilles de Black-Litterman au 26/06/2022 en faisant varier la taille de l'échantillon d'estimation

A première vue, une taille trop faible pour l'échantillon empêche la stabilité, en effet c'est à partir de 200 observations que le résultat semble stable. Un minimum de 150 observations est arbitrairement choisi, pour le sectionnement entre les bases de **calibrage** et d'**évaluation** il nous faut avoir un ratio de 80/20. Nous prendrons donc 200 données avec une fenêtre de 160 pour calibrer et projeter à la période suivante. Les rendements historiques datant d'avant le **26 août 2018** sont mis de côté pour une partie de ce mémoire.

En effet, face aux multiples changements de paradigme des marchés financiers, nous ne pouvons pas conserver tout l'échantillon. Quand il sera nécessaire d'utiliser les quantiles relativement extrêmes ou des distributions plus complexes, nous étendrons la base.

Bien que nous considérons des tailles d'échantillon de 200 observations pour l'étude de la sensibilité des paramètres ainsi que leurs méthodes de calibration, la découpe entre base *test* et base *train* sera utile lorsque nous chercherons à comparer la performance des portefeuilles.

Maintenant que le modèle de base et quelques résultats associés ont été présentés, nous pouvons passer à l'étude plus poussée sur chacune des composantes du modèle de Black-Litterman. Les performances sur plusieurs périodes seront abordées plus loin car certaines spécifications supplémentaires sont nécessaires.

V.2 Ω , matrice d'incertitude des vues d'experts

Lorsque nous spécifions des vues (anticipations) de marché pour la période suivante, une incertitude y est associée. Celle-ci retranscrit inversement le degré de confiance que l'investisseur a en ses anticipations. Le problème réside dans la formulation de cette incertitude : comment formuler la **matrice d'incertitude** Ω ?

V.2.1 Incertitude par *He* et *Litterman*

La première approche se fonde sur l'hypothèse que l'incertitude associée aux anticipations est **proportionnelle** à la variance *a priori*. He et Litterman (1999) [7] proposent une formule simple :

$$\Omega = \text{diag}(P^t(\tau\Sigma)P)$$

Bien que ce soit la forme la plus utilisée, elle est limitée car le paramètre τ devient alors sans effet sur la valeur des rendements *a posteriori* et il n'est pas possible de donner sa **confiance**. Un point positif est que si nous avons des vues sur le marché mais ne savons pas la confiance que nous leur attribuons, dans la mesure où les anticipations ne seraient pas trop aberrantes par rapport aux rendements de marché, alors cette version de Ω est utile et simplifiante.

Cette sous-section est assez courte car la version de Ω par He et Litterman ne permet pas de spécification de l'incertitude des vues. Dès lors il n'y a que peu d'intérêt à étudier les sensibilités. Nous faisons une comparaison après la présentation des trois méthodes pour établir une critique sur celle-ci énoncée plus haut qui figure quelque peu **limitée**.

V.2.2 Incertitude par Meucci

Meucci [18] propose d'ajouter un paramètre $c \in (0, \infty)$ qui sert de paramètre de confiance des vues. Celui-ci permet également de lisser le passage des **rendements d'équilibre** aux **rendements anticipés**.

$$\Omega = \frac{1}{c} P^t \Sigma P$$

Dans le cas où $c \rightarrow \infty$, la confiance sera très forte tandis que $c \rightarrow 0$ donnera un effet nul aux anticipations formulées qui seront alors trop volatiles (incertaines).

Un léger problème porte sur l'inversibilité de Ω , pour ne pas avoir à nous soucier de ceci, nous ne conserverons que les éléments de la diagonale. Les vues étant supposées indépendantes, cela ira davantage dans le sens logique du modèle.

Cependant lors de l'application, le fait que c puisse varier jusqu'à l'infini n'est que peu retranscriptible quand la confiance ne peut être comprise qu'entre 0 et 100%. Le graphique ci-dessous présente l'évolution de l'allocation sans contraintes en faisant varier c de 1 à 1000 (en ordonnée, le poids de chaque actif dans le portefeuille en %) :

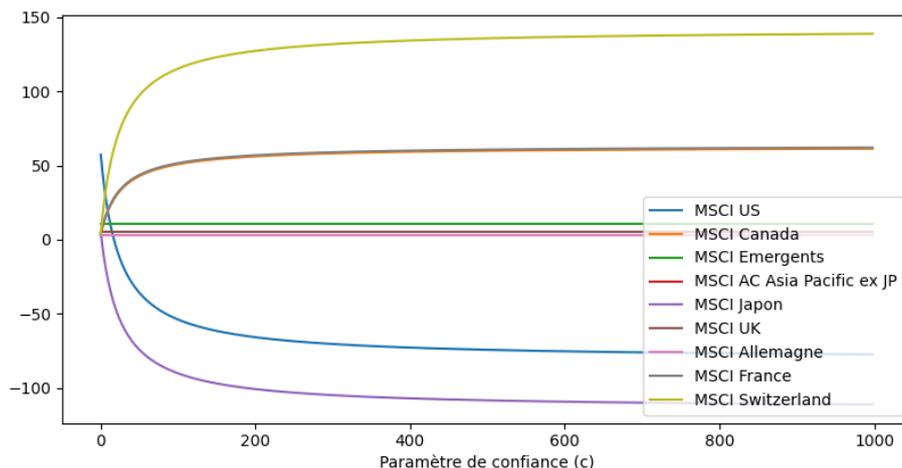


FIGURE 14 – Sensibilité de l'allocation sans contraintes au paramètre de confiance c

Nous remarquons que le réel impact des vues est sur les faibles valeurs de c mais qu'asymptotiquement, une stabilité s'installe, et ce très rapidement. Cela peut être problématique car une confiance très élevée ne sera pas plus prise en compte qu'une confiance élevée.

Un commentaire intéressant peut être fait sur la réaction associée aux **vues**, en effet, celle qui porte sur les MSCI **US** et **Suisse** semble donner une réaction plus tardive sur l'allocation mais plus importante. Une raison cohérente serait de dire que le poids du *MSCI US* est de base important donc la vue ne fait pas basculer aussi rapidement le portefeuille que la seconde.

Concernant les portefeuilles obtenus en ajoutant des contraintes de positivité et que la somme investie soit égale à 1, nous présentons également les résultats. Les courbes sont moins *lisses* du fait que nous passons par un algorithme d'optimisation plutôt que par une formule fermée mais présentent un phénomène de courbure et de stabilité asymptotique similaires :

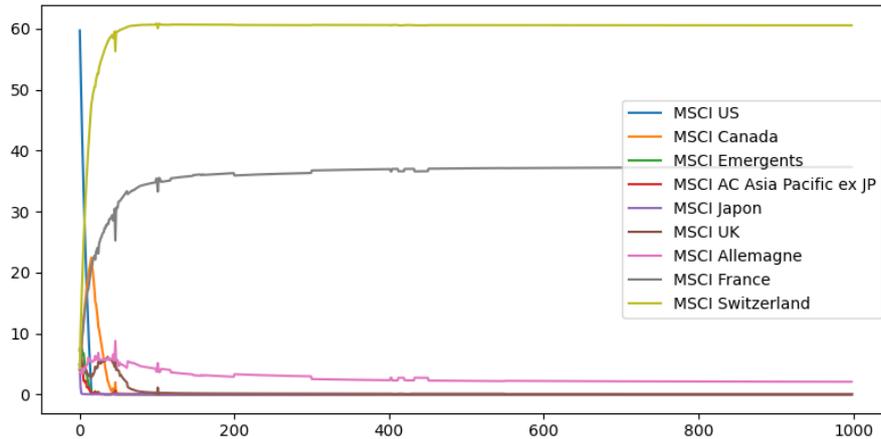


FIGURE 15 – Sensibilité de l'allocation avec contraintes au paramètre de confiance c

Des modifications peuvent alors être faites sur le modèle proposé par Meucci. Nous proposons deux pistes d'amélioration :

- c doit être compris entre **0** et **250**, certes nous perdons de l'information entre 250 et 1000 mais elle est mineure et n'induit pas de changements majeurs sur l'allocation (les actifs sur lesquels nous avons des vues deviennent de plus en plus présents mais pas de réelle inversion comme ce qui est observable en début de graphique),
- la courbe de l'évolution des portefeuilles est trop marquée, nous remarquons directement que lorsque la confiance est faible, une petite variation entraînera un changement d'allocation conséquent. Or cela devient peu cohérent, pour remédier à ceci, nous considérons que la courbure est de la forme $f(x) = \frac{1}{x^y}$ pour $x \in (0, \infty)$ où y représente l'intensité de la courbure.

En formalisant ces deux idées, nous obtenons le processus de transformation de la confiance de l'investisseur suivant :

- Soit la confiance dans les vues c_{conf} comprise entre 0 et 100 (en %), on pose

$$c_{restreint} = \frac{c_{conf}}{100}$$

- Nous considérons un entier d , paramètre de puissance, alors c_d permet de remettre à l'échelle c_{conf}

$$c_d = c_{restreint} * \exp\left(\frac{\log(250)}{d}\right)$$

- Nous obtenons par dernière transformation le paramètre final utilisé $c = (c_d)^d$

Désormais, il nous faut trouver le paramètre d qui correspond au mieux à la courbe finale que nous souhaitons avoir. De façon optimale, la méthode d'obtention serait de prendre chaque

actif et de considérer une régression pour obtenir la valeur d_{MCO} par méthode des moindres carrés. Ici nous choisissons plutôt qualitativement, relativement à certains critères : courbure sur l'allocation finale modérée, une répartition assez large sur l'intervalle de confiance.

En Annexe B, les puissances 3, 5 et 10 ont été utilisées pour voir les nuances qui pouvaient en ressortir. Nous choisissons par la suite $d = 4$ qui semble le mieux convenir. Ci-dessous, nous pouvons voir que la courbure qui en résulte est beaucoup plus acceptable pour notre problème d'allocation (sans contraintes) :

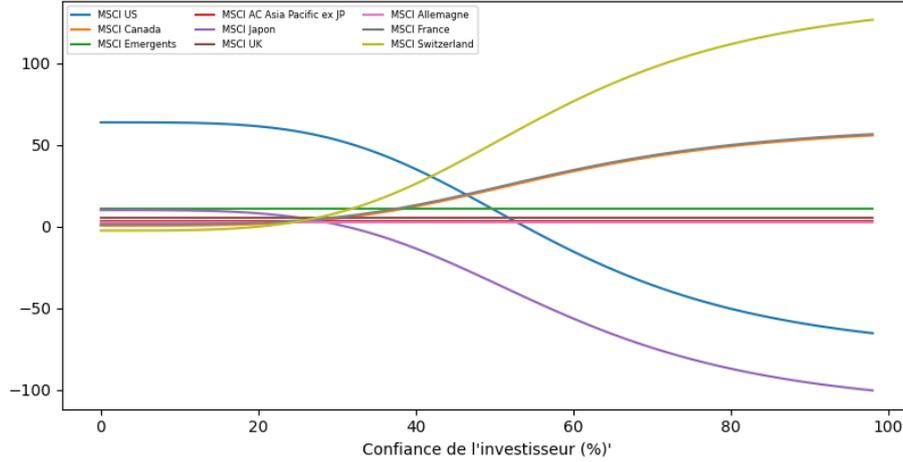


FIGURE 16 – Sensibilité de l'allocation au paramètre de confiance c_d avec $d = 4$

V.2.3 Incertitude par Idzorek

Enfin, nous présentons une troisième approche, elle est à la fois moins intuitive et moins évidente à appliquer mais nous permet de comparer les résultats. Idzorek (2005) propose que les termes de la diagonale de Ω soient des pourcentages de la variation entre le portefeuille de marché et celui issu d'une confiance à 100%. Nous l'estimons en **7 étapes** en repartant de la caractérisation de He et Litterman (1999) :

1. Pour chaque vue \mathbf{k} , nous calculons le vecteur de rendement *a posteriori* avec une confiance absolue dans la vue :

$$E[R_{k,100\%}] = \Pi + \tau \Sigma P_k (P_k^t \tau \Sigma P_k)^{-1} (Q_k - P_k^t \Pi)$$

Avec

P_k le portefeuille concernant la vue \mathbf{k}
 Q_k le rendement associé à la vue \mathbf{k}

2. $w_{k,100\%} = (\lambda \Sigma)^{-1} E[R_{k,100\%}]$
3. $D_{k,100\%} = w_{k,100\%} - w_{mkt}$
4. $T_k = D_{k,100\%} * C_k$ où C_k correspond à un vecteur colonne ($c_k = 0$ si l'actif n'est pas dans P_k , $c_k = \text{confiance}$ sinon)
5. Estimer le vecteur de poids ciblé : $w_{k,\%} = w_{mkt} + T_k$
6. Trouver le k -ème élément de la matrice diagonale Ω ω_k qui minimise l'écart quadratique entre $w_{k,\%}$ et w_k :

$$\min \sum_i (w_{k,\%,i} - w_{k,i})^2$$

s.c $\omega_k > 0$

$$\text{Où } w_k = [\lambda \Sigma_{\text{posteriori}}]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} + P_k \omega_k^{-1} P_k^t]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P_k \omega_k^{-1} Q_k]$$

- Répéter ces étapes pour chacune des vues pour obtenir à la fin Ω diagonale et optimale pour la représentation de la confiance de l'investisseur, et enfin le nouveau vecteur de rendements avec la formule de référence.

Remarque : Une précision a été omise dans les précédentes sections, le lecteur ayant atteint celle-ci est donc récompensé d'une information importante : *pour les vues absolues, il faut re-trancher le taux sans risque à l'anticipation car nous parlons principalement en prime de risque, autant en 2021 cela ne changeait rien avec les taux très bas mais au temps de la rédaction il faut bien le considérer !*

Commençons par présenter les résultats issus de l'algorithme mis en place par Idzorek. En faisant varier la confiance associée à chacune des deux vues séparément puis communément, nous obtenons la sensibilité des allocations avec et sans contraintes par rapport à l'évolution de la confiance dans les anticipations. .

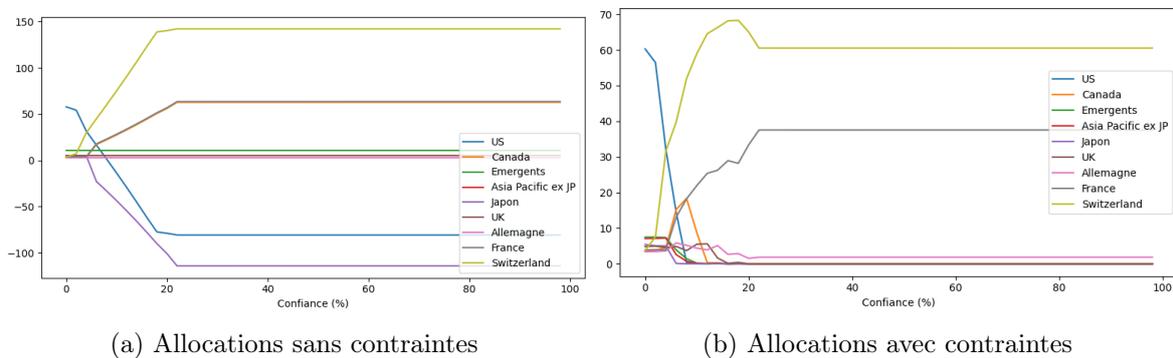


FIGURE 17 – Portefeuilles de Black-Litterman en faisant varier la confiance associée aux deux anticipations

Nous pouvons faire un constat similaire à celui concernant la caractérisation initiale de Meucci : Au-delà d'un niveau de confiance qui est rapidement atteint, les variations sur le portefeuille optimal au sens de Black-Litterman sont mineures voire nulles. Dès lors, nous devons considérer une transformation en amont de l'algorithme proposé plus haut sans pour autant effectuer un passage par une fonction convexe (peu d'intérêt ici car la courbure n'intervient pas autant que sur la caractérisation de Meucci).

Nous proposons alors de considérer qu'une confiance sur une vue c_{conf} comprise entre 0 et 100% sera transformée en $c_{Idzorek} = \frac{c_{conf}}{5}$ comprise entre 0 et 20% afin d'avoir un réel impact même sur une confiance passant de 90% à 100%.

Une autre remarque concerne les variations sur le graphique (a) : nous pouvons constater que l'accroissement des poids sur les actifs concernés par les vues se fait de façon linéaire, et que le poids associé à chaque actif pour chaque vue dans la matrice \mathbf{P} détermine la *pente*. En effet, prenons exemple sur les *MSCI Japon*, *France* et *Canada*, l'évolution des poids se fait avec une pente deux fois plus élevée pour le Japon que pour les deux autres.

Par ailleurs, pour la méthode d'allocation où les poids sont contraints à être positifs, le *MSCI Canada* disparaît soudainement vers environ 10% de confiance. Cela est très certainement dû à la domination de l'autre vue. Le concept de domination des vues désigne le fait qu'une anticipation est **plus forte** qu'une autre au sens où elle permettrait d'augmenter la fonction d'utilité *Rendement-Risque* plus que celle à laquelle nous la comparons. Ici l'anticipation sur les *MSCI US* et *Suisse* domine la seconde ce qui donne cette disparition du *MSCI Canada* lorsque les poids sont contraints.

De plus, la **confiance** associée aux deux vues est ici égale, ce qui ne permet *a priori* pas de faire une réelle étude et justifier la disparition soudaine d'un actif que l'on anticipe par ailleurs comme **sur-performant**.

A partir de ces modifications et en considérant les vues de référence, nous pouvons étudier le comportement de l'allocation optimale en fonction de la confiance associée à chaque anticipation. Nous fixons celle qui ne varie pas à 0 afin qu'elle ne perturbe pas la variation principale. Commençons par présenter les résultats concernant la **vue 1** (*MSCI US* et *MSCI Suisse*) :

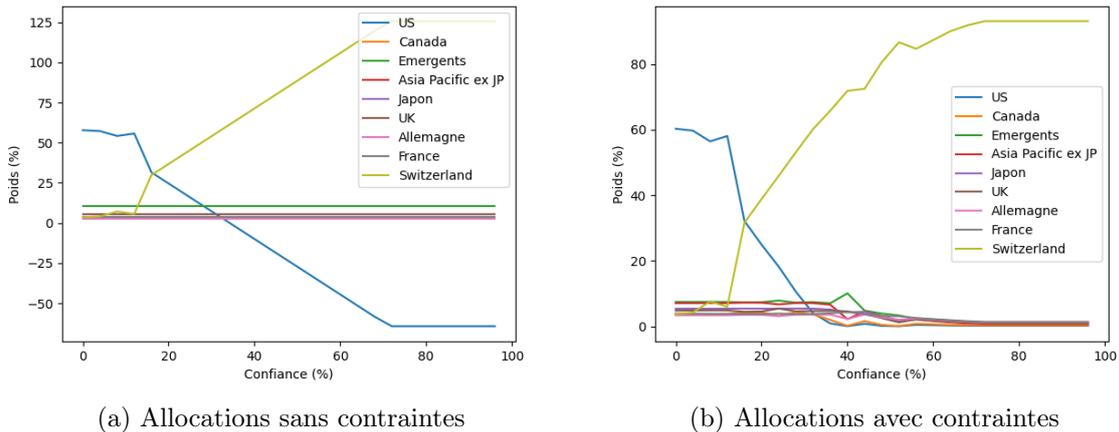


FIGURE 18 – Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 1

L'algorithme d'optimisation d'Idzorek mêlé à l'optimisation sous contraintes rend les résultats peu lisses mais les tendances sont très claires. Un premier point intéressant est que peu importe la méthode, les deux sont similaires sur la *cassure* autour des 20% ainsi qu'au point de croisement des deux actifs concernés. Les deux actifs concernés par la vue sont les seuls touchés, cependant on remarque qu'à partir de 80%, le *MSCI Suisse* devient l'unique composante du portefeuille. Passons maintenant à la sensibilité des portefeuilles optimaux à la confiance sur la seconde anticipation :

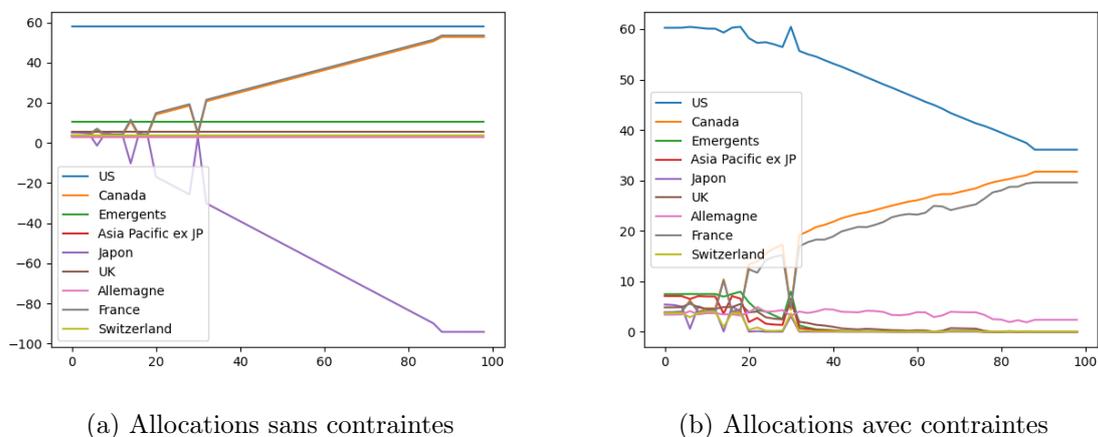


FIGURE 19 – Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 2

Ici le comportement est très différent pour les deux cas. Nous remarquons certains **sauts**, cela vient de l'algorithme d'Idzorek. En certains points l'optimal n'est que local et pas global. Il est donc important lorsque l'on utilise de telles méthodes de toujours veiller à faire varier nos paramètres pour être sûr de ne pas être dans une telle *cassure*. Le phénomène intéressant a lieu pour l'allocation sous contraintes.

Bien que la vue soit soutenue par davantage de confiance, la présence du **MSCI US** reste. Cela est probablement dû au fait que c'est un actif qui dans le portefeuille domine les autres et est celui qui a le plus fort impact, sur les rendements d'équilibre. Dès lors, s'il n'est pas affecté par une vue et que celle formulée reste mineure sur les autres actifs, alors il garde une place considérable (si l'on met une anticipation de 200% de sur-performance du *MSCI Emergents* par rapport au *Japon* par exemple, il est évident que la place du *MSCI US* serait contestée, même pour des degrés de confiance plus faibles).

Une étude qui a été également faite porte sur l'importance des rendements associés aux vues, c'est-à-dire de voir à quel point les portefeuilles se retrouvent modifiés en multipliant les rendements des vues par deux. Il est possible de retrouver les graphiques en Annexe. En ce qui concerne les commentaires associés, nous pouvons principalement les résumer en deux points :

- **sans contraintes** : les actifs non concernés par les vues ne sont en sortie pas impactés, ceux concernés ont une évolution supérieure à **2**. En effet pour une confiance entière en prenant l'exemple de la vue 2, le poids du *MSCI Japon* est de -95% sans modifier le rendement puis de -230% ce qui est très intéressant et souligne une fois de plus l'importance d'être précis sur les anticipations formulées,
- **avec contraintes** : principalement sur la seconde vue, nous pouvons constater qu'en multipliant le rendement attendu par deux, le portefeuille optimal change très clairement pour des degrés de confiance élevés. Le *MSCI US* se retrouve à être bien plus pénalisé par rapport à sa présence au portefeuille de marché.

V.2.4 Etude comparative des méthodes

Maintenant que les 3 différentes formules associées à la matrice Ω d'incertitude des vues ont été présentées, nous pouvons brièvement regarder l'impact qu'elles ont sur l'allocation finale pour un **niveau de confiance** donné. Afin de ne pas remplir à outrance ces pages de graphiques tous similaires, nous affichons par la suite seulement ceux relatifs aux allocations sans contraintes pour des confiances de 25%, 50% et 75%. Les autres graphiques (5% et 100% ainsi que l'intégralité des allocations contraintes sont en Annexe).

(Graphiques page suivante)

Premièrement, lorsqu'on associe un degré de confiance de 25% à nos anticipations, nous remarquons que les deux méthodes permettant de quantifier la confiance réagissent bien différemment. Cela provient en partie du fait que nous avons cherché à optimiser la courbure du côté de la méthode de Meucci pour qu'elle soit conforme à nos attentes alors qu'aucun traitement n'a été effectué sur celle d'Idzorek. Cela pourrait être par ailleurs une piste intéressante.

Pour une faible confiance, les portefeuilles diffèrent grandement tandis qu'en l'augmentant, les deux méthodes se rapprochent. Un point essentiel est sur la méthode *simpliste* de He et Litterman, il semblerait que leur caractérisation de Ω soit en fait le reflet d'une confiance **moyenne** dans les vues. Nous pouvons de fait constater qu'à une confiance de 50% les portefeuilles optimaux de Black-Litterman ont des structures relativement similaires.

Enfin comme dernière analyse, nous pouvons considérer l'asymétrie entre la méthode de Meucci et celle d'Idzorek dans l'évolution du degré de confiance : ils sont très différents quand elle est basse mais finissent par avoir des poids identiques à partir d'une confiance moyenne.

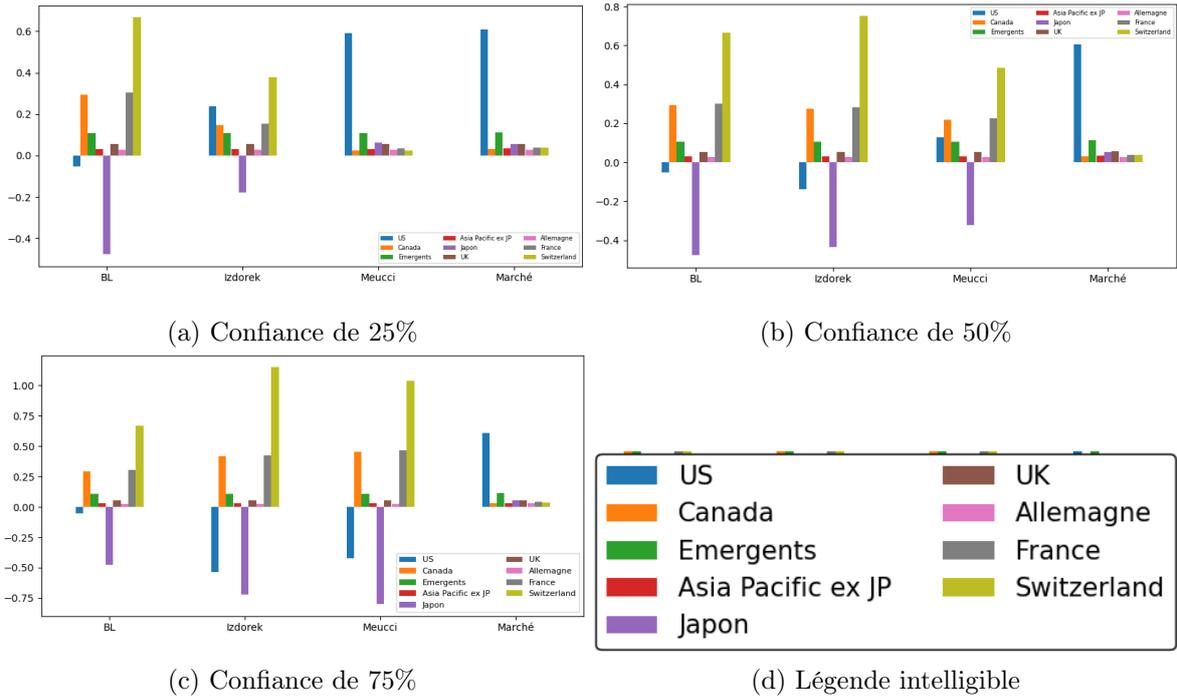


FIGURE 20 – Portefeuilles de Black-Litterman en fonction de la version de Ω et de la confiance

Un avantage fort de la méthode d'Idzorek reste le choix de la confiance pour chacune des anticipations séparément alors que la méthode de Meucci l'impose à chacune des vues. Par ailleurs, nous pourrions aisément remplacer dans l'algorithme d'Idzorek la matrice Ω de He et Litterman par celle de Meucci mais cela demanderait de donner deux confiances respectives pour les vues ainsi qu'une confiance globale sur les anticipations.

Cela pourrait être un sujet de travail intéressant car nous pourrions évaluer l'investisseur en lui associant un paramètre de confiance c et ensuite considérer ses degrés de certitude c_i pour chacune des anticipations.

V.3 τ , incertitude des rendements d'équilibre

Le paramètre τ du modèle de Black-Litterman intervient, selon les variantes, à plusieurs niveaux. Son utilisation principale est pour décrire l'incertitude associée aux rendements d'équilibre (l'incertitude de l'espérance des rendements). Comme on considère l'espérance μ des rendements r comme une variable aléatoire, elle a également une variance, soit une incertitude.

Une première idée serait de considérer que $\tau = 1/n$ où n serait le nombre d'observation, cela provient directement de la variance associée à l'estimateur $\hat{\mu}$ que nous avons défini plus tôt. Cependant, dans la recherche, du premier article sur le modèle général jusqu'au dernier, personne ne s'accorde sur une valeur précise. Les idées divergent. Par exemple on le retrouve fréquemment fixé à $0,05$, $0,25$ ou encore 1 , sans qu'une preuve tangible vienne avouer la suprématie d'un choix sur un autre.

Ce paramètre peut avoir un impact négligeable sur l'allocation proposée si l'on spécifie la matrice d'incertitude selon la méthode proposée par He et Litterman (1999) où :

$$\Omega = \tau \text{diag}(P^t \Sigma P)$$

Cela provient du fait qu'en reprenant l'expression de l'allocation optimale sans contraintes, τ peut être extériorisé et dès lors devient davantage un multiplicateur global du fait qu'il s'applique aux vues et aux rendements d'équilibre du marché. Cette approximation de l'incertitude apporte des simplifications qui font *in fine* dramatiquement diminuer l'intérêt de τ . Par ailleurs, la somme des poids proposés par le modèle ne vaut pas 1 de façon générale mais $\frac{1}{1+\tau}$ comme nous l'avons vu précédemment. Ceci reste l'intérêt du paramètre dans ces conditions, il ne faut alors pas contraindre la somme des poids à être égale à 1. Si elle ne l'est pas c'est parce que ce qui demeure en moins est alloué à l'actif sans risque de référence. Toute chose étant égale par ailleurs, sur une allocation où nous voyons [*MSCI Canada* et *MSCI France* sur-performer *MSCI Japon* de 0,2%] et [*MSCI Switzerland* sur-performer *MSCI US* de 0,1%] sur la prochaine période, l'évolution de τ se manifeste sur le portefeuille final en réduisant de façon non-linéaire mais plutôt courbée ($f : x \rightarrow \frac{1}{1+x}$) chacun des poids.

Cependant en normalisant les poids investis pour que la somme des poids soit égale à 1, nous voyons ci-dessous que la variation du paramètre n'implique pas de changement sur l'allocation :

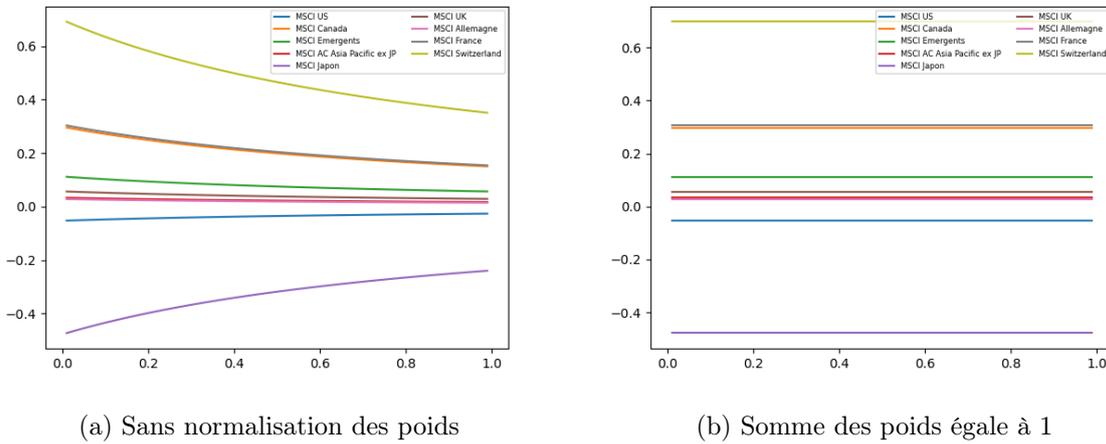


FIGURE 21 – Impact du paramètre τ sur l'allocation finale

Pour pouvoir creuser davantage l'intérêt de faire varier l'incertitude des rendements d'équilibre du MEDAF et la sensibilité des portefeuilles à τ , nous devons nous intéresser à la matrice d'incertitude des vues d'expert. Nous reprenons la forme de **Meucci** qui sera la plus pratique pour faire la séparation entre Ω et τ . Nous considérons que la confiance en nos deux anticipations est ici de 35%. Nous faisons l'étude sur les méthodes avec et sans contraintes :

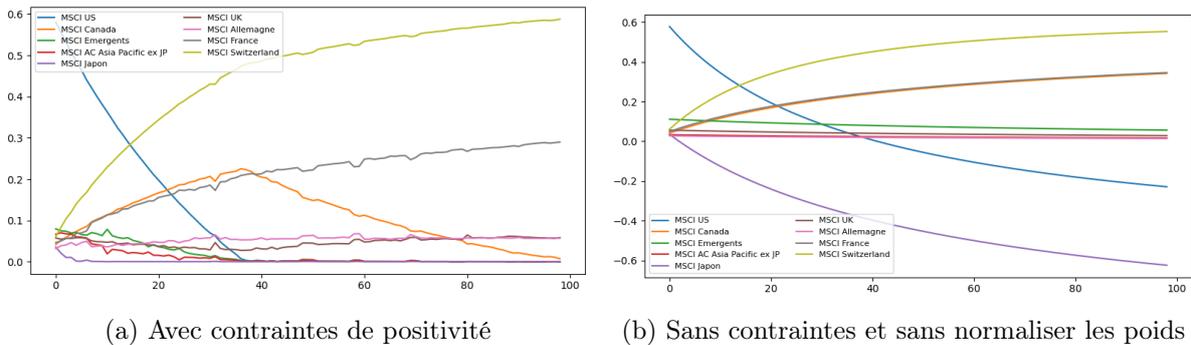


FIGURE 22 – Impact du paramètre τ (en %) sur l'allocation finale

Commençons par l'allocation sans contraintes, il est intéressant de remarquer que les variations selon la valeur de τ sont d'une forme similaire aux précédentes.

Il est essentiel de rappeler que τ n'est pas censé varier dans le modèle : **il doit être spécifié pour l'allocation mais n'a pas de lien avec l'investisseur**. Il est préconisé de prendre une valeur reflétant l'incertitude de l'estimateur des rendements d'équilibre.

Si dans les travaux il est possible de voir différentes valeurs, cela est généralement lié au nombre d'observations. Si l'étude de ce paramètre d'incertitude des rendements d'équilibre semble très simpliste, c'est parce qu'elle est très étroitement liée à la matrice Ω et qu'en ayant modifié les versions de *Meucci* et *Idzorek* pour que le modèle soit cohérent, on ne peut pas modifier τ derrière car cela rendrait contre-productif le travail dans la sous-partie précédente.

Si les deux portefeuilles proposés varient tant pour un niveau de confiance donné, c'est parce qu'en augmentant le paramètre τ , nous augmentons l'incertitude associée au portefeuille de marché sans porter atteinte à celle associée aux anticipations.

V.4 Paramètres associés au marché : λ et $w_{\text{marché}}$

Nous nous focalisons premièrement sur le paramètre λ , il est représenté comme l'aversion au risque des investisseurs et se retrouve via le modèle MEDAF sous la formule donnée dans la présentation du modèle de Black-Litterman. Dans la littérature, des valeurs **fixes** sont données, c'est ce qui est derrière la spécification de ce paramètre comme **référence** dans l'étude des sensibilités du modèle. Pour rappel sa formule est la suivante :

$$\lambda_{CAPM} = \frac{E(R_{\text{marché}}) - r_f}{\sigma_{\text{marché}}^2}$$

En considérant le portefeuille de marché que nous utilisons tout au long de ce mémoire, nous pouvons faire varier les périodes de calcul ainsi que leur taille pour voir comment ce facteur d'aversion évolue :

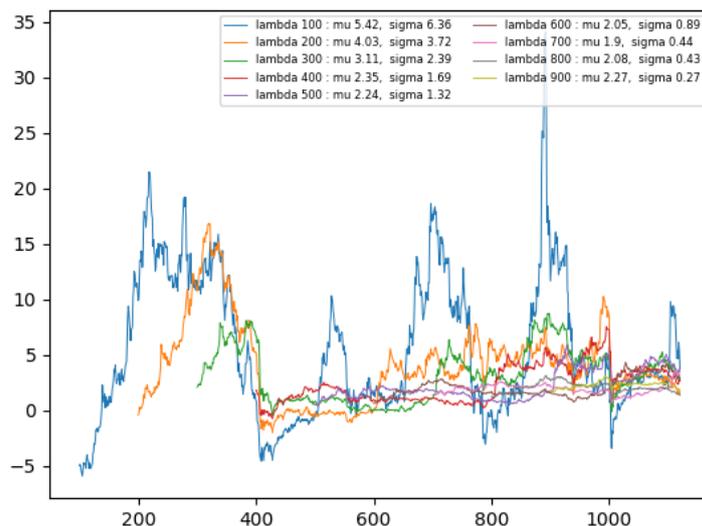


FIGURE 23 – Evolution de l'aversion au risque en fonction du nombre d'observations n

Les fenêtres relativement courtes donnent une aversion au risque très volatile, elle fluctue jusqu'à atteindre des valeurs extrêmes pour une estimation de 100 à 200 périodes.

Au-delà, cette aversion se lisse. Il appartient donc à l'utilisateur du modèle de déterminer s'il veut utiliser une information de marché *moyen terme* ou *long terme*. Mais atteindre des valeurs très élevées n'est pas forcément pratique et efficace pour l'allocation comme nous allons le voir d'ici quelques paragraphes.

En appliquant le modèle de référence avec les paramètres données au début de cette partie et en faisant uniquement fluctuer λ de 0,5 à 5, nous pouvons clairement identifier une tendance sur les rendements *a posteriori* et les rendements d'équilibre.

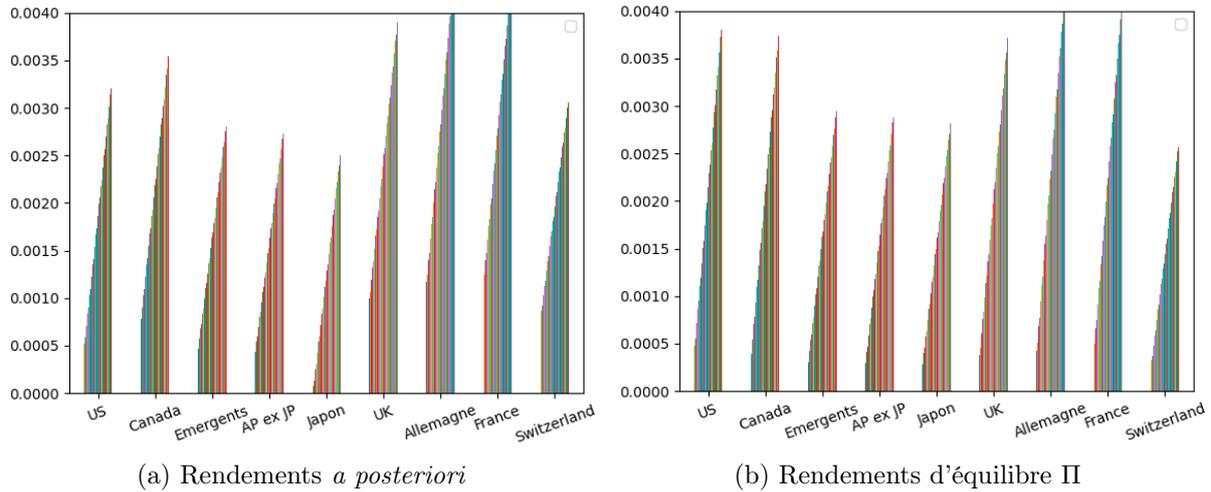


FIGURE 24 – Impact du paramètre λ sur les rendements (de 0,5 à 5)

Globalement, faire croître l'aversion au risque va faire croître les rendements d'équilibre car ils sont proportionnels à λ , pour rappel :

$$\Pi = \lambda \Sigma w_{march}$$

La croissance est donc une conséquence logique. Pour les rendements *a posteriori*, c'est-à-dire ceux issus du modèle, les actifs touchés positivement (resp. négativement) voient leurs rendements augmenter (resp. diminuer). Ils augmentent également avec λ par conséquence de l'augmentation de Π . D'un point de vue concret, si l'aversion au risque augmente alors pour une variance donnée, les rendements doivent croître. Voyons maintenant les conséquences sur l'allocation :

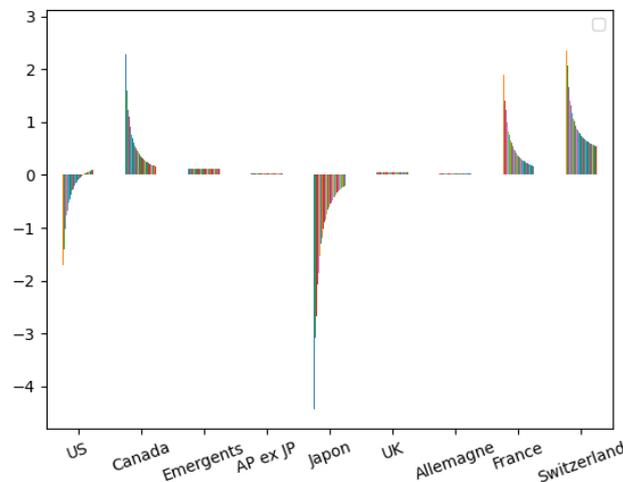


FIGURE 25 – Sensibilité de l'allocation de Black-Litterman à l'aversion au risque

Les actifs dont le poids dans l'allocation finale varie sont ceux impactés par les anticipations de marché, cela suit le changement des rendements par l'utilisation du modèle. Avec l'évolution de l'aversion au risque, leur poids diminue considérablement. Un investisseur avec une forte aversion au risque ne s'exposera pas grandement.

Ajoutons que les poids des actifs non impactés demeurent inchangés avec cette croissance de λ car d'un point de vue mathématique, le paramètre λ se simplifie tandis que pour ceux touchés, considérant la modification de leurs rendements *a posteriori*, ils ne se simplifient plus avec ce paramètre et deviennent dès lors dépendants.

L'aversion au risque n'est pas vraiment une variable faite pour varier avec la confiance de l'investisseur dans ses anticipations. Elle est censée être ajustée au climat des marchés donc la calibration est essentielle. Elle ne doit toutefois pas trop fluctuer sous peine de refléter de façon incorrecte les *vues d'expert*. Fixer cette aversion peut aussi être cohérent, en prenant la moyenne sur tout l'échantillon par exemple pour avoir une vision assez large de l'aversion globale. C'est pourquoi nous l'avons supposée égale à 3, cela représente approximativement la moyenne de λ sur des fenêtres assez longues.

Le portefeuille de marché est également une composante importante du modèle puisqu'il va avoir des conséquences sur les rendements d'équilibres obtenus par le MEDAF en *in fine*. Pour ce faire nous choisissons de diminuer progressivement le poids du *MSCI US* et d'augmenter de façon égale celui de tous les autres.

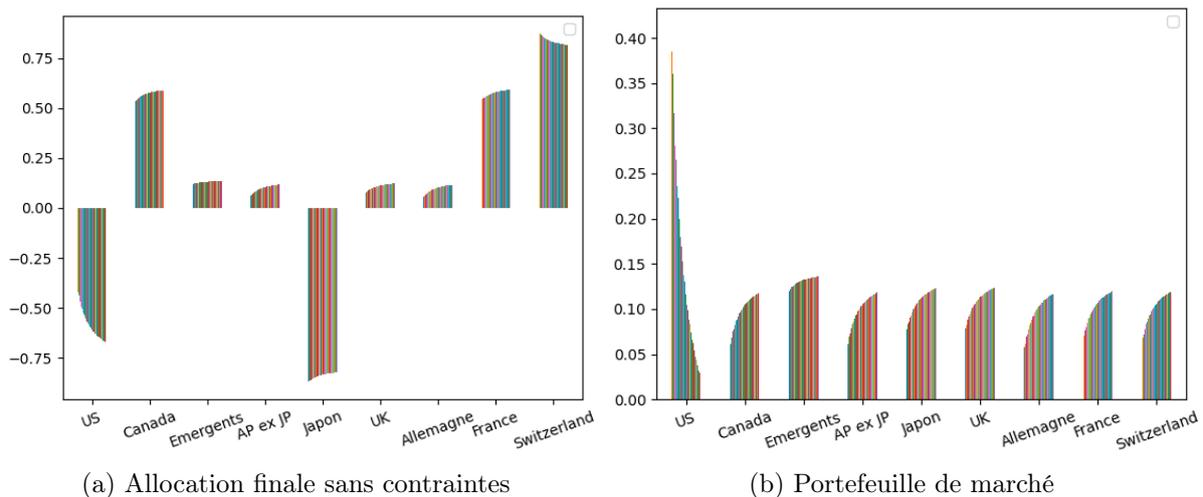


FIGURE 26 – Impact du portefeuille de marché sur l'allocation finale

L'allocation finale sur le *MSCI US* est changée par son poids dans le portefeuille de marché (de départ). Cela signifie qu'une vue d'expert aura plus d'impact sur un actif peu présent dans le portefeuille que sur un actif dominant. Il faut donc être vigilant lors de la formulation de vues et peut-être envisager de pondérer celle-ci par le poids des actifs concernés.

V.5 Σ , matrice de variance-covariance des rendements

La matrice de covariance (abus potentiel de langage qui sera répété de multiples fois dans cette partie mais n'obstruant cependant pas la compréhension) est un paramètre important de façon générale. Quand nous connaissons précisément la distribution d'un vecteur aléatoire nous avons une matrice de covariance "véritable". Mais dès lors que les données sont empiriques et que nous visons l'approximation d'une matrice avec un nombre fini d'observations, nous risquons d'avoir une estimation qui n'est pas réellement égale à **la vraie** mesure théorique. De façon générale, plus le nombre d'observations est faible, plus l'imprécision sera importante.

La méthode la plus utilisée pour estimer Σ est celle par les estimateurs empiriques usuels :

$$\hat{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)$$

Cependant un dilemme apparaît rapidement : faut-il prendre un historique long pour que l'estimateur soit stable ou alors ne considérer que les données les plus récentes pour que les résultats soient plus cohérents ?

Pour éviter que l'estimation soit trop anormale, nous pouvons imposer une certaine structure à l'estimateur : en considérant un modèle à K facteurs avec des résidus non corrélés nous contrôlons la structure, plus K est faible plus la structure est dure. Cependant cela peut rapidement donner des limites sur la cohérence des facteurs et la méthode qui reste la plus cohérente est quand $K = 1$ et que le facteur de régression est **l'indice de marché**. Cela s'explique car le choix de certains indices sous-jacents est difficile, certains seront performants pour une période tandis que d'autres apporteront moins sur cette période mais seront plus utiles sur une autre fenêtre de données. Si nous ajoutons à cela les résultats de la régression (les facteurs), il est parfois difficile de donner des explications sur les valeurs obtenues (par exemple, en intégrant l'inflation nous pouvons nous rendre compte que l'impact sur les obligations figure contre-intuitif). Nous réduisons la dimension du problème.

L'approche que nous détaillons dans cette section s'appuie sur l'article d'Olivier Ledoit et Michael Wolf (2001) [11]. Ils proposent une méthode d'estimation de la matrice de covariance en faisant un *shrinkage* (diminution mais cela sonne étrange en français, dommage). Cela correspond à une moyenne pondérée par un facteur α entre la matrice de covariance empirique et celle obtenue par le modèle à un indice de Sharpe (1963) [23] (ici l'indice sera le *MSCI World*). Ils proposent une méthode d'estimation du paramètre de diminution α . Nous ne détaillons pas l'intégralité du processus mais revenons sur le modèle à un indice puis présentons l'estimation du facteur et enfin nous nous pencherons sur les résultats associés à notre portefeuille d'étude.

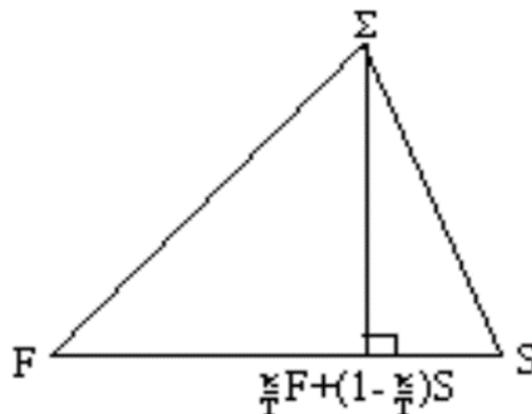


FIGURE 27 – Représentation graphique du concept de *shrinkage* sur la matrice de covariance

Modèle à un indice :

C'est un modèle utilisé pour mesurer le risque et le rendement d'un actif simplement à partir d'un indice de marché. Le modèle de Sharpe à un indice est formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_{it} &= \alpha_i + \beta_i x_{0t} + \epsilon_{it} \\
 \text{Avec } x_{it} &\text{ le rendement de l'actif } i \text{ à un instant } t \\
 x_{0t} &\text{ le rendement de l'indice de marché} \\
 \epsilon_{it} &\text{ les résidus non corrélés au marché où } \text{Var}(\epsilon_{it}) = \delta_{ii}
 \end{aligned}$$

La variance des rendements par ce modèle est alors :

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \sigma_{00}^2 \beta \beta^t + \Delta \\
 \text{Avec } \sigma_{00}^2 &\text{ la variance des rendements de marché} \\
 \beta &= (\beta_i) \\
 \Delta &\text{ la matrice diagonale } (\delta_{ii})
 \end{aligned}$$

Nous estimons $\hat{\beta}$ et $\hat{\delta}_{ii}$ par régression sur les rendements. L'estimation de Φ sera alors notée \mathbf{F} (f_{ij}).

L'idée est après ceci de trouver le paramètre α . L'enjeu derrière cette estimation est que d'un côté la matrice de covariance par le modèle régressif capture des biais à cause la structure imposée mais l'erreur d'estimation est faible tandis que de l'autre côté, la variance empirique est asymptotiquement sans biais mais a une importante erreur d'estimation. Le dilemme est alors entre biais et erreur d'estimation.

Pour garder une cohérence asymptotique, $\hat{\Phi}$ s'efface dès lors que T la taille de l'échantillon tend vers l'infini. L'intensité de réduction α sera alors de la forme $\frac{\text{constante}}{T}$.

Ensuite en utilisant la norme de Frobenius définie pour une matrice symétrique $N * N$ de valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1, \dots, N}$ par :

$$\|Z\|^2 = \text{Trace}(Z^2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{ij}^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2$$

La méthode suggère que nous l'appliquons à notre optimisation comme suit :

$$L(\alpha) = \|\alpha F + (1 - \alpha)S - \Sigma\|^2$$

A partir de cela nous posons $R(\alpha) = E(L(\alpha))$ et par dérivées successives en posant $R'(\alpha) = 0$ nous avons :

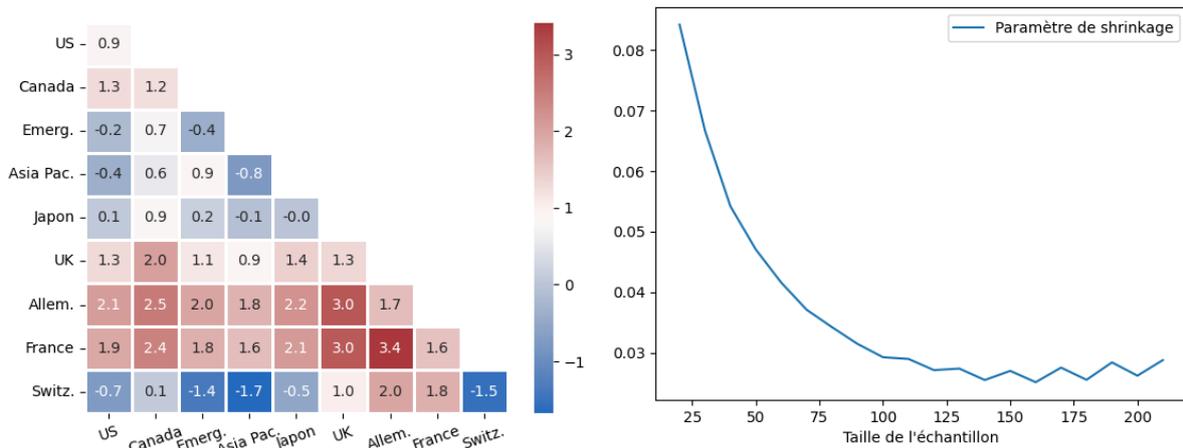
$$\alpha^* = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Var}(s_{ij}) - \text{Cov}(f_{ij}, s_{ij})}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Var}(f_{ij} - s_{ij}) + (\phi_{ij} - \sigma_{ij})^2}$$

Cependant comme certaines des composantes sont inobservables empiriquement, des estimateurs sont encore nécessaires. Nous pouvons simplifier au maximum car l'idée initiale ici était de ne pas avoir une myriade d'équations, donc nous posons l'approximation $(\phi_{ij} - \sigma_{ij}) = (f_{ij} - s_{ij})$, pour avoir l'entièreté du raisonnement, le lecteur est prié de se rendre sur l'article. Finalement, la nouvelle matrice de covariance est :

$$\hat{S} = \frac{\kappa}{T} F + (1 - \frac{\kappa}{T}) S$$

A partir du procédé décrit et des formules empiriques données dans les travaux supports de cette extension, nous avons pu implémenter sur Python cette nouvelle matrice. Même si à l'origine, l'étude des chercheurs portait sur un très grand nombre d'actifs et un grand nombre d'observations mais tout en restant faible voire inférieur au nombre d'actifs, nous avons pensé que cela pourrait avoir un impact non négligeable sur des méthodes d'allocation avec des données relativement récentes (et donc en nombre plutôt faible).

Passons maintenant à la présentation des résultats, en observant la variation des éléments de la matrice de covariance Σ et l'évolution du paramètre α en fonction de la taille de l'échantillon d'estimation.



(a) Variation des valeurs de la matrice Σ (en %) (b) Variation moyenne du paramètre α en fonction de la taille de l'échantillon

FIGURE 28 – Résultats de la méthode de *shrinkage* sur la matrice de covariance

Les variations de Σ , elles restent mineures et cela reste cohérent avec la faible valeur de α . La variation de ce dernier est intéressante car semble se faire dans la logique de ce qui a pu être montré précédemment (proportionnel à l'inverse du nombre d'observations) mais reste peu *uniforme*. Pour s'en faire une idée plus précise, nous avons repris l'intégralité des données et avons estimé α sur chacune des périodes. Cela permet de se faire une idée *stable* de la tendance de $O(\frac{1}{T})$, nous ne la retrouvons pas réellement car vers le passage des 150 observations, les résultats deviennent tellement faibles que la moyenne est très sensible à des valeurs incohérentes/aberrantes.

Les coefficients de la régression sur les 200 observations sont synthétisés dans la table ci-dessous et le test de Fisher pour chacune des régression est calculé afin de voir si l'approche par une structure *simple* peut suffire à contenir une part conséquente d'information ou si la perte est trop dommageable et réduit la cohérence de notre modèle. Cependant il est important de rappeler que la significativité du modèle n'est pas un critère suffisant pour garder ou rejeter le choix de structure que nous imposons car comme énoncé plus haut, un modèle mauvais aujourd'hui peut être très performant demain. Le fait de se baser sur l'intuition du principe de l'indice de marché nous permet de conserver une part de réalisme derrière le modèle à un facteur de Sharpe :

$$y = x * \beta_1 + \beta_0.$$

(Résultats page suivante)

Indice	β_1	β_0	p -value
MSCI US	1,04	0,05	≈ 0
MSCI Emerging Markets (USD)	0,79	-0,04	≈ 0
MSCI UK (USD)	1,01	-0,07	≈ 0
MSCI Japan (USD)	0,77	-0,08	≈ 0
MSCI France (USD)	1,12	-0,07	≈ 0
MSCI Switzerland (USD)	0,71	0,05	≈ 0
MSCI AC Asia ex Japan (USD)	0,78	0,08	≈ 0
MSCI Canada (USD)	1,03	0,01	≈ 0
MSCI Germany (USD)	1,15	-0,16	≈ 0

Les résultats des régressions sont encourageants car ils coïncident avec l'interprétation que l'on fait de l'indice de marché (tous les actifs sont positivement corrélés à l'indice de marché). Les p-valeurs nous font rejeter l'hypothèse que les coefficients sont nuls (pour être sûr que la méthode était la bonne, en essayant avec des données aléatoires, nous rejetons chacun des modèles), nous pouvons associer une certaine confiance à ce modèle et à la structure de notre matrice finale. Il n'y a ici pas d'intérêt à utiliser la capacité prédictive et la somme des résidus au carré car nous ne cherchons pas à comparer le modèle à un autre.

L'approche qui permet de mieux comprendre l'impact final sur l'allocation est l'étude des variations sur l'inverse de la matrice de covariance, parce que dans l'optimisation *moyenne-variance*, le portefeuille final est le produit matriciel de l'inverse de Σ avec les rendements espérés. Dans notre cas nous avons obtenus les résultats suivants :

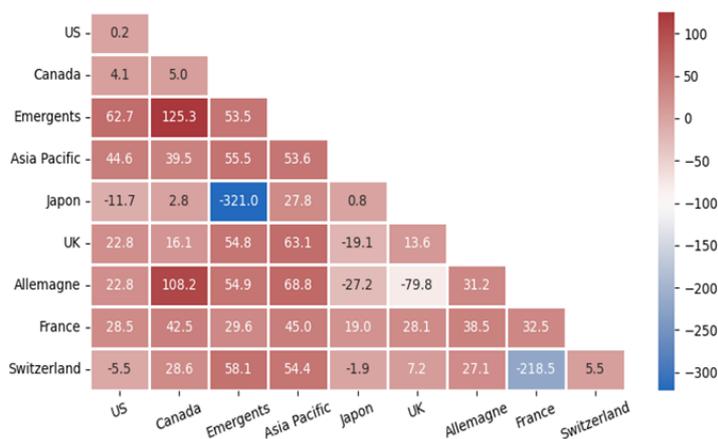


FIGURE 29 – Variation relative des éléments de Σ^{-1} (en %)

Bien que les variations sur la matrice en elle-même n'étaient pas flagrantes, en travaillant sur l'inverse elles le sont davantage et en considérant quelques valeurs dont les variations ont été de plus de 100%, nous pouvons nous rendre compte que l'allocation *in fine* sera impactée. Nous nous ramenons maintenant au modèle de Black-Litterman pour présenter les allocations issues des deux caractérisations de la matrice de covariance. Cela permet de confirmer si les variations importantes que l'on peut voir sur Σ sont ressenties sur les portefeuilles.

Abordons un point important sur le fait d'incorporer une nouvelle structure pour la matrice de covariance : l'incidence est double car les rendements d'équilibre du MEDAF sont aussi modifiés. Cela est crucial car les effets peuvent également se compenser. Intuitivement, nous pouvons penser qu'il n'y aura aucun changement avec la spécification de Ω qui est approximativement proportionnelle à Σ . Cela se vérifie à travers le graphique d'allocation précédent : nous ne distinguons que faiblement les modifications sur l'allocation finale. Cela nous permet finalement de conclure

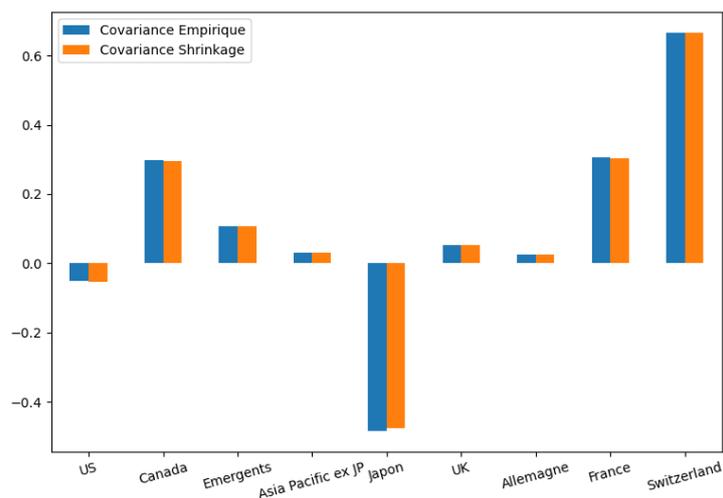


FIGURE 30 – Allocations de Black-Litterman en modifiant la matrice de covariance

sur la modification du risque sous la variance dans le modèle de Black-Litterman : modifier la structure de la matrice de covariance a du sens dans deux situations, soit quand **nous n'avons pas beaucoup de données par rapport au nombre d'actifs**, soit quand **nous cherchons une allocation relativement précise**. Dès lors, le modèle que nous avons appliqué a davantage de sens, ici nous voulions étudier l'impact de la méthode de *shrinkage* sur ce modèle car aucun article ne l'appliquait à Black-Litterman. Cela permet également de rappeler que complexifier les estimateurs ne les rend pas toujours beaucoup plus fiables. Pour ce qui concerne les variations sur l'allocation avec seulement 40 observations, en *Annexe G*, nous pouvons retrouver un graphique similaire, les résultats sont dès lors plus intéressants et la complexification a un réel intérêt.

VI Extensions du modèle

VI.1 Prédiction des rendements à l'aide de séries temporelles

Afin de créer un modèle autonome ou du moins, qui apporterait un support à l'investisseur, il est intéressant de se pencher sur la théorie des séries temporelles. Elle permet d'étudier la dépendance temporelle d'une suite de valeurs (X_i pour $i=0, \dots, t$) dans le temps et d'en déduire une prédiction qui correspond à la valeur de X_{t+1} qui semble la plus centrale, c'est-à-dire celle qui, en moyenne arriverait.

L'intérêt de ce pan des mathématiques serait alors d'utiliser les prédictions faites pour les rendements comme des vues d'experts, et de leur associer une incertitude. Nous pourrions alors, à partir de ces deux données, obtenir une allocation de Black-Litterman sans avoir à donner un avis concret.

Pour ce faire, nous rappelons dans un premier temps les définitions et propriétés des modèles qui seront utilisés dans la suite de cette partie, nous comparerons des prédictions faites par des modèles univariés, multivariés, avec une perturbation gaussienne et/ou non-gaussienne.

VI.1.1 Motivations

Important : Une réflexion est à considérer quand nous commençons à mêler plusieurs modèles (ici Black-Litterman et ceux temporels), c'est celle de la **compatibilité des hypothèses**. Dans l'application du modèle de Black-Litterman, nous faisons l'hypothèse que les données qui ont servi à l'estimation des paramètres de la distribution *a priori* sont **indépendantes et identiquement distribuées**. Cette hypothèse est essentielle car dès lors que nous la considérons comme fautive, l'estimation devient alors dépourvue de sens. Cependant, dans les pages qui vont suivre, nous allons nous appuyer sur le fait qu'il pourrait exister une forme de dépendance temporelle entre les rendements des actifs. Bien que cela ne paraisse au premier abord incompatible, nous pouvons creuser pour donner deux réponses sur ce mélange d'hypothèses peu compatibles :

- Un investisseur qui a un avis sur les marchés financiers a très probablement une connaissance du climat économique actuel et va formuler ses **vues** conditionnellement à celui-ci. Dès lors, son raisonnement s'appuie sur l'information disponible dans le présent pour prévoir le futur. Cela peut prendre la forme d'une prévision *absolue* ("Si l'actif A a baissé de 10% pendant 3 périodes consécutives, je peux envisager qu'il va probablement remonter.") ou d'une prévision *multiple* ("J'ai vu que récemment l'inflation avait augmenté de façon drastique, les taux obligataires devraient alors suivre en conséquence de la hausse des taux directeurs des banques centrales."). La version *absolue* correspondra aux modèles *AR* et *ARIMA* tandis que l'approche *multiple* correspondra aux modèles *VAR* (pour une approche vectorielle plutôt qu'unidimensionnelle). Dans ce cas, la prévision n'a pas pour but de contredire le modèle mais plutôt de calquer des décisions que pourrait prendre un investisseur.
- Les deux hypothèses ne sont pas exactement vérifiées sur les marchés financiers. Nous savons que la distribution des rendements du passé ne sera probablement pas celle du présent ni celle du futur, cependant cette approximation permet de mettre en place des méthodes d'estimation qui donnent des résultats cohérents. Concernant les séries temporelles, l'usage sur des cours boursiers est restreint pour des modèles peu sophistiqués mais donne également une approximation de ce que serait le rendement prochain dans un contexte similaire à celui présent. Le futur est dès lors encadré par les données disponibles. Les contraintes du modèle de Black-Litterman ainsi que celles des séries temporelles peuvent être partiellement relâchées : nous sommes conscients qu'elles ne se vérifient pas vraiment mais sont cohérentes en scénario central. Dès lors en considérant qu'elles sont partiellement relâchées, nous pouvons garder le sens de cette démarche de prédiction de rendements financiers.

VI.1.2 Rappels sur les séries temporelles

Considérons une série (x_1, \dots, x_n) qui représente la réalisation des n premiers termes d'une suite infinie de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots) . L'objectif est, dans ce cas précis, de donner une prédiction de x_{n+1} , pour ce faire, il est nécessaire que les variables exhibent une forme de dépendance dans le temps (que les valeurs relevées dans le passé soient impactantes sur celle de demain).

Definition VI.1 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace I et $F(x)$ sa fonction de répartition associée, on dit que X admet un moment d'ordre $r > 0$ si

$$m_r = \mathbb{E}(X^r) = \int_{x \in I} x^r dF_X(x) < \infty$$

La valeur de $\mathbb{E}(X^r)$ est alors appelée moment d'ordre r de X . D'une façon similaire, si X admet un moment d'ordre $r \geq 1$, elle admet un moment centré d'ordre r défini comme suit :

$$\mu_r = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^r) = \int_{x \in I} [x - \mathbb{E}(X)]^r dF_X(x)$$

Definition VI.2 Soit X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, on définit la covariance de X et Y comme

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Definition VI.3 On dit qu'une suite de variables aléatoires $(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$ est stationnaire (au sens faible ou de second ordre) si les espérances sont constantes

$$\mathbb{E}(X_n) =: \mu \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et si les covariances sont stables par translation du temps

$$\text{Cov}(X_n, X_{n+h}) =: \sigma(h) \quad \forall (n, h) \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}$$

Definition VI.4 On peut également définir la stationnarité au sens fort d'un processus temporel (X_t) à valeurs réelles si pour tout x et pour toute fonction f mesurable définie sur \mathbb{R}^x et on a $f(X_1, \dots, X_x) \stackrel{d}{=} f(X_{1+k}, \dots, X_{x+k})$ (si elles sont égales en loi, i.e elles ont la même loi). Cette assertion est plus forte que celle de stationnarité au sens faible car elle fait une hypothèse sur la loi au lieu d'en faire seulement sur les deux premiers moments du processus X_t .

Remarques :

- La suite $\sigma(h)$ est appelée fonction d'auto-covariance du processus stationnaire.
- La suite $\rho(h) := \frac{\sigma(h)}{\sigma(0)}$ est appelée fonction d'auto-corrélation.
- $\sigma(0)$ représente la variance de X en chaque instant, elle est ≥ 0 et constante par définition (indépendante de n).
- Ces deux suites sont symétriques, la seconde découle de la première qui figure toute somme logique.

Definition VI.5 Un bruit blanc ϵ_k sur un espace S est une suite de variables aléatoires (ou un processus à temps discret) si :

- * $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$
- * $\mathbb{E}(\epsilon_k^2) = \sigma^2$
- * $\mathbb{E}(\epsilon_k, \epsilon_j) = 0$

On le dira alors faible s'il remplit ces conditions, mais fort si les variables ϵ_k pour tout $k \in S$, sont centrées, indépendantes et identiquement distribuées. Un bruit blanc gaussien est tel que $\epsilon_k \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2)$ (une loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2).

Definition VI.6 Le *Critère d'information d'Akaike* est une mesure de qualité d'un modèle statistique, au même titre que le critère d'information bayésien, il pénalise les modèles par le nombre de paramètres. On prendra en général celui avec le critère le plus faible. La formule est la suivante (avec k le nombre de paramètres du modèle et L le maximum de vraisemblance du modèle) :

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

Utiliser ce critère comme aide à la sélection permet d'avoir un compromis entre avantages du modèle et complexité. Bien qu'il soit assez simpliste, il permet d'avoir un avis premier sur la mesure de qualité. On peut également utiliser le critère d'information de **Hannan-Quinn** défini par :

$$HQC = -2L_{max} + 2k \ln(\ln(n))$$

Où L_{max} la log-vraisemblance, k le nombre de paramètres et n le nombre d'observations.

Definition VI.7 Le *test de Dickey-Fuller* est un test statistique qui vise à déterminer la stationnarité de second ordre d'une série temporelle. Les hypothèses sont H_0 : une racine unitaire est présente dans le modèle autorégressif contre H_1 : la série est stationnaire. On dit qu'un modèle est non-stationnaire s'il a une racine unitaire, dans le cas d'un modèle $AR(1)$ ($X_t = \alpha + \beta X_{t-1} + \epsilon_t$) cela correspond à $|\beta| = 1$, les hypothèses correspondent alors respectivement à $\beta = 1$ et $\beta < 1$. Cela s'interprète comme le fait que si le coefficient β est proche de 1, le retour à la moyenne sera extrêmement long. On prend alors $X_t - X_{t-1} = \alpha - X_{t-1} + \beta X_{t-1} + \epsilon_t = (\beta - 1)X_{t-1} + \alpha + \epsilon_t$ et on cherche à tester $(\beta - 1) = \gamma = 0$. Une distribution spécifique au nom de table de Dickey-Fuller permet de fournir des valeurs critiques pour différents seuils et de déterminer si l'hypothèse de référence est rejetée ou non, la valeur de la statistique de test est définie par $DF_\tau = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\sigma}_\gamma}$ (négatif). Une version dite **augmentée** de ce test statistique existe et permet notamment de s'appliquer aux modèles $AR(p)$ (p peut ici être supérieur à 1), la procédure est similaire mais appliquée au modèle

$$\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \delta_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \epsilon_t$$

Cependant, il faut déterminer en amont l'ordre optimal p . On choisira ici l'ordre qui donnera le plus faible **critère d'information d'Akaike**. Ensuite il faut alors estimer les paramètres du modèles et comparer la statistique DF_τ à la table de Dickey-Fuller (présente en Annexe).

VI.1.3 Modèles AR, MA, ARMA & ARIMA

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'utilisation des modèles de dépendance temporelle, nous utilisons 160 observations pour chaque actif du portefeuille pour entraîner les modèles et 40 pour mesurer leurs performances. Cela semble relativement équilibré (nous avons un rapport 80/20 ce qui est correct).

Definition VI.8 Un processus auto-régressif d'ordre p noté $AR(p)$ associé à une variable aléatoire temporelle X_t se définit comme suit :

$$AR(p) : X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

où ϕ_i pour $i = 1, \dots, p$ sont les paramètres du modèle (ainsi que c une constante) et ϵ_t un bruit blanc faible.

Definition VI.9 Un processus moyenne-mobile d'ordre q noté $MA(q)$ est défini comme :

$$MA(q) : X_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$$

Avec θ_i pour $i=1, \dots, q$ les paramètres du modèle $MA(q)$ et ϵ_t un bruit blanc.

Definition VI.10 Un processus est dit $ARMA(p, q)$ s'il s'écrit sous la forme :

$$ARMA(p, q) : X_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$$

Afin que le processus soit défini, il faut qu'il soit stationnaire, cependant, il arrive souvent que la série étudiée ne soit pas stationnaire. Il faut alors la *stationnariser* c'est-à-dire la différencier pour qu'elle le devienne. Cela peut notamment être dû à une tendance non constante. On change alors la série initiale X_t en $X'_t = X_t - X_{t-1}$, on continue jusqu'à ce que la série soit stationnaire, l'ordre correspondant sera noté d ($\in \mathbb{N}$), on dénote alors modèle **ARIMA(p,d,q)** l'extension du précédent, où l'on a un modèle **ARMA(p,q)** qu'on doit ensuite intégrer.

Précisions pour la suite :

- De façon générale, on suppose le terme ϵ_t comme étant un **bruit blanc gaussien i.i.d**,
- Par abus de langage, la stationnarité qui sera ainsi désignée par la suite sera celle de second ordre, elle est centrale pour l'étude des modèles et moins restrictive que celle dite *forte*.

Passons maintenant au procédé d'utilisation de ceux-ci à partir de données. Une information importante doit être apportée : celle concernant le format des indices précédemment décrits. En effet, il est possible de se pencher sur les chiffres bruts de l'indice (leur valeur relevée) ou de directement partir sur les log-rendements. Comme nous allons le voir, étudier avec les valeurs donnera certainement que la série est non-stationnaire tandis que celle des log-rendements le sera plus probablement. Nous allons chercher à obtenir un modèle **ARIMA(p,d,q)** à partir de chacun des indices, s'il n'y a pas besoin de différencier, ce seront donc des modèles **ARMA(p,q)**.

Etape 1 : Analyse de la stationnarité

Afin de pouvoir obtenir un modèle "cohérent" pour faire des prédictions sur les indices étudiés, il nous faut trouver l'ordre d de différenciation. Pour ce faire, nous allons utiliser le **test de Dickey-Fuller Augmenté** défini dans la section VI.1.2. Nous obtenons les statistiques et résultats suivants que nous pouvons alors comparer aux différents seuils critiques de la table (en Annexe C) :

Indice	Statistique obtenue	<i>p-value</i>	bilan (99%)
MSCI US	-17,86	≈ 0	stationnaire
MSCI Emerging Markets (USD)	-21,41	≈ 0	stationnaire
MSCI UK (USD)	-7,38	≈ 0	stationnaire
MSCI Japan (USD)	-35,25	≈ 0	stationnaire
MSCI France (USD)	-8,03	≈ 0	stationnaire
MSCI Switzerland (USD)	-9,51	≈ 0	stationnaire
MSCI AC Asia ex Japan (USD)	-21,95	≈ 0	stationnaire
MSCI Canada (USD)	-10,78	≈ 0	stationnaire
MSCI Germany (USD)	-8,01	≈ 0	stationnaire

Une fois que chacune des séries $(X_{i,t})_{t \in \mathbb{N}}$ pour $i=1, \dots, 9$ est stationnaire, on note d_i l'ordre de différenciation associé. Dans le cas ci-présenté, il n'est pas nécessaire de considérer que ce seront des modèles ARIMA, simplement ARMA. Toutefois, nous pouvons également souligner le fait qu'il y a une quantité assez lourde de données (1121 observations pour chacune des séries) et que cela biaise possiblement les résultats du test. Mais en exécutant à nouveau le test sur des sous-échantillons de longueur 200, les conclusions sont les mêmes bien que les statistiques résultantes soient plus faibles (résultat en Annexe).

Etape 2 : Déterminer les paramètres p et q

Déterminer les paramètres p et q peut se faire de plusieurs façons. Nous présentons ici deux méthodes afin de pouvoir comparer les résultats obtenus :

- estimation des paramètres par les fonctions d'*autocorrélation* et d'*autocorrélation partielle*
- estimation des paramètres en cherchant le meilleur résultat par un critère d'information, plus concrètement, nous estimons les coefficients du modèle pour chaque couple (p, q) dans la limite du raisonnable (15 ici) par méthode des moindres carrés puis, nous conservons le modèle avec le score critère le plus intéressant (dans notre cas, nous choisissons le critère AIC (Akaike)).

Dans la **méthode 1**, la première fonction s'intéressera à la dépendance entre l'observation X_t et X_{t-k} mais elle n'enlève pas celle concernant X_t et $X_{t-i} \forall i < k$, chose que l'autocorrélation partielle permet de faire. La fonction d'*autocorrélation* permet d'estimer q , tandis que la seconde sert à estimer p . Pour les identifier, nous regardons les deux tracés et considérons que le dernier point en dehors d'un intervalle à 95% aura pour abscisse le paramètre recherché.

La **méthode 1** n'a pas donné pas de résultats visuellement exploitables. Nous nous référons à la seconde méthode. Cependant avant d'exploiter un des deux procédés, il est important de déterminer la taille de la base de données qu'il faudra exploiter pour paramétrer et faire des prédictions de façon optimale. Pour ce faire, nous utilisons un autre critère d'information (celui d'Akaike n'exploitant pas la taille des données dans sa forme, nous privilégions un critère qui la pénalise), celui d'**Hannan-Quinn** défini comme $HQC = -2L_{max} + 2k \ln(\ln(n))$ avec L_{max} la log-vraisemblance du modèle, k le nombre de paramètres et n le nombre d'observations.

Etape 3 : Calculer les coefficients $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(\theta_j)_{1 \leq j \leq q}$

Les résultats de la sélection des ordres à l'étape précédente ont permis d'avancer sur plusieurs actifs. Ceux qui se sont avérés pertinents sont **MSCI Canada**, **MSCI UK** et **MSCI Switzerland** qui peuvent être approchés comme des modèles ARMA(2,2), ARMA(2,2) et AR(1). Les autres indices ne sont pas abordés car lors du calcul des coefficients, aucun d'entre eux n'a des résultats significatifs. De plus les deux méthodes pour trouver les ordres **p** et **q** ne donnent pour eux que des résultats inexploitables (pas de corrélation dans le temps).

En optimisant par la méthode des moindres carrés, nous obtenons les paramètres suivants :

Indice	Constante	AR ₁	AR ₂	MA ₁	MA ₂
MSCI Canada	0,15	1,13	-0,76	-0,99	0,66
MSCI UK	0,04	-0,36	-0,74	0,34	0,89
MSCI Switzerland	0,14	-0,09			

Ici tous les coefficients sont significatifs ce qui est pour nous encourageant. En effet, il n'y a dans ce cas pas besoin de supprimer ceux qui ne seraient pas exploitables.

Etape 4 : Analyse des résidus

Pour les résidus, nous effectuons un test de **normalité** et un autre d'**hétéroscédasticité**. L'hétéroscédasticité correspond à l'inconstance de la variance dans le temps et s'oppose au principe d'homoscédasticité. L'hétéroscédasticité justifierait l'emploi par la suite d'un modèle ARCH/GARCH (nous le croiserions avec ARIMA) tandis que la normalité, dans le cas où elle serait rejetée amènerait à l'emploi d'un modèle plus poussé de type COGARCH. A travers ce mémoire, le curseur n'est pas mis sur ces extensions. Il est donc recommandé au lecteur de se référer à des ressources autres pour en savoir plus sur ce sujet.

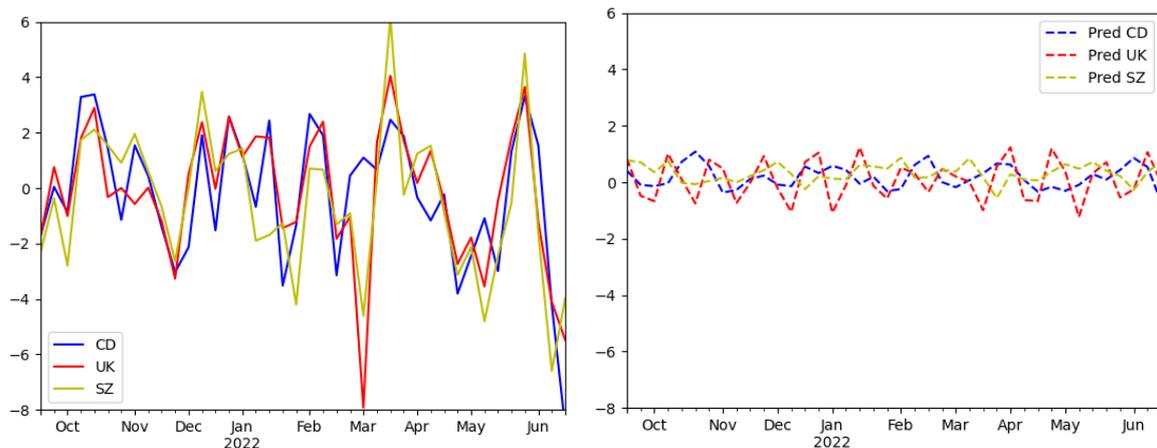
De notre côté, deux tests sont mis en place :

- le test de **Jarque-Bera** pour la normalité des résidus,
- le test de **White** pour la stabilité de la variance des résidus.

Pour les 3 actifs étudiés, nous rejetons l'hypothèse d'hétéroscédasticité (donc la variance est *a priori* constante) mais les tests de normalité indiquent avec nul doute que les résidus ne suivent pas de loi normale. L'asymétrie et l'aplatissement sont trop éloignés de cette famille de distribution. Dès lors, il est conseillé de changer l'hypothèse de distribution des résidus en optant pour une famille qui garde une part considérable de propriétés utiles. La loi de Student est donc choisie pour les résidus.

Etape 5 : Prédictions

Pour étudier les prédictions, le premier tracé qui a été fait et qui est présenté ci-dessous consiste à faire une prédiction à **horizon 1** (une semaine dans notre cas) et de faire glisser les données nécessaires à la prédiction. De cette façon nous obtenons un tracé permettant de réellement comprendre ce que le modèle, si nous l'avions appliqué tout au long de la période de test, aurait pu fournir. La période d'évaluation (où l'on confronte les modèles à la réalité) s'étend du **19/09/2021** au **19/06/2022** (40 semaines).



(a) Log-rendements historiques pour MSCI Canada, UK et Suisse (b) Log-rendements prédits pour MSCI Canada, UK et Suisse

FIGURE 31 – Prédiction glissante des log-rendements des trois indices étudiés

Les graphiques permettent de rendre compte d'un lien entre réalité et prédictions, cependant l'ampleur des rendements est toute différente. En effet, si les résultats semblent très "plats", c'est parce que les prédictions faites sont des moyennes. Mais ils permettent d'avoir une approche de la direction (hausse ou baisse). Peut-être qu'en creusant davantage cette piste des conclusions pourraient être enrichissantes.

Le visuel est certes très distrayant mais des chiffres sont aussi nécessaires pour comparer l'efficacité des modèles. Nous utilisons le **MAPE** (Pourcentage d'erreur absolue moyenne), le **RMSE** (Racine de l'écart quadratique moyen) ainsi que la probabilité que la prédiction soit juste. Le *MAPE* et le *RMSE* ont les formules suivantes :

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right| \quad \text{Avec } A_t \text{ la vraie valeur et } F_t \text{ la prédiction}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (F_t - A_t)^2}{n}}$$

Le *MAPE* permet de mesurer l'écart relatif moyen entre prédictions et vraies données. Idéalement il faut qu'il soit faible (< 1). Dans notre cas, nous savons dores et déjà qu'il va être important à cause de l'amplitude des variations réelles et que nos projections sont des **moyennes**. Dès lors il est plus intéressant de considérer de mesurer la probabilité que la **direction** soit bonne (au sens du *signe*).

Les résultats des modèles ARMA sur sont présentés ci-dessous :

	MAPE	RMSE	$\mathbb{P}_{\text{juste}}$
MSCI Canada	1,08	2,48	0,5
MSCI UK	7,84	2,63	0,53
MSCI Suisse	2,35	2,80	0,4

Nous pouvons remarquer que les écarts sont assez considérables du fait des prédictions *moyennes* du modèle ARIMA. Pour ce qui concerne la probabilité que la direction soit juste, nous obtenons autour de 50% ce qui n'est hélas guère exceptionnel. D'un autre côté nulle surprise sur ces chiffres, s'ils étaient proches de la perfection, des investisseurs avides de fortune financière mathématiquement fondée se seraient accaparés de la mine d'or ARIMA.

VI.1.4 Modèles VAR

Un reproche que nous pourrions faire aux modèles ARIMA (de façon générale) est qu'ils sont univariés, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'identifier au travers de ces processus une dépendance uniquement temporelle de celui-ci. L'extension à laquelle nous pourrions alors réfléchir serait celle d'ajouter d'autres séries temporelles pour avoir une forme de *Vecteur Temporel* sur lequel seraient étendus les processus vus précédemment ou au moins certains d'entre eux.

Cette modification a déjà été pensée et il existe toute une littérature sur ce que sont les modèles VAR (*Vecteur Auto-Régressif*). Ceux-ci décrivent l'évolution d'un vecteur Y_t regroupant disons k variables *endogènes* (que nous cherchons à expliquer) au cours du temps qu'on mesure sur une échelle $t=1, \dots, T$. On associe au modèle VAR un ordre qui lui est propre et qui, comme pour le modèle AR en unidimensionnel, correspond à l'ordre de régression temporelle, en d'autres termes, quelle taille du passé est considérée pour expliquer le présent et/ou le futur.

On peut alors décrire un modèle **VAR(p)** comme suit :

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + e_t = c + \sum_{i=1}^p A_i Y_{t-i} + e_t$$

où c est un vecteur représentant les constantes (point de départ en quelques sortes), les matrices $(A_i)_{i=1, \dots, p}$ (on note $a_i^{j,l=1, \dots, k}$ les termes de la matrice A_i) sont des matrices de dimension $k \times k$ constantes au cours du temps et e_t correspond au terme d'erreur, il respecte trois conditions :

- $\mathbb{E}(e_t) = 0$
- $\mathbb{E}(e_t e_t') = \Omega$
- $\mathbb{E}(e_t e_{t-k}') = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$

Avant de passer à l'estimation de l'ordre optimal ainsi qu'au calcul des matrices associées, il nous faut s'assurer de la pertinence de l'application du modèle à nos données, pour ce faire, nous effectuons un **test statistique de Granger**.

Definition VI.11 La **Causalité au sens de Granger** d'un processus X_t sur un processus Y_t signifie que la connaissance du passé de X_t soit dans le cas d'un temps discret (x_0, \dots, x_{t-1}) (les valeurs prises par X_t) entraîne une prévision de Y_t différente de celle uniquement basée sur la connaissance du passé de Y_t (y_0, \dots, y_{t-1}) . On peut formaliser ceci via la notion d'**erreur quadratique moyenne**. En effet, si l'écart prédictif est plus faible en conditionnant par les valeurs passées de X_t et Y_t plutôt que seulement par celles de Y_t , alors on a une relation de causalité au sens de **Granger** :

$$\mathbb{P}(Y_t \in A | \mathcal{I}(t)) \neq \mathbb{P}(Y_t \in A | \mathcal{I}_{-X}(t))$$

Avec $\mathcal{I}(t)$ représentant l'information disponible au temps t et $\mathcal{I}_{-X}(t)$ l'information disponible excluant celle du passé du processus X_t à l'instant t .

Definition VI.12 le **test de causalité de Granger** est un test statistique qui cherche à déterminer si l'information du passé d'une variable Y_t a un impact sur la qualité prédictive/explicative de la valeur actuelle de la variable X_t .

- H_0 : Le processus temporel Y_t n'a pas de causalité au sens de Granger sur le processus X_t
- H_1 : Le processus temporel Y_t a une causalité au sens de Granger sur le processus X_t

Nous choisissons d'effectuer un **test de Wald** (évaluer si toute une partie des paramètres d'un modèle sont à valeurs nulles) et de l'appliquer aux coefficients relatifs à l'impact du passé de la variable causale. Avec la définition du vecteur temporel Y_t faite précédemment et en voulant appliquer le test aux composantes 1 et 2 du vecteur (cause $Y_{1,t}$ et conséquence $Y_{2,t}$), les hypothèses sont reformulables :

- H_0 : $a_i^{2,1} = 0 \forall i = 1, \dots, p$
- H_1 : $\exists i$ tel que $a_i^{2,1} \neq 0$

Il faut alors comparer les deux modèles, $Y_t = c_1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + u_t$ avec $Y_t = c_1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + e_t$ (estimés par méthode des moindres carrés ordinaire) en utilisant les sommes des carrés des résidus ($RSS_0 = \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$ et $RSS_1 = \sum_{t=1}^T \hat{e}_t^2$). On utilise alors la statistique suivante ($F_{a,b}$ correspond à la distribution de Fisher qu'on définit comme $F(a, b) = \frac{U_a/a}{U_b/b}$ avec U_a une loi χ^2 de degré de liberté a et $U_b \sim \chi_b^2$) :

$$S_1 = \frac{(RSS_0 - RSS_1)/p}{RSS_1/(T - 2p - 1)} \sim F_{p, T-2p-1}$$

On considèrera alors que si la p -value (égale à $1 - F_{F_{p, T-2p-1}}(S_1)$) est inférieure à 0,05, on rejettera l'hypothèse H_0 avec une significativité de 5% et donc que la connaissance du passé de X_t apporte une information sur la valeur présente/future de Y_t .

Nous appliquons alors ce test sur chacun des couples possibles d'indices, nous pourrions également le baser sur d'autres données (type inflation, prix du pétrole brut en dollar, cours eur/usd,...). Et si l'on observe qu'une des composantes du Vecteur Temporel n'a de relation de causalité avec aucune autre, alors nous l'enlèverons du modèle car elle pourrait **rendre fausse** l'estimation des paramètres et par conséquent les prédictions que nous utiliserons. Cela est une des limites de ce mémoire, n'a pas été traitée l'utilité d'appliquer les modèles VAR avec des données que l'on pourrait considérer comme *macro* (inflation, etc.).

Nous devons d'abord déterminer l'**ordre optimal** p du modèle VAR avant d'avoir recours à l'estimation des paramètres par **MCO** (Moindres Carrés Ordinaires) et enfin pouvoir tirer des conséquences sur des relations de Granger que nous cherchons ici à mesurer. Les résultats sont alors résumés ci-dessous les conclusions sont présentées avec un seuil à 5%) :

	US	CD	EM	AP	JP	UK	AL	FR	SZ
US		VRAI							
CD	VRAI		FAUX	FAUX	VRAI	VRAI	FAUX	VRAI	VRAI
EM	VRAI	FAUX		FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI
AP	VRAI	FAUX	VRAI		FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI
JP	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX		FAUX	FAUX	FAUX	VRAI
UK	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX		VRAI	VRAI	FAUX
AL	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI		FAUX	FAUX
FR	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI	FAUX		FAUX
SZ	FAUX								

FIGURE 32 – Résultats du test de la causalité de Granger (à 5%)

Ici le résultat **VRAI** signifie que l'actif en colonne **cause** l'actif en ligne. Nous remarquons que le *MSCI US* a une causalité sur la plupart des actifs et est causé par la plupart également tandis que le *MSCI Suisse* est très marginal au sens de Granger. Plus largement une forme de symétrie figure sur les résultats, bien qu'imparfaite elle témoigne d'une corrélation plus large qu'une simple causalité. Ce test, par les interprétations des statistiques nous permet de confirmer l'intérêt d'un modèle vectoriel. A cela nous pouvons également dire que de nombreuses relations de causalité sont présentes et qu'elles retranscrivent *globalement* ce que notre intuition pourrait penser : l'Allemagne et la France sont liées, le Canada et les Etats-Unis également.

Ensuite, nous devons nous assurer de la stationnarité des séries. De façon générale pour les modèles multivariés de séries temporelles, il faut évaluer la **cointégration** des séries. Deux séries sont dites **cointégrées** s'il existe une combinaison linéaire de celles-ci qui a un ordre d de différenciation pour lequel la combinaison est **stationnaire** et que cet ordre est inférieur à l'ordre de différenciation de stationnarité de chacune des deux séries initiales. Il faut voir cette évaluation comme une extension des tests de racine unitaire (pour le cas univarié). Pour évaluer correctement, il faut trouver l'ordre optimal puis évaluer la cointégration des séries par un test de **Johansen** où l'on cherche à identifier un lien entre elles.

Nous ne le faisons pas ici car bien qu'il puisse apporter un confort sur le choix du modèle, nos séries sont dès le début stationnaires donc l'étude sur une combinaison qui le serait *plus tôt* ne nous intéresse que peu. Nous ne détaillons donc pas la procédure car elle n'apporte pas suffisamment sur l'étude de notre portefeuille.

Passons maintenant à la détermination de l'ordre optimal p de régression temporelle pour le modèle $VAR(p)$. Nous procédons par méthode des moindres carrés pour obtenir l'estimation pour chacun des ordres régressifs de 1 à 10 (c'est-à-dire que des données datant de 10 semaines peuvent avoir un impact sur les résultats d'aujourd'hui). Plusieurs critères peuvent être utilisés une fois les modèles estimés pour chaque valeur de p .

Nous favorisons ici ceux de *Akaike* (AIC) et *Hannan – Quinn* (HQIC) comme critères d'information et obtenons les résultats suivants :

(Page suivante)

Nous choisissons donc un modèle d'ordre **1**, c'est-à-dire que l'information de la semaine précédente *suffirait* pour prédire celle actuelle. Cela a une limite assez claire : les schémas complexes de mécanisme du marché ne seront pas capturés (au sens où si plusieurs semaines consécutives

p	AIC	BIC	FPE	HQIC
1	4,71	6,45	111,69	5,42
2	4,78	8,10	120,63	6,13
3	4,97	9,88	149,15	6,96
4	5,23	11,74	202,58	7,87
5	5,56	13,68	305,32	8,86
6	5,69	15,45	396,48	9,65
7	5,56	16,97	423,91	10,19
8	5,46	18,53	509,54	10,77
9	5,33	20,08	673,14	11,33
10	5,25	21,68	1086,57	11,92

FIGURE 33 – Sélection de l'ordre optimal du modèle $VAR(p)$

ont un certain comportement extrêmes, nous ne ferons pas de différence entre ceci et simplement l'information que la dernière semaine a été extrême). D'un autre côté les estimations seront plus faciles, c'est tout un art de jongler entre les compromis sans se piquer les doigts.

Revenons aux paramètres, ils sont estimés par méthode des moindres carrés. Nous obtenons pour chacun des actifs un ensemble de coefficients régressifs correspondant à la relation à un instant t de celui-ci à la valeur prise par les autres et la sienne à un instant $t - 1$. Une constante est également ajoutée, elle sert de *socle* à chacun des actifs. Ci-dessous sont présentés les multiples coefficients de la régression :

Coefficient	MSCI US	MSCI Canada	MSCI Emergents	MSCI AP	MSCI Japon	MSCI UK	MSCI Allemagne	MSCI France	MSCI Switzerland
const	0,37	0,24	0,19	0,20	0,25	0,06	0,14	0,18	0,31
L1.MSCI US	-0,82	-0,70	-0,45	-0,44	-0,48	-0,52	-0,54	-0,49	-0,23
L1.MSCI Canada	0,54	0,62	0,48	0,43	0,19	0,43	0,60	0,50	0,24
L1.MSCI Emergents	0,76	0,81	0,71	0,84	0,84	1,17	0,94	1,06	0,84
L1.MSCI AP	-0,65	-0,89	-0,76	-0,86	-0,83	-1,15	-1,01	-1,07	-0,88
L1.MSCI Japon	0,11	0,18	0,01	0,01	-0,16	0,11	0,04	-0,01	0,17
L1.MSCI UK	-0,13	-0,20	-0,31	-0,30	-0,21	-0,57	-0,60	-0,59	-0,31
L1.MSCI Allemagne	0,31	0,13	-0,02	-0,04	-0,09	-0,04	0,08	-0,08	-0,03
L1.MSCI France	-0,32	0,02	0,24	0,28	0,42	0,35	0,15	0,35	0,14
L1.MSCI Switzerland	0,28	0,11	0,10	0,10	0,12	0,16	0,19	0,15	-0,15

FIGURE 34 – Coefficients du modèle $VAR(1)$ (par MCO)

Il n'est pas aisé d'associer à chacun des coefficients une **justification réaliste** même si des tendances se dégagent :

- Une hausse du *MSCI US* ou du *MSCI Asia Pacific ex. Japon* se répercute (toutes choses étant égales par ailleurs) sur la période suivante par la baisse globale des actifs étudiés
- L'impact d'un actif sur lui même est singulier à chacun d'eux, il est positif pour le *MSCI France*, *MSCI Canada* et *MSCI Emergents*, neutre pour le *MSCI Allemagne* et négatif pour les autres
- Toutes les constantes sont positives ce qui avance une base de rendements positifs pour chaque indice.

En utilisant des méthodes similaires à celles généralement courantes pour des régressions en économétrie, nous testons la significativité de chacun des paramètres obtenus par un *test de Student*.

Cela nous permet de filtrer les coefficients qui n'ont pas de réel rôle autre que celui de figurants n'étant pas à leur place :

Coefficient	MSCI US	MSCI Canada	MSCI Emergents	MSCI AP	MSCI Japon	MSCI UK	MSCI Allemagne	MSCI France	MSCI Switzerland
const	0,37	0,24	0,19	0,2	0,25	0,06	0,14	0,18	0,31
L1.MSCI US	-0,82	-0,7	-0,45	-0,44	-0,48	-0,52	-0,54	-0,49	-
L1.MSCI Canada	0,54	0,62	0,48	0,43	-	0,43	0,6	0,5	-
L1.MSCI Emergents	-	-	-	-	-	1,17	-	-	0,84
L1.MSCI AP	-	-	-	-	-	-1,15	-	-	-0,88
L1.MSCI Japon	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L1.MSCI UK	-	-	-	-	-	-0,57	-0,6	-0,59	-
L1.MSCI Allemagne	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L1.MSCI France	-	-	-	-	0,42	-	-	-	-
L1.MSCI Switzerland	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 35 – Coefficients significatifs du modèle $VAR(1)$

Sur ceux restants, Nous remarquons que principalement deux indices ont une incidence sur la période suivante **forte** : le *MSCI US* et le *MSCI Canada*. Ces deux actifs étant fortement corrélés, nous pouvons ajouter que les coefficients s'annulent pour beaucoup (d'où le faible impact de ceux-ci à l'exception du *MSCI US* et du *MSCI Japon*). Le groupe européen d'actifs est lui très intéressant car il soulève une dépendance géographique (cohérent).

A partir de ce nettoyage, nous pouvons établir des prédictions avec une sérénité statistique. Pour ce faire il nous suffit de considérer les dernières données et de faire un produit matriciel en n'omettant pas d'ajouter les constantes.

Nous procédons comme suit : en partant de la dernière information de la base d'**entraînement** (de Septembre 2021), nous faisons une prédiction pour la semaine suivante. Puis à chaque itération, nous récupérons la **vraie valeur** du passé c'est-à-dire celle de la base de **test** à la période précédente (à partir de la deuxième prédiction). Ce faisant nous avons une fenêtre glissante qui nous permet de voir le comportement du modèle $VAR(1)$.

Remarque : Il pourrait sembler intuitif de faire une seule prédiction à un horizon plus grand mais cela a des limites majeures. Premièrement en général les séries finissent par converger vers leur constante du fait des conditions imposées aux coefficients (et donc leur faible valeur), cela s'observe très bien sur un modèle ARMA où au-delà de quelques périodes il n'y a plus d'intérêt à observer une telle prévision. Deuxièmement, fonctionner *pas-à-pas* colle davantage avec notre méthode et l'utilisation d'un modèle dans la mesure où nous l'utiliserions à chaque fin de période pour allouer sur la suivante.

Le graphique de comparaison (page suivante) permet de prendre compte de la qualité du modèle bien que nous ne montrions ici qu'un seul actif (les autres sont disponibles en Annexe). Il est facile d'observer que bon nombre de variations semblent visuellement pertinentes de la part du modèle, il réagit correctement au passé proche. Cependant, il reste modéré contrairement à l'historique réel qui contient beaucoup plus de volatilité. Quelques *pics* d'oppositions sont présents par exemple au *20 janvier 2022* où la direction est très opposée.

Le résultat est relativement positif sur la globalité au niveau des variations. Il faut garder à l'esprit que ce ne sont que des modèles qui cherchent à projeter un futur dans des conditions similaires au passé et qu'il est par conséquent **faux**. Il sert à se faire une représentation et il semble le faire relativement bien.

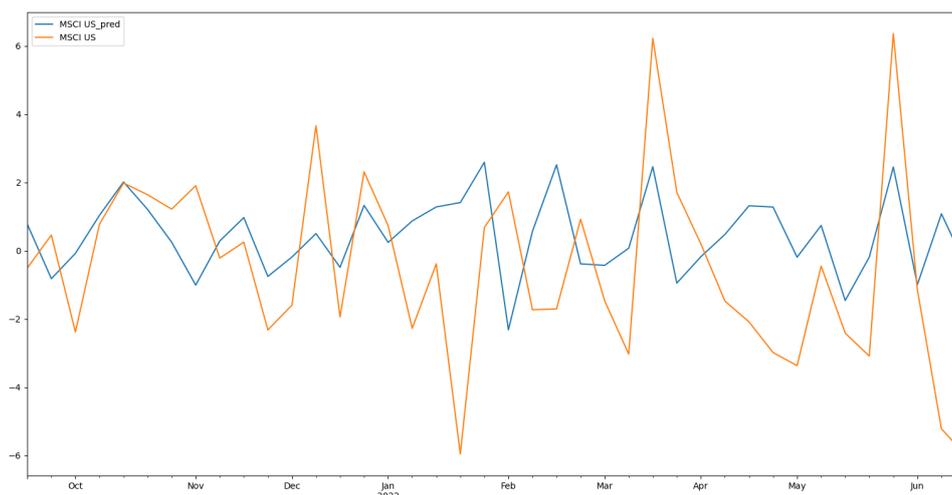


FIGURE 36 – Comparaison *MSCI US* modèle *VAR(1)* (en bleu) contre Historique (40 semaines)

	MAPE	RMSE	\mathbb{P}_{juste}
MSCI US	1,35	2,83	0,43
MSCI Canada	1,82	3,43	0,5
MSCI Emergents	2,92	2,99	0,65
MSCI Asia Pacific	2,06	2,52	0,7
MSCI Japon	1,08	2,37	0,53
MSCI UK	10,05	3,19	0,5
MSCI Allemagne	2,90	4,64	0,53
MSCI France	5,29	4,05	0,45
MSCI Suisse	5,98	3,12	0,4

Les chiffres présentés ci-dessus permettent de se faire une idée d'un score (de qualité des prédictions). Ils sont toutefois très contestable dans notre cadre. Prenons le *MAPE*, il est directement éloigné de 0 (le score idéal) car les prédictions sont très généralement moins amples que la réalité. Ce raisonnement est également transposable au *RMSE*. La probabilité que le signe soit le bon avait pour but d'identifier si *oui ou non* il y a un sens à utiliser des séries temporelles pour générer des vues de marché (identifier des sur- ou sous-performances potentiellement), les résultats ne sont pas brillants mais l'avantage est que notre modèle d'allocation prend en compte la **certitude** des anticipations.

Pour ce qui est de la comparaison de ces mesures avec celles obtenues pour les modèles ARMA, les scores *MAPE* sont meilleurs pour les séries temporelles univariées. Le même constat est fait pour la somme des résidus quadratiques. Comme énoncé au précédent paragraphe l'utilisation de mesures de performance prédictive est à prendre avec des pincettes ici d'autant plus qu'un modèle ARMA va dans notre cas faire des prévisions plus défensives que le modèle VAR (les séries projetées en univarié ne dépassent jamais 1,5% tandis que le modèle vectoriel franchit cette frontière plusieurs fois.).

VI.1.5 Intégration des séries temporelles au modèle d'allocation

Maintenant que des modèles prédictifs ont été introduits et calibrés, nous pouvons utiliser les prévisions qu'ils ont faites sur la base de *test* pour les considérer comme des *vues d'expert*.

La précision qui doit être apporté porte sur l'**incertitude** associée à ces *vues*. Nous proposons d'introduire une confiance basée sur le pourcentage de bonne prédiction de directions (positif ou

négatif), cela correspond à la mesure \mathbb{P}_{juste} qui a été utilisée pour comparer les anticipations.

Nous considérons que le degré de confiance de chacune des vues i est égal à $\mathbb{P}_{juste,i}$. Cela donne finalement que la matrice d'incertitude des vues Ω correspond à la variance des résidus multipliée par des facteurs d'ajustement de la confiance ($\mathbb{P}_{juste,i}$). Cela fonctionne correctement pour les modèles ARMA car l'on peut supposer les vues indépendantes et donc avec des degrés de confiance différents. Pour les modèles VAR, nous utilisons la matrice de covariance des résidus multipliée par la moyenne des \mathbb{P}_{juste} de chaque actif projeté. Pour chaque modèle, nous ajustons l'allocation avec une *confiance de modèle* que nous prenons ici égale à 30%.

Il y a un léger biais car nos mesures \mathbb{P}_{juste} sont faites sur la base *test*. Cela n'a pas de réel impact au sens où nous utilisons simplement un indice de confiance mais il est essentiel de le préciser en amont.

En partant de la dernière date disponible de la base *train*, c'est-à-dire le 19/09/2021, nous faisons la projection des rendements pour la période suivante et appliquons ensuite le modèle de Black-Litterman en utilisant ces anticipations de marché. Ensuite, pour chaque fin de période, nous prenons les rendements des périodes précédentes en y intégrant la dernière période en date (donc appartenant à la base *test*) et réitérons le processus. Nous faisons ainsi 40 allocations sur la période d'évaluation.

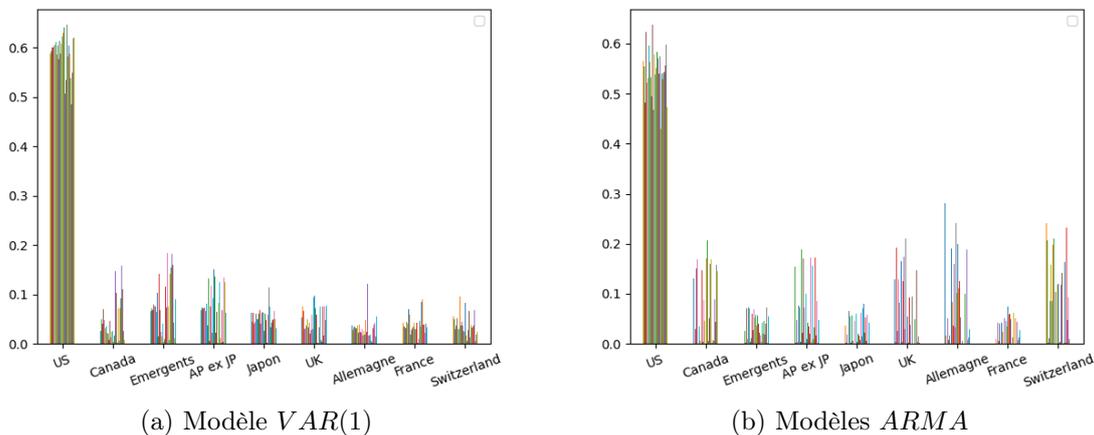


FIGURE 37 – Allocations contraintes issues de projections de séries temporelles

Nous remarquons que dans les deux cas les allocations restent proches (en termes de forme globale) du portefeuille de départ, plus particulièrement avec le modèle *VAR*. Sa différence avec l'*ARMA* est que la matrice d'incertitude n'est pas diagonale, autrement dit les vues ne sont pas indépendantes et dès lors elles peuvent paraître plus volatiles.

Il est cependant intéressant de constater que même si une base solide du portefeuille est la *MSCI US*, les autres actifs sont alloués de façon très **tactique** et ont des poids variant de 0 à 20% en fonction des anticipations. De plus, avec cette approche, le modèle de *Black – Litterman* avec des vues *ARMA* est plus **tactique** que son rival vectoriel. Dans le cas où nous utilisons des modèles sans contraintes sur les allocations (où sont autorisées les ventes à découvert), les portefeuilles peuvent rapidement devenir moins intéressants car trop tactiques. Ceux-ci sont affichés en Annexe mais n'ont pas d'intérêt à s'ajouter à la suite de ce texte (par souci de contenu et de place prise).

Nous proposons maintenant de regarder l'évolution de l'allocation en fonction du paramètre de confiance c qui ici n'est plus proportionnel à la qualité prédictive mais simplement une variable réelle que nous choisissons de faire varier. La matrice d'incertitude Ω est similaire au modèle de base, considérée alors comme proportionnelle à la matrice de covariance des rendements des actifs étudiés. Pour ce qui est des vues conservées, nous utilisons celles des modèles univariés.

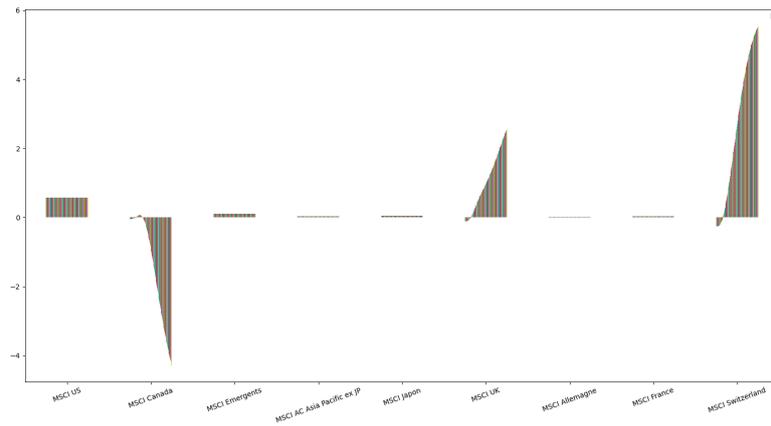


FIGURE 38 – Sensibilité de l'allocation au paramètre de confiance avec des prédictions *ARMA*

Les poids deviennent rapidement trop conséquents pour rester réalistes dans cette évolution sans contrainte. Cependant, seulement ceux concernés par des anticipations ont une présence dans le portefeuille final qui varie. Cela est également vrai pour toute **vue absolue** formulée comme anticipation, elle ne perturbe pas l'allocation des autres actifs lorsque le modèle est utilisé sans contraintes. Cela vient du fait que lors du calcul de $\mu_{posteriori}$, si un seul actif est concerné par une anticipation, seuls les rendements attendus pour chaque actif seront modifiés mais en résolvant le problème à partir des informations *a posteriori*, seuls l'actif concerné changera (car l'effet de $\Sigma_{posteriori}$ compensera la variation des rendements d'équilibre modifiés).

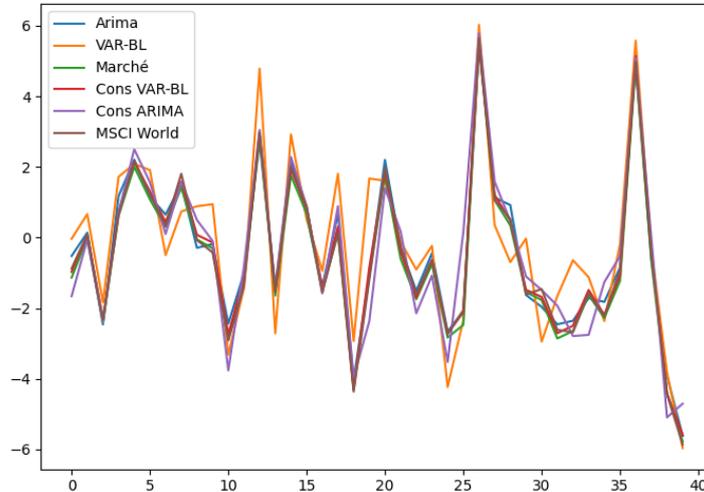


FIGURE 39 – Performance des modèles d'allocation utilisant les prédictions de séries temporelles

En utilisant différents portefeuilles et en les comparant à l'indice de marché, nous obtenus les résultats présentés ci-dessus. Globalement les variations sont très similaires. Parce que le *MSCI US* est une composante majeure de chacun d'eux et que le portefeuille de marché reste le support stratégique à chacune des allocations. La méthode *VAR-BL* se détache quelque peu, cela se justifie par le droit d'être en vente à découvert sur certaines positions, ce qui de fait augmente les variations. Les modèles contraints donnent des performances assez proches des indices de marché, les sur-performant à plusieurs reprises.

VI.2 Modification de la fonction d'optimisation

Le support au modèle de Black-Litterman est l'optimisation **Rendement-Risque** où les mesures choisies pour chacune des deux parties sont respectivement l'**espérance de rendement** et la **variance**. Cependant, du côté du risque, le choix de la variance est contestable. En effet, bien que la variance soit une mesure relativement simple à mettre en place et à comprendre, elle a toutefois des limites. Par exemple, elle va dans l'optimisation pénaliser le *risque bon* c'est-à-dire l'incertitude autour de potentiels rendements très élevés en les considérant aussi *mauvais* que les risques de grosse perte de valeur des actifs du portefeuille.

Définissons d'abord les fondements de l'optimisation **Rendement-Risque** avant d'apporter des solutions aux limites énoncées précédemment.

Definition VI.13 *Une mesure de rendement correspond à une mesure permettant de quantifier les plus ou moins values d'un ou plusieurs actifs, dans le passé en utilisant les données disponibles ou dans le futur par des estimations et/ou projections. La mesure de rendement de référence est l'espérance au titre qu'elle permet de donner une moyenne des résultats possibles.*

Definition VI.14 *Une mesure de risque ρ correspond à toute application associant un risque X à un réel positif $\rho(X)$.*

Pour un portefeuille d'actifs, la mesure de risque doit être choisie en fonction de l'objectif de l'investisseur. Qu'il cherche à avoir peu de risque extrême ou peu de volatilité dans ses résultats, les mesures de risques sont alors différentes et mises dans une fonction d'utilité comme pénalité de mesure de rendement donnent *in fine* des allocations qui reflètent les objectifs. Nous commençons ici par introduire la *Value-at-Risk* (ou Capital à risque) qui nous servira principalement pour la construction d'une mesure de risque plus élaborée.

VI.2.1 Introduction de la VaR

Definition VI.15

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > (1 - \alpha)\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

Autrement dit, la $VaR_{99,5\%}$ correspond au seuil (en absolu) en-dessous duquel il n'y a que 0,05% de chance que la variable aléatoire soit inférieure. Les définitions peuvent être différentes d'une source à une autre il est donc essentiel de la considérer telle que décrite comme ci-haut pour la suite de cette partie.

La *Value-at-Risk* sert à estimer le maximum de risque d'un investissement pour un seuil donné sur une période donnée. Elle retranscrit la perte potentielle pour une probabilité donnée. Sans rien vous apprendre, vous, assidu lecteur de ce mémoire, rappelez vous qu'elle est très largement utilisée pour les normes de solvabilités imposées aux établissements financiers. Un inconvénient assez fort pour notre allocation est que cette mesure de risque donne une valeur prise par la ou les variables aléatoires ce qui, je trouve, n'est pas très bien car c'est seulement une information ponctuelle contrairement à la variance par exemple qui donne une information sectorielle.

Nous ne détaillons pas davantage l'utilisation de la *Value-at-Risk* ici car elle ne nous intéresse pas pour les méthodes d'allocations. Ne pas comprendre ici qu'elle n'a en elle pas le moindre intérêt mais plutôt que nos travaux ne se concentraient pas dessus.

VI.2.2 Introduction de la CVaR

Definition VI.16 Une mesure de risque ρ est :

- invariante par translation si $\forall X, (X + c) = \rho(X) + c$,
- sous-additive si $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y
- homogène si $\rho(cX) = c\rho(X)$ ($c > 0$)
- monotone si $\forall X, Y \mathbb{P}(X < Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

L'inconvénient d'utiliser la *VaR* est que ce n'est pas une mesure cohérente au sens de Artzner et al. (1999) [2]. Elle n'est en effet pas *sous-additive*, construire un portefeuille $Z = X + Y$ où X et Y sont deux portefeuilles n'induit pas que Z ait un risque plus faible mesuré avec la *VaR*. Cela peut s'interpréter comme le fait que le choix d'une mesure de risque qui n'est pas *sous-additive* est problématique car lors de l'optimisation de l'allocation, la **diversification** ne se retrouvera pas encouragée. La traditionnelle variance ne l'est par ailleurs pas non plus.

Un autre problème que l'on peut souligner est que la *VaR* ne donne qu'une information à un seuil mais à part cette information de position, nous ne savons pas comment sont réparties les valeurs comprises après cette frontière.

Dès lors, nous introduisons la *CVaR* (*Conditional Value-at-Risk*) ou Espérance conditionnelle à un seuil (en français). Elle représente l'espérance d'une variable aléatoire au-delà du seuil correspondant à la *Value-at-Risk*, c'est pour cela que nous associons un degré $\alpha \in (0, 1)$ correspondant au seuil à partir (resp. en-delà) duquel la distribution nous intéresse pour la *TVaR* (resp. *CVaR*).

Definition VI.17 La *Conditional Tail Expectation* (ou encore *Tail-Value-at-Risk*, car nous pouvons tout regrouper comme nous travaillons sur des variables aléatoires supposées continues) de niveau α est donnée par :

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp \\ &= \mathbb{E}[X | X > VaR_{1-\alpha}(X)] \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 0$ alors $TVaR_\alpha(X) \rightarrow E[X]$.

Cette définition est tirée d'un cours de P.-E. Therond [25] mais modifiée conformément à notre expression de la *VaR*, nous ajoutons simplement une notation qui sera utilisée pour la suite :

$$CVaR_\alpha(X) = E[X | X < VaR_\alpha(X)] = \text{sgn}(VaR_\alpha(X)) * TVaR_\alpha(-X)$$

Celle-ci permet d'éviter toute confusion quand au côté qu'elle décrit, nous ne nous intéresserons qu'à la partie basse de la queue (celle qui tend vers $-\infty$). Pour se donner une représentation visuelle de la *CVaR*, elle peut se voir sur le graphique page suivante comme suit (à gauche) sur une distribution Normale standard (de moyenne nulle et d'écart-type unitaire) avec un seuil de 25%.

Nous pouvons ajouter que la *CVaR* va accorder une importance considérable à la distribution de la queue, en effet une queue **lourde** du côté gauche de la distribution (en direction de $-\infty$) donnera une *CVaR* très faible dans les premiers quantiles qui croîtra très rapidement.

En effet si nous reprenons le tracé à droite ci-dessous, dans les valeurs les plus faibles la croissance est très faible, cela est dû aux propriétés de queue légère de la loi Normale. Pour des distributions plus extrêmes, la croissance est bien plus importante, c'est ce que l'on peut observer avec les deux autres distributions (*Cauchy* et *Student*).

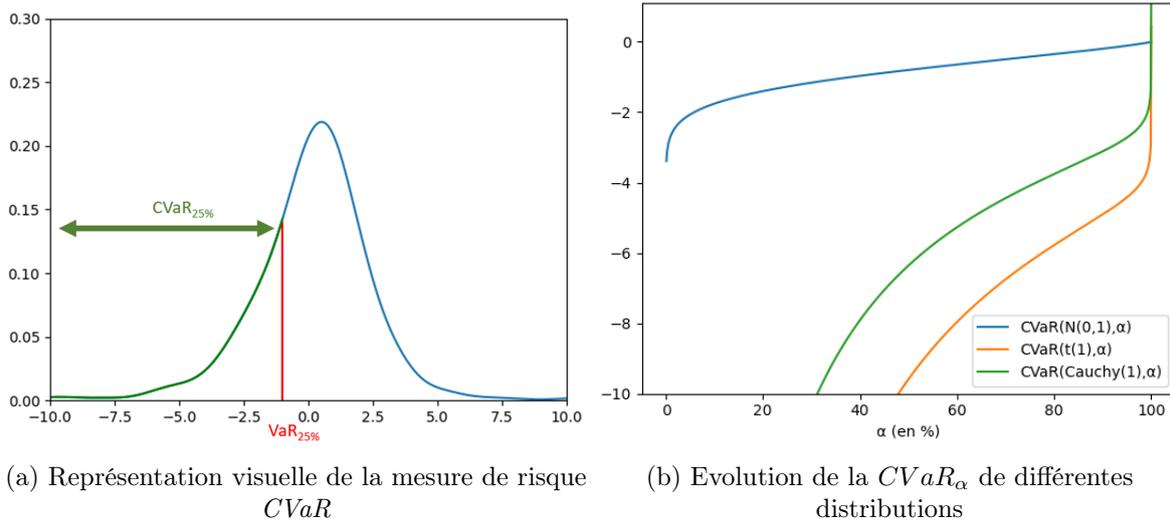


FIGURE 40 – Représentation de la $CVaR$ et sensibilité à son paramètre α

Pour être plus clair concernant la distribution *Normale*, les événements rares le sont tellement qu'à une échelle qui reste visuelle, la $CVaR_\alpha$ varie peu et n'atteint pas de valeurs extrêmes. Nous pouvons accuser le graphique car les points ont été faits à 0,1% de pas, mais nous pouvons toutefois très bien observer les nuances entre queues ! Cela est plus largement discuté dans la section portant sur les limites des hypothèses de normalité des marchés, l'idée ici est juste d'expliquer les outils que nous utilisons pour la modification du modèle.

VI.2.3 Vers une allocation *Espérance-CVaR*

Pour une mesure de risque notée ρ , de façon générale, notre problème d'allocation formalisé sous l'optimisation d'une fonction d'utilité peut alors se voir comme suit :

$$Max \quad \mathbb{E}(r)^t w - \lambda \rho(r^t w) \quad , r \text{ le vecteur aléatoire des rendements}$$

Comme dans cette partie nous n'avons pas encore évoqué le choix d'une distribution différente de celle utilisée initialement dans le modèle, nous nous concentrons sur les vecteurs gaussiens. Dans ce cas, la formulation de la $CVaR$ d'un portefeuille w d'actifs $\sim N(\mu, \Sigma)$ devient alors (grâce aux travaux de Samorodnitsky et. al. (2005) [22] sur les distributions elliptiques et stables multivariées) :

$$CVaR_\alpha(r^t w) = (\sqrt{w^t \Sigma w}) CVaR_\alpha(Y) - \mu^t w$$

Avec $Y \sim N(0, 1)$ qui correspond au vecteur centré-réduit. Cela nous permet de calculer plus facilement cette mesure. Maintenant il nous faut revenir au modèle avant de présenter les résultats. Dès lors, en combinant la fonction d'utilité et cette formule, nous obtenons :

$$Max \quad \mathbb{E}(r)^t w - \lambda * (-1) * (\sqrt{w^t \Sigma w} CVaR_\alpha - \mu^t w)$$

L'apparition du (-1) est due au fait que comme notre $CVaR$ va prendre des valeurs négatives pour les quantiles qui nous intéressent, il faut la rendre positive pour qu'elle puisse pénaliser les rendements de l'allocation correctement. En résolvant le problème par dérivation et en considérant le portefeuille de marché, nous pouvons obtenir en premier lieu une formule fermée pour Π (la prime de risque d'équilibre) :

$$\Pi = -\lambda \left(\frac{\Sigma w_{mkt}}{\sqrt{w_{mkt}^t \Sigma w_{mkt}}} CVaR_\alpha - \mu^t w_{mkt} \right)$$

Un problème survient sur l'incohérence associé au choix de deux **moyennes**, Nous posons alors $\mu = \Pi$, en y réfléchissant c'est la seule valeur plausible pour ce facteur. Dès lors en ré-arrangeant nous obtenons :

$$\Pi = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{\Sigma w_{mkt}}{\sqrt{w_{mkt}^t \Sigma w_{mkt}}} CVaR_\alpha \right)$$

Il nous faut également donner une valeur au paramètre λ , dans le modèle de référence, il représente l'aversion au risque des investisseurs du marché et se formule comme étant la prime de risque du portefeuille de marché divisée par la variance de celui-ci (ou le ratio de Sharpe divisé par l'écart-type du portefeuille de marché). Pour l'estimer, nous pouvons pour le modèle classique utiliser des estimateurs empiriques (pour espérance et variance), ils donnent la "tendance" de marché. En utilisant le problème d'optimisation global et en posant $w = w_{mkt}$ (le portefeuille de marché), nous obtenons que :

$$\lambda = - \frac{\mathbb{E}(r)^t w_{mkt} - r_f}{CVaR_\alpha(r^t w_{mkt})}$$

Ici, nous utilisons l'indice de marché *MSCI ACWI IMI* pour déterminer λ .

Les rendements espérés *a posteriori* sont alors le résultat de la combinaison de la distribution *a priori* et des vues, à vrai dire nous revenons sur la méthodologie décrite dans la partie sur le modèle général. Enfin à partir des nouveaux rendements attendus, nous pouvons retrouver l'allocation finale. Bien qu'en se penchant sur l'existence d'une solution unique, une partie restait floue et peu transformable (en isolant les termes dépendant de w le portefeuille, nous nous retrouvons avec $\frac{w}{\sqrt{w^t \Sigma_{post} w}}$), nous obtenons les poids finaux par optimisation :

$$\begin{aligned} w_{CVaR_\alpha} &= \arg \min \mu_{BL}^t w - \lambda * (-1) * (\sqrt{w^t \Sigma_{\mu_{BL}} w} CVaR_\alpha(Y) - \mu_{BL}^t w) \\ \text{Avec } \mu_{BL} &= ((\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P)^{-1} ((\tau \Sigma)^{-1} \pi + P' \Omega^{-1} Q) \\ \Sigma_{\mu_{BL}} &= ((\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P)^{-1} \\ Y &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

VI.2.4 Application de la théorie et présentation des résultats

Bien que la méthodologie ait été développée plus haut, il reste certaines spécifications essentielles pour que l'utilisation du modèle de Black-Litterman **modifié** soit cohérente et reflète réellement les objectifs de l'investisseur. Le portefeuille de marché reste ici inchangé mais l'**aversion au risque** λ doit être reconsidérée : bien qu'une formule soit donnée, il est assez courant dans les travaux de recherche de retrouver des valeurs fixées, pour Giacometti et. al. (2005) [6], une valeur de 0,15 est prise. Ici nous resterons sur l'estimateur associé aux données historiques de l'indice de marché.

Un second point qu'il nous faut aborder est celui du paramètre α qui correspond à la proportion de la distribution que nous allons conserver pour mesurer le risque par la *CVaR*. D'un point de vue pratique et conformément aux motivations en introduction de cette partie, voici les contraintes sur celui-ci :

- α doit être suffisamment faible pour ne pas pénaliser des rendements positifs (peut être translaté si nous visons une performance supérieure à une valeur donnée)
- α ne doit pas être trop faible pour ne pas se retrouver avec très peu de points au-delà de la VaR_α , car les résultats seront peu utiles et fausseront l'allocation, de plus si nous travaillons avec des distributions à queue légère (ici la loi normale en fait partie), il n'y a aucun intérêt à travailler avec des risques extrêmes.

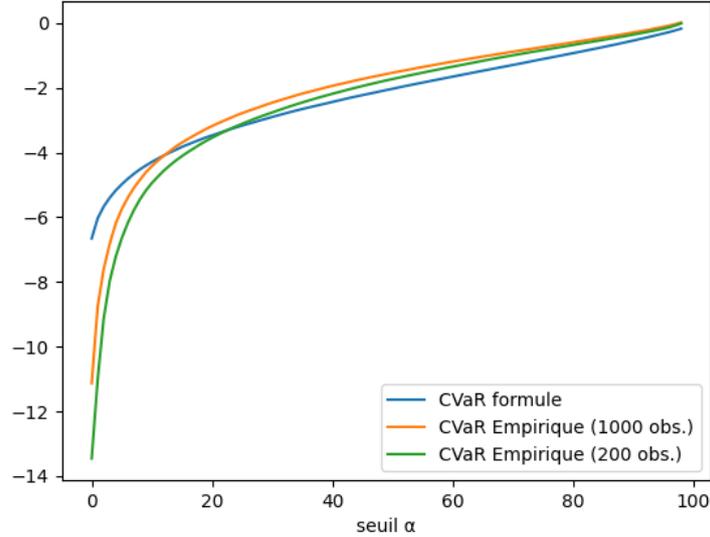


FIGURE 41 – Evolution de la $CVaR_\alpha$ sur l'indice de marché *MSCI ACWI IMI*

Comme nous pouvons l'observer sur le graphique précédent concernant la $CVaR$ des log-rendements du *MSCI ACWI IMI*, les $CVaR$ empiriques ont une forme assez différente de celle issue de la formule. Premièrement car nous avons un nombre limité de données donc les quantiles éloignés sont moins cohérents. Ensuite, la distribution normale et plus largement notre travail avec une nouvelle mesure de risque sont des approximations et n'ont pas la prétention d'être exactes.

Pour se donner une idée des allocations obtenues pour différents seuils, nous présentons ci-dessous les résultats en considérant des vues similaires à celles utilisées dans la section dédiée à l'étude des paramètres du modèle de Black-Litterman. Commençons par les rendements, les graphiques ci-dessous sont également en Annexe mais en plus gros pour mieux percevoir les chiffres (et les noms des actifs, ils sont dans le même ordre que tout au long de ce mémoire) :

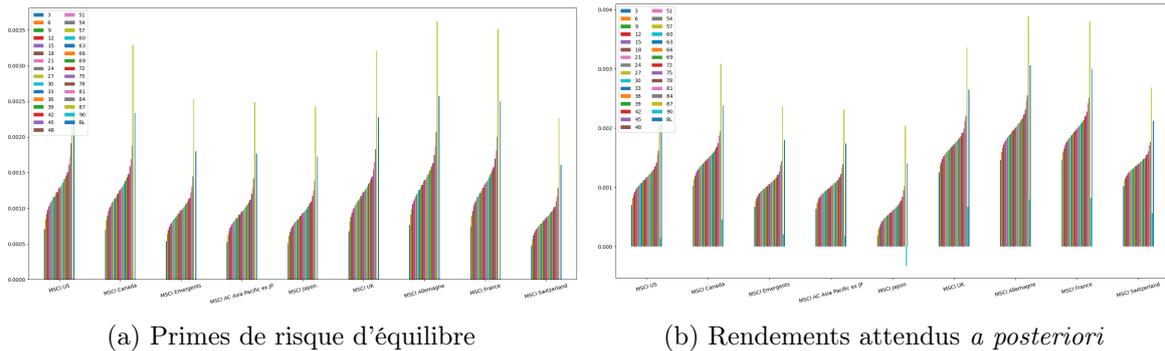


FIGURE 42 – Résultats sur le rendements du modèle modifié de Black-Litterman

La première remarque est sur les différences de rendements *a priori*, pour α variant de 0 à 100% les rendements d'équilibre sont croissants : cela vient de leur relation avec la $CVaR_\alpha$ qui est croissante. Il est aussi intéressant de remarquer que les actifs concernés par les vues ont des rendements attendus qui vont correctement s'adapter aux anticipations : en prenant l'exemple du *MSCI Japan* (le 5^{me} bloc), comme nous anticipons une sous-performance alors ses rendements attendus baissent. A l'inverse, le *MSCI France* se retrouve positivement affecté. Mais le plus remarquable réside dans les variations des actifs non concernés, par exemple, le *MSCI AP ex*

Japan baisse en termes de rendements attendus et le *MSCI Allemagne* augmente, ils sont en fait corrélés au sens de la *CVaR* aux actifs *MSCI Japan* et *MSCI France*. C'est un effet très encourageant car il permet de mieux capturer certains phénomènes que la méthode classique.

Enfin, les résultats perdent en réel sens à mesure que $\alpha \rightarrow 1$ car la fonction à maximiser va seulement devenir une fonction de l'espérance sans mesure de risque à proprement parler.

Nous reprenons la formulation de la matrice d'incertitude Ω avec le paramètre de confiance c pour les résultats suivants parce qu'elle est plus claire et permet d'associer une incertitude paramétrique. Rester sur l'idée que l'incertitude des vues est similaire à celle des rendements d'équilibre Π est trop réducteur pour notre étude. En nous focalisant sur deux actifs concernés par une anticipation de marché (le *MSCI US* et le *MSCI Suisse*), nous pouvons avoir une vision claire de l'évolution simultanée de la confiance et du seuil α (nous précisons également que l'optimisation contraint à un poids maximum de 200% et minimum de -200% afin que les poids ne deviennent pas trop extrêmes) :

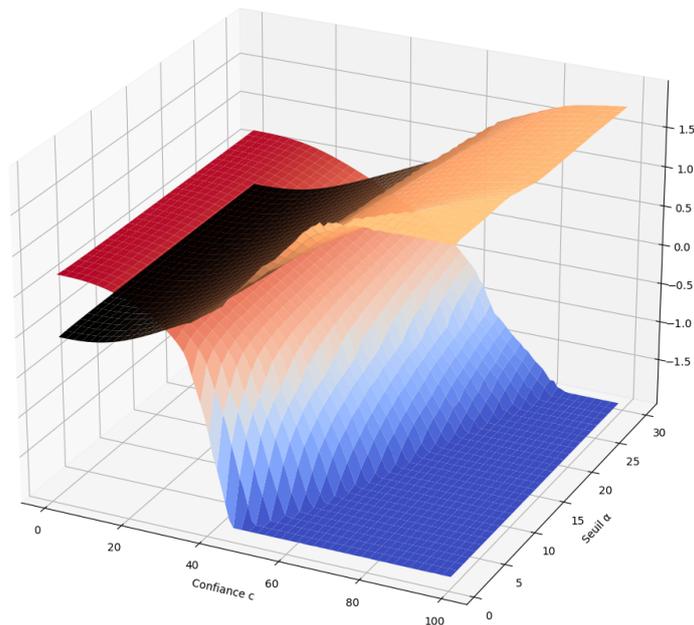


FIGURE 43 – Evolution des poids dans le portefeuille final des actifs concernés par une anticipation

La faiblesse du seuil α engendre une accentuation du changement de portefeuille avec l'évolution de la confiance des vues. Cela s'explique par le fait que l'anticipation d'une *sur-performance* ou *sous-performance* implique un **décalage** de distribution relatif et que les quantiles les plus éloignés dans l'extrémité basse sont les plus touchés par une légère variation. De plus, il est intéressant de remarquer que le modèle fonctionne correctement, dans le sens des anticipations et de leur confiance, cela rassure sur l'implémentation et l'intuition qui ont guidé cette étude.

Observer cette tendance tri-dimensionnelle sur l'intégralité du portefeuille est difficile à visualiser mais nous allons pour la suite figer les deux paramètres c et α . Conformément à l'encadrement que nous avons formulé sur ce seuil pour la *CVaR* nous retenons $\alpha = 20\%$ et obtenons les allocations suivantes :

(Page suivante)

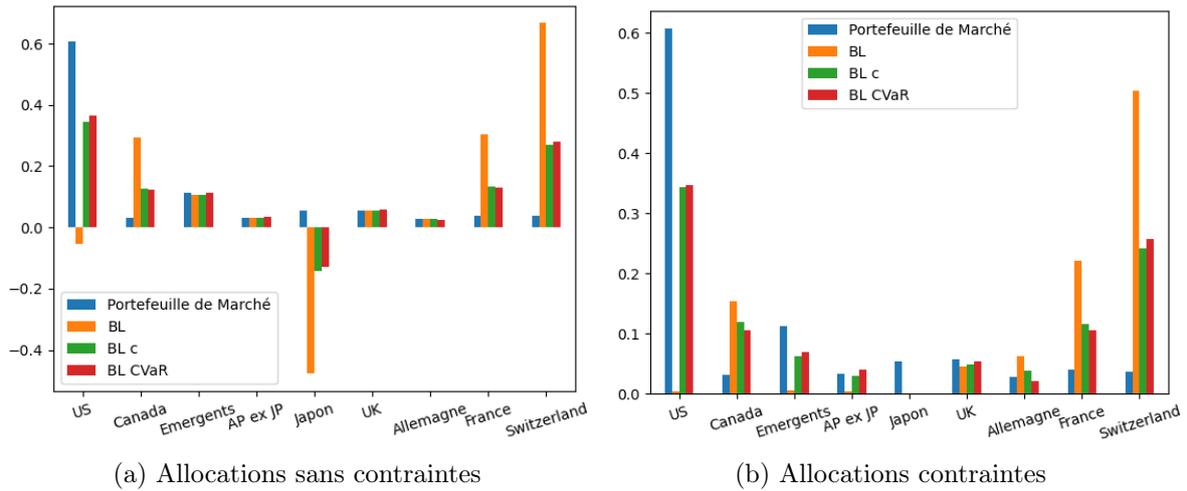


FIGURE 44 – Portefeuilles du modèle modifié de Black-Litterman avec une confiance c de 30% et $\alpha = 20\%$

Les allocations proposées pour un tel degré de confiance sont très similaires au modèle *classique*, de légères nuances sont visibles mais globalement les résultats avec et sans contraintes sont proches pour ces deux portefeuilles. Ce qui toutefois apporte une réelle plus-value ce sont les réactions à des degrés de confiance plutôt extrêmes. Les graphiques sont disponibles en Annexe D et nous identifions très clairement la dépendance que nous pouvions observer sur les rendements *a posteriori* : le *MSCI Allemagne*, sans être considéré dans les deux vues de marché se retrouver à occuper un poids considérable comme s'il était anticipé comme *sur-performant* (le *MSCI AP ex Japan* réagit de façon similaire de part sa corrélation forte au *MSCI Japan*).

Pour une confiance **intermédiaire**, nous retiendrons que la modification de la *mesure de risque* n'apporte que peu mais que pour une confiance *modérée à élevée*, l'avantage est considérable sur la perception du risque et sa retranscription du risque global d'un portefeuille dans l'optimisation de l'allocation.

VI.3 D'une distribution Gaussienne à une distribution α -stable

Dans cette partie, nous allons nous détacher provisoirement du modèle de Black-Litterman pour pousser l'étude de la distribution des rendements étudiés. A l'issue des résultats présentés ci-dessous, nous ajusterons alors certaines hypothèses du modèle d'allocation afin que ce dernier soit le plus réaliste possible tout en restant cohérent et compréhensible d'un point de vue théorique.

La loi la plus courante, notamment en finance, est la loi **Normale**, elle présente l'avantage d'être la plus simple en termes de paramétrage (deux paramètres, une moyenne et un écart-type) et d'avoir des propriétés nombreuses qui facilitent beaucoup de calculs, qui permettent alors dans de nombreux cas d'obtenir des formules fermées.

Toutefois, bien que cette distribution ait des propriétés qui soient incroyablement satisfaisantes, elle est dans de nombreux cas contestée. En effet, pour revenir au pionnier **Benoît Mandelbrot**, les courbes en cloche sont très souvent inadaptées au leptokurtisme des marchés. Par leptokurtisme, nous entendons que la propension de survenance d'évènements extrêmes est assez élevée.

L'Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) a d'ailleurs permis la rencontre avec M. Fabrice BARDET, directeur de recherches au laboratoire EVS du CNRS, docteur en science politique de l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, qui avait un avis disruptif sur l'utilisation de la cloche en dehors des églises. Il s'appuyait sur les propos de Nassim Nicholas Taleb (mathématicien, essayiste et ancien trader) qui lui-même prenait son envol fractal grâce aux travaux de Mandelbrot pour décrire le principe des **cygnes noir** (penser à l'écrire en blanc pour souligner le côté marginal), qui sont des versions parallèles d'une forme de théorie du chaos mêlée à des biais cognitifs.

Pour être plus clair, la survenance d'évènements extrêmes est très largement sous-estimée avec des lois normales. La probabilité historique que le *CAC40* chute en une seule séance (un jour ouvré) de *plus de 5%* est d'environ **0,2%**, si l'on calibre une loi Normale sur cet historique, la probabilité qu'une baisse similaire ait lieu est cette fois-ci de **0,0002%** (calculs basés sur l'historique maximum disponible sur **Yahoo Finance** gratuitement). Cela montre aisément qu'une distribution de ce genre n'est pas envisageable dans notre approche. En effet, l'allocation d'actifs vise à diversifier le portefeuille, espérer un rendement positif tout en maîtrisant son risque. Si les hypothèses du modèles sont trop simplistes et négligent le risque extrême, alors l'investisseur peut s'exposer à des pertes conséquentes non anticipées. Les données auxquelles nous attribuons une distribution gaussienne (log-rendements d'actifs financiers) suivent en réalité une loi qui s'apparenterait davantage à une distribution α -stable comme souligné par B. Mandelbrot (donc les cours d'actifs financiers pourraient s'approcher comme des processus de Lévy aux propriétés fractales (principe d'auto-similarité)), ce sont des **extensions** de la distribution gaussienne avec des paramètres permettant une souplesse sur la queue de distribution et l'asymétrie. Deux points que nous allons analyser empiriquement par la suite.

VI.3.1 Asymétrie et aplatissement (*kurtosis*) des rendements

Dans cette section, nous commençons par étudier les caractéristiques de nos données financières, c'est-à-dire des outils nous permettant de comprendre les particularités de celles-ci et qui, dans un second temps nous serviront pour choisir une famille de distributions. Il est important de notifier que par la suite, l'utilisation de distributions n'admettant pas de variance finie est prévue. Cependant, une statistique empirique ne peut pas être finie, on peut souligner son instabilité mais cela n'avancera en rien qu'elle tend vers l'infini. Le but des paragraphes suivants est de voir si des familles usuelles de lois de probabilités seraient adaptées. Les rejeter amènerait alors à s'orienter vers des familles plus complexes.

Il est d'abord pertinent de se pencher sur deux mesures statistiques : la **symétrie** ainsi que l'**aplatissement** de la distribution des variables aléatoires étudiées. Nous les appelons, par anglicisme, *skewness* et *kurtosis* qui signifient respectivement asymétrie et aplatissement. Il est possible d'avoir une approche *univariée* qui donnera une idée bien plus rapidement sur la direction à prendre, mais une méthode *multivariée* est incontestablement plus complète et apportera une vision plus fine du comportement de la répartition des rendements (qui sont en vérité, par abus de langage les log-rendements).

Definition VI.18 Le **coefficient d'asymétrie** ou *skewness* d'une variable aléatoire Z (d'espérance μ et de variance σ^2) admettant un moment d'ordre 3 est défini comme le **moment d'ordre 3 de la variable aléatoire centrée réduite issue de Z** , soit mathématiquement :

$$S = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

avec μ_i le moment centré d'ordre i de la variable aléatoire Z .

Si le coefficient d'asymétrie S obtenu vaut 0, alors la distribution de Z sera dite **asymétrique**. Si $\beta > 0$, la distribution sera décalée à gauche de la médiane et plus étalée sur la droite. Si $\beta < 0$, ce sera l'inverse.

Pearson définit également une autre indicateur d'asymétrie basé sur des paramètres statistiques plus simples : le **mode** (abscisse où la densité est la plus élevée), la **moyenne**, l'**écart-type** et la **médiane** (abscisse où la moitié des observations sont inférieures et où l'autre moitié sont supérieures). En effet, si une asymétrie est observée sur la distribution d'une loi, un *décalage* sera alors observable entre *mode*, *moyenne* et *médiane*, ce qui n'est pas le cas dans le cas d'une distribution symétrique. Une approche par quartile peut également être pertinente mais elle sera abordée plus loin dans cet écrit.

Le premier coefficient d'asymétrie de Pearson (il en existe un second qui n'est ici pas traité mais se fond de façon similaire en remplaçant le *mode* par la *médiane* moyennant un facteur multiplicatif de la statistique égal à 3) est donné par :

$$Coef_{Pearson-1} = \frac{Moyenne - Mode}{\acute{E}cart - type}$$

Une illustration graphique montrant les écarts entre plusieurs mesures de "centre" (mode, moyenne, médiane) ci-dessous permet de comprendre le caractère asymétrique de façon visuelle :

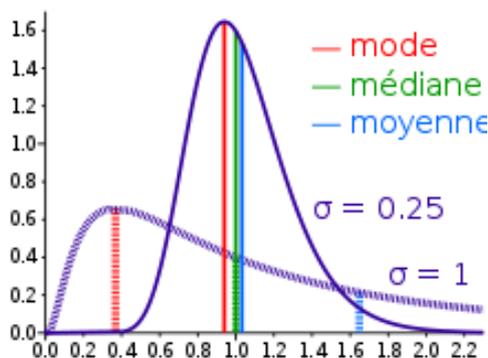


FIGURE 45 – Divergence des mesures de centre pour une loi log-normale (source *Cmglee*)

Definition VI.19 Le **coefficient d'acuité** ou *kurtosis* est une mesure de l'aplatissement de la distribution sur ses extrémités. Pour une variable aléatoire Z d'espérance μ et de variance σ^2 , on a (sous réserve d'existence du moment d'ordre 4) :

$$K = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Une valeur élevée sera synonyme de lourdeur des queues de distribution tandis qu'une valeur faible traduira une faible (voire inexistant) probabilité des extrêmes. On appellera **Kurtosis normalisé** le coefficient $\gamma_2 = K - 3$.

Pour avoir une idée des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement pour des lois usuelles, le tableau ci-dessous les présente (précision, β pour *Gumbel* correspond au paramètre d'échelle) :

Distribution	Asymétrie (S)	$Pearson_1$	Kurtosis normalisé (γ_2)
Normale	0	0	0
Student	0 ($k > 3$)	0	$\frac{6}{k-4}$ ($k > 4$)
Gumbel	$\approx 1,14$	$0,128\beta$	$\frac{12}{5}$
Laplace	0	0	3
Loi Uniforme	0	0	$-\frac{6}{5}$

Maintenant, avec les estimateurs définis dans une partie précédente, nous pouvons mesurer l'asymétrie et le kurtosis de nos données indicielles de façon unidimensionnelle. Comme exprimé pour la formule de l'écart-type, les moments d'ordre 3 et 4 ont des estimateurs avec biais relativement simples mais dès lors que nous en cherchons sans biais, on obtient pour les moments centrés d'ordre 3 et 4 (\mathbf{S} et \mathbf{K}) les résultats suivants :

$$\hat{s}(X) = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

$$\hat{k}(X) = \frac{n^2}{(n-1)^3(n^2 - 3n + 3)} \left[[(n(n-1)^2 + (6n-9))] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - \frac{(6n-9)}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]$$

Le défaut des mesures d'asymétrie et d'aplatissement est qu'elles ne permettent *a priori* pas de déterminer la loi la plus adaptée en termes de forme. Nous allons tester si nos données suivent une loi normale grâce au test de Jarque-Bera. Premièrement, il nous faut définir le test (en dimension 1).

Definition VI.20 Le test de **Jarque-Bera** est un test statistique permettant de déterminer si les données sont celles issues d'une loi normale.

En dimension 1 :

Les hypothèses sont :

- H_0 : les données suivent une loi normale ($S = 0, K = 3$)
- H_1 : les données ne suivent pas une loi normale ($S \neq 0$ ou $K \neq 3$)

Soit n données, \mathbf{S} le coefficient d'asymétrie et \mathbf{K} le kurtosis. La statistique de Jarque-Bera s'écrit :

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

Asymptotiquement, la statistique \mathbf{JB} suit une loi χ^2 à 2 degrés de liberté. On rejettera l'hypothèse H_0 au seuil α si la p -valeur est inférieure à 5%.

Nous comparons ci-dessous les résultats issus des deux estimateurs ainsi que ceux du test de normalité.

Indice	Pearson (%)	Kurtosis γ_2	Asymétrie $\hat{\beta}$	Jarque-Bera	p-val.
MSCI ACWI IMI	-16,98	8,52	-1,1	1288	0
MSCI US	-11,70	8,81	-1,08	1369	0
MSCI Canada	-11,61	11,94	-1,82	2594	0
MSCI Emergents	-18,52	2,21	-0,59	104,7	0
MSCI UK	-17,36	15,83	-1,78	4386	0
MSCI Japon	-7,29	10,9	-0,43	1992,8	0
MSCI France	-17,87	13,05	-1,51	2990,8	0
MSCI Switzerland	-12,83	10,85	-1,49	2111	0
MSCI AC Asia ex Japon	-16,93	2,57	-0,64	138,5	0
MSCI Allemagne	-16,04	12,89	-1,55	2929,3	0

Commentaire symétrie : Nous pouvons remarquer qu'une asymétrie négative persiste dans l'ensemble des log-rendements des indices, c'est-à-dire que du côté gauche de la distribution nous aurons une fréquence plus élevée que du côté droit. Cela nous amène à partiellement refuser la symétrie gaussienne et ne suggère guère de s'orienter vers des distributions symétriques (il en reste qu'ici l'asymétrie ne concerne que les marginales du vecteur des rendements, pour avoir une vision plus vectorielle, l'ellipticité nous servira davantage).

Commentaire aplatissement : Les extrêmes sont clairement plus présents que sur des distributions plus classiques (dont les kurtosis ont été données plus haut). Ce qui semble jouer sur les 400 derniers rendements hebdomadaire est le passage de l'année 2020. Cependant, vouloir enlever ces rendements extrêmes introduirait un biais conséquent et discréditerait l'approche que nous avons dans cette partie : négliger les risques rares est ce qui est reproché à l'estimation gaussienne, nous cherchons à le considérer davantage. Par conséquent la piste des lois stables se confirme sous l'angle de l'aplatissement.

Commentaire tests Jarque-Bera : A l'unanimité (nous votons comme pour la retraite), nous pouvons rejeter l'hypothèse H_0 que les rendements suivent des distributions normales.

En considérant les interprétations qui ont été faites sur la *forme* des distributions des *log-rendements*, tant individuellement que dans leur ensemble, nous pouvons conclure que la normalité supposée dans le modèle de Black-Litterman n'est pas très réaliste. Par conséquent, nous allons tenter de changer cette hypothèse. Ceci n'est pas chose aisée car il nous faut toutefois conserver certaines propriétés dans la famille de lois que nous retiendrons.

Nous souhaitons nous diriger vers la famille des lois stables pour modéliser nos données et allons donc commencer par la définir dans le cas unidimensionnel car la formalisation est plus simple. Ensuite nous aborderons la notion d'ellipticité qui permet de simplifier l'expression des distributions stables en multivarié.

Les motivations à s'orienter vers cette famille sont multiples. Premièrement, le Théorème Central Limite Généralisé donne pour résultat que la somme normalisée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suit une loi stable. Des observations faites par J. Lévy Véhel et C. Walter (dans [12]) sur les marchés financiers ont permis de décomposer les prix d'actifs sous forme de somme de rendements i.i.d., le rapprochement à cette classe devient alors pertinent sur cet axe d'auto-similarité (qu'on peut assimiler à "caractère fractale"). Deuxièmement, c'est celle qui permet de corroborer les observations empiriques, elle donne une approche plus réaliste et des résultats d'une cohérence supérieure. Un point important cependant est qu'en contrepartie du gain de réalisme, une perte considérable de clarté s'imisce dans la

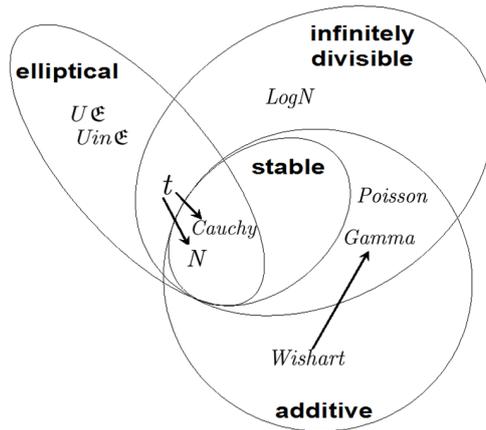


FIGURE 46 – Différentes propriétés et familles de distributions

modélisation. Comme nous allons le voir par la suite, la caractérisation d'une loi α -stable n'est pas chose aisée et son estimation n'en est pas moindre.

VI.3.2 Distribution α -stable univariée $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

La classe des distribution stables englobe celles gaussiennes et de Cauchy, elle permet **asymétrie** et **queues lourdes**. Celle-ci a été développée par Paul Lévy en 1924 à travers l'étude de sommes des variables indépendantes et identiquement distribuées.

Definition VI.21 Une variable aléatoire (v.a.) X est appelée v.a. α -stable si pour tout $n \geq 2$, il existe $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$$

Où $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ sont des copies indépendantes de X et où $\stackrel{d}{=}$ symbolise l'égalité en distribution. Dans cette définition, le choix de c_n sera alors $n^{1/\alpha}$.

Il existe plusieurs paramétrisations de ces variables aléatoires, nous en évoquons ici deux différentes : $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ et $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$.

Definition VI.22 Une v.a. X est **stable** si et seulement si $X = aZ + b$ où $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ et Z une v.a. de fonction caractéristique :

$$E[\exp(iuZ)] = \begin{cases} \exp(-|u|^\alpha [1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (\text{sign}(u))]) & \alpha \neq 1 \\ \exp \exp(-|u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(u)) \log|u|]) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Avec $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $u \in \mathbb{R}$ et $i = -1$. On notera $Z = Z(\alpha, \beta)$.

Une v.a. X_0 est $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ si :

$$X_0 = \begin{cases} \gamma(Z - \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta & \alpha = 1 \end{cases}$$

Où $Z = Z(\alpha, \beta)$, X_0 a alors la fonction caractéristique suivante :

$$E[\exp(iuX_0)] = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta (\tan \frac{\pi\alpha}{2}) (\text{sign}(u)) (|\gamma u|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(u)) \log(\gamma |u|)] + i\delta u) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Une v.a. X_1 est $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ si :

$$X_1 = \begin{cases} \gamma Z + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + (\delta + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Où $Z = Z(\alpha, \beta)$, X_1 a alors la fonction caractéristique suivante :

$$E[\exp(iuX_1)] = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta(\tan \frac{\pi\alpha}{2})(\text{sign}(u))] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(u)) \log |u|] + i\delta u) & \alpha = 1 \end{cases}$$

En dimension 1, une distribution stable est caractérisée par 4 paramètres :

- $\alpha \in (0; 2]$ représente l'épaisseur de la queue, s'il est faible (proche de 0) alors elle sera très lourde tandis qu'une valeur proche de 2 la rapprochera d'une queue fine (type loi Normale),
- $\beta \in [-1; 1]$ représente l'asymétrie, s'il est nul la distribution sera *symétrique*, s'il est proche de -1 (resp. 1), les valeurs prises ne seront que du côté gauche (resp. droit) du paramètre de localisation,
- $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ est le paramètre d'échelle de la distribution, s'il est élevé, elle sera davantage dispersée (pour s'en faire une image, nous pouvons le voir comme une forme d'écart-type pour la loi Normale),
- $\delta \in \mathbb{R}$ correspond au paramètre de localisation, il n'est pas égal à une moyenne ou espérance et demeure légèrement plus ambigu. Par exemple si la distribution est parfaitement asymétrique ($\beta = \pm 1$), on ne remarquera aucun lien avec l'espérance (si elle existe).

Plusieurs notations et définitions existent notamment à cause de l'inexistence de formule fermée pour densités et fonctions de répartition de la majeure partie de la classe. Bien que deux caractérisations ont été données (pour être plus complet), nous ne gardons pour la suite que la définition $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ que nous noterons par abus de notation $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Seuls quelques cas en possèdent : Loi de Cauchy, Loi de Lévy, Loi Normale. La loi Normale $N(\mu, \sigma^2)$ a alors, la forme $S(2; 0; \frac{\sigma}{2}; \mu)$.

Il est également important de s'intéresser au centrage et à la réduction des lois stables :

$$X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ alors } \begin{cases} \frac{X-\delta}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} & \alpha \neq 1 \\ \frac{X - \frac{2}{\pi} \beta \gamma \log(\gamma) - \delta}{\gamma} & \alpha = 1 \end{cases} \sim S(\alpha, \beta, 1, 0)$$

Pour contrer le problème de manque de formule fermée pour densité et fonction de répartition, *Zolotarev* a formalisé une expression pour ces deux fonctions. Elles peuvent être utiles pour ensuite calibrer les distributions. Nous ne les rappelons pas ici car la méthode du Maximum de Vraisemblance ne sera pas abordée. Elle est coûteuse en temps et pour l'étendue des ces travaux figurait trop fastidieuse puis non utilisable comme nous le verrons par la suite car l'économie de temps d'exécution fut le mot d'ordre.

Pour calibrer ces distributions à partir de données, nous présentons ci-dessous la méthode d'estimation développée par J. Huston McCulloch (1986) ([16]).

Méthode de McCulloch :

Dans un article publié en 1986, J. Huston McCulloch présente des estimateurs empiriques pour les paramètres d'une distribution stable. Il se base sur les quantiles empiriques pour les déterminer. Il les approche comme étant des fonctions des paramètres α et β . Soit $x = (x_i)_{i=1, \dots, n}$ les observations disponibles pour la variable aléatoire X , x_p où $0 \leq p \leq 1$ correspond au quantile empirique de valeur p , soit la dernière observation telle que la fonction de répartition empirique $\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x \geq x_i}$ soit inférieure à p .

Si le quantile pour une valeur n'étant pas définie empiriquement (*exemple : avec 10 observations, le quantile 0,95 n'existe pas à proprement parler*), alors il faut appliquer une interpolation linéaire pour le retrouver. Dans le cas où nous ne ferions pas ceci, une asymétrie résiduelle peut être présente et impacte le calibrage.

La première étape est d'estimer α , ensuite vient celle de β puis γ et enfin δ . Pour chacun d'eux, nous calculons les fonctions quantiles et utilisons les tables de **DuMouchel (1971)** ([4]) afin de retrouver les paramètres qui donneraient les valeurs trouvées pour les différentes fonctions définies ci-dessous.

Les fonctions basées sur les quantiles pour l'estimation des paramètres α et β de la distribution sont les suivantes :

<i>Estimateur</i>	<i>Propriétés</i>
$\Phi_1(\alpha, \beta) = \hat{v}_\alpha = \frac{x_{0,95} - x_{0,05}}{x_{0,75} - x_{0,25}}$	$\Phi_1(\alpha, \beta) = \Phi_1(\alpha, -\beta)$
$\Phi_2(\alpha, \beta) = \hat{v}_\beta = \frac{x_{0,95} + x_{0,05} - 2x_{0,5}}{x_{0,95} - x_{0,05}}$	$\Phi_2(\alpha, -\beta) = -\Phi_2(\alpha, \beta)$

En posant $X = \gamma U + \delta$ si $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $U \sim S(\alpha, \beta, 1, 0)$, on a $\mathbb{P}(S < Q_x) = \mathbb{P}(U < q_x) = x$, on a alors $Q_x = \gamma q_x + \delta$. En appliquant cette formulation de Q_x , nous avons alors que v_α et v_β sont indépendants de γ et μ .

Du fait que v_{alpha} est strictement décroissant par rapport à α , \hat{v}_α donne une bonne approximation de α à partir des tables. De plus, à α fixé, v_β est strictement croissant par rapport à β .

Interprétation : les deux estimateurs contiennent des informations sur l'asymétrie et l'aplatissement. En effet, pour v_α nous mesurons l'écart entre les quantiles opposées (p et $1 - p$), cela nous donne alors une "image" des deux informations, principalement sur α car l'asymétrie est partiellement mise de côté par la normalisation par un autre écart inter-quantiles. Pour v_β , en prenant les écarts des deux quantiles opposés à la médiane, on obtient également une information sur l'asymétrie en normalisant ceci par l'écart inter-quantiles.

Pour trouver $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, on pose $\alpha = \psi(v_\alpha, v_\beta)$ et $\beta = \psi(v_\alpha, v_\beta)$ et en inversant les tables de **DuMouchel**, on retrouve les deux paramètres.

Ensuite, afin d'estimer le paramètre d'échelle $\hat{\gamma}$, nous avons la fonction v_γ définie comme :

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = v_\gamma = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{\gamma}$$

A l'aide de la formulation exprimée précédemment avec Q_x , on a alors que $v_\gamma = q_{0,75} - q_{0,25}$ donc dépendant uniquement de α et β . Une fois cette valeur \hat{v}_γ trouvée à l'aide des tables, il nous faut inverser la formule afin d'obtenir le paramètre d'échelle. Si $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $x_{0,25}$ sont des estimateurs cohérents, l'estimateur de γ suivant l'est alors également :

$$\hat{\gamma} = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{\Phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

Enfin, la dernière fonction v_δ permet de retrouver la localisation empirique $\hat{\delta}$ de la distribution :

$$\Phi_4(\alpha, \beta) = \frac{\delta - x_{0,5}}{\gamma}$$

A l'aide de $Q_x = \gamma q_x + \delta$, on a finalement que Φ_4 ne dépend que de α et β ($\Phi_4(\alpha, \beta) = -q_{0,5}$). Nous inversons la formule et obtenons finalement :

$$\hat{\delta} = \gamma \Phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) + \hat{x}_{0,5}$$

Résultats sur une distribution stable $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

Nous commençons par estimer, pour différentes distributions α -stables les résultats de la méthode de McCulloch sur des échantillons de taille 1000 (similaires au notre) :

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
$S(1, 9; 0; 2; 1, 45)$	1,85	-0,01	1,90	1,56
$S(1, 5; -0, 5; 0, 5; 1, 45)$	1,59	-0,22	0,53	1,56
$S(1, 1; 0; 0, 25; 0)$	1,1	0,01	0,25	0,03
$S(1, 3; 0; 2; 1, 45)$	1,29	-0,17	1,84	0,69
$S(1, 9; 0, 9; 2; 5)$	1,69	0,16	1,83	4,75

Les résultats sont relativement corrects mais ont une erreur non négligeable. Maintenant, intéressons nous aux estimateurs moyens, nous prenons 10 sous-échantillons de taille 100 et faisons la moyenne :

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
$S(1, 9; 0; 2; 1, 45)$	1,84	0,11	2	1,68
$S(1, 5; -0, 5; 0, 5; 1, 45)$	1,53	-0,24	0,51	1,52
$S(1, 1; 0; 0, 25; 0)$	1,12	0,08	0,24	-0,06
$S(1, 3; 0; 2; 1, 45)$	1,3	0,01	1,99	1,63
$S(1, 9; 0, 9; 2; 5)$	1,86	1,03	1,99	5,03

L'estimation des 4 paramètres est plus précise en prenant la moyenne sur seulement 10 sous-échantillons. La plupart des résultats sont compris dans un intervalle de 5% des paramètres réels.

	MSCI US	MSCI Canada	MSCI Emergents	MSCI AP	MSCI Japon	MSCI UK	MSCI Allemagne	MSCI France	MSCI Switzerland
α	1,56	1,56	1,64	1,72	1,64	1,70	1,59	1,59	1,70
β	-0,13	-0,17	-0,11	-0,12	-0,06	-0,09	-0,14	-0,14	-0,14
γ	1,27	1,47	1,62	1,55	1,52	1,48	1,86	1,71	1,39
δ	0,17	0,22	0,29	0,26	0,07	0,23	0,25	0,21	0,18

FIGURE 47 – Estimation des paramètres α -stables des rendements historiques

Les résultats de l'estimation sont intéressants car ils avancent une légère asymétrie sur les rendements. De plus, leur paramètre de queue $\hat{\alpha}$ est relativement éloigné de 2 qui correspond à la distribution normale. Le paramètre de localisation est légèrement positif. Certains actifs semblent plus aptes à des distributions que d'autres (notamment *MSCI US* et *MSCI Canada*).

Maintenant que nous avons cherché à approcher les distributions univariées, il nous faut étendre l'étude car l'estimation de lois stables en dimension 1 ne permet pas d'utilisation directe dans notre cas. Bien que cela puisse mettre en avant l'intérêt de s'orienter marginalement vers cette classe, nous avons besoin de lois multivariées pour étendre le modèle de Black-Litterman. Le point important dans cette première présentation porte sur les méthodes d'estimation. Nous allons pouvoir les réutiliser dans un cas de dimension supérieure à 1.

VI.3.3 Caractère Elliptique

Nous cherchons dans cette section à effectuer un test d'ellipticité sur la distribution multivariée des actifs étudiés que l'on observe empiriquement. Ce test permet de simplifier la démarche d'estimation de la distribution avec des lois stables. En effet, dans le cas où un caractère elliptique est observé, nous pouvons restreindre l'espace des distribution stables à l'espace des

distributions stables symétriques sub-gaussiennes. Nous évoquerons dans la partie suivante l'intérêt de restreindre l'estimation.

Plusieurs approches assez simples sont au premier abord envisageables : coefficient d'asymétrie, déterminer visuellement un caractère assez symétrique ou encore si l'on étudie une variable aléatoire réelle X (centrée sur 0 sans perte de généralisation), tracer $|f_X - f_{-X}|$. A l'exception du coefficient d'asymétrie, les méthodes proposées n'ont pas de valeur mathématique ou quantitative et sont purement **subjectives** ce qui fragilise fortement l'intérêt. Et même si le coefficient semble apporter une information, il n'est pas vraiment utile pour affirmer quoique ce soit car sa valeur n'a pas de seuil au-dessus ou en-dessous duquel on pourrait dire d'une distribution qu'elle est *proche d'être symétrique* ou *loin d'être symétrique asymétrique*.

Il nous faut alors un test statistique d'ellipticité cohérent, qui puisse nous permettre de *rejeter ou non* ce caractère sur le vecteur de rendements observés. Dans la littérature, plusieurs tests ont été développés (Huffer & Park, Koltchinskii & Sakhanenko, Manzotti & Pérez & Quiroz, Schott) mais nous n'utiliserons par la suite que celui élaboré par **Huffer & Park** en 2007 ([8]), la statistique de test repose sur une division de l'espace de support au vecteur aléatoire \mathbb{R}^n en cellules. Ce test statistique offre un avantage considérable par rapport aux autres : il est plus clair et plus facile à implémenter que ses concurrents. Définissons préalablement ce qu'est une **distribution elliptique**.

Definition VI.23 *Le vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^n$ a une distribution sphériquement symétrique si*

$$X \stackrel{d}{=} \zeta U$$

Où U est uniformément distribuée sur la sphère unité dans \mathbb{R}^p (que l'on note $\Omega_p = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| = 1\}$), ζ une variable aléatoire réelle strictement positive, U et ζ sont indépendantes. De façon équivalente, on dit que \mathbf{X} est sphériquement symétrique si $\forall \Gamma, X \stackrel{d}{=} \Gamma X$.

Si l'on applique à cette variable une transformation affine, sa distribution sera alors elliptiquement symétrique. Le vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^n$ a une distribution elliptiquement symétrique si :

$$X \stackrel{d}{=} \mu + \zeta A U$$

Où \mathbf{A} est une matrice $p \times p$ non-singulière, $\mu \in \mathbb{R}^n$, ζ et \mathbf{U} définis comme précédemment. On posera également $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$ pour la suite, Σ est par conséquent symétrique définie positive (conséquence de l'inversibilité de \mathbf{A}).

Une distribution elliptiquement sphérique est caractérisée par μ , Σ et la distribution de ζ . En reprenant les notations du vecteur aléatoire \mathbf{X} possédant une distribution elliptiquement sphérique et en ajoutant comme hypothèse que $E[\zeta^2] < \infty$, on obtient alors les résultats suivants :

$$E[X] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = (n^{-1}E[\zeta^2])\Sigma$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $E[\zeta^2] = n$ ce qui nous permet d'avoir alors $\text{Var}[X] = \Sigma$. On ajoutera pour la suite, la restriction aux distribution elliptiques admettant pour densités $f_\theta(x)$ (avec h une fonction sur le même support que la densité) :

$$f_\theta(x) = |\Sigma|^{-1/2} h((x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu))$$

Il nous faut également réduire les données $(x_i)_{1 \leq i \leq t}$ pour obtenir la statistique de test. Cela peut se faire de différentes façons : par orthonormalisation de Gram-Schmidt ou en posant $y_i = \Sigma^{-1/2}(x_i - \mu)$. Les valeurs obtenues ont alors une distribution **indépendante de μ et Σ** , cela revient à isoler la composante **uniforme** de la sphère Ω_d . La seconde méthode peut

donner de mauvais résultats si l'estimation de Σ est hasardeuse ou au moins trop incertaine, ce à quoi l'orthonormalisation de Gram-Schmidt n'est pas exposée mais ne garantit pas la **bonne** orthonormalisation. Pour utiliser la seconde méthode, nous décomposons la matrice Σ de la façon suivante :

$$A = ODO^t$$

Avec O une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs propres de A , D une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A . A partir de cette décomposition et en utilisant le fait que $O^{-1} = O^t$ et que A est symétrique, on a alors :

$$A^{-1} = OD^{-1/2}D^{-1/2}O^t = (OD^{-1/2}O^t)(OD^{-1/2}O^t) \implies A^{-1/2} = OD^{-1/2}O^t$$

Si l'on connaît la matrice A dès le départ, du fait qu'elle soit non-singulière, on peut simplement l'inverser, cela facilite la démarche. Mais dans un cadre empirique, nous partirons plutôt de Σ ce qui justifie l'intérêt de passer par une décomposition.

Definition VI.24 *Le test de **Huffer & Park** se construit (une fois le vecteur réduit) selon le processus suivant. Soit $g \geq 2$ et $c \geq 1$ deux entiers, les g zones sont générées en appliquant g transformations orthogonales à une zone initiale \mathbf{G} . On note $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_{g-1}$ un groupe fini de matrices orthogonales $p \times p$ (où $\Gamma_1 = I_n$). On suppose que la zone \mathbf{G} satisfait les propriétés suivantes :*

- $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}^n$
- \mathbf{G} est ouvert
- $\mathbf{G} \cap \Gamma_i \mathbf{G} = \emptyset$ pour $i \neq 1$
- $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^g \overline{\Gamma_i \mathbf{G}}$ avec \overline{A} le support (adhérence) de A
- Il existe une suite finie de vecteurs $(a_i)_{i=1, \dots, k}$ tel que $\mathbf{G} = \{x : a_i^t x > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, k\}$

On note également $G_i = \Gamma_i \mathbf{G}$ pour tout $i = 1, \dots, g$. Soit \hat{F}_n^{-1} la fonction de répartition empirique des $|z_i^2|_{i=1, \dots, n}$ et les quantiles de celle-ci $q_{n,j} = \hat{F}_n^{-1}(j/c)$ pour $j = 1, \dots, c-1$ (avec $q_{n,0} = 0$ et $q_{n,c} = \infty$).

Pour $1 \geq j \geq c$, on définit $S_{n,j}$ par :

$$S_{nj} = \{z : q_{n,j-1} < |z|^2 < q_{n,j}\}$$

On divise ensuite l'espace des données réduites en gc cellules notées $\Lambda_{n,\pi}$ ($\pi = (i, j)_{(1, \dots, g) \times (1, \dots, c)}$) définies comme $\Lambda_{n,\pi} = G_i \cap S_{n,j}$. On peut ensuite définir une fonction de comptage $U_{n,\pi} = \sum_{k=1}^n I(z_k \in \Lambda_{n,\pi})$. Nous obtenons alors la statistique khi-carré $\chi^2 = \frac{gc}{n} \sum_{\pi} (U_{n,\pi} - \frac{n}{gc})^2$.

Nous appliquons ce test à l'intégralité de nos données et en choisissant $g = 2^d$ et $c = 2$ et $c = 3$ (pour avoir deux résultats, c est choisi de sorte que le ratio n/gc ne soit pas trop faible sachant que $g = 2^d$ le nombre d'orthants) présentons les résultats dans le tableau ci-dessous et comparons avec une distribution gaussienne (les tests sont effectués par bootstrap pour gagner en précision) :

$c = 2$	Données historiques	Vecteur Gaussien
Statistique de test	226,03	7,104
p-valeur	0,00	0,19
Décision	Rejet	Pas de Rejet
$c = 3$		
Statistique de test	283,29	8,864
p-valeur	0,00	0,21
Décision	Rejet	Pas de Rejet

Nous en déduisons donc qu'une distribution elliptique n'est pas adaptée à nos données historiques. Nous allons dans ce cas brièvement évoquer les distributions α -stables elliptiques avant de nous tourner vers le cas plus général.

VI.3.4 Distribution Symétrique α -stable multivariée (S α S)

Les distributions symétriques α -stables sont à l'intersection de la famille elliptique et de la famille α -stable. Suite à nos résultats nous ne l'exploiterons pas. Premièrement par manque de temps car même avec plusieurs mois de travail sur ce mémoire il semble que rajouter du code, des nouvelles propriétés et définitions allourdit drastiquement l'oeuvre. Il semblait essentiel de simplement leur accorder une partie, au moins pour les considérer et brièvement présenter les raisons d'une potentielle application. Cela peut donner des directions au lecteur et lui faire gagner du temps.

Cette sous-famille a de grands intérêts pour ce qui concerne l'allocation. Ses avantages sont les propriétés très pratiques pour les modèles d'allocation. En effet leur fonction caractéristique est de la forme suivante (supposons que $X \sim S(\mu, \alpha, V)$) :

$$\phi_X(t) = E[\exp(it'X)] = \exp(-(t'Vt)^{\frac{\alpha}{2}} + it'\mu)$$

Cette matrice V correspond à la matrice de dispersion. Pour $\alpha = 2$ cela correspond à la matrice de covariance du vecteur aléatoire. Dès lors que α est inférieur à 2, V va avoir une définition plus complexe, une forme d'extension de la covariance (*covariation*).

A partir de cette spécificité, la matrice de dispersion va englober l'information concernant la structure de dépendance des variables et leur dispersion sur le domaine de définition. Il suit également que l'asymétrie est absente des vecteurs $S\alpha S$, ce détail est crucial si l'on cherche à capturer l'asymétrie des rendements.

Pour continuer sur le processus d'estimation et son intégration à un modèle d'allocation, dans un modèle *Espérance-Variance*, il faut remplacer la **variance** par la norme L^p ($E(X^{\frac{1}{p}})^p$). Pour un modèle cherchant à pénaliser la *CVaR*, il est possible de procéder comme pour le vecteur gaussien (en sortant la matrice de dispersion de la *CVaR*) et l'optimisation est bien plus facile qu'avec des familles de lois plus générales.

Pour bien utiliser ces notions et être sûr de l'intégration à un modèle d'allocation (spécifiquement Black-Litterman), les articles suivants sont des ressources utiles : [22],[6].

Passons dans ce cas à la famille élargie de ce cas particulier. Moins de propriétés, plus de complexité et des résultats qui peut-être couperont votre souffle.

VI.3.5 Distribution α -stable multivariée $S_{\alpha,d}(\Gamma, \mu)$

Les distributions stables en dimensions supérieures à 1 ne sont pas évidentes à approcher, tant par leur complexité que par les méthodes d'estimation. Nous commençons par les définir pour rendre leur sens et l'utilité des paramètres (qui sont quelque peu différents de ceux évoqués précédemment) les plus clairs possible. Ensuite nous passerons au calibrage et interpréterons les résultats issus de simulations.

Les travaux sur lesquels s'appuie cette partie sont majoritairement issus de John P. Nolan ([20],[21]), chercheur s'étant longuement concentré sur la classe Stable. Malheureusement, peu de ressources sont disponibles sur ce sujet et il s'est plusieurs fois avéré compliqué d'en comprendre certaines.

Definition VI.25 Soit X un vecteur aléatoire α -stable sur \mathbb{R}^d avec $d > 1$, il est défini par 3 paramètres :

- Γ une mesure spectrale (une mesure de Borel finie sur la sphère unitaire \mathbb{S}_d de \mathbb{R}^d),
- α le paramètre de queue (similaire au cas univarié),
- $\mu_0 \in \mathbb{R}^d$ un vecteur de localisation.

On notera un tel vecteur aléatoire $\mathbf{X} \sim S_{\alpha,d}(\Gamma, \mu_0)$. Celui-ci est représenté par sa fonction caractéristique ϕ_X :

$$\phi_X(t) = E[\exp(i\langle X, t \rangle)] = \exp(-I_X(t) + i\langle \mu_0, t \rangle)$$

Où I_X , la fonction dans l'exponentielle correspond à :

$$I_X(t) = \int_{\mathbb{S}_d} \psi_\alpha(\langle t, s \rangle) \Gamma(ds)$$

Avec pour $t, s \in \mathbb{R}^d$, $\langle t, s \rangle = \sum_{i=1}^d t_i s_i$ et

$$\psi_\alpha(u) = \begin{cases} |u|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}(u) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + \delta & \alpha \neq 1 \\ |u| (1 + i \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(u) \log(|u|)) & \alpha = 1 \end{cases}$$

La composante I_X détermine entièrement la distribution d'un vecteur α -stable. Pour $d > 0$, la sphère \mathbb{S}^d est définie comme $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i^2 = 1\}$.

Bien que la mesure spectrale associée aux vecteurs aléatoires (de la forme de ceux présentés) soit généralement continue, il est possible d'avoir une approche discrète afin de simplifier les estimations. Il a par ailleurs été démontré que les mesures spectrales discrètes sont denses parmi les mesures spectrales.

Calibrage :

Nous utilisons deux méthodes pour estimer les 3 paramètres des vecteurs aléatoires α -stable. Elles ont un principe similaire pour l'approximation de Γ mais procèdent différemment sur l'estimation de \hat{I}_X . Considérons \mathbf{n} observations $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ d'un vecteur aléatoire \mathbf{X} (pour l'étude des rendements, on considère que ceux-ci sont issus de vecteurs aléatoires *i.i.d.*).

Estimation de μ_0 :

Pour retrouver μ_0 , nous estimons le paramètre δ de chacune des distributions marginales X_i du vecteur X . Nous favorisons la méthode par *Maximum de Vraisemblance*, bien que plus chronophage que l'approche par quantiles, il n'y a pas un grand nombre de variables à estimer. Du fait que pour des applications financières, le paramètre de queue α soit compris entre 1 et 2, pourrait nous autoriser à utiliser la moyenne empirique comme paramètre de localisation $\mu_0^{EMP} = E[\hat{X}]$, nous allons également le calculer pour comparer les résultats. L'objectif de commencer par estimer μ_0 est que cela va nous permettre de le retrancher à nos observations, nous aurons alors les données $Y_i = X_i - \mu_0$ pour $i = 1, \dots, n$. La fonction caractéristique du vecteur aléatoire se simplifie alors en annulant la partie $i\langle \mu, t \rangle$.

Approche Empirique :

Nous commençons par obtenir α_{EMP} avec les méthodes d'estimations univariées. Nous notons $\hat{\alpha}_{EMP} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \hat{\alpha}_i$ où $\hat{\alpha}_i$ représente la valeur trouvée pour la i^{eme} composante du vecteur aléatoire X . La méthode du Maximum de Vraisemblance est ici encore recommandée au lecteur s'il souhaite utiliser ces travaux car plus précise.

Nous définissons $\hat{\phi}_n(t)$ et \hat{I}_n comme étant respectivement les estimations empiriques de $\phi(t)$ et $I(t)$:

$$\begin{aligned} \phi(t) & \Big| \hat{\phi}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(i\langle t, X_i \rangle) \\ I(t) & \Big| \hat{I}_n(t) = -\log \hat{\phi}_n(t) \end{aligned}$$

Il est important de rappeler à quoi correspond de **logarithme complexe** car $\hat{I}_n(t)$ repose dessus.

Definition VI.26 Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = re^{i\theta}$. En supposant que $\log(z)$ est à valeur dans \mathbb{C} , on a alors que pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\log z = \log r + (\theta + 2k\pi)i$$

On conservera la valeur principale comme étant la valeur du logarithme complexe de z , soit pour $k = 0$.

Il nous faut maintenant définir un maillage de la sphère \mathbb{S}^d , en d'autres termes, nous partitionnons la sphère en plaçant k points sur celle-ci. Pour illustrer ces propos, prenons un cas en dimension 2 puis nous le généraliserons en dimensions supérieures.

Dans un plan (en dimension 2), nous pouvons proposer que $t_i = (\cos(2\pi \frac{i-1}{k}), \sin(2\pi \frac{i-1}{k}))$ (pour $i = 1, \dots, k$) soient les points découpant la sphère unitaire \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^2 .

A partir de ce partitionnement $(t_i)_{i=1, \dots, k}$ de \mathbb{S}^d , nous obtenons :

$$\vec{I}_{EMP,n} = [\hat{I}_n(t_1), \dots, \hat{I}_n(t_k)]$$

Approche Projective :

La seconde méthode est basée sur la projection des vecteurs observés. Pour tout $t \in \mathbb{S}^d$, $\langle t, X \rangle$ est une variable aléatoire de fonction caractéristique $E[\exp(iu\langle t, X \rangle)]$, en considérant que le paramètre α est déjà connu, les 3 autres sont donnés par le papier de **Zolotarev (1986)** (définis comme des fonctions dépendant du vecteur de projection), ils permettent ensuite de réexprimer la composante exponentielle de la fonction caractéristique comme suit :

$$I_X(t) = \begin{cases} \gamma^\alpha(t)(1 - i\beta(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha \neq 1 \\ \gamma(t)(1 - i\delta(t)) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Concrètement pour estimer $I_X(t)$, il nous faut dans l'ordre :

- Calculer les termes $(\langle t, X_i \rangle)_{i=1, \dots, n}$
- Estimer les 4 paramètres $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta})$
- Calculer $\hat{I}_X(t)$ à partir des paramètres obtenus

En posant une suite de points $(t_i)_{i=1, \dots, k}$ de la sphère \mathbb{S}^d (pour partitionner celle-ci), nous pouvons alors avoir une valeur $\hat{I}_X(t_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ (nous favorisons la méthode de McCulloch car le Maximum de Vraisemblance est trop coûteux en temps sur un partitionnement trop élevé). Il y a cependant une modification des étapes, nous devons répéter les deux premières étapes pour chaque "projecteur" et ensuite calculer $\hat{\alpha}_{PROJ} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}(t_i)$. Nous nous servirons de cet estimateur pour calculer les $I_X(t_i)$. Ainsi nous avons finalement :

$$\vec{I}_{PROJ,n} = [\hat{I}_n(t_1), \dots, \hat{I}_n(t_k)]$$

Estimation de la Mesure Spectrale Γ :

La mesure spectrale d'un vecteur aléatoire α -stable $S_\alpha(\Gamma, \mu_0)$ contient des informations sur la structure de celui-ci, notamment sur la structure de dépendance de chacune de ses composantes. Soit $A \subset S_d$, le cône généré par A correspond à : $C\hat{o}ne(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| > 0, \frac{x}{|x|} \in A\} = \{ra : r > 0, a \in A\}$ alors d'après le Corollaire 6.20 de **Araujo et Gine (1980)** :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{P(X \in Cone(A), |X| > r)}{P(|X| > r)} = \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(S_d)}$$

Cela permet de voir la mesure spectrale d'une sous-partie de la sphère comme information sur le comportement de la queue de distribution de X dans cette direction.

Au contraire, la distribution de X autour du mode est déterminée par les deux valeurs $I_0 = \inf\{RI(t) : t \in S_d\}$ et $I_1 = \sup\{RI(t) : t \in S_d\}$ d'après les travaux de **Abdul-Hamid** (1996).

Nous nous concentrons ici sur l'approximation discrète $\hat{\Gamma}$ de la réelle mesure spectrale Γ . Des recherches sur des estimations continues ont été menées mais ne sont pas développées ici, elles demanderaient des pré-requis trop conséquents pour simplement développer la théorie derrière ces méthodes. Cependant l'approche discrète n'est pas si décevante qu'elle en a l'air. Dans un cas discret, on définit la mesure spectrale comme :

$$\Gamma(\bullet) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \delta_{s_j}(\bullet)$$

Où γ_j correspondent aux poids assignés aux points s_j (δ_{s_j} la fonction masse en s_j). Nous avons alors $I_x(t) = \sum_{j=1}^m \psi_\alpha(\langle t, s_j \rangle) \gamma_j$. En considérant $(t_i)_{i=1, \dots, k} \in \mathbb{R}^d$, on définit la matrice $k * k$, Ψ :

$$\Psi = \Psi(t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_k) = \begin{bmatrix} \psi_\alpha(\langle t_1, s_1 \rangle), & \dots, & \psi_\alpha(\langle t_1, s_k \rangle) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_\alpha(\langle t_k, s_1 \rangle), & \dots, & \psi_\alpha(\langle t_k, s_k \rangle) \end{bmatrix}$$

Si nous posons $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]$ et $\vec{I} = [I_X(t_1), \dots, I_X(t_k)]$, nous avons $\vec{I} = \Psi \vec{\gamma}$. L'objectif est d'estimer $\vec{\gamma}$, en choisissant la suite de points $(t_i)_{i=1, \dots, m} \in \mathbb{R}^d$ de façon à ce que Ψ^{-1} existe, nous avons $\vec{\gamma} = \Psi^{-1} \vec{I}$.

Pour approximer la mesure spectrale continue Γ de façon discrète, nous avons $\Gamma^* = \sum_{j=1}^m \gamma_j \delta_{s_j}$ avec $\gamma_j = \Gamma(A_j)$ (les poids de chacune des sous-parties disjointes dont le "centre" associé est s_j) et δ_{s_j} les fonctions de masses aux points s_j .

Plusieurs problèmes sont toutefois associés à cette méthode d'estimation des poids γ_j :

- Les poids obtenus $\vec{\gamma}$ peuvent avoir des valeurs complexes suite aux approximations de I_X par les deux méthodes énoncées plus haut
- Si les points $(t_j)_{j=1, \dots, m}$ permettant le partitionnement sont en nombre pair et uniformément répartis sur la sphère S_d alors il existe j, l tels que $t_j = -t_l$ ce qui rend le système de résolution singulier (donc non unique)

Pour parer à ceci, Nolan (2001) [20] suggère d'utiliser les propriétés symétriques de ψ et I_X , et de décomposer $m = 2l$ afin de poser :

$$\vec{c} = (\Re I_1, \dots, \Re I_l, \Im I_1, \dots, \Im I_l)'$$

$$A = [a_{i,j}] \quad a_{i,j} = \begin{cases} \Re \phi_{i,j} & i = 1, \dots, l \\ \Im \phi_{i,j} & i = l + 1, \dots, \end{cases}$$

Alors : $\vec{c} = A \vec{\gamma}$

La matrice A est ici inversible. Pour ensuite éviter des valeurs négatives pour $\vec{\gamma}$, nous résolvons par optimisation quadratique le système en contraignant les poids :

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \| \vec{c} - A \vec{\gamma} \|^2 = (\vec{c} - A \vec{\gamma})(\vec{c} - A \vec{\gamma})' \\ \text{s.c.} \quad & \vec{\gamma} \geq 0 \end{aligned}$$

Il nous reste alors une limite majeure : le choix du partitionnement de la sphère S^d . Les travaux menés sur ce sujet ne suggèrent pas de méthode précise pour la découper, seulement en dimension 2 dans Mohammadi et. al. (2014) [19]. On pose $(t_i)_{i=1, \dots, n} = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ et le partitionnement suivant :

$$t_i = \left(\cos\left(2\pi \frac{i-1}{n}\right), \sin\left(2\pi \frac{i-1}{n}\right) \right) \quad i = 1, \dots, n$$

Pour le problème de la sphère dans \mathbb{R}^3 , nous partitionnons de façon similaire. Ci-dessous, les graphiques illustrent le concept de "découpage" de la sphère de façon visuelle :

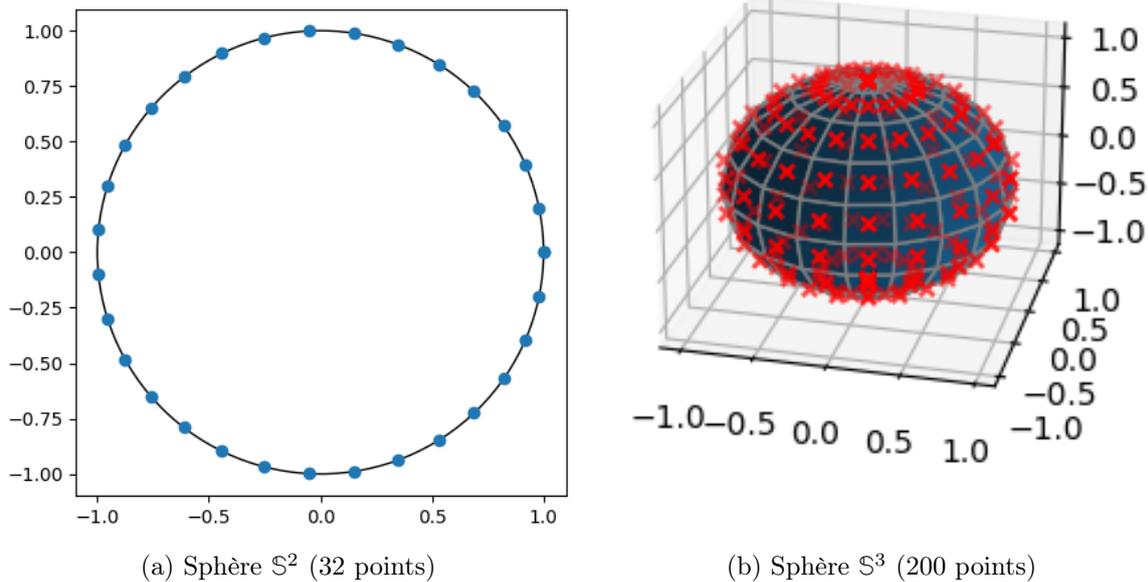


FIGURE 48 – Partitionnement des sphères \mathbb{S}^d pour l'estimation de Γ

Une notion importante pour la généralisation est l'approche en coordonnées sphériques. En effet, chaque point $x = (x_1, \dots, x_d)$ de la sphère \mathbb{S}^d peut être décrit par $d - 1$ angles $(\theta_i)_{i=1, \dots, d-1}$:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \cos \theta_1 \\
 x_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
 x_{d-1} &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\
 x_d &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1}
 \end{aligned}$$

En dimension supérieure, nous proposons une approche pour découper \mathbb{S}^d : Utiliser les coordonnées sphériques et faire un découpage de la sphère en espaçant les angles de façon uniforme : . Le problème comme nous pouvons le voir en dimension 3 est que le partitionnement va donner des éléments plus grands que d'autres. Dès lors la précision est affectée sur certaines directions et en augmentant les dimensions nous avons rapidement des pertes considérables. Elle reste cependant la plus **facile** à mettre en place par sa formulation relativement compréhensible.

A partir de ce découpage et suivant les deux méthodes proposées plus haut. Nous pouvons procéder aux estimations. **Cependant**, une remarque importante est à préciser. En effet, les calculs sont déjà très longs pour une faible subdivision du fait des **dimensions** qui rendent très longs chaque phase. Donc nous faisons le choix pour la suite (arbitraire) les actifs suivants : *MSCI US, MSCI Canada, MSCI Emergents et MSCI Asia Pacific ex. Japon.*

Le nombre de 4 semble être le meilleur compromis pour avoir des résultats et en même temps rester proche d'une problématique d'allocation.

Concernant le découpage de la sphère de \mathbb{R}^4 , les premiers résultats visuels présentés reposent sur un découpage en 512 points ($8 * 4 * 4 * 4$), ensuite nous avons augmenté pour l'utilisation dans le modèle de Black-Litterman à 8192 points pour avoir des résultats plus fins.

Il aurait été bien évidemment préférable de faire des calculs sur l'intégralité du portefeuille mais l'ordinateur qui sert à programmer a hélas ses plus beaux jours derrière lui et pense depuis plusieurs mois à sa retraite dans un centre de recyclage des déchets.

Simulation d'un vecteur α -stable :

La méthode est basée sur les travaux de **Modarres et Nolan (1994)**, si X a pour fonction caractéristique :

$$\phi^*(t) = \exp \left(- \sum_{j=1}^n \psi_{\alpha}(\langle t, s_j \rangle) \gamma_j \right)$$

Alors pour $\alpha \neq 1$

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n \gamma_j^{1/\alpha} Z_j s_j$$

A partir de cet algorithme de simulation, nous pouvons procéder aux estimations et voir si visuellement il y a une concordance entre les méthodes empirique et projective ainsi qu'avec les rendements historiques. Pour se représenter cela, nous proposons un graphique avec en abscisse le *MSCI US* et en ordonnée le *MSCI Canada* (graphique à gauche), ainsi qu'un second avec le *MSCI Canada* et le *MSCI US* (graphique à droite) :

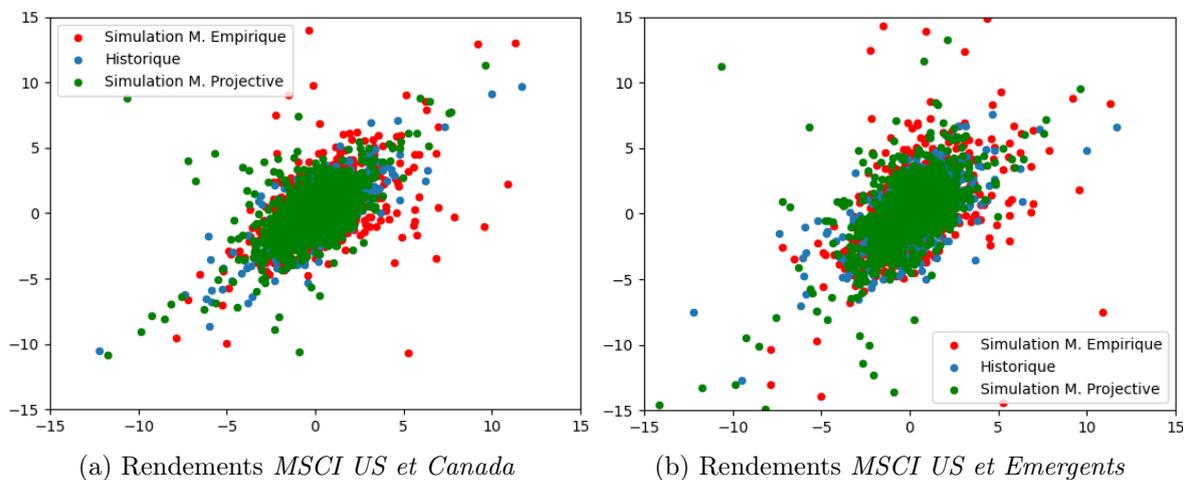


FIGURE 49 – Résultats de l'estimation multivariée sous la forme bivariable (1000 points)

Les résultats sont visuellement intéressants mais soulèvent un problème important lié aux lois α -stables en général : les valeurs extrêmes. En effet, bien qu'une queue relativement lourde soit suggérée à travers nos travaux, les méthodes d'estimation ici ne sont pas les plus robustes et peuvent alors donner des résultats quelque peu trop erratiques.

La valeur moyenne pour le paramètre de queue $\hat{\alpha}$ est de 1,6 ce qui est assez important et provoque occasionnellement des scénarios financiers chaotiques.

Pour *garder un contrôle* sur ces excès, nous avons filtré dans la graphique présenté ci-dessus et pour l'application qui suivra également aux valeurs suivantes : $B_{inf} = -30\%$ et $B_{sup} = 30\%$.

Le choix est relativement arbitraire mais se base sur le constat suivant : une hausse de 30% sur un indice diversifié d'actions d'un pays est très peu probable en une semaine. Cela requiert de très bonnes séances consécutives. *A contrario* une baisse de 30% est presque impossible à cause du contrôle des marchés financiers et semble suffisamment être un scénario extrême pour notre étude.

Des problèmes liés au temps d'exécution ont été énoncés plus haut, afin de pouvoir réaliser l'étude dans un temps fini avec un maximum de données, il nous a fallu considérer seulement la méthode de simulation empirique (la méthode projective met en moyenne 10 fois plus de temps). Certes ce ne sont pas des programmes optimisés mais en essayant de les simplifier (et d'éviter de perdre du temps dans des boucles de code,...), nous nous retrouvons avec des temps trop importants et une taille de stockage nécessaire plus que gargantuesque.

VI.4 Changement de la distribution des rendements dans le modèle de Black-Litterman

Cette section a probablement été la plus compliquée à constituer. Le challenge est de taille et l'expérimental est au goût du jour. Restant conscient qu'un mémoire d'actuaire n'est pas un travail de recherche mais bel et bien un rendu à caractère professionnel, je voulais toutefois pousser au bout le raisonnement car c'est cette section qui est mon objectif depuis maintenant plus d'un an et demi, et tout cela à cause des fractales et d'un livre acheté sur internet.

Avant toute chose, il semble primordial de clarifier un point important. Un modèle alternatif à celui de *Black – Litterman* existe déjà avec une souplesse permettant de ne même pas avoir à spécifier la distribution hypothétique des rendements. Pour le lecteur cherchant à pousser ce sujet, il lui est suggéré de se tourner vers les articles relatifs au **COP Black-Litterman** (élaboré par *Meucci*, COP pour Copula Opinion Pooling). Il n'est pas abordé dans ce mémoire et l'approche que nous voulions avoir sur les densités stables n'aurait pas été possible sous celui-ci. Il n'en reste pas moins que ce sujet est d'actualité et que de nombreux chercheurs l'ont récemment utilisé (quelques articles datant de 2022) pour innover par-dessus.

Pour revenir au sujet de cette ambition, l'objectif est de trouver un moyen d'incorporer une distribution stable multivariée dans le modèle de Black-Litterman. Pour ce faire il nous faut d'abord revenir à l'hypothèse de la distribution sous le modèle initial (R le vecteur des log-rendements) :

$$R \sim N(\mu, \Sigma) \qquad \mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

Maintenant il nous faut considérer ce qui est à changer. Premièrement, la distribution de μ n'est pas le centre des priorités mais il ne nous faut pas non plus faire n'importe quoi. Ce que nous voulons obtenir s'apparente à cela :

$$R \sim S(\alpha, \mu, \Gamma)$$

Au travers des différents articles qui traitent du modèle de Black-Litterman, certains soulignent qu'une utilisation quelque peu erronée (du moins assez peu claire) reste concevable : dans l'allocation finale, considérer que la matrice $\Sigma_{posteriori}$, c'est-à-dire la matrice de covariance prenant en compte la modification des rendements attendus $\mu_{posteriori}$ en plus de la covariance des rendements de base, n'est pas toujours très utile et que la simple matrice de covariance empirique des rendements peut suffire.

Pour s'assurer de la validité de ces propos, en appliquant le modèle avec chacune des deux matrices de covariance, nous obtenons des résultats assez proches (les vues sont les mêmes que pour la section dédiée à l'étude des paramètres) :

(Graphique page suivante)

Les nuances sont faibles et sous cet angle là, nous considérons donc $\mu_{posteriori}$ comme un vecteur de valeur **figées**, non plus comme un vecteur aléatoire. Dès lors nous pouvons formuler cela en notations :

$$R_{posteriori} \sim N(\mu_{posteriori}, \Sigma)$$

Ce relâchement sur le caractère de la moyenne *a posteriori* est la clé pour le changement de distribution. En effet, nous allons donc considérer la transformation type Black-Litterman suivante :

$$R \sim S(\alpha, \mu, \Gamma) \rightarrow R \sim S(\alpha, \mu_{posteriori}, \Gamma)$$

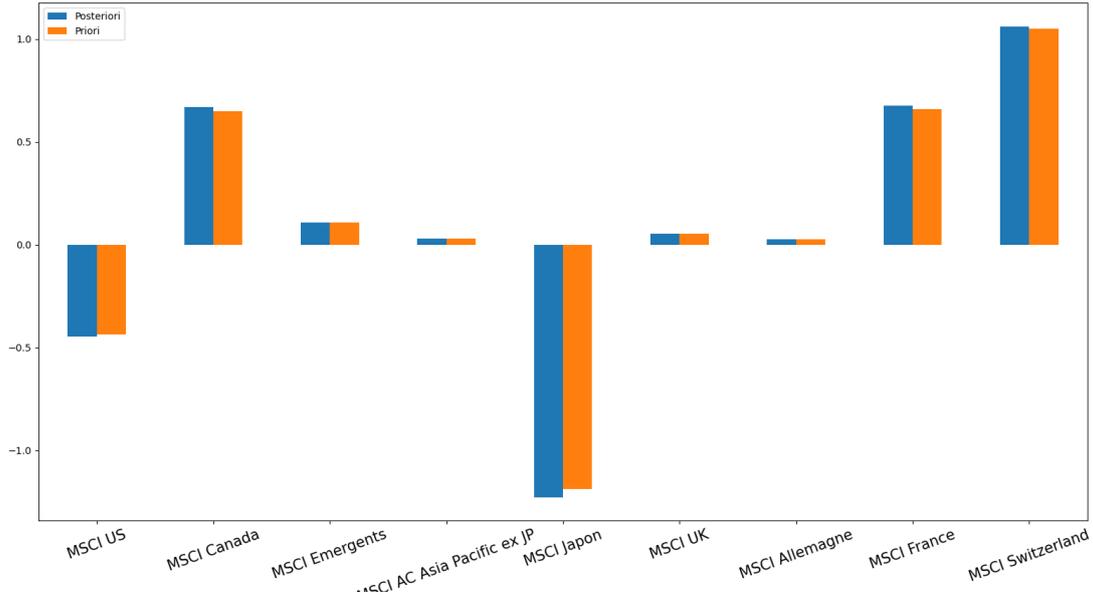


FIGURE 50 – Comparaison des allocations avec les matrices de covariance *a posteriori* et empirique

Autrement dit, nous ne touchons pas à la structure de dépendance des rendements (donc Γ reste identique). Après avoir cherché des méthodes innovantes pour intégrer le conditionnement aux *vues* dans la structure de dépendance, nulle méthode ne semblait pouvoir donner des résultats cohérents.

Maintenant que l'idée est plus claire, il nous faut déterminer $\mu_{posteriori}$. Pour résoudre ce second problème, formulons le ainsi : $\mu_{posteriori}$ est issue d'un mélange entre deux sources, celle du marché et celle de l'investisseur. Ce mélange découle de différentes approches mais s'appuie sur l'hypothèse des rendements d'équilibre Π (que $\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$) et de $P\mu = q + \epsilon$ ($\epsilon \sim N(0, \Omega)$).

Nous récupérons les conclusions de la partie concernant l'utilisation de la *CVaR* (car un vecteur stable n'admet pas de matrice de covariance et que notre objectif est d'avoir une vision du risque plus cohérente). Cependant, nous utilisons la matrice de covariance empirique dans notre forme de *MEDAF* modifié pour la *CVaR*. Nous ajoutons donc l'hypothèse suivante : sur une période réduite, il est possible de considérer une matrice de covariance des actifs mais cette période doit rester relativement faible pour ne pas entrer avec la contradiction des rendements α -stables (sur le long terme). Dès lors, il est possible d'avoir une estimation *court/moyen terme* des rendements d'équilibre Π :

$$\Pi = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{\Sigma w}{\sqrt{w^t \Sigma w}} CVaR_\alpha \right)$$

Ces différentes restructurations du modèle de Black-Litterman nous amènent donc aux rendements R α -stable définis comme suit :

$$R \sim S(\alpha, \mu, \Gamma) \rightarrow R \sim S(\alpha, \mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q), \Gamma)$$

Remarque : Au risque que cela puisse paraître complètement infondé et bête, cette approche peut se synthétiser comme étant un mélange entre notre information (nous savons qu'une distribution α -stable représente le vecteur des rendements) et celle des investisseurs (ils considèrent faire une optimisation Espérance-*CVaR* sous une hypothèse de normalité des rendements moyens).

Pour ensuite obtenir des allocations optimales, il faut avoir recours à des algorithmes d'optimisation. Ils ne sont pas traités ici, celui qui donne le meilleur rapport résultat/temps a été

conservé et a servi pour la suite. Nous utilisons simplement l'optimisation Espérance- $CVaR$ mais sur un portefeuille de rendements α -stable.

Il y a un travail important du côté de la réaction du modèle au degré de confiance. Nous avons réutilisé l'idée de transformation en puissance du degré de confiance en cherchant à maîtriser celui-ci pour une confiance variant de 1% à 100%. Les formules ont donc été adaptées sur des fenêtres bien différentes de celles associées au modèle de Black-Litterman classique. Il faut également ajuster les vues de marché par le même facteur d'échelle et la confiance sans quoi celles-ci, peu importe le degré de confiance, ne sont pas retranscrites dans le modèle.

Présentons ci-dessous les premiers résultats pour le portefeuille de 4 actifs qui a été introduit dans la section précédente. Nous avons les anticipations suivantes avec un degré de confiance de 30% :

- Le *MSCI Canada* va surperformer de 4% (en annualisé) le *MSCI Emergents*
- Le *MSCI US* va performer de -5% (en annualisé)

Nous obtenons alors les portefeuilles suivants en considérant le seuil de $CVaR$, $\alpha = 30\%$:

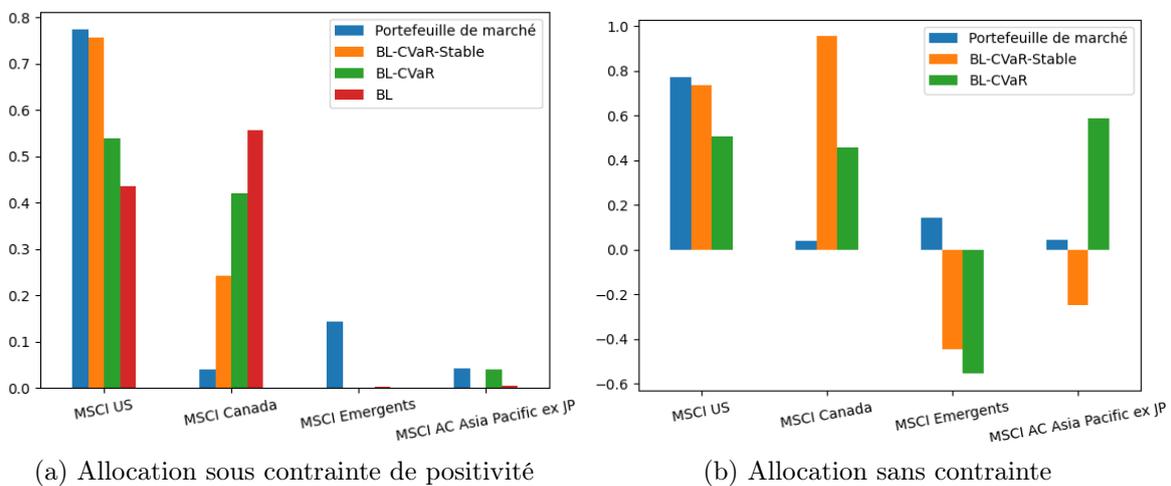


FIGURE 51 – Comparaison des allocations entre hypothèse de normalité et hypothèse α -stable

Bien que les portefeuilles proposés soient assez différents, le nouveau modèle semble correctement réagir aux vues (P, Q) . Il n'est cependant pas tout-à-fait à la bonne réaction dans son amplitude, un peu trop réactif sur une allocation sans contraintes. Pourquoi le *MSCI US* garde un poids important ? Grâce à sa structure de dépendance au *MSCI Canada* qui permet de l'affecter positivement malgré une baisse partielle attendues pour celui-ci. De plus, il se positionne devant ses concurrents en termes de rendements de base ce qui fait qu'il "garde" une part d'intérêt malgré l'anticipation de baisse que nous avons formulée.

En faisant évoluer le portefeuille avec une seule vue (la première) par rapport au degré de confiance associé à celles-ci, nous pouvons voir ci-dessous que les réactions sont assez fortes (l'optimisation a pour bornes -2 et 2 pour ne pas aboutir sur des portefeuilles encore plus aberrants bien que -2 revienne à avoir recours à des produits à effet de levier considérables).

L'évolution avec des contraintes de positivité apporte toutefois un certain intérêt : comme *MSCI US* et *MSCI Canada* sont assez liés, ils viennent à remplir le portefeuille ce qui délaisse les deux autres actifs. Cependant l'actif non concerné (*MSCI Asia Pacific ex. Japon*) reste présent même avec de fortes anticipations.

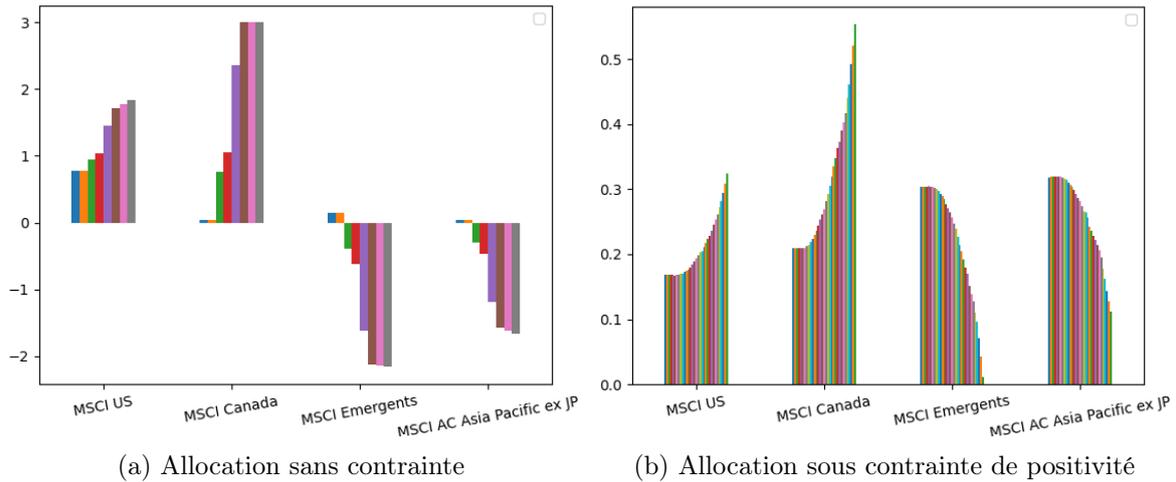


FIGURE 52 – Évolution des allocations α -stables par rapport au degré de confiance

Pour apporter des derniers angles de critique sur l'expérimentation qu'est ce modèle, nous avons, à partir des données des rendements, cherché à mesurer certaines informations intéressantes sur les différents portefeuilles, elles sont synthétisées ci-dessous :

	Rendement moyen	Ecart-Type	Ratio Sharpe
BL-CVaR-Stable	0,17%	2,32%	0,075
BL-CVaR	0,18%	2,26%	0,081
BL	0,19%	2,34%	0,081
Marché	0,18%	2,32%	0,078

FIGURE 53 – Synthèse des portefeuilles selon la distribution α -stable des rendements simulée

Ces résultats ne sont guère exploitables, pour mieux faire il aurait fallu déployer des méthodes plus coûteuses en temps et le temps de travail sur un mémoire est déjà court. Si à cela nous ajoutons la complexité de calcul alors ça n'en finit jamais! Le portefeuille **expérimental** ne donne pas de superbes résultats, ce n'est pas le but ici mais en creusant le sujet il serait intéressant de comprendre si cela vient de l'auteur (moi) ou de l'idée (moi). L'approche de ce modèle aurait beaucoup de sens mélangée à des séries temporelles plus complexes que les modèles *ARIMA*, potentiellement en croisant cela avec des modèles *ARIMA-GARCH* ou *COGARCH* nous aurions de quoi comparer les performances avec un modèle standard.

VII Application à la Gestion des Actifs de la Caisse des Dépôts et Consignations

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons à un cas plus concret de l'allocation d'actifs. Certes, pour un investisseur uniquement tourné vers les actions, le concret a été au rendez-vous durant ces dernières dizaines de pages mais pour un service de gestion des actifs cherchant la diversification de son portefeuille, les travaux présentés peuvent sembler un peu trop *inutilisables*. Nous allons donc aborder ici le cas du groupe Caisse des Dépôts au sein duquel j'ai été apprenti au Service Allocation de la Direction des Gestions d'Actifs.

Au total, 226 milliards d'euros composaient le portefeuille de ce département du groupe au 31 décembre 2021.

Avec un tel montant d'investissement, le Service Allocation joue un rôle important dans la répartition des différentes poches d'actifs, à savoir **Actions, Obligations et Immobilier & Forestier**. Dans ce cadre posé, l'intégration d'un modèle quantitatif, Black-Litterman dans notre étude, peut apporter des arguments à certaines modifications de l'allocation actuelle et donne une vision de marché pour exploiter l'approche stratégique tandis que les anticipations d'experts du modèle peuvent être illustrées par l'avis des différents gérants sur leurs classes d'actifs respectives. Nous allons premièrement décrire un profil que nous considérerons comme étant celui de l'investisseur qu'est la Direction des Gestions d'Actifs puis, pour ajouter du réalisme à notre méthode d'allocation, nous décrirons un moyen d'intégrer l'ensemble des solutions d'investissement possibles.

Enfin, nous commenterons les différents résultats issus des modélisations et conclurons sur l'intérêt ou non d'utiliser une telle complexité.

Le travail concernant le développement d'un outil à objectif **pratique** ne sera guère détaillé dans ces travaux mais il figure essentiel de l'évoquer. Pour faciliter l'utilisation du modèle de Black-Litterman, nous avons mis en place un outil d'aide à la décision. Le but est de facilement voir si, selon les hypothèses et anticipations sur les marchés financiers, nous pouvons appuyer notre raisonnement sur les résultats d'un modèle.

Précisons que la majorité des données, c'est-à-dire les portefeuilles exacts ou l'historique de certains indices, ne seront pas donnés et que les allocations de départ sont modifiées pour ne pas avoir de problèmes liés à la confidentialité de ce mémoire. Certaines informations ne sont pas faussées car directement disponibles en ouvrant son moteur de recherche.

VII.1 Le profil d'investisseur de la Caisse des Dépôts et Consignations

Pour présenter un profil d'investissement, il nous faut revenir à la structure de la Caisse des Dépôts et les directions dont les financements sont partiellement placés par la Direction des Gestions d'Actifs. Nous pouvons compter deux piliers principaux composant l'origine des fonds sous gestion :

- les Activités pour le compte de l'Etat français (Livret A, LDDS, LEP) dont la majeure partie contribue au financement du logement social,
- les Activités consolidées, plus particulièrement la Section Générale responsable des dépôts réglementés (juridiques et consignations), d'investissements financiers et de financements de marché auxquels s'ajoutent plusieurs filiales et participations stratégiques (détaillé dans au début de ce mémoire).

Les différents Livrets, principalement le Livret A, représentent des montants conséquents, au 31 décembre 2021 ils représentent 343 milliards d'euros. Sa nature est *variable*, c'est-à-dire que son taux est le **maximum entre un taux plancher de 0,5% et la moitié de 'la moyenne semestrielle des taux à court terme en euros €STR additionnée à la moyenne semestrielle d'inflation hors tabac'**. Dès lors, les investissements vont être tournés vers des produits avec des taux variables dont les variations sont similaires aux rendements nécessaires pour la rémunération des différentes solutions d'investissement public adressées aux particuliers. Les produits basés sur l'inflation sont alors un bon choix car ils permettent une couverture efficace contre les hausses (à l'instar de cette dernière année), les **OATi** sont de fait très prisées car ce sont des obligations de l'Etat français (donc grandement sûres) qui ont une rémunération indexée sur l'inflation.

De l'autre côté, la Section Générale a à son Actif des investissements plus importants en actions, en immobilier mais comporte aussi des produits obligataires et des prêts. Les filiales et participations stratégiques ne relèvent pas de la Gestion des Actifs et sont propres au groupe Caisse des Dépôts.

La Direction des Gestions d'Actifs intervient au milieu de ces deux îlots en ayant pour but d'investir les financements accordés par les deux directions financières. Celles-ci ont un pouvoir considérable car elles vont donner des Allocations Stratégiques globales (avec un découpage en seulement quelques grandes classes). Il devient alors assez clair que ce travail n'est pas évident car les objectifs ne sont pas tous concordants. Bien qu'avoir plus de fonds offre un avantage considérable sur les investissements, il n'en reste pas moins que raccorder les directions est un travail difficile.

Notre approche est ici groupée, dans le sens où nous considérons la section Gestion des Actifs comme étant une entité plutôt qu'en la voyant comme divisée en deux. Par conséquent, nous optons pour l'approche de décomposition d'un portefeuille (au lieu de deux très différents). Commençons par présenter les différentes classes d'actifs pour lesquelles des investissements sont faits. Nous ne présentons ici que les classes concernées par notre allocation par le modèle de Black-Litterman, certaines ne sont pas présentes car il n'était pas possible de les considérer avec des indices ou que les données disponibles étaient trop récentes pour avoir un historique suffisamment conséquent permettant l'estimation empirique de paramètres (à l'instar de la matrice de covariance).

En premier lieu, la classe **Actions** se décompose comme suit :

- *Actions Etats-Unis*, classe d'investissement dans les actions de sociétés cotées aux Etats-Unis,
- *Actions Japon*, classe d'investissement dans les actions de sociétés cotées au Japon,
- *Actions Discrétionnaires*, classe d'investissement dans les actions de sociétés cotées en Europe (principalement en France),
- *Actions systématiques*, classe d'investissement dans les actions de sociétés cotées en Europe gérée de façon quantitative,
- *Actions Europe Small Capitalization*, classe d'investissement dans les actions de sociétés cotées en Europe ayant des capitalisations plus faibles,
- *Private Equity*, classe d'investissement dans des capitalisations et fonds non cotés.
- *Obligations Convertibles*, classe d'investissement dans les obligations convertibles en actions.
- *CDC Croissance*, société de gestion spécialisée sur les fonds actions de PME cotées françaises et européennes.

Ci-dessous l'évolution des indices depuis 2010 pour avoir une représentation visuelle de ceux utilisés pour la classe **Actions** :

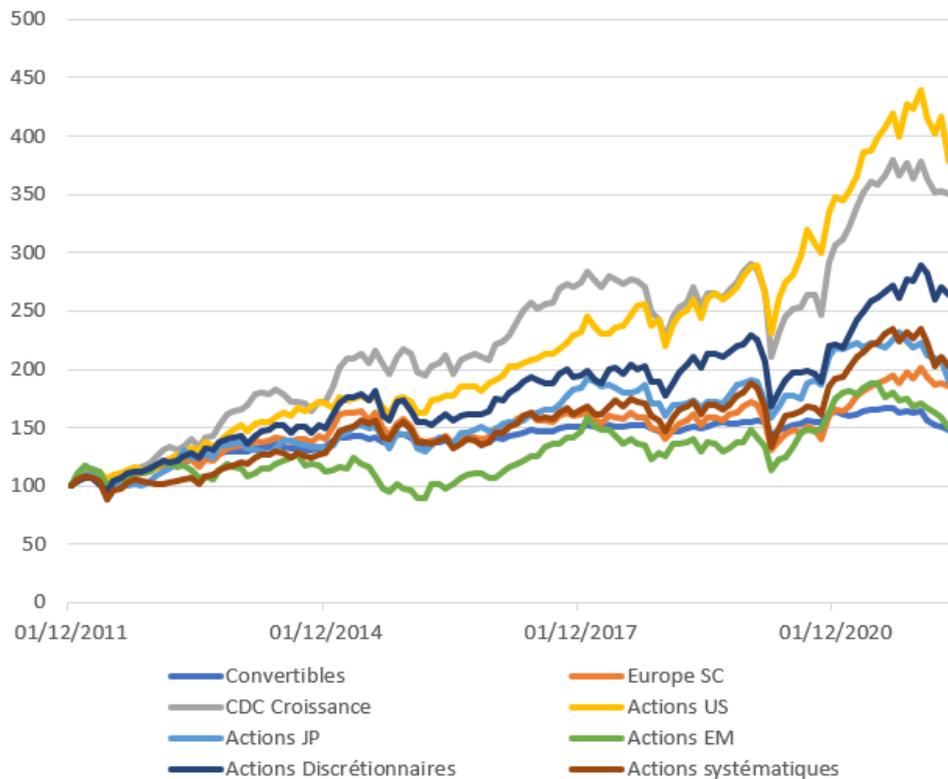


FIGURE 54 – Evolution des indices Actions

Précisons que les rendements que nous utiliserons seront **mensuels**, cela change quelque peu l'approche qui était tout au long de ce mémoire hebdomadaire.

Ensuite vient la catégorie des **Produits de taux** :

- *Crédit Taux Fixe*, obligations à taux fixe avec une note de crédit élevée (entre AAA et BBB-),
- *High Yield Taux Fixe*, obligations à taux fixe avec une note de crédit faible (BB+ ou inférieure),
- *Gouvernement Taux Fixe*, obligations à taux fixe émises par des gouvernements
- *Emergents Taux Fixe*
- *Inflation*, obligations à taux indexé sur l'inflation.

Enfin, pour la dernière classe d'Allocation Stratégique Globale, nous regroupons l'**Immobilier** et les **Investissements forestiers**. Malgré une passion pour les randonnées et samedis bûcheronnage, nous ne garderons que l'Immobilier de cette classe.

Nous pouvons également donner une représentation visuelle des indices choisis. Cependant, précisons qu'il est plus compliqué pour chaque classe obligataire de trouver des indices calquant la performance d'obligations. Par exemple, pour obtenir un indice pour la classe *Gouvernement Taux Fixe*, nous utilisons un indice composé d'obligations d'échéances différentes qui rebalance sa composition en fonction de l'évolution des maturités de ses actifs. En prenant un historique depuis 2010, nous obtenons le graphique suivant :

(Graphique page suivante)

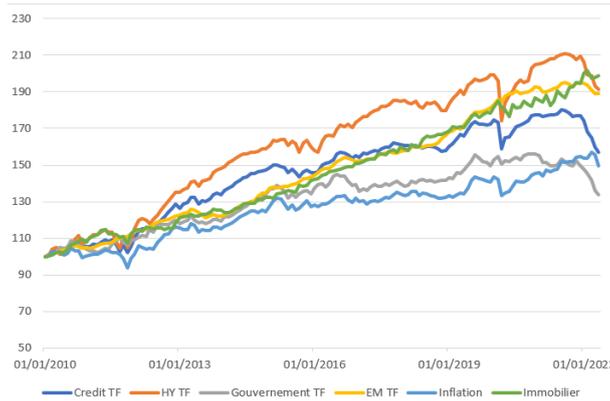


FIGURE 55 – Evolution des indices Taux et Immobilier

A partir de cet univers de portefeuilles disponibles, nous considérons pour la suite les portefeuilles ASM (représentation d'un portefeuille avec une vue assez macro (haute)) et ASD (pour Allocation Stratégique Détaillée, portefeuille avec une granularité plus importante, celle que nous cherchons à utiliser) :

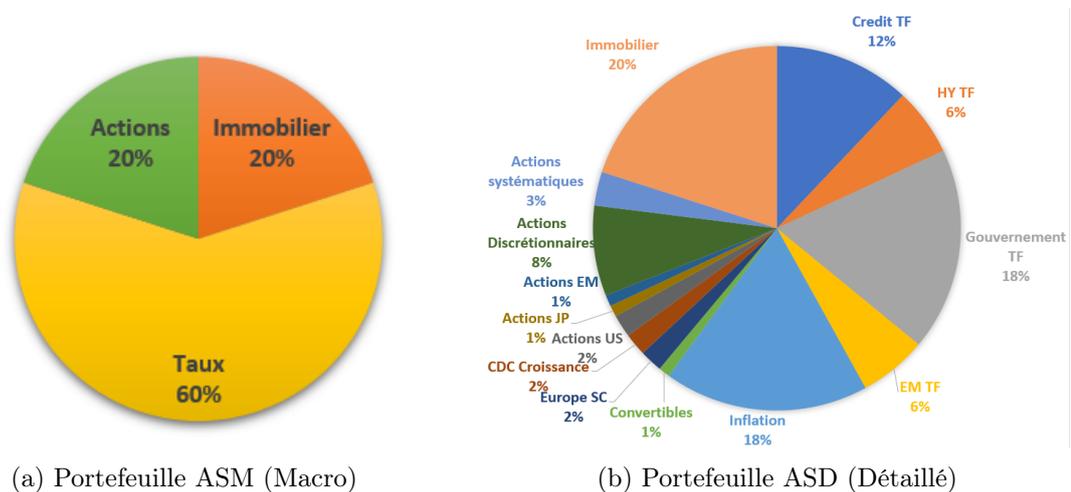


FIGURE 56 – Portefeuilles *supposés* pour la Gestion des Actifs du groupe Caisse des Dépôts

Ils sont relativement en cohérence avec les objectifs de la Direction des Gestions d'Actifs et figurent relativement pondérés. Un portefeuille de cette apparence paraît très diversifié. Ils serviront de portefeuilles de référence dans la partie dédiée à l'allocation par Black-Litterman.

Avant d'y parvenir, nous devons faire un détour sur un point important lié aux données, en y prêtant attention, il est possible de remarquer que l'indice immobilier est relativement stable sur la période 2010 – 2022. Il nous faut avoir une approche un peu plus critique de celui-ci.

VII.2 De nouveaux actifs : Immobilier, Actions et Fonds non cotés

VII.2.1 Présentation du problème

La difficulté initiale réside dans le fait qu'on ne trouve pas de données précises sur un indice les représentant. Prenons le cas de l'immobilier : il n'est pas chose aisée d'évaluer la performance à une échelle nationale ou internationale. De nombreuses modalités sont à prendre en compte. Il faut commencer par trouver (ou établir) un indice représentant la classe.

Deux types d'indices concernant l'immobilier existent : ceux basés sur la performance de SCI et ceux sur les transactions faites dans la zone définie. Etablir son propre indice est fastidieux et requiert un gros traitement de données, bien qu'il soit possible d'utiliser les bases de données mises à disposition sur des sites gouvernementaux, leur volume est trop conséquent et déterminer la performance à partir de valeurs de vente et de modalités de biens immobiliers dépasse le cadre de ce mémoire.

Pour revenir à la bifurcation dans le choix d'indice pour l'immobilier, nous avons de chaque côté des avantages et inconvénients. Pour l'indice basé sur la performance de SCI, il offre l'avantage d'être plus facilement accessible mais en contrepartie les performances sont lissées sur le temps et peuvent cacher de lourdes pertes ce qui est problématique dans un modèle où la pénalité est le risque. De plus, sous la catégorie immobilier sont présentes différentes sous-classes (Logistique, Industriel, Habitat,...) qui n'ont pas les mêmes performances, un découpage peut alors être nécessaire.

Concernant celui basé sur les transactions, il n'est *a priori* pas disponible sur internet pour certaines zones géographiques (pour les Etats-Unis il existe le NCREIF TBI développé par le MIT mais à l'échelle européenne ou française, pas de ressources pertinentes) mais offre l'avantage d'être le plus transparent possible.

Nous choisissons, pour représenter la classe Immobilier dans notre modèle d'allocation d'actifs, l'indice **EDHEC IEIF** qui permet d'avoir des rendements concernant le *rendement de l'immobilier d'entreprise* de façon mensuelle. Un inconvénient est qu'il n'est disponible à cette fréquence qu'à partir de 2008, nous devons alors restreindre nos données (estimation basée sur moins de valeurs, bien que les graphiques présentent les indices de 2010 à 2022, des données sont disponibles depuis 2000 pour certains). C'est un indice pondéré par la capitalisation qui mesure la performance des SCPI particulières (Sociétés Civiles de Placement Immobilier avec un volume de transaction sur le marché secondaire supérieur à 2 millions d'euros sur l'année précédente) investissant dans l'immobilier d'entreprise (bureaux, commerces, plateformes logistiques,...).



FIGURE 57 – Log-rendements de l'indice Immobilier EDHEC IEIF

On peut toutefois considérer plusieurs limites dans l'indice présenté ci-dessus : basé sur l'investissement d'entreprise mais ne concerne pas le résidentiel, les performances peuvent être considérées comme lissées. En effet, le calcul est réalisé sur une base de performance en capital (au travers de l'évolution du prix des parts) ainsi qu'une performance globale avec dividendes réinvestis. Mais comme il se base sur des performances de SCPI, les résultats peuvent figurer lissés dans le temps.

Pour résoudre ce problème, nous allons *perturber* la série des rendements en nous appuyant sur les travaux de Delfim J.C. et Hoesli M. (2019) [3]. Cet article détaille des méthodes permettant dé-lisser des données et met en application la théorie à l'immobilier aux Etats-Unis. Plusieurs techniques sont présentées mais nous n'allons en conserver qu'une partie, le but n'étant ici pas de calquer ces travaux mais plutôt de les utiliser sur un indice français.

Une deuxième série de rendements peut apporter un intérêt dans son ajout au modèle d'allocation d'actifs, c'est celle du **Private Equity**. Il est cependant encore une fois difficile de trouver un indice cohérent. Des fournisseurs de données sur la classe d'actifs non cotée peuvent permettre de créer soi-même un indice synthétique, hélas la construction d'un tel indicateur aurait requis trop de temps. Nous pourrions cependant ici traiter une série qui a la faiblesse de n'être que trimestrielle. Pour le traitement, nous la conservons mais elle ne sera pas utilisée car le pas trimestriel n'est pas dans l'ambition de notre étude, certes c'est peut-être un peu frustrant pour le lecteur mais il faut comprendre la quantité de graphiques et lignes de code servant de fondation à ce mémoire.

VII.2.2 Théorie derrière le dé-lissage, le modèle Auto-Régressif inversé

Développé par Geltner (1993) [5], ce modèle repose sur le fait que la valeur d'évaluation actuelle dépend de celles qu'elle avait dans le passé et de l'information publique actuelle. Cela s'appuie sur le comportement des évaluateurs qui accordent un lien de cohérence entre valeur présente et valeur précédente, ils ajusteront le résultat en fonction de l'environnement de marché présent. On peut alors formuler le modèle comme suit (avec r_t^a le rendement évalué en t , r_t le rendement qui représente la variation du prix de marché non observée) :

$$r_t^a = \alpha r_{t-1}^a + (1 - \alpha)r_t, \quad |\alpha| < 1$$

Cette équation est dite de "lissage" car elle explique comment l'évaluateur va *lisser les rendements*. Cependant, en isolant r_t qui correspondrait à l'information que l'on recherche (la vraie variation du marché), nous obtenons :

$$r_t = \frac{r_t^a - \alpha r_{t-1}^a}{(1 - \alpha)}$$

Une fois cette relation trouvée, l'objectif est d'approcher un moyen d'estimer α . En supposant que le rendement de marché *inobservable* suit un processus AR(1) (auto-régressif d'ordre 1) tel que :

$$r_t = \gamma + \phi r_{t-1} + \epsilon_t, \quad |\phi| < 1$$

Avec γ un terme constant, ϕ le coefficient auto-régressif et ϵ_t le terme d'erreur (supposé indépendant et identiquement distribué à travers le temps) Nous pouvons grâce à cette hypothèse combiner les deux équations pour obtenir *in fine* une expression des rendements que nous avons de base indépendante du rendement inobservable :

$$r_t^a = \gamma(1 - \alpha) + (\alpha + \phi)r_{t-1}^a - \alpha\phi r_{t-2}^a + (1 - \alpha)\epsilon_t$$

En posant ensuite $\omega_t = (1 - \alpha)\epsilon_t$ et on estime $\hat{\alpha}$ (sans se préoccuper de γ et ϕ , on leur impose une valeur de départ) en minimisant la somme quadratique des résidus de l'expression précédente des rendements (méthode des moindres carrés) :

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argmin} \sum_{t=1}^T \omega_t^2(\alpha; \gamma, \phi)$$

Cela permet ensuite d'obtenir \hat{r}_t , on peut alors estimer $\hat{\gamma}$ et $\hat{\phi}$:

$$(\hat{\gamma}, \hat{\phi}) = \underset{\gamma, \phi}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2(\gamma, \phi; \hat{\alpha})$$

On répète alors ces **3** étapes jusqu'à ce que les paramètres estimés convergent. D'un autre côté, nous allons comparer cette méthode d'estimation avec celle où l'on chercherait directement à avoir $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\phi})$:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}) = \underset{\alpha, \gamma, \phi}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \omega_t^2(\alpha, \gamma, \phi)$$

L'inconvénient de "tout faire" en même temps est que la convergence risque d'être plus approximative. D'autre part, si les valeurs de départ des paramètres sont trop éloignées, la première méthode risque de donner des valeurs incohérentes. On pourra également chercher à déterminer l'ordre p optimal pour le processus auto-régressif étant donné que la théorie présentée ci-dessus peut s'étendre à des ordres supérieurs à **1** pour le *rendement inobservable*. L'autre partie concernant le lien entre r_t et r_t^a peut également être étendue mais l'intérêt est moindre car cela reviendrait à chercher un plus grand nombre de paramètres et donnerait une volatilité finale trop importante (en plus de complexifier grandement la formulation). En effet, si l'on suppose $r_t \sim AR(p)$ on a alors :

$$r_t = \gamma + \sum_{j=1}^p \phi_j r_{t-j} + \epsilon_t, \quad |\phi_i| < 1 \quad i = 1, \dots, p$$

En combinant ceci à l'équation de lissage, nous avons finalement :

$$\begin{aligned} \frac{r_t^a - \alpha r_{t-1}^a}{(1-\alpha)} &= \gamma(1-\alpha) + \sum_{j=1}^p \phi_j (r_{t-j}^a - \alpha r_{t-j-1}^a) + \epsilon_t \\ \Leftrightarrow r_t^a &= \gamma(1-\alpha) + (\alpha + \phi_1) r_{t-1}^a + \sum_{j=2}^p (\phi_{j-1} \alpha + \phi_j) r_{t-j}^a - \alpha \phi_p r_{t-p-1}^a + (1-\alpha) \epsilon_t \end{aligned}$$

L'ordre optimal p sera déterminé à partir du tracé d'autocorrélation. Le processus d'estimation est fait de la même façon que dans le cas où $p = 1$.

Des modèles plus poussés peuvent donner des résultats pertinents en prenant l'exemple des modèles **auto-régressifs à frontière**, ils permettent d'avoir une finesse dans l'estimation des paramètres. Cependant cela demande davantage de données au titre que l'estimation en fonction de la valeur prise par un indice sous-jacent (celui qui déclenche la frontière et donc le changement de paramètres) peut nécessiter jusqu'à deux fois plus de données pour des résultats similaires.

VII.2.3 Application aux données françaises

Revenons maintenant aux deux indices que nous avons choisis pour les classes alternatives dans lesquelles nous souhaitons investir. Les résultats sont représentés visuellement car à l'exception de la volatilité (qui par conséquent augmente), il n'y a que peu à étudier sur ces techniques. Elles sont certes utiles mais leur qualité est peu quantifiable (à part dans le cas où nous aurions un indice basé sur les transaction et un basé sur des avis d'experts auquel cas nous pouvons comparer l'indice basé d'avis délissé avec celui basé sur les transactions).

L'application à la série immobilière (page suivante) donne des résultats dans le sens de nos attentes, ils ont maintenant une variation plus ample ce qui permet de considérer un certain risque associé à cette classe. Les rendements ne deviennent pas opposés mais simplement amplifiés, ils mettent en avant l'information partielle lissée par l'indice et son fonctionnement.

Cependant les résultats sont moins pertinents appliqués au *Private Equity*, en fait le paramètre α associé au délissage est relativement faible ce qui rend mineures les amplifications des rendements.

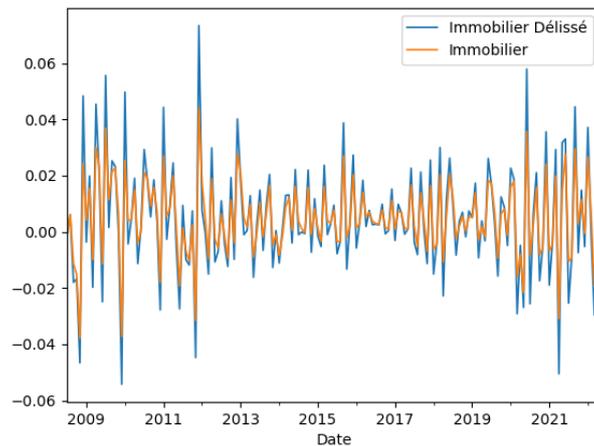


FIGURE 58 – Délicage des rendements mensuels de l’Immobilier par modèle AR-AR(1)

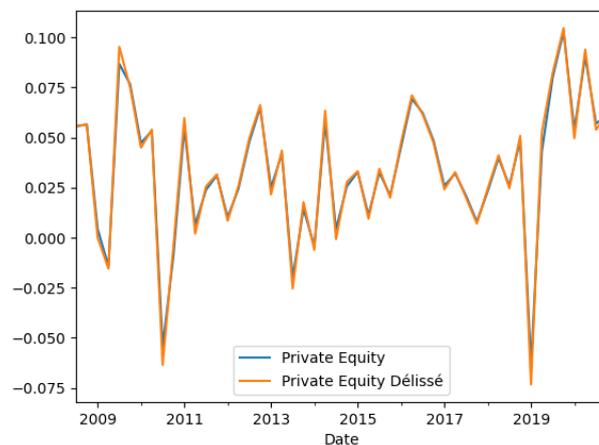


FIGURE 59 – Délicage des rendements trimestriels du Private Equity par modèle AR-AR(1)

La transformation appliquée n’est pas la plus adaptée car le nombre de rendements négatifs reste mineur (4 sur 40 observations). Certes travailler en trimestriel *lisse* une grande partie du risque, c’est pourquoi il n’est potentiellement pas nécessaire d’avoir une telle approche sur un tel pas d’observations. Un travail sur des informations mensuelles aurait beaucoup plus d’intérêt. Mais cette conclusion nous permet d’avancer que sur des périodes trop longues, le risque se lisse, ici les grandes chutes correspondent à de très mauvais trimestres mais sont passagères.

A partir de la série qui nous intéresse, c’est-à-dire celle des log-rendements, nous allons pouvoir présenter des allocations en intégrant cette classe d’actifs avec un risque *en ligne* avec celui associé aux solutions d’investissement plus quantitativement traditionnelles. Précisons en amont quelques restrictions relatives à un institution sur son allocation avant de finalement fournir des résultats.

VII.3 Encadrement de l’allocation : contraintes d’investissement

Pour considérer que notre modèle soit en ligne avec les allocations proposées et les multiples contraintes qui s’appliquent au processus de décision des futures répartitions, nous devons ajouter des *limites* à notre portefeuille. En effet, on ne peut pas accepter de rebalancer l’intégralité des investissements à chaque période quand les encours dépassent les millions, alors pour des quantités encore plus conséquentes, cela va de soi.

Pour limiter notre allocation, nous proposons donc plusieurs types de contraintes :

- Chaque actif du portefeuille ne peut pas avoir son poids qui varie de plus de 5% de sorte que le portefeuille total ne soit pas complètement impacté et garde sa *forme*,
- Les allocations Macro (ASM) ne peuvent pas être brisées car elles doivent être respectées, peu importe le contexte (cela est vrai dans la majorité des cas, si un changement drastique de paradigme sur les marchés financiers survient, elle peut être revue).

VII.4 Allocations proposées

Pour utiliser le modèle de Black-Litterman, il nous faut spécifier certains paramètres. Nous proposons deux approches complémentaires :

- Formuler deux anticipations de marché en date de la dernière observation disponible pour la période suivante (mais ne donne pas d'informations sur la qualité de l'allocation sous l'angle de la performance)
- Utiliser un modèle de séries temporelles qui génère des vues à chaque période sur une fenêtre représentant 20% des données pour avoir des résultats en termes de rendements.

De plus, pour le lien entre allocations *stratégique* et *tactique*, nous allons identifier le portefeuille de marché comme étant le portefeuille supposé de référence pour la Gestion des Actifs du groupe Caisse des Dépôts.

Pour le premier point, nous anticipons avec une confiance de 30% que :

- la classe *Actions US* va sur-performer les classes *Actions Discretionnaires* et *Actions Systématiques* de 0,5%
- l'*Inflation* va surperformer le *Crédit Taux Fixe* et le *Gouvernement Taux Fixe* de 0,4%.

Avec ces anticipations, appliquons différents modèles en n'utilisant ici que la seconde contrainte (les variations dans les classes peuvent être brutales mais chaque groupe (Taux, Actions, Immobilier) doit rester constant).

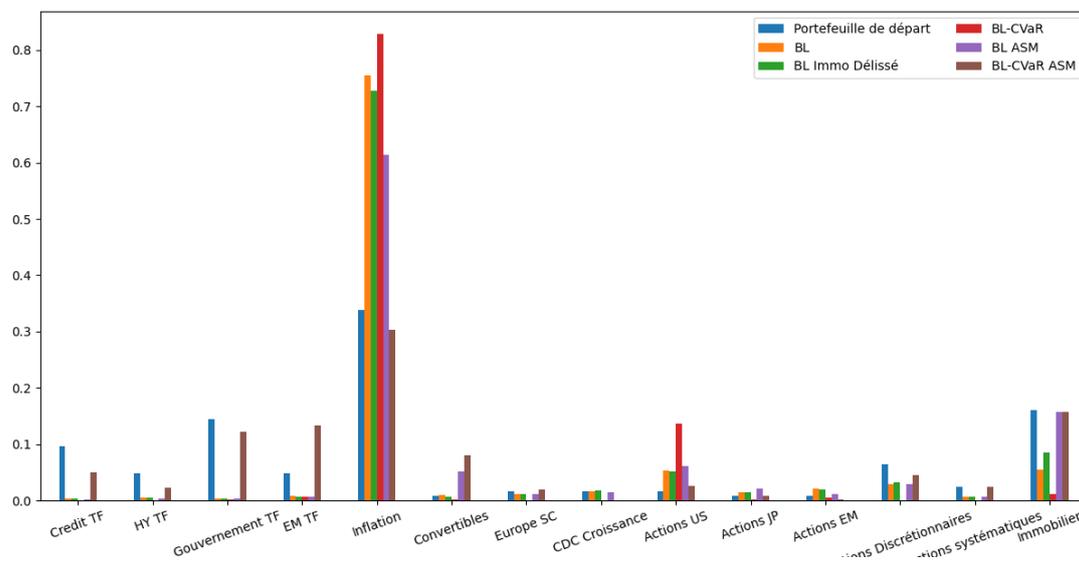


FIGURE 60 – Allocations avec et sans contraintes ASM

Les vues sont ici très voire trop bien représentées, cependant les modèles avec des contraintes ASM respectent bien les limites qui leur sont imposées et semblent trouver des allocations *alternatives* à la plus optimale mais qui ne répond pas aux limitations.

Le travail sur l'Immobilier peut voir ses conséquences sur les barres vertes et jaunes : il gagne un peu en poids avec une série davantage erratique. L'explication qu'il est possible de donner est qu'en le rendant plus erratique il peut avoir un gain diversifiant car réagit avec plus de différence que ses rendements de base. Cependant en appliquant des contraintes ASM, nous perdons l'intérêt de ces travaux car le poids de l'Immobilier dans le portefeuille est contraint à 20%.

Pour le second point, nous optons pour le choix d'un modèle $VAR(9)$ (optimal selon plusieurs critères) en nous assurant que les tests préliminaires soient corrects. A partir de cela nous obtenons des prédictions auxquelles nous attribuons une *confiance modèle* de 30% également.

En posant une base **test** de 32 mois et une base d'**entraînement** de 135 mois. A chaque itération nous faisons une projection en re-calibrant le modèle $VAR(9)$ sur les 135 dernières données disponibles puis projetons pour la prochaine période les rendements et considérons que ces *vues* sont d'une incertitude égale à notre incertitude de modèle associée à l'incertitude associée aux projections (la matrice de covariance des résidus). L'ensemble des contraintes que l'on soumet à l'optimisation d'un modèle donne les résultats suivants sur le modèle de Black-Litterman du 31/10/2019 au 31/05/2022 :

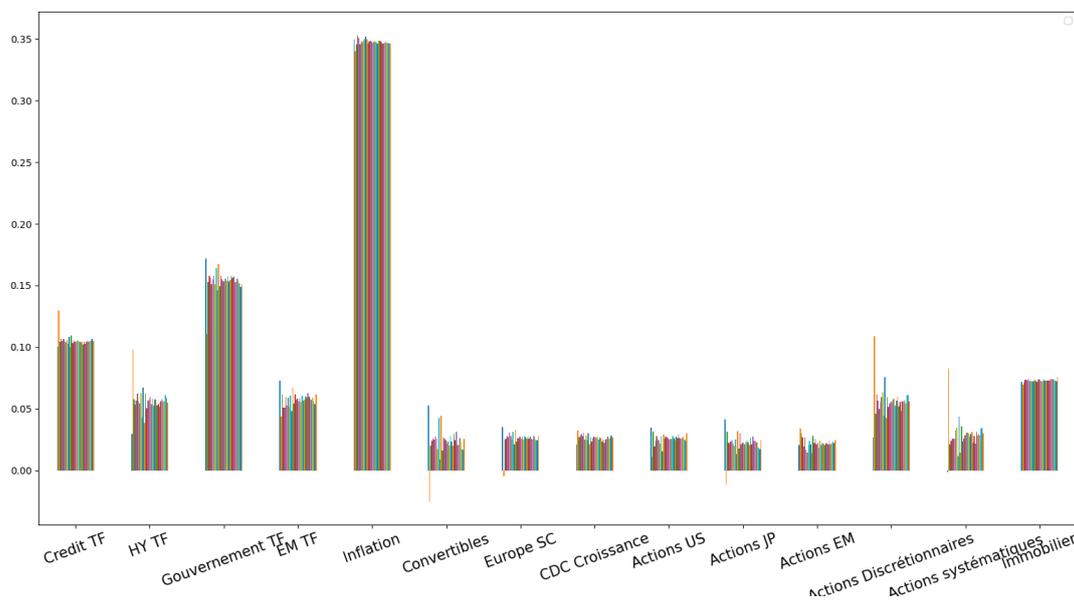


FIGURE 61 – Portefeuilles de Black-Litterman avec des contraintes ASM confiance 30%

Les allocations varient assez peu, peut-être trop peu. La classe *Actions* est la plus active, certains mouvements de portefeuille sont assez conséquents (proches des limites imposées) sur les *Actions Discrétionnaires*. De tels résultats offrent la possibilité d'avoir de légers changements tactiques d'un mois à un autre.

Un degré de confiance supérieur (70%) est utilisé en Annexe pour avoir une base de comparaison sur les mouvements associés à l'incertitude du modèle de séries temporelles.

Sur la base *test*, nous avons utilisé plusieurs modèles pour comparer les performances. Nous nous intéressons alors aux rendements de chacun d'eux Ils sont tous contraints à avoir des poids positifs mais comme nous pouvons l'admirer ci-dessous (plutôt page suivante encore une fois!), seuls les portefeuilles non-ASM sur-performent le portefeuille inchangé. Une fin **positive**!

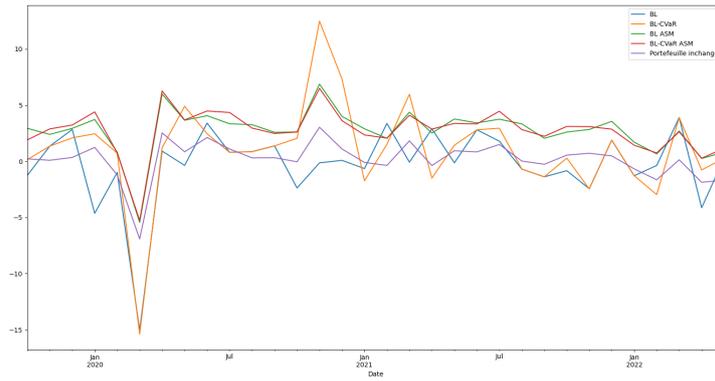


FIGURE 62 – Performance des portefeuilles avec vues $VAR(9)$ et confiance 30%

Remarque : La confiance de modèle est un moyen pour l'investisseur de donner sa réticence de modèle et de mouvements entre ses classes disponibles. S'il cherche à rester sur son socle d'allocation et faire des mouvements mineurs il accordera une faible confiance tandis qu'une plus élevée cherchera à **maximiser les positions tactiques**.

Conclusion

Ce mémoire avait pour but de couvrir le modèle de *Black-Litterman* sous beaucoup d'angles différents car même si le nom est connu, le modèle l'est moins. Bien qu'un temps assez court ait été accordé à la présentation des données et des bases, nous avons détaillé l'utilisation de chaque paramètre et leurs interprétations. L'utilisation de données uniquement tournées sur le marché *Actions* n'était probablement pas le plus aiguisé d'un point de vue allocation mais cela a justifié en contrepartie l'intérêt de certaines extensions.

Ces extensions ont été portées par l'envie d'utiliser un modèle d'allocation d'actifs comme un traducteur de nos pensées plutôt que comme un moyen d'être rentable. Il faut le voir comme une visite dans un magasin de pêche : si nous savons quel poisson nous souhaitons pêcher, le vendeur pourra nous conseiller sur le matériel nécessaire à condition qu'il nous comprenne correctement et qu'il soit vendeur.

L'utilisation de séries temporelles a été assez sommaire d'un point de vue technique et aurait probablement mérité davantage d'intérêt, cependant l'approche a été suffisante pour répondre à notre besoin. L'intégration d'une mesure de risque cohérente (au sens basique cette fois-ci) qui vient pénaliser seulement les mauvais risques était importante. Cette importance se retrouve dans la section dédiée au changement de distribution.

Il a été précisé qu'une partie des travaux menés le long de ces pages est purement expérimentale, c'était la condition pour atteindre la satisfaction de travailler sur un sujet. Certes les résultats ne sont pas les meilleurs mais ils répondent à des questions qui peut-être feront gagner du temps au lecteur.

L'application à une institution financière a permis d'apporter de la clarté dans les propos tenus tout au long de ce mémoire et de détailler les modalités d'utilisation du fameux modèle (le nom a été dit dix lignes plus haut c'est peut-être assez). Ajouter des actifs peu classiques a également été une expérience passionnante : voir si une théorie liée aux séries temporelles pouvait donner des résultats intéressants. L'ajout de multiples contraintes a permis de conclure sur l'utilisation d'une aide à la décision lorsque l'on cherche à investir des fonds avec une forte aversion au risque.

Pour finir cette conclusion, s'il fallait donner une réponse à la question "*Est-ce qu'il est possible de devenir riche avec le modèle de Black-Litterman avec l'ajout d'une CVaR, une distribution multivariée α -stable et des séries temporelles pour générer des vues ?*", nous proposons finalement deux réponses :

- Personnellement : "*Peut-être faut-il commencer par étudier ses propres besoins et son profil plus largement, à partir de cela il est possible que ce modèle alambiqué réponde à ces critères. Mais il est également envisageable que le modèle convenant le mieux soit le plus simple. Il n'y a pas de réponse à vrai dire !*"
- M. Jaouhar Mouldi (Responsable du Service Allocation de la Gestion d'Actifs de la Caisse des Dépôts et Consignations) : "*Au début, nous pensions qu'avec des connaissances scientifiques, en les mettant à la disposition de suffisamment de monde, on arriverait à mieux appréhender une solution des problèmes qui se posent. Nous sommes revenus de cette illusion. Nous pensons maintenant que la solution ne proviendra pas d'un supplément de connaissances scientifiques, d'un supplément de techniques, mais qu'elle proviendra d'un changement de civilisation.*"

Bibliographie

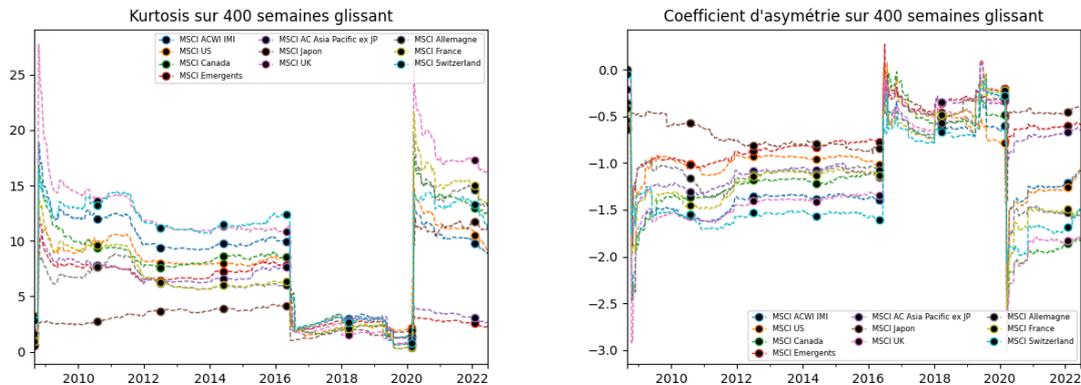
Références

- [1] Allaj E., 2013, The Black-Litterman model : A consistent estimation of the parameter tau, *Financial Markets and Portfolio Management, June 2013*
- [2] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., 1999, Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance Vol. 9*
- [3] Delfim J.C., Hoesli M., 2019, Robust Desmoothed Real Estate Returns, *Swiss Finance Institute, Research Paper Series N.19-32*
- [4] Dumouchel W. H., 1971, Stable Distributions in Statistical Inference
- [5] Geltner D., 1993, Estimating Market Values from Appraised Values without Assuming an Efficient Market, *The Journal of Real Estate Research, vol. 8, No. 3*
- [6] Giacometti R., Rachev S., Bertocchi M., 2007, Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation, *Quantitative Finance August 2007*
- [7] He G., Litterman R., 1999, The Intuition Behind Black-Litterman Model, *Goldman Sachs Quantitative Resources Group*
- [8] Huffer F. W., Park C., 2007, A test for Elliptical Symmetry, *Journal of Multivariate Analysis, 2007, vol. 98, issue 2, 256-281*
- [9] Idzorek T., 2004, A Step-by-step Guide to the Black-Litterman Model - Incorporating user-specified confidence levels
- [10] Jarque C. M., Bera A. K., 1987, A Test for Normality of Observations and Regression Residuals, *International Statistical Review, Vol. 55, No.2, Aug. 1987*
- [11] Ledoit M., Wolf M., 2001, Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection
- [12] Levy-Vehel J., Walter C., 2002, Les marchés fractals
- [13] Lizieri C., Satchell S.E., Wongwachara W., 2012, Unsmoothing Real Estate Returns : A Regime-Switching Approach, *Real Estate Economics, Vol. 40, Issue 4, 2012*
- [14] Majoros S., Zempléni A., 2018, Multivariate stable distributions and their applications for modelling cryptocurrency-returns
- [15] Martin J., 2010, Modélisation de Cours Boursiers par des Processus de Pareto-Lévy et Application à l'Allocation d'Actifs, *Memoire d'Actuaire*
- [16] McCulloch J. H., 1986, Simple consistent estimators of stable distribution parameters, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*
- [17] Meucci A., 2009, *Risk and Asset Allocation* (Springer)
- [18] Meucci A., 2010, The Black-Litterman Approach : Original Model and Extensions
- [19] Mohammadi M., Mohammadpour A., Ogata H., 2014, On estimating the tail index and spectral measure of multivariate α -stable distributions, *Springer*
- [20] Nolan J. P., Panorska A. K., McCulloch J. H., 2001, Estimation of Stable Spectral Measures, *Mathematical and Computer Modelling 34, 2001*

- [21] Nolan J. P., 2008, An overview of multivariate stable distributions
- [22] Samorodnitsky G., Ortobelli S., Rachev S., 2005, Computing the Portfolio Conditional Value-at-Risk in the Alpha-Stable Case
- [23] Sharpe W., 1963, A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, vol. 9, issue 2, 277-293
- [24] Stephan A., Ostermark R., Sahamkhadam M., 2022, Copula-based Black-Litterman portfolio optimization, *European Journal of Operational Research* 297
- [25] Therond P.-E., 2004, Mesures et comparaison de risques *Cours d'Assurance Non-Vie dispensé à l'I.S.F.A.*
- [26] Walters J., 2007, The Black-Litterman Model In Detail
- [27] Weide C., Heslen L., Xu W., 2020, Portfolio Model Under Fractal Market Based on MEAN-DCCA
- [28] Frontière Efficente : Captaineconomics.fr
- [29] Black-Litterman : Présentation et Démonstration (quantgestion.fr)

Annexe

Annexe A - Présentation des données utilisées

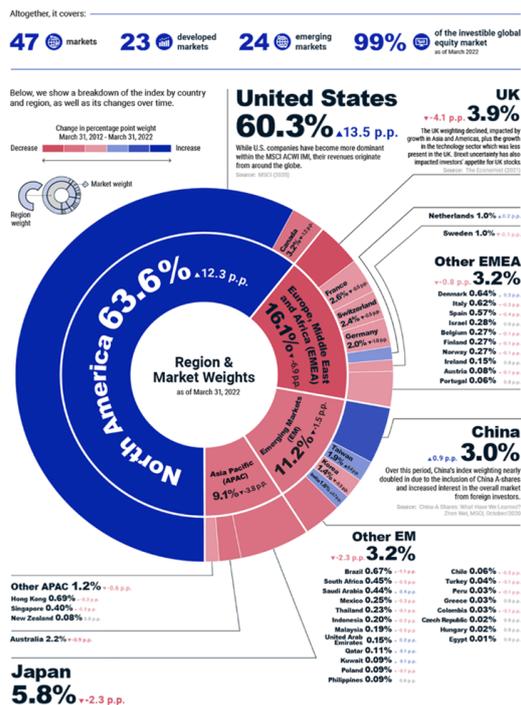


(a) Evolution coefficient d'aplatissement

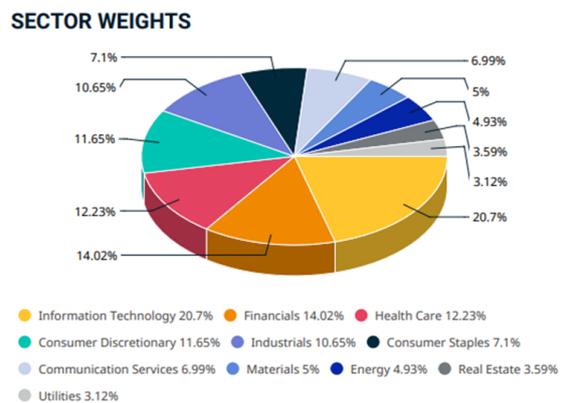
(b) Evolution du coefficient d'asymétrie

FIGURE 63 – Evolutions des paramètres d'asymétrie et de kurtosis des log-rendements

Informations détaillées sur le MSCI : source **par pays** et **par secteur**

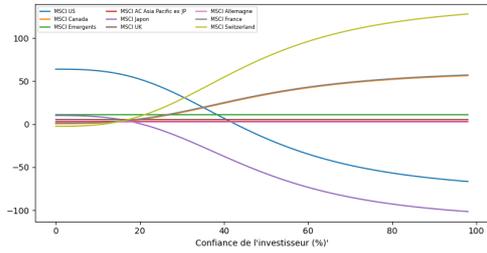


(a) Répartition par pays

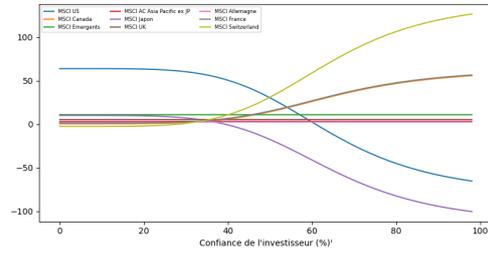


(b) Répartition par secteur

Annexe B - Ω , matrice d'incertitude

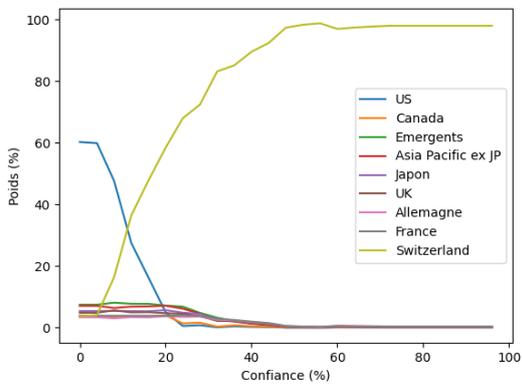


(a) transformation cubique

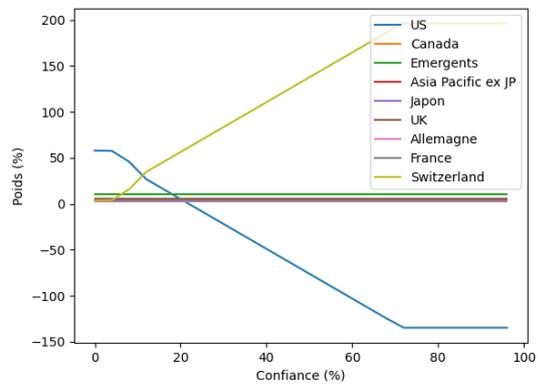


(b) Transformation puissance 5

FIGURE 65 – Evolution des allocation avec des puissances pour une transformation de la confiance c



(a) Avec contraintes



(b) Sans contraintes

FIGURE 66 – Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 1 (avec une anticipation deux fois plus importante)

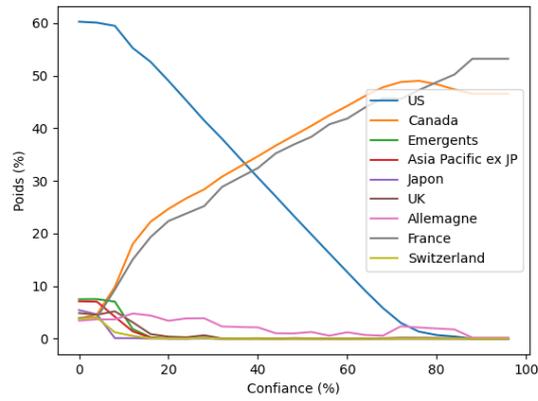
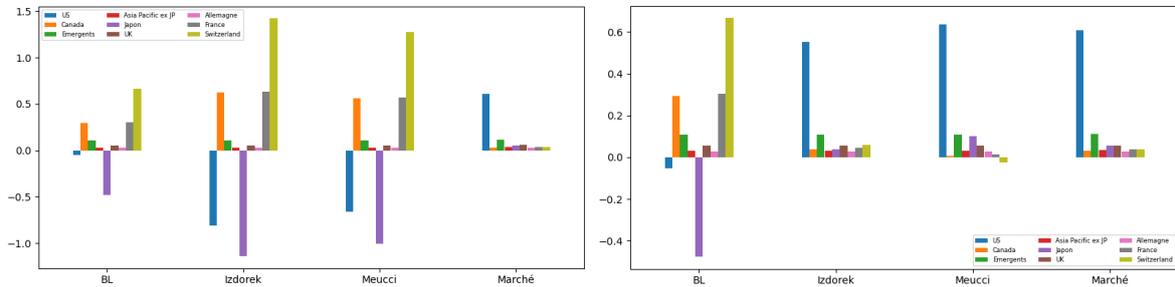


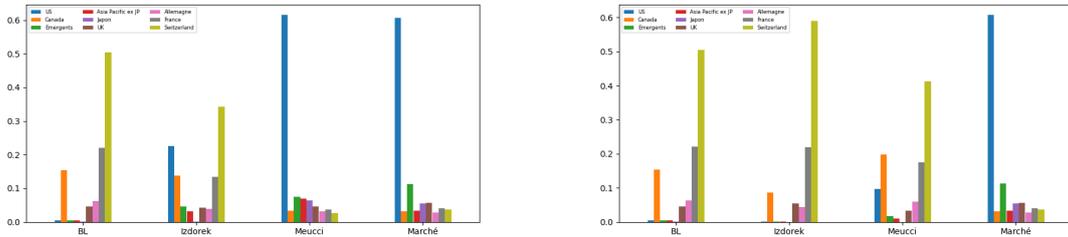
FIGURE 67 – Portefeuilles de Black-Litterman (Idzorek) en faisant varier la confiance associée à la vue 2 (avec une anticipation deux fois plus importante)



(a) Confiance 100%

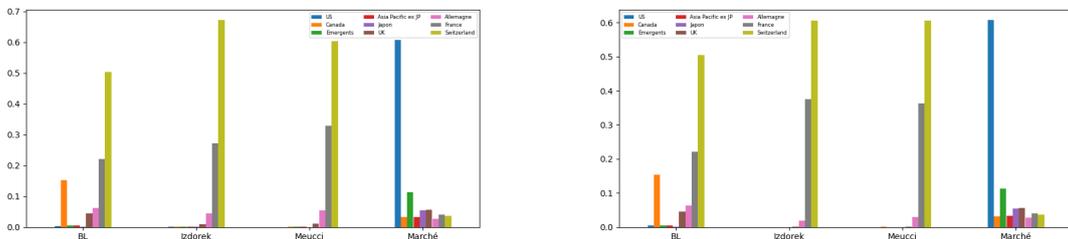
(b) Confiance 5%

FIGURE 68 – BL Idzorek confiance qui bouge sans contraintes



(a) Confiance 25%

(b) Confiance 50%



(c) Confiance 75%

(d) Confiance 100%

FIGURE 69 – BL Idzorek confiance qui bouge avec contraintes

Annexe C - Séries Temporelles

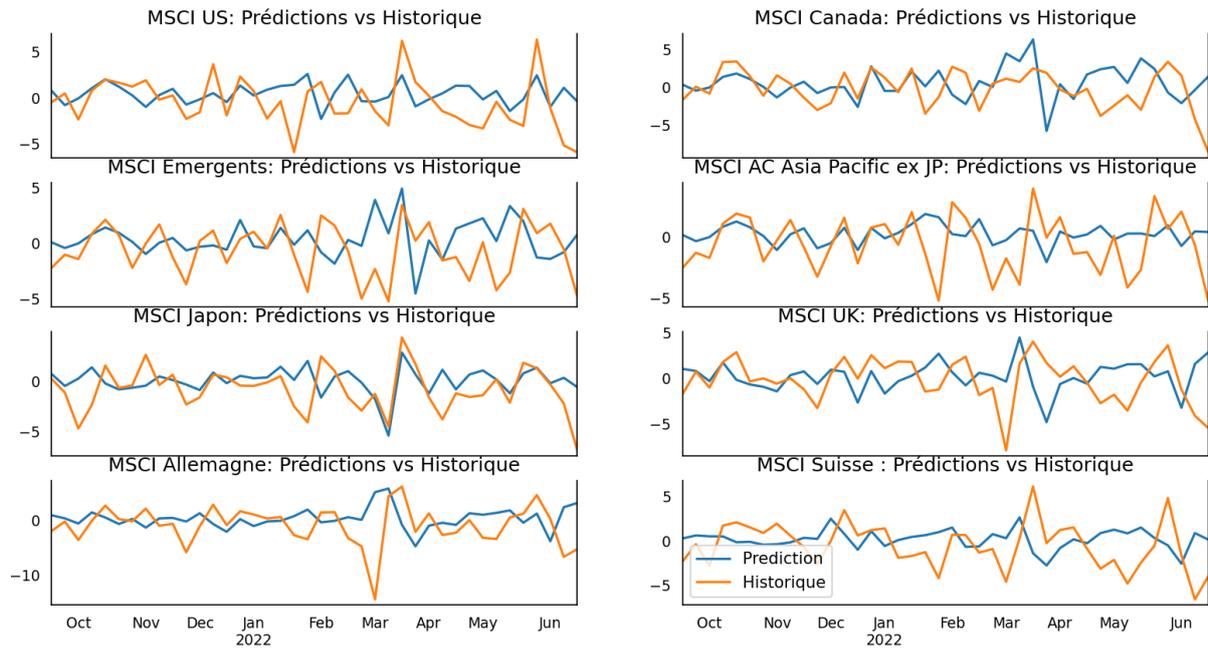


FIGURE 70 – Prédications à l'aide du modèle VAR(1) sur la période sept. 2021-juin 2022

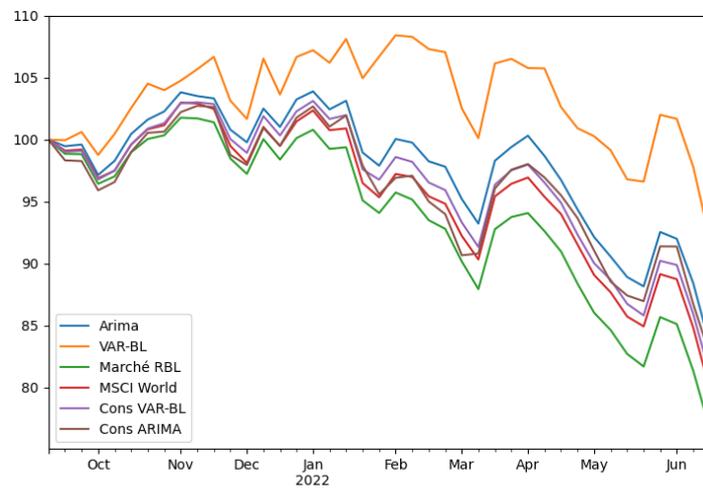


FIGURE 71 – Performance des modèles d'allocation à l'aide de séries temporelles (en base 100)

Sample size	Constant		Constant, trend		None	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%
25	-3.75	-3.00	-4.38	-3.60	-2.66	-1.95
50	-3.58	-2.93	-4.15	-3.50	-2.62	-1.95
100	-3.51	-2.89	-4.04	-3.45	-2.60	-1.95
250	-3.46	-2.88	-3.99	-3.43	-2.58	-1.95
500	-3.44	-2.87	-3.98	-3.42	-2.58	-1.95
∞	-3.43	-2.86	-3.96	-3.41	-2.58	-1.95

1% and 5% Critical values

The next step is for the stationarity of the variables taking their first differences. Again this involves testing the following hypothesis:

Ho: Series contains a unit root

H1: Series is stationary

FIGURE 72 – Table de Dickey-Fuller avec valeurs critiques

Annexe D - CVaR

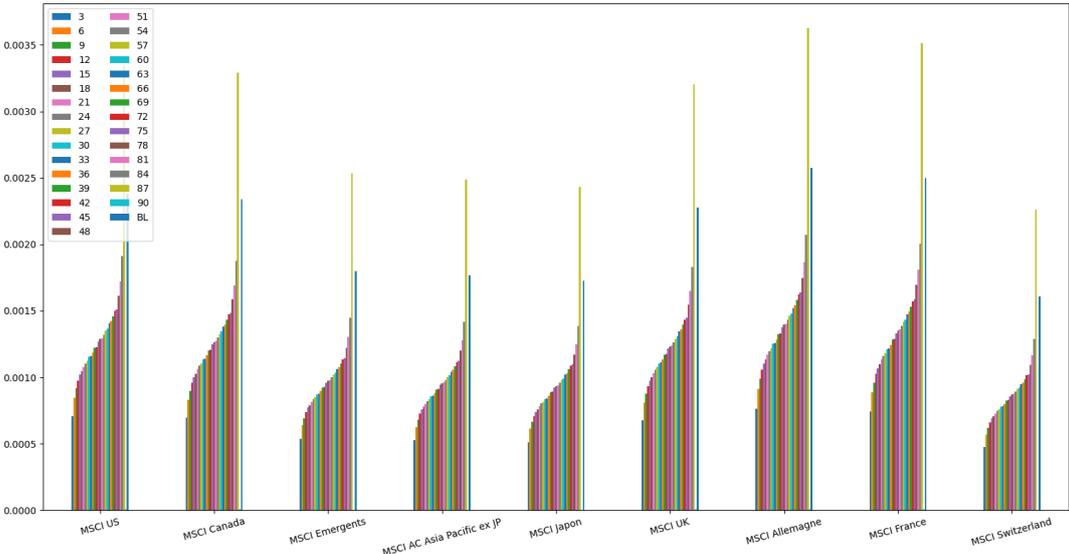


FIGURE 73 – Rendements d'équilibre *a priori*

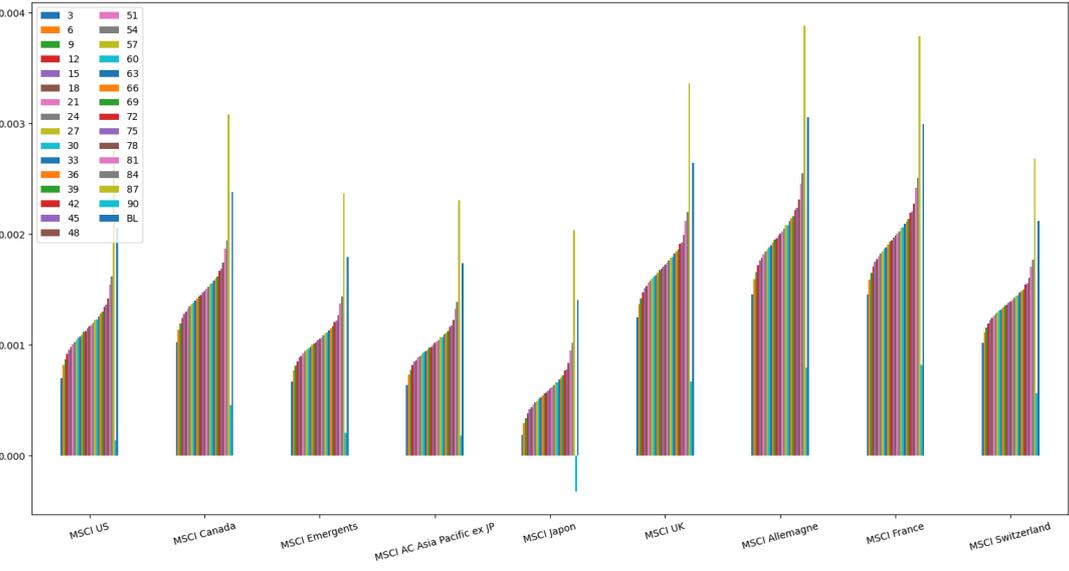


FIGURE 74 – Rendements *a posteriori*

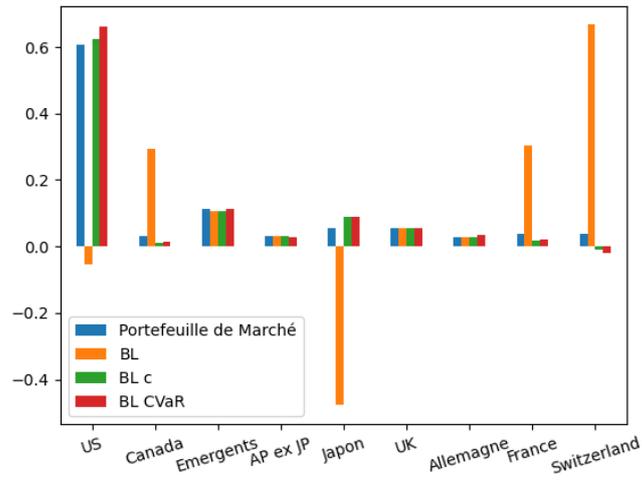


FIGURE 75 – Portefeuilles optimaux par optimisation $Rendement - CVaR_\alpha$ (confiance 10%)

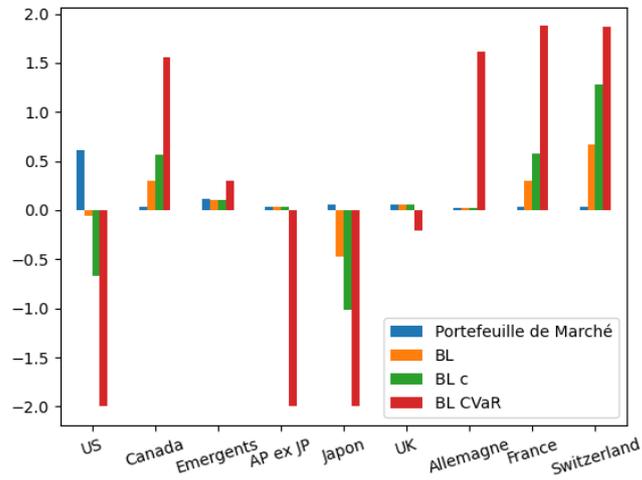


FIGURE 76 – Portefeuilles optimaux par optimisation $Rendement - CVaR_\alpha$ (confiance 99%)

Annexe E - Distributions α -stables

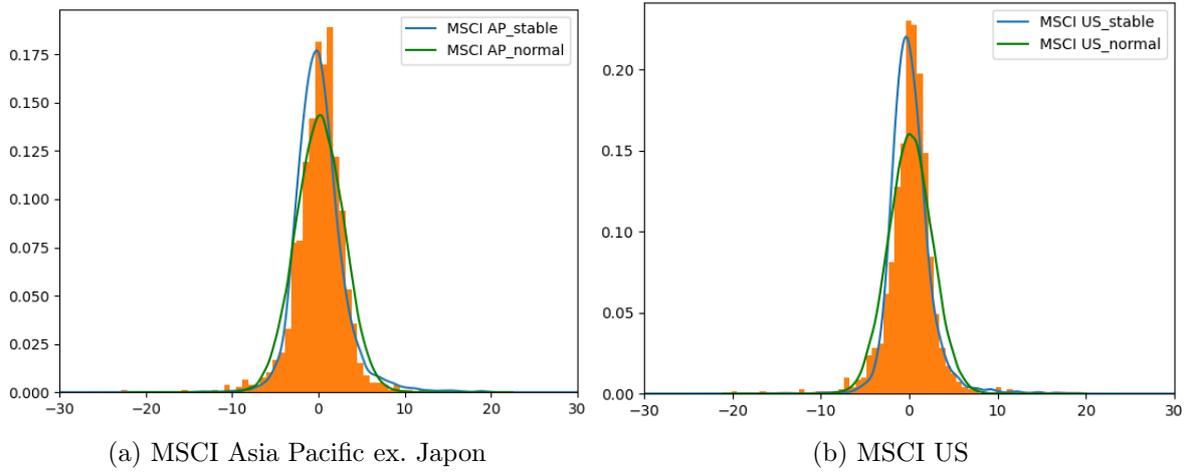


FIGURE 77 – Comparaison entre estimations α -stable et gaussienne (estimation multivariée projetée en univarié) - Partie 1

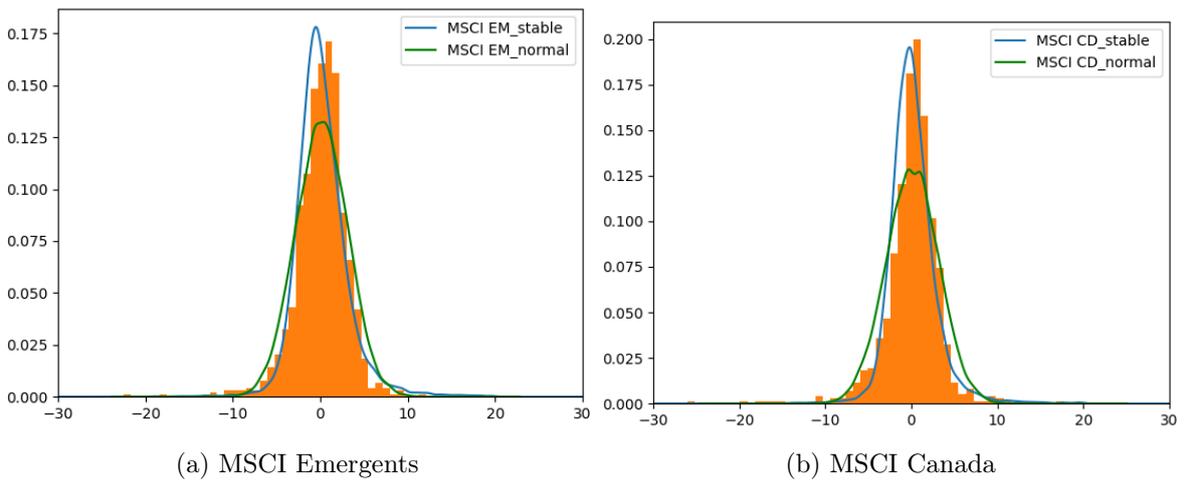


FIGURE 78 – Comparaison entre estimations α -stable et gaussienne (estimation multivariée projetée en univarié) - Partie 2

Annexe F - Portefeuilles Caisse des Dépôts

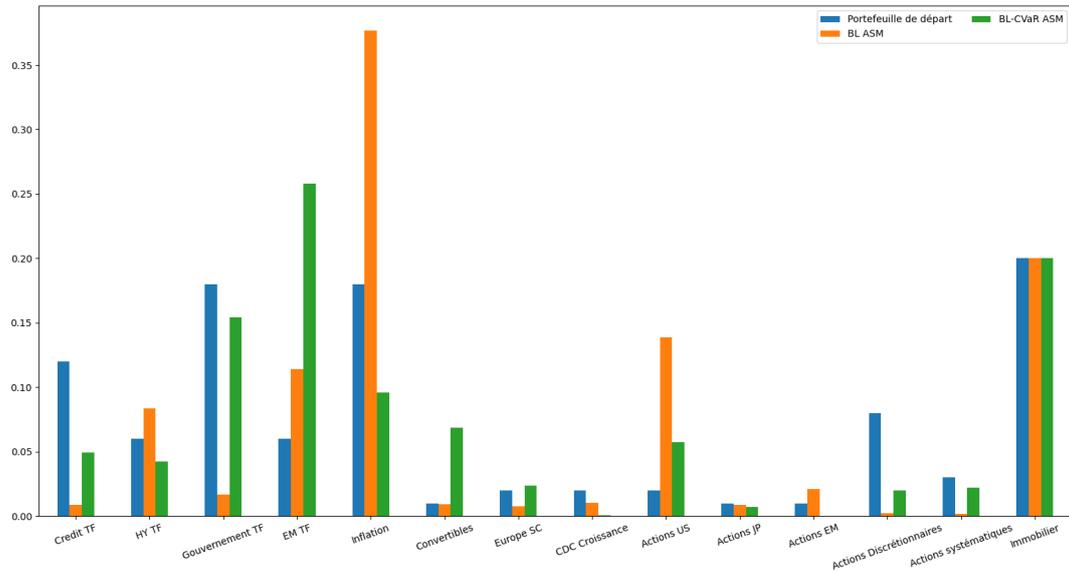


FIGURE 79 – Portefeuilles proposés avec une souplesse de 20% de variation

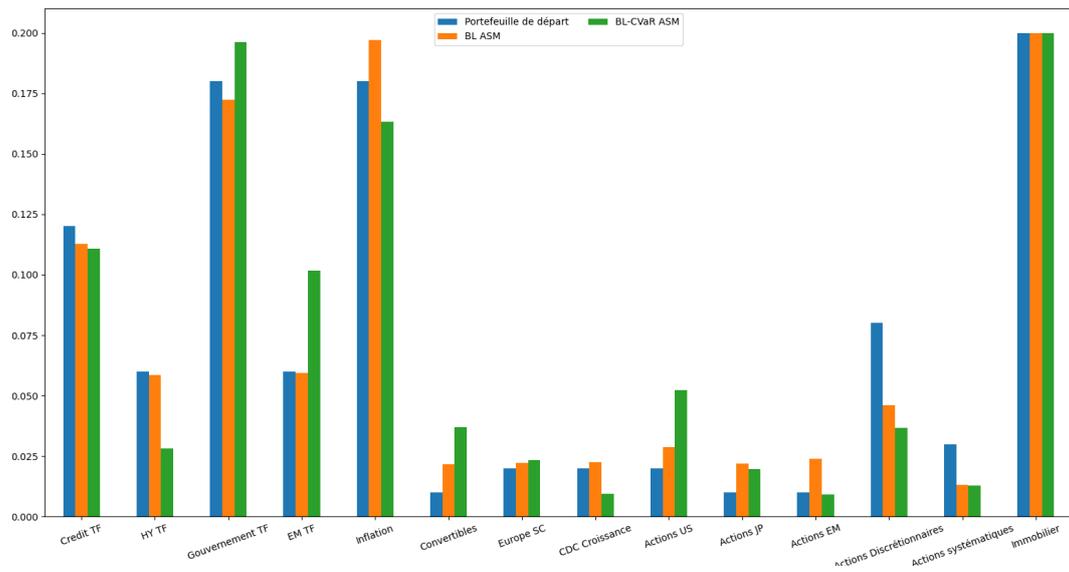


FIGURE 80 – Portefeuilles de Black-Litterman avec des limites de variation de 5%

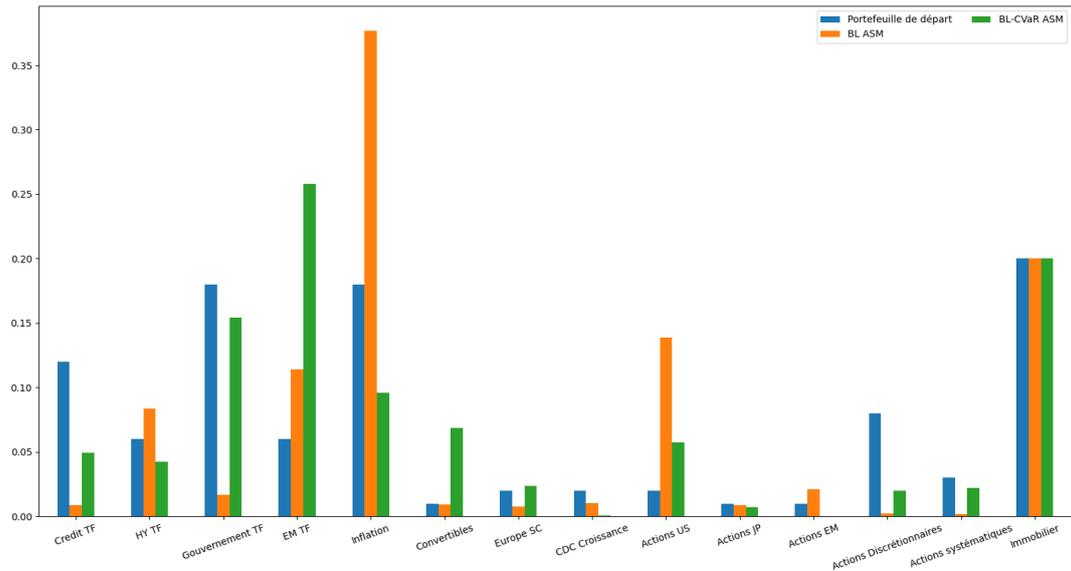


FIGURE 81 – Portefeuilles de Black-Litterman avec des limites de variation de 20%

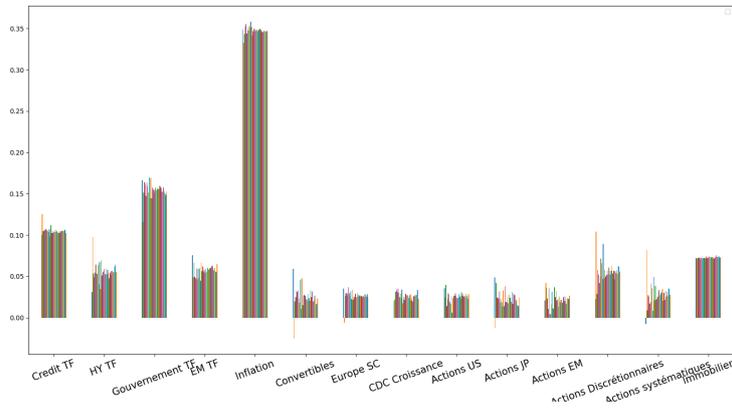


FIGURE 82 – Allocations optimales avec contraintes ASM et confiance de modèle de 70%

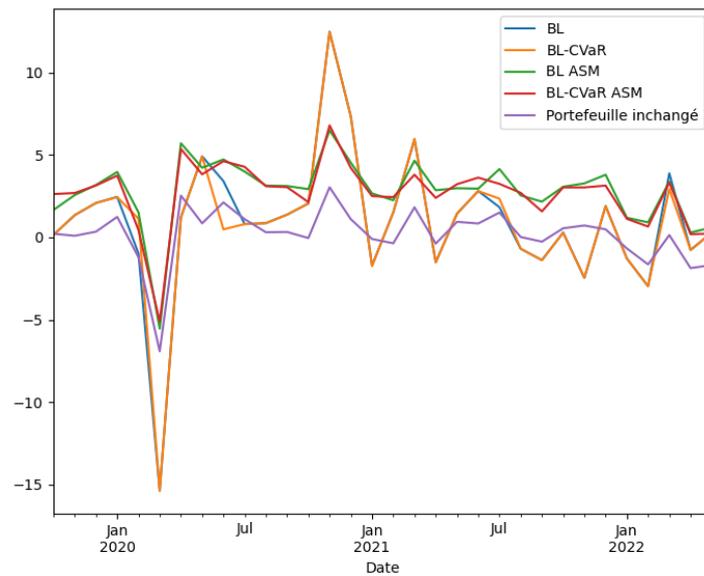


FIGURE 83 – Performance des portefeuilles avec vues $VAR(9)$ et confiance 70%

Annexe G - Matrice de Covariance

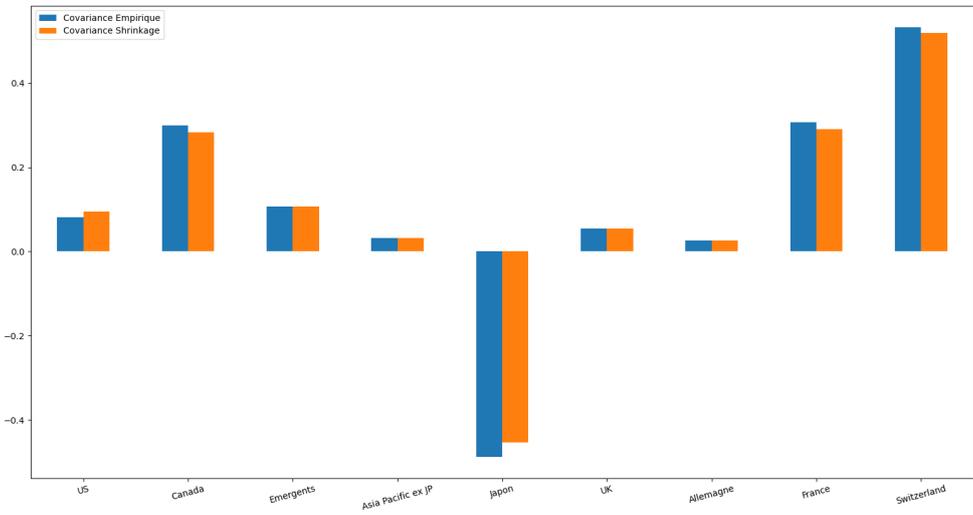


FIGURE 84 – Différences d'allocation en fonction de la spécification de la matrice de covariance sur un échantillon d'estimation de 40 observations