

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Madame / Monsieur Allais Noé	
Titre du mémoire : Problématique de la dimension stochastique de la prime et des frais dans le calcul du SCR brut pour un modèle interne	
Confidentialité : <input type="checkbox"/> NON <input checked="" type="checkbox"/> OUI (Durée : <input type="checkbox"/> 1 an <input checked="" type="checkbox"/> 2 ans)	
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.	
<u>Membres présents du jury de la filière :</u>	Signature : <u>Entreprise :</u> <i>Generali Franco</i>
	Nom :
	Signature :
	<u>Directeur de mémoire en entreprise</u>
<u>Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :</u>	Signature : Nom : <i>BRESSON Pierre</i>
	Signature : 
	<u>Invité :</u>
	Nom :
	Signature :
	Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)
	<u>Signature du responsable entreprise :</u>
	
	<u>Signature du candidat :</u>
	

**MÉMOIRE D'ACTUARIAT
PROBLÉMATIQUE DE LA DIMENSION
STOCHASTIQUE DE LA PRIME ET DES
FRAIS DANS LE CALCUL DU SCR BRUT
POUR UN MODÈLE INTERNE**

ALLAIS NOÉ

ISUP M2 ACTUARIAT

SEPTEMBRE 2021 - AOÛT 2022

Résumé

La réglementation européenne Solvabilité II, l'équivalent réglementaire des réformes *Bâle*, vient poser un nouveau cadre réglementaire pour les assureurs. Cette directive impose aux assureurs de déterminer un SCR qui représente le capital économique à constituer afin de limiter la probabilité de ruine à un an à maximum 0,5%.

La directive propose une manière standard afin d'évaluer ce capital économique mais elle permet aussi aux entreprises d'assurance de créer leur propre modèle afin d'obtenir un SCR le plus adéquat possible aux risques de celles-ci. La méthode d'estimation de ce montant est cruciale, en effet, une sous-évaluation de celui-ci ferait encourir un risque plus élevé de ruine à l'entreprise. A l'inverse, une sur-estimation du SCR mènerait l'entreprise à immobiliser plus de capital que nécessaire ce qui réduirait les investissements potentiels de l'entreprise.

C'est ainsi que *Generali France* a opté pour la création d'un modèle interne afin d'adapter le calcul du SCR aux spécificités de son profil de risque. Comme tout modèle, le modèle interne de *Generali* se base sur des hypothèses plus ou moins contraignantes afin de ne pas avoir une complexité trop grande tout en représentant correctement les différents risques de *Generali*. Certaines d'entre elles peuvent être remises en question par l'ACPR et elle peut ainsi demander une étude d'impact : c'est le cas des primes et frais futurs considérés comme déterministes lors du calcul du SCR de prime et de catastrophe.

Pour l'ACPR, cette hypothèse devrait mener à une sous-estimation du capital réglementaire. De ce fait, l'objectif de ce mémoire a été de prendre en compte la volatilité sur les primes et frais futurs pour le calcul du SCR prime et catastrophe dans le but d'observer son impact sur le SCR de GIARD.

Pour prendre en compte l'incertitude sur les primes et les frais, nous avons utilisé le principe de simulation dans simulation c'est-à-dire que nous avons réalisé plusieurs scénarios de primes et de frais pour chaque simulation de sinistres. De plus, les lois utilisées ont été calibrées par une méthode analogue à ce que propose *Generali France* pour la modélisation de ses sinistres futurs. D'ailleurs, lors de la phase de calibration, nous avons cherché à prendre en compte les différentes dépendances entre les frais, primes et sinistres par le biais de copules.

Mots-clés : Mémoire, Modèle interne, Solvabilité 2, Actuariat, SCR de prime, SCR de catastrophe, Copule, Dépendances.

Keywords : Master's Thesis, Intern Model, Solvability 2, Actuarial Sciences, SCR Premium, SCR Catastroph, Copula, Dependencies.

Abstract

The European regulation Solvability II voted in 2008 drastically changed the insurance company's regulatory framework. Indeed, this European directive imposes the calculation of the SCR to insurance companies. The SCR represents the economic capital an insurer must have to reduce its probability of financial ruin to 0.5%.

This directive suggests two ways to calculate the SCR; the first one is a standard formula and the second one is a creation of an intern model to better fit the company's risks. A good estimation of the SCR is crucial because an under-estimation will increase its risk of financial ruin and a sur-estimation will tie up too much money then reduce the profitability of the company.

As the formula standard isn't good enough to reflect its risk's profile, *Generali France* decided to make its own model. As all model, the intern model of *Generali France* uses some restrictive hypothesis to find a balance between complexity and good fitting.

Some hypotheses can be too risky so the ACPR can ask for a quantitative study in order to determine if the company underestimate significantly its SCR. Indeed, *Generali France* considers its future premiums and future expenses as deterministic in the calculation of the premium risk and catastrophe risk.

According to the ACPR, the hypothesis would lead to an under-estimation of its capital's requirement. Therefore, the aim of this master's thesis was to weight the impact of stochastic premiums and expenses up.

To take the volatility of the premium and expense, we used the principles of the simulation in simulation's model. That is to say that for each simulation of claim, we have simulated several scenarios of premium and expense. The same methodology used for the claim's modelisation was used for the choice and the calibration of premium and expense's distributions. Moreover, we tried to get dependencies of premium, claim and expense through copulas.

Mots-clés : Mémoire, Modèle interne, Solvabilité 2, Actuariat, SCR de prime, SCR de catastrophe, Copule, Dépendances.

Keywords : Master's Thesis, Intern Model, Solvability 2, Actuarial Sciences, SCR Premium, SCR Catastroph, Copula, Dependencies.

Note de synthèse

La directive Solvabilité 2 impose aux assureurs le calcul, et l'immobilisation, d'un capital réglementaire afin de réduire son risque de ruine à 1 tous les 200 ans soit une probabilité de 0,5% de faire faillite dans l'année considérée. Ce montant est nommé *Solvency Capital Requirement* (SCR). Son calcul peut soit se faire par le biais d'une méthode, appelée formule standard, proposée par la directive soit par un modèle interne créé par l'entreprise d'assurance sous réserve d'une validation par l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR).

Solvabilité 2 identifie une liste exhaustive des risques auxquels les assureurs sont soumis, nous distinguons notamment les risques de souscription non-vie. Ceux-ci concernent les risques liés à une inadéquation des hypothèses utilisées lors de la tarification et du provisionnement des produits non-vie. Nous pouvons d'ailleurs les subdiviser en plusieurs sous-catégories tels que les risques de catastrophes et de primes auxquels nous nous intéresserons dans le cadre de ce mémoire.

Le risque de prime concerne le péril lié au résultat technique futur. Effectivement, il représente le risque que les dépenses de l'année subséquente c'est-à-dire les sinistres et les frais soient supérieures aux primes collectées sur cette même année. Le risque de catastrophe peut s'apparenter au risque de prime ; la différence se situe dans la nature des sinistres. En effet, dans celui-ci nous considérons des sinistres avec une plus faible fréquence mais avec une volatilité beaucoup plus élevée sur les coûts.

La directive apporte aussi une nouvelle segmentation appelée ligne d'activité. Celle-ci est la maille minimale à laquelle une entreprise d'assurance doit évaluer ses risques. Elle permet d'obtenir des groupes de risques homogènes permettant une évaluation fiable de ceux-ci.

Dans la formule standard, les risques de primes et de réserves sont évalués ensemble ; ce qui n'est pas le cas dans le modèle interne de *Generali France*. Pour calculer l'exigence de capital au titre des périls liés aux primes et réserves, la formule standard propose une formule fermée. En effet, le SCR est égal au volume de primes et réserves multiplié par 3 fois son écart-type. Ce dernier est donné par ligne de business en Annexe II du Règlement Délégué. Le risque de catastrophe se divise en plusieurs sous-risques : catastrophe naturelle, catastrophe en réassurance dommage non-proportionnelle, catastrophe d'origine humaine et autres catastrophes. Chacun d'entre eux se calcule par région en appliquant deux scénarios stressés et en gardant celui nécessitant le plus de SCR.

Étant donné que cette manière d'évaluer le SCR prime et catastrophe ne reflète pas son profil de risque, *Generali France* a mis en place un modèle interne. Tout d'abord, il est à noter que, dans ce modèle, les risques de primes et de catastrophes sont évalués de la même manière. Le processus suivi pour déterminer le capital réglementaire pour ces risques peut se résumer en les quelques étapes suivantes :

- **Un traitement de nos données.** Dans cette première étape, une séparation des sinistres en trois catégories (attritionnels, larges et catastrophes) est effectuée et les données sont mises en *as-if*. Puis, nous projetons les sinistres à l'ultime en utilisant la méthode des *link ratio*.

- **Calibration des lois de la sinistralité.** Dans cette étape, différentes lois statistiques vont être testées afin de trouver celle correspondant le mieux à la sinistralité observée.
- **Une évaluation du SCR brute.** Les lois calibrées précédemment sont utilisées afin de simuler 50000 simulations de résultat technique pour l'année subséquente où seule la sinistralité est stochastique. Le SCR est évalué comme la moyenne moins le quantile 0,5% de la distribution du résultat technique.
- **Une évaluation du SCR nette.** Les divers traités de réassurance sont appliqués afin d'obtenir les primes et sinistres cédés, le montant des commissions et des primes de reconstitution. Le résultat technique net peut ainsi être calculé et le SCR net est calculé de la même manière que le brut.

Après avoir analysé le modèle actuel de *Generali France*, nous remarquons des limites. Effectivement, les primes et les frais futurs sont considérés comme déterministes et, comme l'a remarqué l'ACPR dans une de ses observations ; cela amène à négliger une partie de la volatilité du résultat technique. Étant donné que nous ajoutons uniquement de la volatilité, seule la *Value At Risk* devrait être modifiée. De fait, cette hypothèse sous-estime le SCR.

L'objectif est donc d'évaluer à quel point *Generali France* sous-estime son risque afin de savoir si un changement de modèle serait nécessaire.

Tout d'abord, en comparant les estimations des primes et frais avec leurs réalisations, nous remarquons effectivement des écarts sur les différentes lignes d'activité. Ces écarts ne sont pas uniquement présents sur des lignes de business à faibles volumes : nous les constatons même sur *Fire* qui est la ligne d'activité dominante de *Generali IARD* (1).

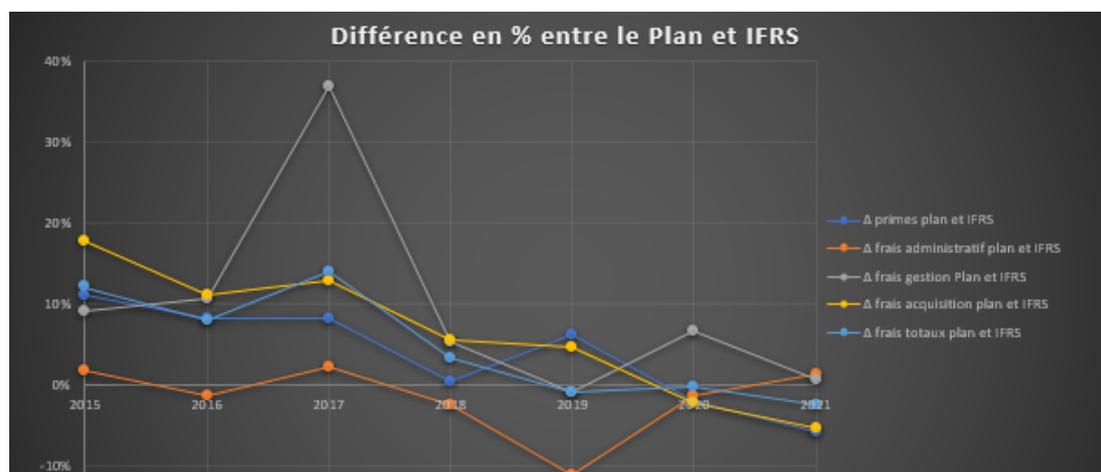


FIGURE 1 – Écart *versus* réalisé pour la *LoB Fire*

Le processus suivi pour l'intégration des primes et frais stochastiques suit la même logique que le modèle actuel.

Nous commençons par un retraitement de nos données : une élimination des données aberrantes et une mise en *as-if* sont effectuée afin d'utiliser des données cohérentes, homogènes lors de la modélisation.

Nous poursuivons sur une analyse des dépendances entre les frais d'acquisition (resp. gestion) et les primes (resp. sinistres) dans le but de calibrer des copules. Les copules permettent de modéliser au mieux les dépendances entre ces variables. Pour estimer les paramètres des copules, nous avons utilisé la méthode d'inversion du tau de Kendall. Cependant, afin d'être prudent, nous avons fixé un taux plancher car une seule donnée peut entraîner une sous-estimation de la dépendance du fait du peu d'historiques. Ce taux plancher a été déterminé comme le maximum entre 0 et le coefficient de Pearson.

Ensuite, nous ajustons des distributions de probabilité sur les données empiriques pour pouvoir faire des simulations par la suite. Nous avons fait le choix de prendre une loi log-Normale pour toutes les lignes d'activité. Cette loi permet d'obtenir une queue de distribution plus lourde qu'une Gaussienne classique sans pour autant trop sur-estimer le risque.

Une fois l'étape de calibration terminée, nous pouvons simuler une distribution du résultat technique. Pour cela, nous appliquons le principe du modèle de simulation dans simulation. En effet, pour chacune des 50000 simulations de sinistres nous allons réaliser plusieurs simulations de primes et de frais (voir 2).

Nous simulons 5 réalisations de primes et frais par simulation de sinistre ce qui nous permet d'obtenir une distribution de 250000 résultats techniques. Celle-ci nous permet de calculer le SCR de primes et de catastrophes en soustrayant la *Value at Risk* 0,5% de la distribution du résultat technique à son espérance.

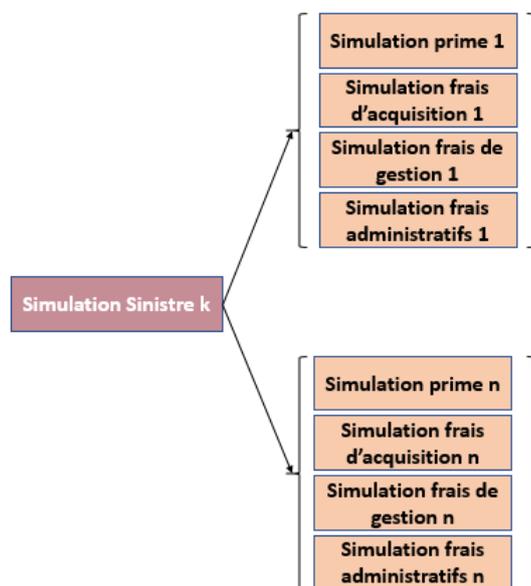


FIGURE 2 – Simulation dans simulation

Nous obtenons ainsi une augmentation des SCR de la plupart des ligne de business et nous constatons un impact de plus de 2% sur la somme non diversifiée.

	SCR		Impact
	Primes stochastiques	Sans primes stochastiques	
Income protection	20 773 156,82	2 564 547,40	710%
Motor vehicle liability	153 000 638,42	152 104 802,58	0,59%
Other motor	67 062 590,65	59 490 649,84	12,73%
Marine, aviation and transport	217 258 110,71	214 508 389,75	1,28%
Fire and other damage to property	654 450 872,71	655 292 206,38	-0,13%
General liability	96 795 925,15	94 779 746,54	2,13%
Somme SCR standalone	1 209 341 294,47	1 178 740 342,50	2,60%

FIGURE 3 – Impact au brut

Par la suite, nous cherchons un procédé pour intégrer les traités de réassurance : soit une application proportionnelle au SCR total soit une où nous ajustons les scénarios de réassurance sur les réalisations de primes. Bien qu'ayant des défauts, la seconde méthode semble être la plus adaptée.

Enfin, avec les données de réassurance, nous pouvons obtenir une distribution du résultat technique net et calculer le SCR net de la même manière que le brut. Cependant, notre étude s'effectuant à une maille moins fine que celle utilisée dans le modèle; nous avons du chercher un moyen de répliquer les différents effets de diversification et d'absorption de taxe. Cette méthode a été, dans un premier temps, testée sans les primes et frais stochastiques afin de s'assurer de son efficacité (écart inférieur à 0.02% avec les résultats officiels) puis nous l'avons appliquée sur nos travaux.

Ainsi l'implémentation des primes et frais stochastiques entraîne une augmentation de 1% du SCR total ce qui est significatif mais insuffisant pour justifier un changement de modèle.

Standalone by Risk		
FR001	YEO 21 avec Excel	YEO 21 avec primes/frais stochastiques
Financial	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7
Non Life UW	419,4	429,4
Cat	87,7	92,5
NL Lapse	2,2	2,2
Pricing	155,1	163,5
Reserve	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9
SCR as SUM	966,3	976,3
Diversification Benefit	-235,5	-237,9
% Diversification	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	732,3	739,9
Tax Absorption	179,3	179,3
% Taxes	24,5%	24,2%
SCR	553,0	560,6
Model adjustment Financial	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23
SCR	754,7	762,3
Variation		1,01%

FIGURE 4 – Comparaison SCR

Il est à noter que les différents montants de SCR ont été modifiés par soucis de confidentialité.

Pour finir, nous avons effectué des tests afin de voir la sensibilité du modèle aux différentes hypothèses que nous avons faites. Il en ressort quelques conclusions :

- Nous pourrions arrondir les paramètres des copules à la dizaine supérieure pour avoir plus de lisibilité sans avoir un grand impact sur le SCR.
- Le choix d'une loi log-Normale pour la modélisation des primes et des frais n'a pas un grand impact sur le SCR
- Cinq simulations de primes et de frais semblent suffisantes pour avoir un résultat stable à chaque lancement du modèle.

Il pourrait être intéressant de continuer l'étude menée à une maille plus petite afin de pouvoir appliquer les traités de réassurance.

Executive Summary

As Solvency II is applicable insurers have to hold an economical capital to lower its bankruptcy's odds to one every bicentenary. It's the *Solvency Capital Requirement* (SCR). It can be either determined by a standard formula which is enounced in the Commission delegated regulation or by an intern model created by the insurer subject to the validation by the national regulator.

This european regulation gives a list of all hazard insurers are exposed. For instance, we denote the non-life underwriting's risk which is the risk of the utilisation of unsuitable hypothesis during reserving or pricing. This risk is divided in several unit like the pricing or the catastroph hazard.

There is a risk that premiums will not be enough to pay claims and expenses of the next year : it's the premium's hazard. The only difference between CAT and premium's risk is the nature of their claims. Indeed, catastroph's one has bigger volatility on cost and lower frequency.

It also bring a new segmentation which is the biggest an insurer can use for its risk's estimation. It's named line of business and it permits an homogeneous split of its risks.

The premium and catastroph risk are estimate together in the standard formula which is not the case in the intern model of *Generali France*. To evaluate the SCR of premium and reserve the directive gives a close formula. Indeed, it can be calculate as 3 times the volume of premium and reserve times its standard deviation which is given by line of business in the Annex II of the Commission delegated regulation. The CAT peril is divided in several module : natural catastroph, catastroph in non-proportionnal damage reinsurance, man-made catastroph and "other catastroph". We have to simulate 2 scenarios for each of these module per region and we keep the worst in terms of SCR.

As this formula didn't reflect its risk profil *Generali France* use an intern model. It should be that catastroph and premium SCR follow the same methodology which is :

- **Data processing.** We sort claims by categories : attritionnal, large and catastroph. Then we put data in as-if and we project claims to their ultime using link ratio's method.
- **Calibration of the claim's distribution.** We are looking for the distribution which have the best fit on empirical data.
- **Estimation of the gross SCR.** We use previous selected distributions to create 50,000 simulations of the future technical result ; by the way, only claims aren't determinist. Then we can estimate the SCR as the mean of technical result's distribution minus its 0.5% centile.
- **Estimation of the net SCR.** We have to calculate a distribution of the net technical result by carriing reinsurance treatis out. Then we can estimate the net SCR in the same way as the gross' one.

After an analysis of the intern model, we can point out several limits. Indeed we consider the futur premium and expense as determinist and this hypothesis lead to an underestimation of the volatility of the technical result. As we only add some uncertainty and *a priori* only the *Value at Risk* should change. Hence, this hypothesis should underestimate the SCR.

The aim of this master's thesis is to evaluate to what extent *Generali France* underestimate its risk and to know if a model change is required.

We can notice gaps between expectations of future expense/premium and their realisation on all LoB. We could think that is only for LoB with low volume but it is also true for the higher one. Indeed, we have some significantly gap on Fire which is the biggest line of business *Generali IARD* (5).

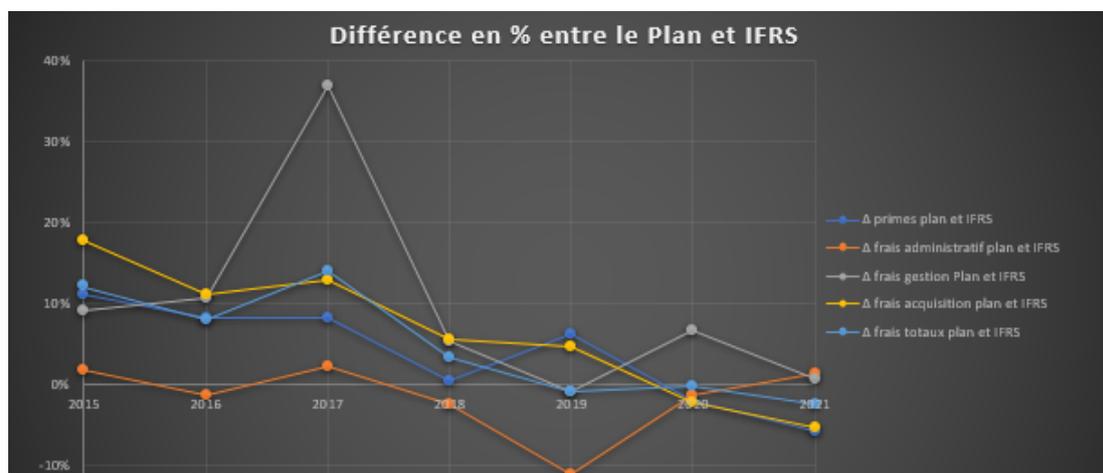


FIGURE 5 – Expected *versus* realised for LoB Fire

We followed the same logic of the actual model to implement stochastic premium/expense.

To begin with, we have to pre-process the data : we excluded outliers and put data is as-if. The goal is to have homogeneous and accurate data for the modelisation.

Then, we did a study on dependencies between acquisition (resp. management) cost and the amount of premium (resp. claims) in order to calibrate copula's parameter. Copulas is the better way to modelise dependancies between variables. We used the method of the inversion of the Kendall's tau to estimate these paramters. Given the lack of data, one outlier can have a significantly impact on the estimation so we fixed a floor rate to be conservative. This rate is the maximum between 0 and the Pearson's coefficient.

As for the claims, we fit statistical distribution on empirical data. We have take the log-Gaussian distribution for all lines of business because it had a heavier tail than a Gaussian without highly over estimate the risk.

Once we fitted all distributions, we can simulate a distribution of the technical result by using the simulation in simulation's model. For each 50,000 simulations of claim, we realise

some simulation of premium and expense. (6).

We simulated 5 realisation of premium and expense per claim's simulation. Then we have a distribution of 250,000 technical results so we can calculate the SCR in the same way as in the actual model.

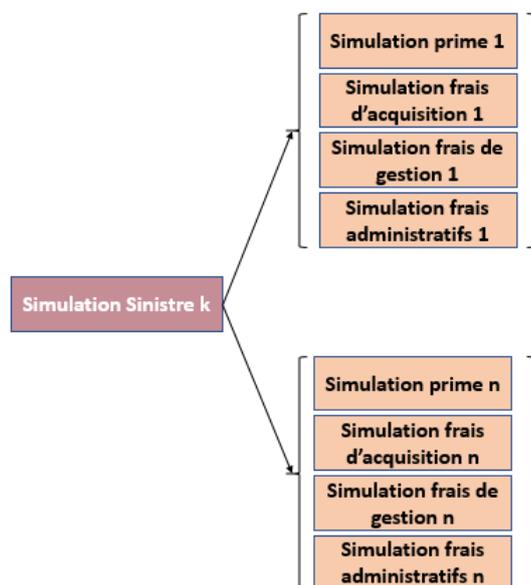


FIGURE 6 – Simulation in simulation

We notice an increase of the gross SCR for almost all lines of business and a rise of 2.6% for the sum *standalone*.

	SCR		Impact
	Primes stochastiques	Sans primes stochastiques	
Income protection	20 773 156,82	2 564 547,40	710%
Motor vehicle liability	153 000 638,42	152 104 802,58	0,59%
Other motor	67 062 590,65	59 490 649,84	12,73%
Marine, aviation and transport	217 258 110,71	214 508 389,75	1,28%
Fire and other damage to property	654 450 872,71	655 292 206,38	-0,13%
General liability	96 795 925,15	94 779 746,54	2,13%
Somme SCR standalone	1 209 341 294,47	1 178 740 342,50	2,60%

FIGURE 7 – Impact on gross SCR

To continue, we search a way to consider the reinsurance. The first one is to use a "gross to net" ratio on the standalone sum of gross SCR and the second one is to adapt each scenario to the premium's simulations. Despite its drawbacks, the second alternative seems to be the best choice.

Then we can obtain a distribution of the net technical result from the reinsurance data and gross data. We estimate the net SCR in the same manner as the gross' one.

However, since our study is conducted at a finer segmentation than the one used in the internal model, we had to look for a way to replicate diversifications' and tax absorption's effects. This method was first tested without the stochastic premiums and fees in order to ensure its efficiency (less than 0.02% deviation from the official results) and then we applied it to our work.

Adding stochastic premium/expense occasions a rise of 1% of the total diversified SCR. This rise is meaningful but too low to justify a model change.

Standalone by Risk		
FR001	YEO 21 avec Excel	YEO 21 avec primes/frais stochastiques
Financial	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7
Non Life UW	419,4	429,4
Cat	87,7	92,5
NL Lapse	2,2	2,2
Pricing	155,1	163,5
Reserve	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9
SCR as SUM	966,3	976,3
Diversification Benefit	-235,5	-237,9
% Diversification	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	732,3	739,9
Tax Absorption	179,3	179,3
% Taxes	24,5%	24,2%
SCR	553,0	560,6
Model adjustment Financial	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23
SCR	754,7	762,3
Variation		1,01%

FIGURE 8 – SCR before/after stochastic premium and expense

It should be noted that all the SCR amounts have been modified for reasons of confidentiality.

Finally, we did some sensibility's tests that lead us to some conclusions :

- We could round copula's parameters up to the decimal for better readability without a noticeable impact on the SCR.
- The choice of the log-Gaussian distribution for the fit of premium and expense has a very low impact on the SCR.
- Five simulations of premium and expense seem enough to obtain steady results.

To go further, it could be interesting to do the same study as we did with a smaller segmentation in order to apply correctly all the reinsurance treaties.

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier M. Pierre BRESSON pour son encadrement, ses conseils et les innombrables connaissances qu'il m'a transmis. Je tiens aussi à remercier M. Gaspard DUBERT pour ses pratiques managériales donnant lieu à un environnement propice au développement personnel et professionnel.

Mes remerciements vont aussi à M. Adnane EZZAMITI et à Mmes Khadidiatou DIOP, Houda BOURAZZA, Yifan LI pour leur bonne humeur et leurs aides lors de cette année passée à *Generali*.

À Mathieu ETTIEN, merci pour les travaux.

Enfin, j'adresse ma plus sincère gratitude à Roman ALLAIS, mon frère, qui est une perpétuelle source d'inspiration.

Table des matières

Résumé	II
Abstract	III
Note de synthèse	IV
Executive Summary	IX
Remerciements	XIII
Introduction	1
I Contexte de la problématique	3
1 Cadre réglementaire : Solvabilité II	5
1.1 Pilier 1 : Exigences quantitatives	6
1.2 Pilier 2 : Exigences qualitatives	10
1.3 Pilier 3 : Reporting prudentiel et information du public	10
2 Risques de souscription non-vie	11
2.1 Risque de prime & réserve	12
2.2 Lapse	13
2.3 CAT	13
3 Présentation du cadre de l'étude	15
3.1 Présentation des données	15
3.1.1 Données IFRS	15
3.1.2 Données du Plan	16
3.2 Présentation des LoB	17
3.2.1 Frais médicaux et Protection de revenu	17
3.2.2 Responsabilité civile des véhicules à moteur	18
3.2.3 Autres assurances des véhicules à moteur	20
3.2.4 Maritimes, aériens et transports	22
3.2.5 Incendies et autres dommages aux biens	23
3.2.6 Responsabilité Civile Générale	25
II Risque de prime dans le Modèle Interne	29
4 Modèle actuel pour l'estimation du risque de prime	31
4.1 Paramétrisation	32

4.1.1	Ventilation des sinistres	32
4.1.2	Mise en <i>As-If</i>	33
4.1.3	Projection à l'ultime	34
4.1.4	Calibration des lois	34
4.2	Exigence de capital brute	39
4.3	Exigence de capital nette	41
5	Calcul de l'exigence de capital	43
6	Limites du modèle	53
III	Incertitude sur les primes et frais futurs : introduction des primes et frais stochastiques	57
7	Pré-requis mathématiques	59
7.1	Notions de dépendance	59
7.2	Corrélation linéaire	60
7.2.1	Copules	61
7.2.2	Corrélation de rang	63
7.3	Estimation des paramètres d'une copule	64
7.3.1	Méthode du maximum de vraisemblance exacte	64
7.3.2	Méthode du maximum de vraisemblance canonique	65
7.3.3	Méthode d'inversion du tau de Kendall	65
7.4	Simulation d'une copule	66
7.4.1	Copule Gaussienne	67
7.4.2	Copule de Student	67
7.5	Décomposition de Cholesky	68
7.6	Estimation des paramètres d'une loi	69
7.6.1	Méthode des moments	70
7.6.2	Maximum de vraisemblance	70
8	Ajout des frais et primes stochastiques	71
8.1	Traitement des données	72
8.2	Calibration des copules	75
8.2.1	<i>LoB Fire</i>	76
8.2.2	<i>LoB Other Motor</i>	80
8.3	Calibration des lois de primes et de frais	81
8.3.1	Frais d'acquisition	82
8.3.2	Primes	84
8.4	Évaluation brute du SCR	85
8.5	Application de la réassurance	90
8.6	Évaluation nette du SCR	93

9	Sensibilités	97
9.1	Corrélations	97
9.2	Lois	98
9.2.1	Lois sur les primes	99
9.2.2	Lois sur les frais	100
9.3	Copules	101
9.4	Séparation des frais	102
9.5	Nombre de simulation	103
10	Limites	105
10.1	Incertitude sur nos paramètres	105
10.2	La réassurance	105
10.3	Prise en compte des dépendances inter-LoB	105
	Conclusion	107
IV	Annexes	111
A	Chroniques des primes et frais	113
B	Estimateurs des lois	119
B.1	Maximum de vraisemblance	119
B.1.1	Normale	119
B.1.2	Log-Normale	120
B.1.3	Exponentielle	120
B.1.4	Weibull	121
B.1.5	Gamma	122
B.2	Méthodes des moments	123
B.2.1	Gamma	123
B.2.2	Log-Normale	124
B.2.3	Exponentielle	124
C	Explication sur les corrélations inter-LoB	127

Table des figures

1	Écart <i>versus</i> réalisé pour la <i>LoB Fire</i>	V
2	Simulation dans simulation	VI
3	Impact au brut	VII
4	Comparaison SCR	VII
5	Expected <i>versus</i> realised for <i>LoB Fire</i>	X
6	Simulation in simulation	XI
7	Impact on gross SCR	XI
8	SCR before/after stochastic premium and expense	XII
1.1	Les 3 Piliers de Solvabilité II (1)	6
1.2	Bilan S2	6
1.3	Illustration du SCR [1]	8
1.4	Les différents modules de risque d'un organisme d'assurance [3]	9
1.5	Matrice de corrélation des modules sous la formule standard	9
2.1	Corrélation du module non-vie	11
3.1	Evolution de la part de primes acquises de la <i>LoB Medical Expense et Income Protection</i> dans GIARD	17
3.2	Primes acquises et sinistres de la <i>LoB Medical Expense et Income Protection</i> dans GIARD (en M€)	18
3.3	Différents frais de la <i>LoB Motor</i> dans GIARD (en M€)	18
3.4	Evolution de la part de primes acquises de la <i>LoB Motor</i> dans GIARD	19
3.5	Primes acquises et sinistres de la <i>LoB Motor</i> dans GIARD	19
3.6	Différents frais de la <i>LoB Motor</i> dans GIARD	19
3.7	Evolution de la part de primes acquises de la <i>LoB Other Motor</i> dans GIARD	20
3.8	Primes acquises et sinistres de la <i>LoB Other Motor</i> dans GIARD	21
3.9	Sinistres sur Primes de la <i>LoB Other Motor</i> dans GIARD	21
3.10	Différents frais de la <i>LoB Other Motor</i> dans GIARD	21
3.11	Evolution de la part de primes acquises de la <i>LoB MAT</i> dans GIARD	22
3.12	Primes acquises et sinistres de la <i>LoB MAT</i> dans GIARD	22
3.13	Différents frais de la <i>LoB MAT</i> dans GIARD	23
3.14	Évolution de la part de primes acquises de la <i>LoB Fire</i> dans GIARD	23
3.15	Primes acquises et sinistres de la <i>LoB Fire</i> dans GIARD (en M€)	24
3.16	Différents frais de la <i>LoB Fire</i> dans GIARD (en M€)	24
3.17	Evolution de la part de primes acquises de la <i>LoB Third Party Liability</i> dans GIARD	25

3.18	Primes acquises et sinistres de la LoB <i>Third Party Liability</i> dans GIARD (en M€)	25
3.19	Évolution du ratio sinistres sur primes de la LoB <i>Third Party Liability</i> de GIARD	26
3.20	Différents frais de la LoB <i>Third Party Liability</i> dans GIARD (en M€)	26
5.1	Données de sortie du modèle interne	44
5.2	Comparaison SCR	44
5.3	Données de sortie du modèle interne	45
5.4	Comparaison SCR	45
5.5	Données réassurance du modèle interne	46
5.6	Données nettes	47
5.7	Comparaison SCR net	47
5.8	Simulations des résultats techniques par <i>LoB</i>	48
5.9	SCR prime et CAT total	49
5.10	Récapitulatif SCR	49
5.11	Comparaison du SCR prime-CAT calculé le SCR officiel	49
5.12	Allocation du SCR prime-CAT en SCR prime et SCR CAT	50
5.13	Résultats modèle interne	52
6.1	Différence entre les estimations et le réalisé (en %)	54
8.1	Différence entre l'estimation et le réalisé sur la <i>LoB Fire</i> (en %)	72
8.2	Matrice de passage maille produit à maille <i>LoB SII</i>	73
8.3	Chronique primes brutes <i>ME</i> et <i>IP</i>	73
8.4	Frais observés <i>versus</i> Frais estimés pour l'année 2014	74
8.5	Proportion des frais pour la <i>LoB Fire</i>	75
8.6	Coefficients linéaires pour la <i>LoB Fire</i>	76
8.7	Calcul des discordances et concordances	77
8.8	Calcul tau de Kendall	78
8.9	Application de l'algorithme pour les frais d'acquisition de la <i>LoB Fire</i>	78
8.10	Contrôle corrélation	79
8.11	Comparaison coefficients de corrélation avant/après exclusion de 2017	80
8.12	Données as-ifé de la <i>LoB MOC(1)</i>	81
8.13	Données as-ifé de la <i>LoB MOC(2)</i>	82
8.14	Récapitulatif des p-valeurs des lois testées	82
8.15	Comparaison données empiriques / données théoriques	83
8.16	Comparaison paramètres de la loi log-normale	83
8.17	Comparaison données empiriques / données théoriques	84
8.18	Erreur-type des estimateurs de la loi Burr	84
8.19	Comparaison paramètres de la loi log-normale	85
8.20	Comparaison paramètres	85
8.21	Récapitulatif des paramètres de la <i>LoB Other Motor</i>	85
8.22	Schéma	86
8.23	Vecteurs des lois uniformes sur $[0; 1]$	87
8.24	Comparaison paramètres des copules avec les corrélations linéaires	88
8.25	Données simulées pour la simulation 1	88
8.26	SCR brut par simulation	88
8.27	Impact de l'exclusion	89

8.28	Convergence SCR brut <i>MOC</i>	89
8.29	Récapitulatif des SCR Prime-CAT bruts par <i>LoB</i>	90
8.30	Illustration des exemples	92
8.31	Données de cession	92
8.32	Données nettes de réassurance	93
8.33	SCR primes-cat net de la <i>LoB MOC</i>	94
8.34	Calcul résultats techniques de GIARD	94
8.35	Calcul SCR GIARD	94
8.36	SCR Net GIARD méthode proportionnelle	95
8.37	Récapitulatif des SCR nets	95
8.38	SCR total GIARD	96
9.1	Sensibilités sur les corrélations	98
9.2	Impact de la corrélation	98
9.3	Sensibilités sur les lois (primes)	99
9.4	Impact de la séparation des frais	99
9.5	Sensibilités sur les lois(frais)	100
9.6	Impact des lois des frais	100
9.7	Sensibilités sur les copules	101
9.8	Impact de la séparation des frais	101
9.9	Sensibilités sur la séparation des frais	102
9.10	Impact de la séparation des frais	102
9.11	Impact par <i>LoB</i> de la séparation des frais	103
9.12	Évolution du SCR prime-CAT en fonction du nombre de simulations	104
A.1	Chroniques primes brutes (1)	113
A.2	Chronique frais réalisés brutes	114
A.3	Chronique frais réalisés brutes(2)	115
A.4	Chronique frais estimées brutes (1)	116
A.5	Chronique frais estimées brutes (2)	117
C.1	Matrice de corrélation linéaire empiriques des résultats techniques avant ajout des primes et frais stochastiques	128
C.2	Matrice de corrélation linéaire empiriques des résultats techniques après ajout des primes et frais stochastiques	128
C.3	P-valeur médiane/moyenne	128
C.4	Matrice de p-valeurs	129

Introduction

La directive 2009/138/CE, aussi surnommé *Solvabilité II*, est une réforme européenne venant réglementer le monde de l'assurance. Son objectif est de protéger les assurés et les compagnies d'assurance, notamment en obligeant les assureurs à déterminer un capital économique nécessaire pour réduire leur probabilité de ruine à 0,5% sur un an. Il s'agit du *Solvency Capital Requirement* (SCR). Pour le calculer, Solvabilité II propose une formule dite standard, mais elle donne la possibilité aux assureurs de mettre en place un modèle qui correspondrait mieux à leur profil de risque sous réserve qu'il soit validé par le régulateur national *id est* l'ACPR. C'est dans cette optique *Generali France* utilise un modèle interne calibré par la direction des risques.

Le cadre de Solvabilité II vient identifier plusieurs risques auxquels les assureurs sont assujettis. Ce mémoire traitera des risques de souscription non-vie qui se décomposent en plusieurs autres modules dont le risque de prime et le risque de catastrophe. Le risque de prime correspond au risque que les primes de l'année suivante ne soient pas suffisante pour couvrir les sinistres et les frais de la même année. La nature du risque de catastrophe est proche du risque de prime mais concerne des sinistres avec une plus forte volatilité.

Ces deux risques correspondent à des risques de sous-tarification et ils peuvent être interpréter comme le risque que notre résultat technique de l'année suivante soit négatif. Pour les estimer, *Generali France* utilise une distribution de son résultat technique futur.

Comme tout modèle, le modèle interne de *Generali France* utilisé pour l'estimation des risques de prime et de catastrophe repose sur des hypothèses plus ou moins restrictives. En effet, il doit avoir une complexité telle qu'il représente fidèlement le risque supporté par l'assureur tout en gardant une durée d'exécution raisonnable. La direction des risques doit ensuite s'accorder avec l'ACPR sur ces hypothèses et justifier qu'elles ne viennent pas sous-estimer le SCR.

Dans le cas des risques de prime et de catastrophe, les frais et les primes futurs sont considérés comme déterministes. En d'autres termes, dans la distribution du résultat technique de l'année subséquente, les frais et primes sont toujours égaux à l'estimation faite par *Generali*. C'est ainsi que l'ACPR considère que *Generali France* néglige une partie de la volatilité de son résultat technique et donc sous-estimerait son SCR. En effet, l'ajout d'une distribution sur les primes et les frais devrait augmenter la volatilité du résultat technique sans pour autant modifier le scénario central. Mécaniquement, nous devrions constater une augmentation du SCR. Le but de ce mémoire sera donc d'étudier l'impact de l'application de primes et frais stochastiques sur le SCR.

Dans un premier temps, nous présenterons le contexte général de notre étude. Par la suite, nous décrirons le plus fidèlement possible le modèle actuellement utilisé pour évaluer les risques de catastrophe et de prime. Ensuite, nous expliciterons les différentes limites mises en avant par l'ACPR. Enfin, nous nous questionnerons sur une manière adéquate de prendre en compte l'incertitude sur les primes et frais futurs, et nous étudierons la nécessité de la mise en place de corrélations entre les frais, les primes et les sinistres. Ainsi, l'impact de nos travaux sur les SCR de prime et de catastrophe pourra être effectué.

Première partie

Contexte de la problématique

Chapitre 1

Cadre réglementaire : Solvabilité II

Cette première partie a pour objectif de présenter le cadre général de notre travail afin de mieux comprendre la problématique liée à ce mémoire.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au cadre réglementaire auquel les entreprises d'assurance sont assujetties, puis nous nous attarderons sur les calculs d'exigence de capital, du fait de la réglementation sus-citée, en rapport avec le sujet du présent mémoire et, enfin, nous nous familiariserons avec les données utilisées.

Solvabilité I puis Solvabilité II sont des directives européennes réglementant le monde de l'assurance, elles sont ce que les réformes Bâle sont au monde bancaire. Votée en avril 2009 puis entrée en vigueur au 01 janvier 2016, Solvabilité 2, ou *Solvency II* en anglais, a pour objectif une meilleure adaptation des fonds propres exigés pour les entreprises exerçant l'activité d'assurance aux risques découlant de leur activité.

Elle vient remplacer la précédente directive, Solvabilité I, qui avait été adoptée en février 2002. Cette nouvelle directive apporte des principes, plutôt que des règles sous sa prédécesseure, elle apporte aussi la notion d'appétence au risque des organismes et elle vient renforcer les exigences en matière de gouvernance.

À l'image de Solvabilité I, Solvabilité II est constituée de 3 piliers : les exigences quantitatives, les exigences qualitatives et des exigences de reportings pour les autorités de contrôle et pour le public.

Dans la suite de cette partie, nous allons présenter globalement chacun de ces piliers en nous intéresserons plus en détail au premier étant donné que c'est celui qui nous intéressera le plus dans le cadre de ce mémoire.

Pilier 1 Exigences quantitatives	Pilier 2 Exigences qualitatives	Pilier 3 Reporting prudentiel et information du public
<ul style="list-style-type: none"> • Actif et passif en valeur de marché • Deux exigences de capital : SCR et MCR, basées sur l'utilisation d'une formule standard ou un modèle interne • Règle d'éligibilité et de classement des fonds propres selon leur qualité 	<ul style="list-style-type: none"> • Renforcement de la gouvernance (fonctions clés, « fit and proper ») • Renforcement du contrôle interne et de la gestion des risques au sein de l'entreprise + ORSA • « Principe de personne prudente » applicable aux placements 	<ul style="list-style-type: none"> • Définition d'états prudentiels communs à l'ensemble des contrôleurs européens • Davantage d'informations à destination du public afin de renforcer la transparence et la discipline de marché
-> Etre suffisamment riche	-> Etre bien gouverné	-> Etre transparent

FIGURE 1.1 – Les 3 Piliers de Solvabilité II (1)

1.1 Pilier 1 : Exigences quantitatives

L'objectif du premier pilier est de définir les normes de calcul des différentes parties du bilan afin d'avoir une harmonisation à l'échelle européenne. Il vient donc fondamentalement changer la structure du bilan des assureurs par rapport à la comptabilité classique. En effet, la méthode du coût historique est remplacée et la méthode de calcul des éléments constituant le passif est modifiée.

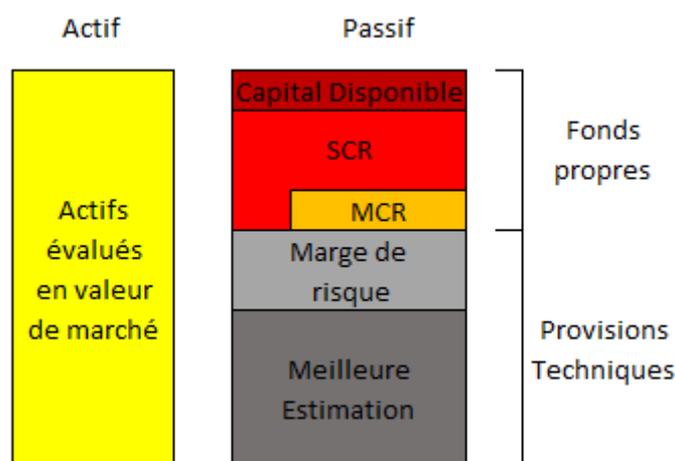


FIGURE 1.2 – Bilan S2

Actif

Tout d'abord, nous pouvons noter que nous passons d'une évaluation des actifs en valeur historique (à l'exception des unités de compte pour l'assurance vie) à une évaluation en valeur de marché.

Passif

Le passif dans la réglementation Solvabilité II est composé des fonds propres SII et des provisions techniques prudentielles.

Les fonds propres sous Solvabilité II sont définis comme la différence entre la valeur de l'actif et la valeur des provisions techniques prudentielles.

La valeur des provisions techniques sont définis dans l'article L351-2 du Code des Assurances comme le "montant actuel que les entreprises devraient payer si elles transféraient immédiatement leurs engagements à une autre entité agréée pour pratiquer des opérations d'assurance ou de réassurance" et doit être "égale à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque".

1. Meilleure estimation ou *Best Estimate* correspond à " la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents " (Art. 77 du Règlement Délégué Solvabilité II). En d'autres termes, ce montant correspond à la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs actualisés avec de la courbe des taux sans risque fournie par EIOPA¹. La meilleure estimation est donc ce que doit détenir l'assureur pour être en mesure d'indemniser ses assurés selon une vision moyenne. Il se calcule de la manière suivante :

$$BE = \sum_i \frac{F_i p_i}{(1 + r_i)^i}$$

où :

- F_i correspond aux flux de trésorerie à la date i à savoir les primes futures entrant dans la frontière des contrats, les prestations, les frais se rapportant aux activités d'assurance et les taxes.
 - p_i est la probabilité que le flux de la date i se réalise.
 - r_i le taux de la courbe des taux sans risque adéquat.
2. Marge de risque "est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance" (Art. 77 de Solvabilité II). La marge de risque représente le coût de détention du capital jusqu'à écoulement des provisions. Elle est calculé de la manière suivante :

$$RM = CoC \sum_{0 \leq t} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

1. *European Insurance and Occupation Pensions Authority*

où :

- CoC : le taux de coût en capital (fixé à 6%)
- SCR(t) : Le capital de solvabilité requis pour l'année t
- r_{t+1} : le taux sans risque pour une échéance t+1 années

Exigences de capital

Outre les modifications sus-citées dans le bilan, la directive Solvabilité II vient définir deux exigences de capital.

- le *Minimum Capital Requirement* représente le montant minimum de fonds propres qu'un assureur doit avoir pour continuer son activité. Il est compris entre 25% et 45% du SCR avec un seuil plancher de 2,2M€ pour les sociétés non-vie et 3,2M€ pour les sociétés d'assurance vie.
- le *Solvency Capital Requirement* représente le montant minimum de fonds propres qu'un assureur doit avoir pour continuer son activité sans intervention directe du superviseur. Ce montant correspond au capital requis pour faire face à une situation de ruine à horizon 1 an dans 99,5% des cas (soit une ruine tous les 200 ans). En d'autres termes, le SCR correspond à la *Value At Risk* à 99,5% de la variation de l'actif net économique de l'organisme d'assurance à horizon un an.

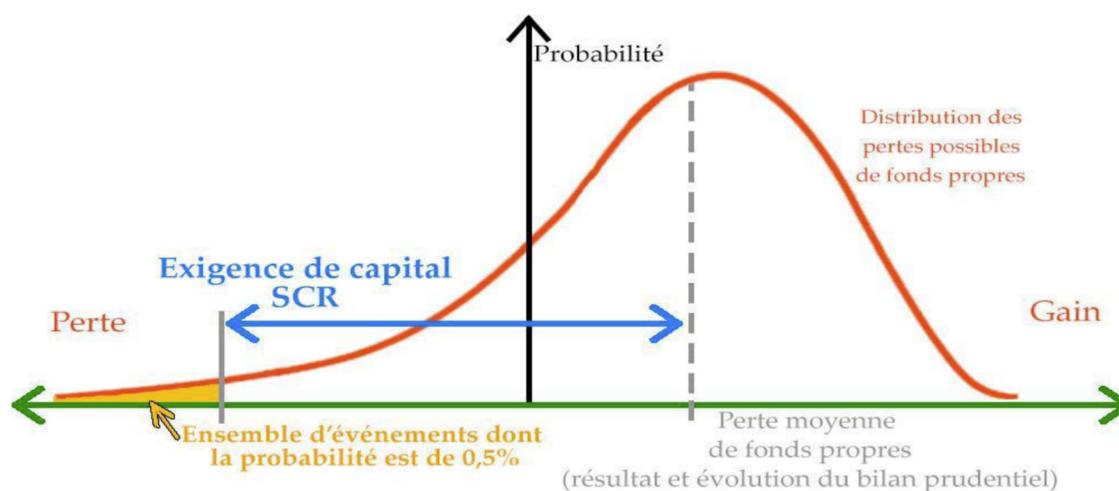


FIGURE 1.3 – Illustration du SCR [1]

Selon l'article l 352-1 du code des Assurances, le SCR peut être évalué soit à partir d'une formule standard fournie par la directive soit par un modèle interne développé par l'organisme d'assurance si la formule standard n'est pas adaptée à ses risques.

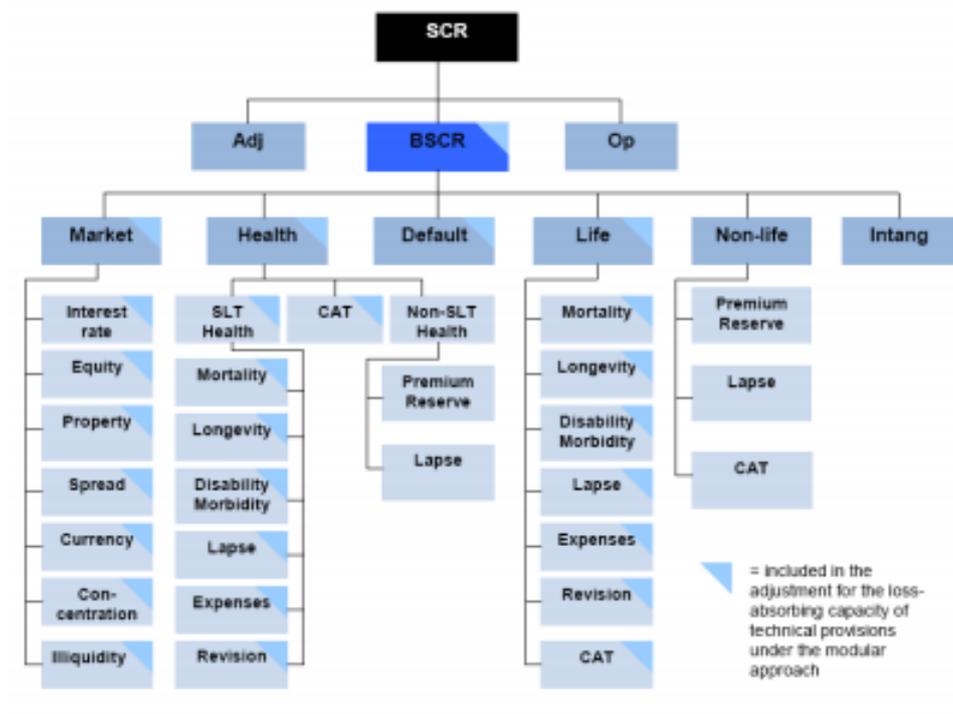


FIGURE 1.4 – Les différents modules de risque d’un organisme d’assurance [3]

Le SCR a une structure modulaire ce qui permet d’observer l’impact de tous les risques quantifiables auxquels l’entreprise est soumise. Le calcul des exigences en capital se fait d’abord par sous-modules (actions, etc) que nous agrégeons ensuite en module en utilisant une matrice de covariance. Ces différents risques vont se diversifier et leur agrégation via la matrice (1.5) va nous donner le capital de solvabilité de base (BSCR). La corrélation étant supposée linéaire, le BSCR se calcule de la manière suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum Corr_{i,j} SCR_i SCR_j + SCR_{intangibles}}$$

	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Default	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Life	0,25	0,25	1	0,25	0
Health	0,25	0,25	0,25	1	0
Non-Life	0,25	0,5	0	0	1

FIGURE 1.5 – Matrice de corrélation des modules sous la formule standard

Enfin, le SCR "final" de l’entreprise d’assurance se calcule de la manière suivante :

$$SCR = BSCR + SCR_{op} - \max(0, adj)$$

Avec le SCR_{op} qui représente le capital requis pour le risque opérationnel et *adj* l'ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques et les impôts différés.

1.2 Pilier 2 : Exigences qualitatives

Le second pilier traite essentiellement de l'identification et de la prévention des risques liés à la qualité et à la gestion des risques. Ce pilier est composé d'exigences qualitatives, telles que des règles de gouvernance et de gestion de risques, et de l'évaluation propre des risques de la solvabilité (l'ORSA²).

En effet, si le premier pilier s'attache à offrir une image la plus fidèle possible de la solvabilité de l'organisme à horizon 1 an, le second pilier garanti la fiabilité de l'information utilisée dans le Pilier 1, la bonne compréhension des risques de l'organisme et de leur gestion. En d'autres termes, ce pilier permet de donner de la crédibilité à l'image fournie par le premier pilier.

La structure de gouvernance de Solvabilité 2 impose la définition d'une organisation adaptée assurant la séparation des responsabilités, la maîtrise des risques au sein de l'organisme et la communication. Pour satisfaire ce point, l'organisme doit suivre la règle des 4 yeux, c'est-à-dire que le système de gouvernance doit être composé *a minima* de deux dirigeants effectifs devant être notifié à l'organe de supervision national des assureurs (ACPR³ en France). Le système de gouvernance doit aussi être composé d'au moins quatre responsables de fonction clé : fonction actuarielle, fonction gestion des risques, fonction audit interne et fonction conformité. Notons que les dirigeants effectifs et les responsables de fonction clé doivent être *fit and proper* c'est-à-dire qu'ils doivent respecter des exigences de compétences et d'honorabilité.

Enfin, l'ORSA est un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité de l'organisme. Il vise à s'assurer de la cohérence entre les montants des provisions techniques et de SCR et le profil de risque de l'entreprise. Il vient planifier les besoins de fonds propres futurs, identifier et quantifier les risques de l'organisme. C'est un outil de pilotage de l'activité d'assureur.

1.3 Pilier 3 : Reporting prudentiel et information du public

Le dernier pilier de Solvabilité concerne la communication et la transparence envers l'autorité de contrôle et le public. L'objectif est d'harmoniser la publication d'informations à l'échelle de l'Union Européenne. Les informations demandées sont à la fois qualitatives et quantitatives et sont à remettre annuellement ou trimestriellement pour d'autres.

2. *Own Risk and Solvency Assessment*

3. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

Chapitre 2

Risques de souscription non-vie

Le risque de souscription désigne « le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement » (Article R352-1 du Code des Assurances).

Dans la formule standard, le module non-vie se décompose en trois sous modules :

- Risque de prime et de réserve
- Risque catastrophe
- Risque de cessation

Nous nous proposons de présenter ces différents risques en nous attardant plus sur les risques concernant ce mémoire : le risque de prime et le risque de catastrophe. Les différentes exigences de capital des sous modules précédemment cités sont agrégées selon la matrice de corrélation suivante :

	prime & réserve	CAT	Cessation
prime & réserve	1	0,25	0
CAT	0,25	1	0
Cessation	0	0	1

FIGURE 2.1 – Corrélation du module non-vie

2.1 Risque de prime & réserve

Le risque de réserve est le risque d'une sous-évaluation des provisions techniques des sinistres déjà survenus. Cette sous-évaluation peut être dû à une mauvaise évaluation des provisions pour sinistres (développement adverse des sinistres, inflation, recours) ou à l'écart entre le montant réel des sinistres et l'estimation moyenne qui peut être faite.

Le risque de prime est le risque que les primes de l'année N ne soient pas suffisantes pour couvrir la sinistralité de cette même année : c'est un risque de sous-tarification. Cette sous-tarification peut être due à une dérive de la fréquence ou à une inflation des coûts.

Dans la formule standard, la calibration de ces risques se fait de la même manière et en même temps ; ce qui n'est pas le cas de Generali qui calibre le risque de prime à part du risque de réserve et qui calibre le risque CAT de la même manière que le risque de prime.

L'exigence de capital pour le risque de prime et de réserve, sous l'hypothèse d'une distribution log-normale, est défini comme :

$$SCR_{premier, res} = 3\sigma_{premier, res} V_{premier, res}$$

$V_{premier, res}$ correspond à la somme des volumes de tous les segments visés à l'annexe II et XIV du Règlement Délégué :

$$V_s = (V_{premier, s} + V_{res, s})(0.75 + 0.25DIV_s)$$

Avec :

- $V_{res, s}$ le volume de réserve du segment s qui est défini comme la meilleure estimation des provisions pour sinistres à payer nettes ;
- $V_{premier, s}$ le volume de prime pour le segment s ;
- DIV_s un facteur de diversification géographique.

$\sigma_{premier, res}$ correspond à l'écart-type du risque de prime et de réserve qui est calculé en deux étapes :

1. Sous l'hypothèse d'une corrélation de 50%, on agrège les écart-types de réserve et de prime par segments :

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{premier, s}^2 V_{premier, s}^2 + \sigma_{premier, s} V_{premier, s} \sigma_{res, s} V_{res, s} + \sigma_{res, s}^2 V_{res, s}^2}{V_{res, s} + V_{premier, s}}$$

Les écart-type sus-cités sont donnés par segment dans l'annexe II du Règlement Délégué.

2. Utilisation des coefficients de corrélation fournis dans l'annexe IV du Règlement Délégué pour le calcul de l'écart-type du risque de prime et de réserve :

$$\sigma_{premier, res} = \frac{1}{V_s} \sqrt{\sum Corr_{s,t} \sigma_s V_s \sigma_t V_t}$$

2.2 Lapse

Le risque de *Lapse* ou de cessation en français est défini comme "le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de fluctuations affectant le niveau ou la volatilité des taux de cessation, d'échéance, de renouvellement et de rachat des polices" dans la directive Solvabilité II (art. 105).

Dans la formule standard, on les contrats sont regroupés par groupes Homogènes de risques puis on applique un choc de 40% sur les gains futurs escomptés des groupes profitables.

2.3 CAT

Le risque de catastrophe en non-vie est "le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de l'incertitude importante, liée aux événements extrêmes ou exceptionnels, qui pèsent sur les hypothèses retenues en matière de prix et de provisionnement" (art. 105 de la directive Solvabilité II).

Le module CAT est subdivisé en sous-module :

- **risque de catastrophe naturelle** qui est lui-même composé de plusieurs sous-modules : tempête, séisme, inondation, grêle et affaissement de terrain. L'exigence de capital pour ce risque est la racine de la somme des carrés des exigences des sous modules (on considère donc les sous-modules comme indépendants. Chacune des exigences des sous-modules se calcule de la même manière :

1. Le calcul du SCR se fait par région (par pays) avant d'être agrégé :

$$SCR_{risk} = \sqrt{\left(\sum_{r,s} Corr_{r,s} SCR_{risk,s} SCR_{risk,r} + SCR_{risk,other}^2\right)}$$

Où $Corr_{r,s}$ est la corrélation relative au risque considéré entre les régions r et s (donnée dans l'annexe V du Règlement Délégué), $SCR_{risk,s}$ est l'exigence de capital pour le risque considéré dans la zone s et $SCR_{risk,other}$ est l'exigence de capital dans les zones non spécifiées dans l'annexe V.

2. nous appliquons ensuite deux scénarios (A et B) et l'exigence en capital sera celle du scénario provoquant la plus grande perte ;

- **risque de catastrophe en réassurance dommage non proportionnelle** : l'exigence de capital pour ce risque "est égale à la perte de fonds propres de base de l'entreprise d'assurance et de réassurance qui résulterait d'une perte soudaine liée à chaque contrat de réassurance couvrant les engagements de réassurance en rapport avec la ligne d'activité 28 visée à l'annexe I, autres que les engagements de réassurance non proportionnelle relatives aux engagements d'assurance liés aux lignes d'activité 9 et 21 visées à l'annexe I."(Règlement Délégué);

- **risque de catastrophe d'origine humaine** qui est composé de plusieurs sous-modules : risque de responsabilité civile automobile, risque marin, risque aérien, risque incendie, risque de responsabilité civile et le risque de caution et crédit. Ces sous-modules sont considérés comme indépendants, ainsi, le $SCR_{man\ made\ CAT}$, qui est l'agrégation des sous modules cités précédemment, est calculé de la même manière que le risque de catastrophe naturelle ;
- **autres risques de catastrophes non-vie** : cette exigence de capital se calcule de la manière suivante

$$L_{CATotherNL} = \sqrt{(c_1P_1 + c_2P_2)^2 + (c_3P_3)^2 + (c_4P_4)^2 + (c_5P_5)^2}$$

. Où P_i représentent les estimations de primes brutes, sans prise en compte de la réassurance, que l'assureur s'attend à acquérir au cours des 12 prochains mois en lien avec les groupes d'engagement d'assurance et de réassurance 1 à 5 (Annexe XII du Règlement Délégué) et les C_i représentent les facteurs de risques de ces mêmes groupes d'engagement visés dans la même annexe.

L'exigence totale de capital pour le risque de catastrophe non-vie se calcule donc de la manière suivante :

$$SCR_{NL\ CAT} = \sqrt{(SCR_{CATNAT} + SCR_{nonprop})^2 + SCR_{man\ made\ CAT}^2 + SCR_{CAT\ other}^2}$$

Chapitre 3

Présentation du cadre de l'étude

Lors de nos travaux, nous nous sommes intéressés uniquement à la plus grande des quatre¹ entités non-vie de Generali France : Generali IARD² ou GIARD.

Étant donné le nombre important de portefeuilles composant l'entité GIARD (72), nous avons décidé de mener notre étude avec une segmentation en *LoB SII*. En effet, une telle segmentation se faisant par matérialité des garanties et par nature des risques, elle nous permet d'avoir une segmentation homogène de nos risques. Et, comme le rappelle l'ACPR dans l'*Orientations sur la valorisation des provisions techniques*³, "en sélectionnant un groupe de risques homogènes, les entreprises devraient parvenir à un équilibre approprié entre la crédibilité des données disponibles, permettant de réaliser des analyses statistiques fiables, et l'homogénéité des caractéristiques de risque au sein du groupe". Ainsi, la segmentation en *LoB SII* nous apparaît comme un bon compromis entre la quantité de travail nécessaire et l'obtention de résultats reflétant les risques sous-jacents.

Nous nous proposons donc de faire une présentation succincte et générale de nos données suivie d'une présentation exhaustive des différentes lignes de business composant GIARD.

3.1 Présentation des données

3.1.1 Données IFRS

Les données que l'on appellera « IFRS » sont les données comptables, les données qui se sont réalisées, qui sont communiquées par l'Inventaire. Les différentes variables (primes émises brutes, sinistres brutes, etc) nous sont fournies à la maille *LoB SII*. De manière générale, nous pouvons remarquer que les allocations des frais en frais de gestion, administratif et acquisition peut changer au fil des années.

Lors de la présentation des différentes lignes de business de GIARD, nous utiliserons les données IFRS pour nous familiariser avec celles-ci.

Nous nous proposons de présenter les différentes variables que nous allons utiliser et expliquer de quoi elles sont composées :

-
1. Lors de la réalisation de ce mémoire, La Médicale n'était pas encore incorporée à Generali.
 2. Incendies, accidents et risques divers
 3. https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/publications/eiopa_guidelines/tp_final_document_fr.pdf

- **primes** : lorsque nous parlerons de primes, nous considérerons les primes acquises brutes (hors spécification contraire). Comme pour toutes les prochaines variables, nous considérons à la fois les affaires directes et les acceptations.
- **frais d'acquisition** : correspondant généralement aux frais de marketing, de publicité ou aux commissions liées au rapportage de contrats. Dans nos données comptables, ils sont composés des "Frais d'acquisition" et des "Autres frais d'acquisition".
- **frais d'administration** : correspondant aux frais liés aux paiements des salaires, des locaux, etc. Ils sont composés des "dépenses administratives" et des "commissions d'administration".
- **frais de gestion** : correspondant aux frais d'expertises et de traitement de sinistres. Ces frais sont composés des payés et provisions d'*ULAE*⁴. Les *ULAE* représentent tous les frais en connexion avec l'enregistrement, le suivi et le paiement des sinistres d'une police d'assurance n'étant pas déjà dans les *ALAE*⁵ selon *lawinsider*.
- **sinistres** : à l'image des primes, lorsque nous parlerons de sinistres, nous parlerons exclusivement de sinistres brutes de réassurance (sauf spécification contraire). Le montant des sinistres est composé de la somme des payés et des provisions de sinistres sans les *ULAE* ayant déjà été comptabilisé dans les frais de gestion.

3.1.2 Données du Plan

Les données que l'on appellera « du Plan » sont les données fournies par un service appelé le Plan. Ces données représentent les montants de primes, de sinistres, de frais et *etc* attendus pour les trois prochaines années. Nous pouvons noter que ces prévisions sont mises à jour chaque trimestre de l'année courante. Ces données nous sont communiquées à la maille portefeuille et nous agrégeons nous-même en *LoB SII*.

Il est à noter que le modèle interne partiel a été mis en place en 2016, de fait, retrouver des données fiables antérieures à cette date n'est pas chose aisée. Ainsi, nous n'avons qu'un historique réduit (2014-2021) avec des données de l'année 2014 non-exploitable. En effet, certaines données ne semblent pas cohérentes avec le reste de la chronique, il a donc été décidé d'exclure l'année en question.

Les prévisions du Plan sont utilisées pour le calibrage du risque de primes et de catastrophe.

De la même manière que pour les données IFRS, nous nous proposons d'expliquer de quoi sont composés les données du Plan :

- **primes** : elles représentent l'estimation faite par le Plan sur le montant des primes en direct et en acceptation qui seront acquises lors de l'année suivante.
- **frais** (d'acquisition, de gestion ou d'administration) : nous sommes les frais et les commissions estimés qui sont associés à chacun des types de frais.

4. *Unallocated Loss Adjustment Expenses*

5. *Allocated Loss Adjustment Expenses*

- **sinistres** : nous sommes les estimations "*Best Estimate*" des affaires directes et des acceptations.

3.2 Présentation des LoB

3.2.1 Frais médicaux et Protection de revenu

La ligne d'activité "Frais médicaux" ou "*Medical Expense*" inclut "les engagements qui couvrent un traitement médical ou des soins à visée préventive ou curative, notamment un traitement médical ou des soins dispensés en raison d'une maladie, d'un accident, d'une incapacité ou d'une invalidité, ou l'indemnisation financière de ce traitement ou de ces soins, dans le cas où l'activité sous-jacente n'est pas exercée sur une base technique similaire à celle de l'assurance Vie, autres que les engagements considérées comme relevant de l'assurance accidents du travail."[8].

La LoB "Protection de revenu" ou "*Income Protection*" inclut les engagements qui couvrent l'indemnisation financière à la suite d'une maladie, d'un accident, d'une incapacité ou d'une invalidité, si l'activité sous-jacente n'est pas exercée sur une base technique similaire à celle de l'assurance Vie, autres que les engagements considérés comme relevant de l'assurance frais médicaux ou de l'assurance accidents du travail"[8].

Comme nous pouvons le constater, les définitions et la nature du risque de ces deux lignes de business sont relativement proches. De plus, les produits rentrant dans ces lignes d'activité ne représentent qu'une faible proportion de l'activité de GIARD : bien que cette activité augmente depuis 2014, elle demeure inférieure à 1%. C'est ainsi que les produits de ces deux lignes d'activité sont rassemblés en un unique portefeuille *Health*.

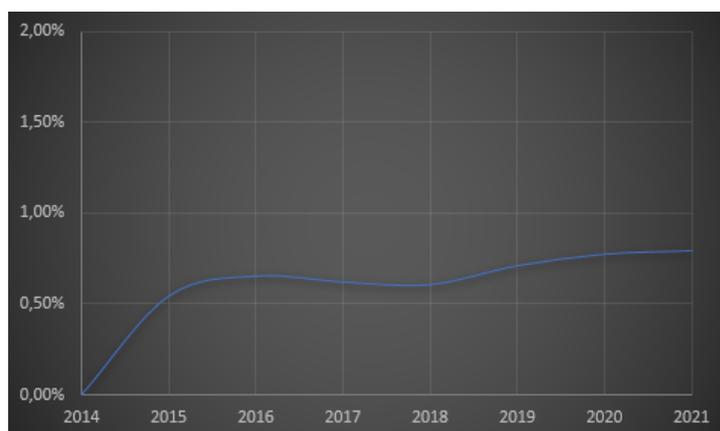


FIGURE 3.1 – Evolution de la part de primes acquises de la LoB *Medical Expense* et *Income Protection* dans GIARD

Si nous regardons le montant des primes brutes et des sinistres brutes, nous remarquons qu'ils augmentent conjointement ce qui coïncide avec la tendance haussière de l'activité que nous avons observé sur le graphique précédent.

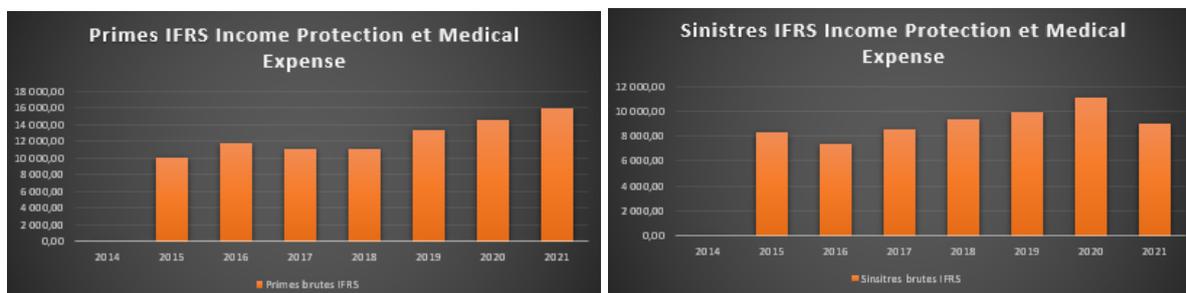


FIGURE 3.2 – Primes acquises et sinistres de la LoB *Medical Expense* et *Income Protection* dans GIARD (en M€)

Nous pouvons remarquer que les frais, et plus particulièrement les frais de gestions, sont assez volatiles pour ces deux lignes de business. D'ailleurs, ces frais de gestions ne semblent pas évoluer de la même manière que les montants de sinistre. Effectivement, depuis 2018, le montant des sinistres a tendance à augmenter alors que le montant des frais de gestion diminue. A contrario, les frais d'acquisition semblent évoluer conjointement avec le montant des primes.

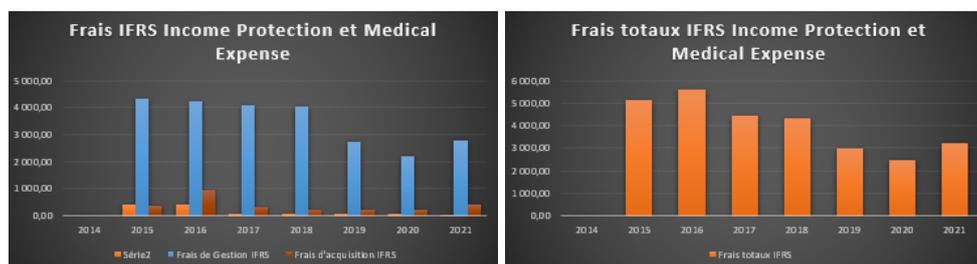


FIGURE 3.3 – Différents frais de la LoB Motor dans GIARD (en M€)

Le portefeuille "*Health*" n'étant pas réassuré, le SCR prime brut est égale au SCR net et il est de 2,56M d'euros.

3.2.2 Responsabilité civile des véhicules à moteur

La responsabilité civiles des véhicules à moteur, aussi appelé *Motor Vehicule Liability* inclut "les engagements qui couvrent toutes les responsabilités découlant de l'utilisation d'un véhicule terrestre à moteur (y compris la responsabilité du transporteur)"[8].

Pour GIARD, cette ligne d'activité est composée de 7 portefeuilles et ne possède pas de portefeuille catastrophe. Elle représente environ 10% de l'entité étudiée en termes de primes acquises brutes; nous pouvons d'ailleurs remarquer que cette part a légèrement tendance à diminuer dans les dernières années.

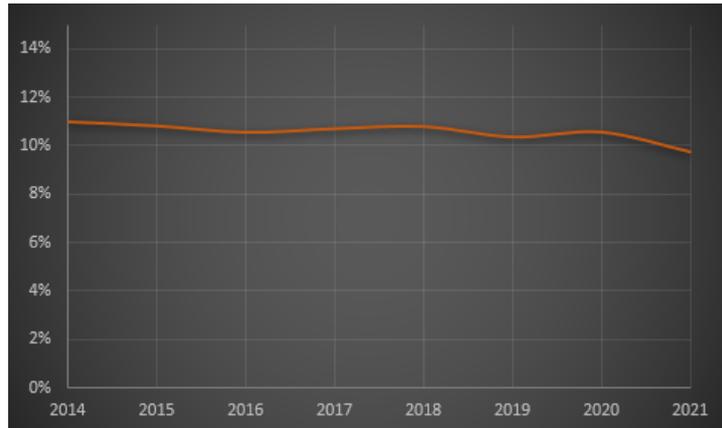


FIGURE 3.4 – Evolution de la part de primes acquises de la LoB Motor dans GIARD

Nous pouvons remarquer que les primes acquises restent relativement stables autour de 195 millions d’euros mais que le montant des sinistres a augmenté en 2018 pour se stabiliser autour de ce nouveau niveau.

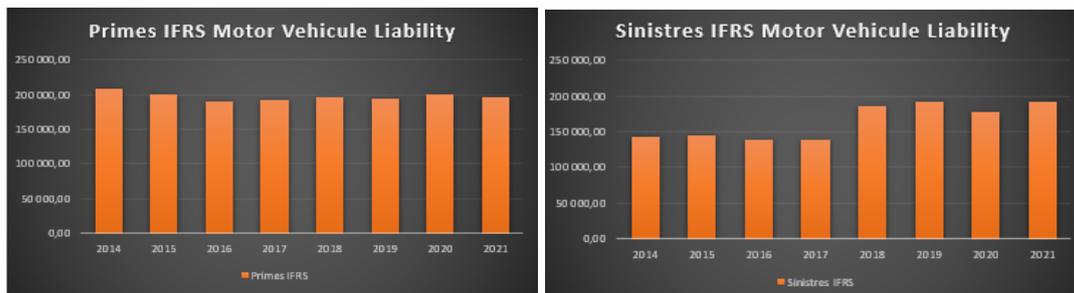


FIGURE 3.5 – Primes acquises et sinistres de la LoB Motor dans GIARD

En ce qui concerne les frais, nous pouvons observer que les frais d’acquisition sont les plus importants; effectivement, ce marché étant très concurrentiel, des montants importants doivent être utilisés dans le marketing et dans la publicité afin d’attirer des nouveaux clients en plus des commissions versées aux intermédiaires. Nous observons aussi de légères variations des montants des différents frais dans le temps sans pour autant observer de réelles variations sur le total des frais. Ainsi, nous pouvons supputer que l’allocation des frais change parfois d’une année à l’autre.

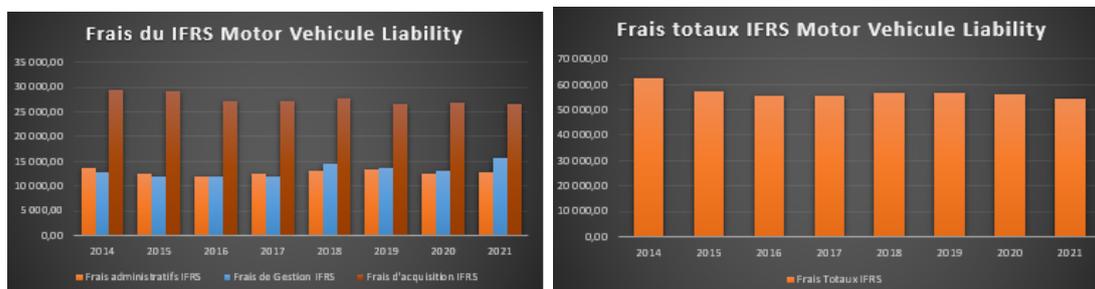


FIGURE 3.6 – Différents frais de la LoB Motor dans GIARD

Enfin, à titre indicatif, en 2021, le SCR de prime brute de la ligne d'activité "Responsabilité civile des véhicules à moteur" est de 152,1M€ et le SCR net est de 84,62M€.

3.2.3 Autres assurances des véhicules à moteur

Cette *LoB*, aussi appelée *Other Motor*, inclut "les engagements qui couvrent tout dommage subi par les véhicules à moteur terrestres (y compris les véhicules ferroviaires)"[8].

Elle est composée de 5 portefeuilles non-catastrophes et de 1 portefeuille catastrophe (tempête). Ces 6 portefeuilles totalisent environ 18% de l'activité de l'entité que nous étudions, nous remarquons d'ailleurs que, comme pour la ligne d'activité précédente, cette activité a tendance à diminuer depuis 2014.

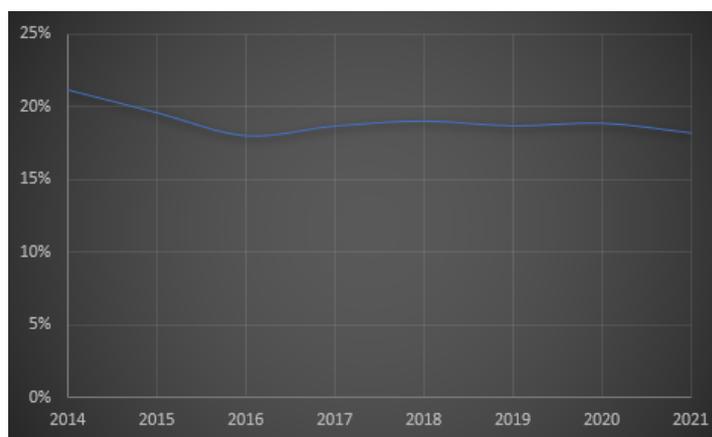


FIGURE 3.7 – Evolution de la part de primes acquises de la *LoB Other Motor* dans GIARD

Étant donné que nous avons des portefeuilles non-catastrophes et catastrophes, *a fortiori* nous avons une allocation des primes et des sinistres en deux catégories pour cette ligne d'activité. Par la suite, nous allons considérer les primes et les sinistres dans leur ensemble (la somme du catastrophe et du non catastrophe). Toutefois, le catastrophe et le non-catastrophe se diversifiant à hauteur de 25%, nous considérons directement la somme diversifiée des sinistres et non la somme "*standalone*"⁶.

En nous intéressant à l'évolution des primes, nous remarquons qu'après une décroissance des primes acquises jusqu'en 2016 nous constatons une légère augmentation de celle-ci. Ainsi, les primes semblent donc croître moins vite que les autres activités de notre entité. Le montant des sinistres indemnisés quant à lui semble varier un peu plus que les primes et semble évoluer à contre-courant des primes.

Ce double effet est d'autant plus visible lorsque nous regardons l'évolution du ratio S/P, nous remarquons en effet avec la courbe de tendance (droite bleue) que le ratio a tendance à diminuer sur la période étudiée. Effectivement, nous avons une baisse de plus de 10% entre 2014 et 2021 avec un pic négatif à 41% en 2020, soit une baisse de plus de 30% par rapport à 2014, s'expliquant majoritairement par le SARS CoV 2 et ses confinements.

6. $Sinistres_{standalone} = Sinistres_{cat} + Sinistres_{non-cat} \leq Sinistres_{diversifie}$

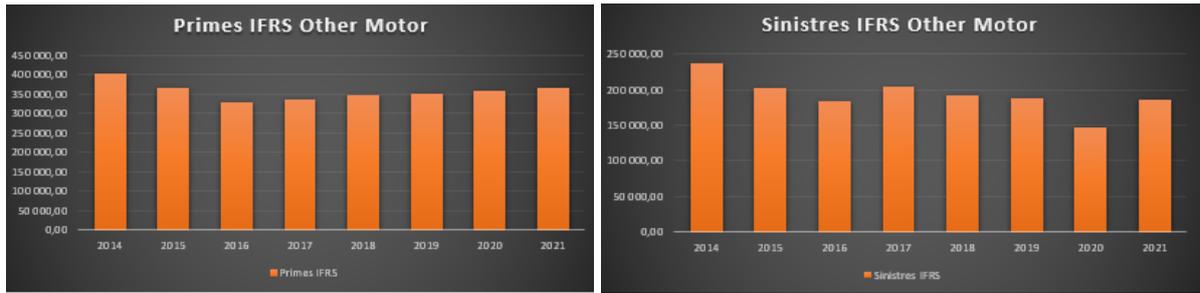


FIGURE 3.8 – Primes acquises et sinistres de la LoB *Other Motor* dans GIARD

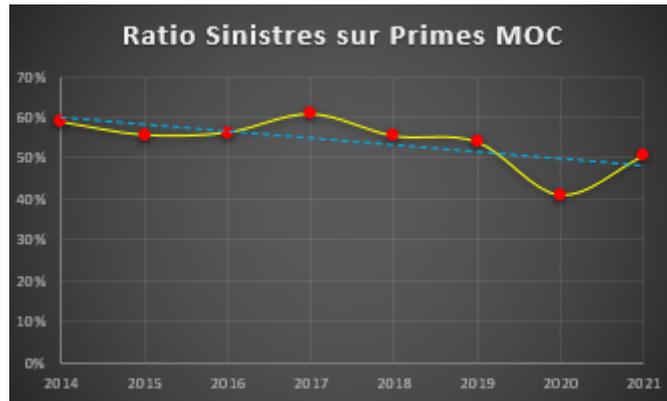


FIGURE 3.9 – Sinistres sur Primes de la LoB *Other Motor* dans GIARD

Lorsque nous nous intéressons aux frais, nous remarquons que ce montant semble évoluer dans le même sens que les primes ceci pouvant s’expliquer par le fait les frais majoritaires sont les frais d’acquisition qui évoluent conjointement avec le montant des primes. De plus, nous pouvons remarquer que, mise à part l’année 2017, le montant des frais de gestion semble évoluer dans le même sens que le montant des sinistres.

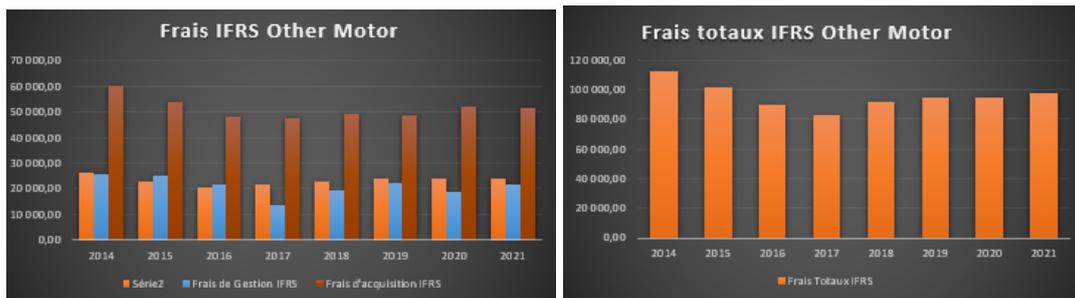


FIGURE 3.10 – Différents frais de la LoB *Other Motor* dans GIARD

Étant donné que nous avons des portefeuilles CAT et non-CAT et que Generali modélise le risque de catastrophe et le risque de prime de la même manière, nous allons avoir deux SCR : un SCR prime et un SCR CAT. La ligne de business des autres assurances des véhicules à moteur pour GIARD a un SCR prime brut de 37,20 millions d’euros et un SCR catastrophe brut de 58,00 millions d’euros. En passant au net de réassurance, nous avons un SCR prime de 36,95 millions d’euros et un SCR catastrophe de 17,35 millions d’euros.

3.2.4 Maritimes, aériens et transports

Cette ligne d'activité, souvent abrégée MAT, inclut "les engagements qui couvrent tout dommage subi par les véhicules fluviaux, lacustres ou maritimes, les aéronefs et tout dommage subi par les marchandises transportées ou les bagages, quel que soit le moyen de transport. Cette ligne d'activité inclut également tous les passifs découlant de l'utilisation d'aéronefs ou de navires, bateaux ou embarcations naviguant sur la mer, les lacs, les rivières ou les canaux (y compris la responsabilité du transporteur)"[8].

La LoB MAT est composée de huit portefeuilles (non catastrophes) qui représentent environ 9% de l'activité de l'entité considérée. Cette proportion fluctue légèrement mais reste aux alentours de ces 9% depuis 2016.

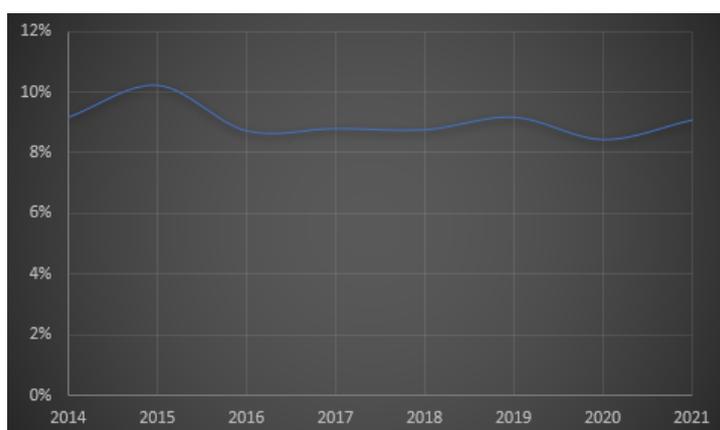


FIGURE 3.11 – Evolution de la part de primes acquises de la LoB MAT dans GIARD

Nous pouvons remarquer que les primes acquises suivent la tendance du graphique précédent et restent relativement stables alors que le montant des sinistres, lui, ne fait que diminuer depuis 2014 et vient se stabiliser depuis l'année dernière alors même que nous observons une augmentation des primes sur celle-ci. Les frais dans leur ensemble semblent ne pas varier énormément, mise à part en 2016, nous remarquons donc que les produits de cette ligne d'activité semblent s'améliorer en terme de rentabilité.



FIGURE 3.12 – Primes acquises et sinistres de la LoB MAT dans GIARD

Lorsque nous regardons les différents types de frais, nous remarquons que les frais administratifs restent relativement stables alors que les deux autres frais varient plus. En effet,

les frais de gestion diminuent de plus en plus au fil des années alors que les frais d'acquisition semblent évoluer inversement : nous pouvons penser encore une fois à une nouvelle façon d'allouer les frais dans les différentes catégories. Cette hypothèse reste à prendre avec précaution car les frais de gestion et les frais d'acquisition semblent suivre respectivement la tendance du montant des sinistres et des primes.

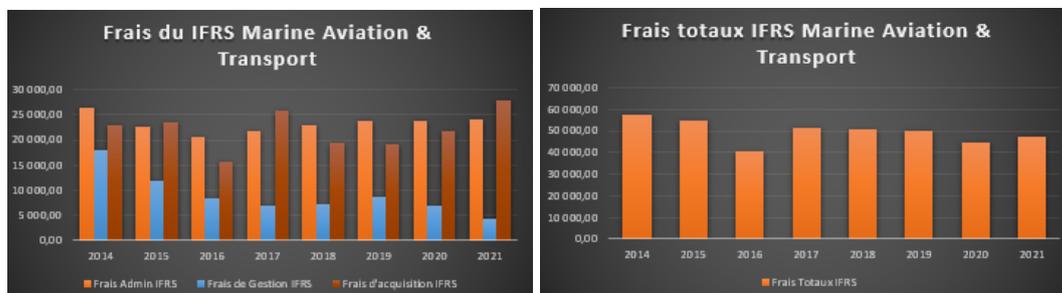


FIGURE 3.13 – Différents frais de la LoB MAT dans GIARD

Enfin, la ligne de business "Maritimes, aériens et transports" a un SCR prime brute de 214,51M d'euros et, en appliquant la réassurance, nous obtenons un SCR de 38,87M d'euros.

3.2.5 Incendies et autres dommages aux biens

Cette *LoB*, aussi appelé *Fire and other damage to property*", inclut les engagements qui couvrent tout dommage subi par les biens ne relevant ni de l'assurance des véhicules à moteur ni de l'assurance maritime, aérienne et du transport, par suite d'un incendie, d'une explosion, d'éléments naturels y compris une tempête, la grêle ou le gel, de l'utilisation d'énergie nucléaire, d'un affaissement de terrain ou d'un autre événement tel qu'un vol." [8]

La *LoB Fire* est la ligne d'activité prédominante de GIARD, elle représente environ 50% de son business total. Elle est composée de 35 portefeuilles non-catastrophes et de 14 portefeuilles catastrophes. Les portefeuilles catastrophes font référence aux catastrophes naturelles "loi française" c'est-à-dire les événements naturels reconnus par arrêtés ministériels mais aussi aux autres événements climatiques comme les tremblements de terre, les inondations, les sécheresses et les tempêtes.

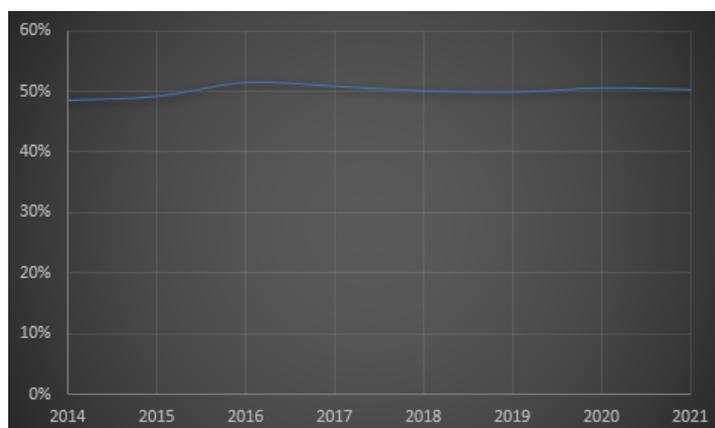


FIGURE 3.14 – Évolution de la part de primes acquises de la LoB Fire dans GIARD

Comme nous avons des portefeuilles catastrophes en plus de portefeuilles non-catastrophes, comme pour la *LoB MOC* que nous avons vu à la page 20, nous allons considérer directement la somme des primes et sinistres CAT et non CAT en ayant appliquée le facteur de diversification. Les primes brutes pour cette ligne de business restent stables alors que les sinistres ont tendance à diminuer. Cependant, l'année 2021 voit une légère augmentation des sinistres pouvant certainement s'expliquer par une augmentation du business étant donné que nous pouvons aussi observer une augmentation du volume de primes brutes.

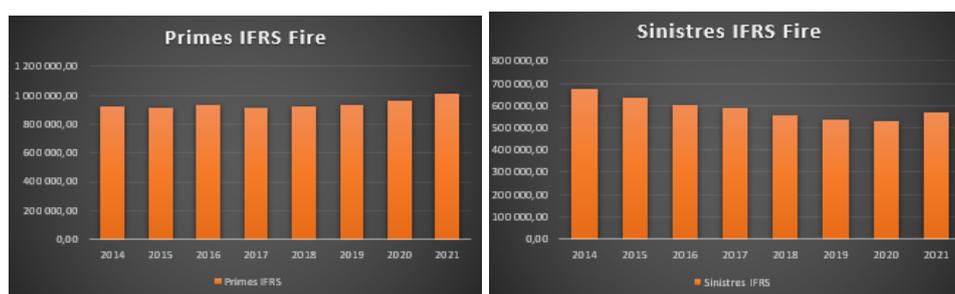


FIGURE 3.15 – Primes acquises et sinistres de la *LoB Fire* dans GIARD (en M€)

À l'image des primes, les frais ont une certaine stabilité sur la plage temporelle observée. En effet, nous pouvons remarquer que la partie des frais qui pourrait évoluer de la même manière que les sinistres, les frais de gestion, ne semblent l'être : le montant des sinistres diminue de 2014 à 2021 alors que le montant des frais de gestion reste globalement stable. Nous intuitions aussi que les frais d'acquisition évoluent conjointement avec le montant des primes acquises : bien que ces frais soient assez stables, nous pouvons remarquer que les années où les primes augmentent légèrement, à savoir 2016, 2020 et 2021, le montant des frais d'acquisition augmentent légèrement aussi.

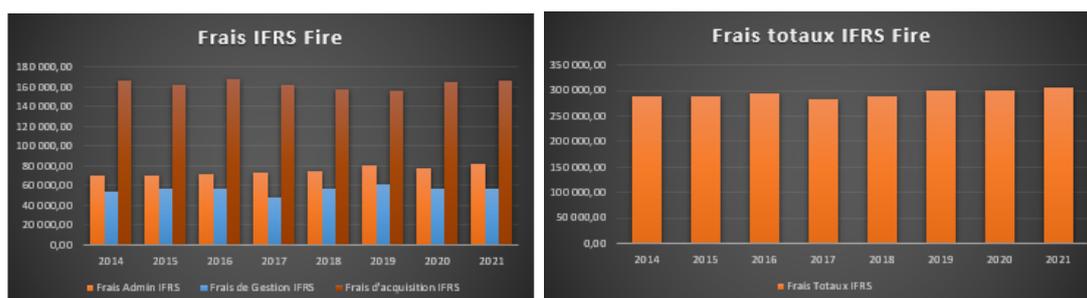


FIGURE 3.16 – Différents frais de la *LoB Fire* dans GIARD (en M€)

Enfin, sur la ligne d'activité "Incendies et autres dommages aux biens", nous avons un SCR primes brut 448,18 millions d'euros et un SCR catastrophe brut de 564,88 millions d'euro (sans prise en compte de la diversification inter-module). Puis en appliquant les cessions liées à la réassurance mise en place par Generali, nous obtenons un SCR primes net de 126,67M d'euros et un SCR catastrophe net de 107,68M d'euros.

3.2.6 Responsabilité Civile Générale

La ligne de business "Responsabilité Civile Générale", appelé "*Third Party Liability*" inclut "les engagements qui couvrent tous les passifs ne relevant pas de l'assurance responsabilité civile des véhicules à moteur ou de l'assurance maritime, aérienne et du transport"[8].

La ligne d'activité de la responsabilité civile générale est composée d'aucun portefeuille catastrophe et de dix portefeuilles hors catastrophes. Ces dix portefeuilles totalisent 12% de l'activité de GIARD ; pourcentage qui est en légèrement augmentation depuis 2014.

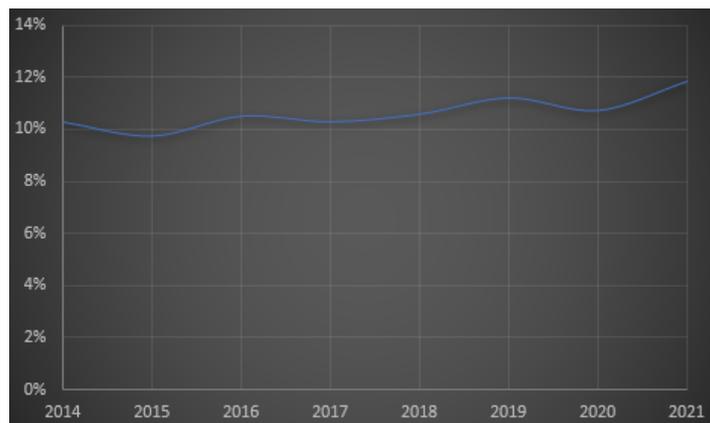


FIGURE 3.17 – Evolution de la part de primes acquises de la LoB *Third Party Liability* dans GIARD

Pour cette *LoB*, d'une part, nous avons un montant de primes brutes qui augmentent à partir de 2018 après une période d'équilibre, d'autre part, nous constatons un relatif équilibre sur le montant de sinistres jusqu'en 2018 suivi d'une décroissance. Il semble donc que le montant des sinistres évoluent à contre-sens du montant des primes.

En effet, lorsque nous regardons l'évolution du ratio sinistres sur primes [3.2.6], nous passons d'un ratio toujours supérieur à 80% avant 2018 à un ratio proche de 65% à partir de cette année. Ce changement vient se produire juste après l'année 2017 qui s'est illustrée par un S/P élevé, nous pouvons supposer que la baisse du S/P est la conséquence de décisions prises par Generali.



FIGURE 3.18 – Primes acquises et sinistres de la LoB *Third Party Liability* dans GIARD (en M€)



FIGURE 3.19 – Évolution du ratio sinistres sur primes de la LoB *Third Party Liability* de GIARD

Les frais totaux de cette *LoB* semblent évoluer de la même manière que les primes brutes ; ceci s’expliquant par le fait que les frais d’acquisition évoluent conjointement avec les montant des primes. A contrario, les frais de gestion ne semblent pas évoluer en phase avec les sinistres : ils sont plutôt stables depuis 2018 alors que, comme nous l’avons déjà évoqué, le montant des sinistres a tendance à diminuer.

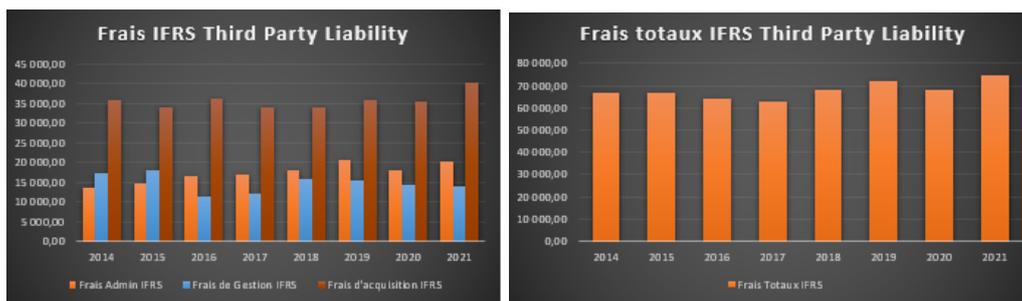


FIGURE 3.20 – Différents frais de la LoB *Third Party Liability* dans GIARD (en M€)

Enfin, remarquons que le SCR prime brute de cette ligne d’activité est de 94,78M d’euros et, en appliquant les cessions dues aux programmes de réassurances, nous obtenons un SCR de 46,90M d’euros.

Dans cette partie, nous avons particulièrement évoqué les contraintes réglementaires notamment les exigences de capital des risques de souscription non-vie. Dans la suite de ce mémoire, nous allons nous intéresser à la méthode utilisée dans le modèle interne de Generali pour calculer les exigences de capital pour les risques de prime et de catastrophe que nous avons évoquée dans la sous-partie précédente.

Deuxième partie

Risque de prime dans le Modèle Interne

Chapitre 4

Modèle actuel pour l'estimation du risque de prime

Dans la présente partie, nous allons nous intéresser à la méthodologie retenue par *Generali France* pour modéliser le risque de prime et de catastrophe.

Rappelons d'abord que le risque de prime concerne le risque de sous-tarification des produits d'assurance. En d'autres termes, le risque de prime est le risque que les primes ne soient pas suffisantes pour payer les montants découlant des sinistres et des frais. De plus, comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la partie Risque de prime & réserve, dans le modèle interne de *Generali*, le risque de catastrophe et le risque de prime sont modélisés de la même façon. Effectivement, la différence entre le risque de prime et le risque de catastrophe se situent uniquement dans la nature du risque sous-jacent : le risque CAT prend en compte uniquement les événements avec une extrême volatilité.

Dans le modèle interne, pour les risques de souscription non-vie, nous distinguons trois périmètres de modélisation : le modélisé, le semi-modélisé et non-modélisé. Le périmètre modélisé se réfère aux portefeuilles auxquels le risque peut être évalué en considérant les historiques de sinistres grâce à de la donnée appropriée, adéquate et complète. Certaines branches peuvent manquer en profondeur d'historique, ainsi les méthodes d'estimation utilisées dans le périmètre modélisé ne seraient pas adéquates pour ces branches : on parle alors de périmètres semi-modélisés. Enfin, d'autres branches peuvent ne pas être modélisées étant donné la qualité et la profondeur de l'historique des données ou par le manque d'homogénéité des branches considérée. Nous pouvons noter que chez *Generali France*, seule la réassurance interne n'est pas modélisée.

Il est à noter que l'évaluation des risques doit se faire à la maille *LoB SII* mais un autre choix de granularité (plus faible) peut être choisi à condition qu'il soit justifié qualitativement et quantitativement auprès du groupe. D'ailleurs, la calibration des risques se fait à la maille portefeuille afin d'avoir des groupes de risque le plus homogènes possible que l'on agrège ensuite par ligne d'activité puis par entité : on parle alors d'approche *Bottom-Up*.

Nous pouvons d'ores et déjà présenter les trois étapes importantes du calcul du SCR de prime et de catastrophe :

- **Paramétrisation** qui consiste en une étape de traitement de nos données puis d'une évaluation statistique de nos sinistres.
- **Évaluation de l'exigence de solvabilité brute** où, en utilisant les résultats de la partie précédente, nous allons effectuer des simulations afin de déterminer notre SCR.
- **Application de la réassurance** qui consiste à prendre en compte les différents traités de réassurance et de passer du SCR brut au SCR net.

4.1 Paramétrisation

La première étape est la paramétrisation, ou la calibration, dont le but est d'identifier la distribution de probabilité décrivant le mieux les sinistres de chaque portefeuille à partir de l'historique des sinistres et de la nature des risques sous-jacent.

Cette première étape est elle-même divisée en plusieurs étapes :

1. Ventilation des sinistres ;
2. Mise en *As-If* ;
3. Projection des sinistres à l'ultime ;
4. La calibration des lois des sinistres.

4.1.1 Ventilation des sinistres

Les sinistres vont être ventilés en trois ¹ catégories différentes : les sinistres attritionnels, les sinistres graves et les sinistres catastrophes. Comme nous l'avons déjà expliqué la ventilation en catastrophe/ non-catastrophe est nécessaire du fait de la volatilité qui est beaucoup plus importante pour les catastrophes et de la fréquence qui est beaucoup plus faible. Comme les sinistres graves sont plus exceptionnels, une segmentation entre attritionnels et graves doit être réalisée. La détermination du seuil de passage en sinistre grave doit se baser sur des données statistiques (utilisation de la théorie des valeurs extrêmes) ou sur des données qualitatives comme les traités de réassurance (notamment les priorités des excédents de sinistres). Tous les sinistres n'excédant pas ce seuil seront donc considérés comme un sinistre attritionnel.

1. Quatre en comptant les *man-mades* à voir dans la partie 4.1.4

4.1.2 Mise en *As-If*

Étant donné l'importance de la prise en compte de la valeur temporelle des sinistres déjà survenue, nous devons mettre les sinistres passés en *as-if*. En effet, il est important de prendre en compte l'évolution de divers facteurs socio-économique, telle que l'inflation, entrant dans l'évaluation des sinistres futures ainsi que de prendre en compte l'évolution de la population assurée. En outre, la mise en *as-if* permet de pouvoir traiter les paiements de sinistres de manière homogène ; sans cette étape, les sinistres des différentes années ne seraient pas réellement comparables. Nous appliquons donc un vecteur d'inflation par portefeuille, nous présentons une liste non-exhaustive des indices d'inflation utilisés :

- l'indice FFB² est utilisé pour le portefeuille de construction. La FFB est une organisation professionnelle qui a pour but de défendre les intérêts des entreprises travaillant dans le bâtiment. Elle émet l'indice FFB (anciennement nommé FNB) afin de rendre compte de l'évolution du coût de la construction.
- le PMSS³ en euros par mois est utilisé comme indice d'inflation pour les portefeuilles de la ligne de business *Medical expense*. Le choix de cet indice est cohérent car il est utilisé comme barème pour le calcul des indemnisation journalières, des pensions d'invalidité maximales. Notons qu'il est revalorisé chaque année en fonction de l'évolution du salaire minimum.
- l'indice des prix des produits agricoles à la production est l'indice choisi pour inflater le portefeuille *farming*. Cet indice "permet de mesurer l'évolution des prix perçus par les agriculteurs en contrepartie des produits qu'ils livrent" (INSEE). Il est construit sur des échantillons de transactions portant sur 158 produits agricoles et 46 regroupements de produits. Cet indice permet d'observer les variations de prix de l'agriculture et, étant donné que les garanties du portefeuille sont majoritairement de la perte d'exploitation, il semble donc cohérent que cet indice représente bien le risque sous-jacent.

Prenons un exemple afin de comprendre comment une mise en *as-if* s'effectue. Considérons un sinistre se déroulant en 2020 qui nous coûte 100 qui se paye en deux années : 70% la première année et 30% la seconde année. La question est donc de savoir combien coûterait ce sinistre si il se déroulait aujourd'hui en 2022. Nous allons donc capitaliser les coûts avec le taux d'inflation retenu.

$$\begin{aligned} X_{2022} &= X_{1,2020}(1 + i_{2020 \rightarrow 2021})(1 + i_{2021 \rightarrow 2022}) + X_{2,2020}(1 + i_{2021 \rightarrow 2022})(1 + i_{2022 \rightarrow 2023}) \\ &= 70(1 + i_{2020 \rightarrow 2021})(1 + i_{2021 \rightarrow 2022}) + 30(1 + i_{2021 \rightarrow 2022})(1 + i_{2022 \rightarrow 2023}) \end{aligned}$$

Où :

- X_{2022} est le coût *as-ifé* du sinistre considéré ;
- $i_{X \rightarrow Y}$ désigne le taux d'inflation retenu de l'année X à Y ;
- $X_{i,X}$ désigne la i^{me} année de règlement du sinistre survenu en X.

2. Fédération Française du Bâtiment

3. Plafond Mensuel de Sécurité Sociale

4.1.3 Projection à l'ultime

Pour la calibration des risques de prime et de catastrophe, la calibration des lois de la sinistralité se fait sur les sinistres dans leur vision à l'ultime. La méthode utilisée pour projeter les sinistres est une généralisation de la méthode de Chain-Ladder : la méthode des *link ratios*. La différence entre ses deux méthodes se situe dans le calcul du facteur de développement ; dans *Chain-Ladder*, le facteur de développement de l'année t à $t+1$ se calcule comme la somme de la colonne de l'année de développement $t+1$ moins celle de l'année t alors que, dans la méthode des *link ratios*, le calcul de ce facteur est un peu plus "libre". En effet, on peut choisir de faire des exclusions d'années, prendre comme facteur de développement uniquement le développement de la dernière année, la moyenne des développements des trois dernières années, etc.

Les données des sinistres vont être ventilées en trois triangles : un triangle de nombre, un triangle des paiements versés par l'assureur et un triangle des provisions pour sinistres. Nous pouvons obtenir le triangle de charges totales en sommant le triangle de provision avec le triangle des payés.

Pour chaque année de survenance, le ratio entre le nombre ultime de sinistres et l'exposition, nous donne le vecteur de fréquence ultime. Les mesures d'exposition adéquates sont le nombre de risques par année, le nombre de polices, le montant des primes ou le montant total assuré. En l'occurrence, chez *Generali France*, la mesure d'exposition choisie est le montant des primes afin d'obtenir le nombre de sinistres par euro de prime. Une analyse graphique peut être menée afin de détecter une potentielle tendance, si tel est le cas, un processus de *de-trending* pourra être appliqué afin de rendre plus homogène nos données et de les décorrélérer.

Pour chaque année, le ratio des charges ultimes payées par l'assureur sur le nombre ultime de sinistre nous donne le vecteur de sévérité moyenne. De la même manière que pour la fréquence, une analyse graphique peut être réalisée afin de détecter et d'enlever une tendance.

4.1.4 Calibration des lois

Comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, les sinistres sont ventilés en trois catégories, et, celles-ci ne vont pas être calibrées de la même manière. De plus, même si le risque de catastrophe s'évalue de la même manière que le risque de prime, la calibration de ce premier est différente.

Sinistres attritionnels

Il existe plusieurs méthodes pour modéliser les sinistres attritionnels, méthodes qui dépendent des données à notre disposition. Il faut donc choisir le modèle le plus adéquat pour chaque groupe homogène de risque.

Approche fréquence - sévérité moyenne. Dans cette approche, nous allons considérer les deux vecteurs que nous avons définis en fin de partie précédente. Nous supposons

aussi que la sinistralité se décompose en une fréquence (annuelle) et en un coût moyen (aussi annuel). Cela se traduit par l'égalité suivante :

$$X = F \cdot S$$

Où nous avons :

- X est le montant total des sinistres encouru sur l'année considérée;
- F est la fréquence annuelle de nos sinistres;
- S est la sévérité moyenne de nos sinistres.

Ensuite, l'objectif est de trouver une loi de probabilité adéquate pour modéliser la sévérité et la fréquence des sinistres de notre groupe homogène de risque. Pour cela, nous allons considérer un certain nombre de lois de probabilité :

- pour la fréquence : la loi de Poisson, la loi négative binomiale;
- pour la sévérité moyenne : la loi normale, la loi log-normale et la loi gamma.

Ce choix sur les lois se fait à partir d'analyses graphiques (QQ plot, *etc*), d'analyses statistiques (test d'adéquation du χ^2) et à partir d'analyses numériques en comparant les données théoriques avec les données empiriques (moyenne, quantiles, *etc*). Les paramètres des lois sont estimés par des méthodes classiques : méthodes des moments ou méthode du maximum de vraisemblance.

Approche fréquence - sévérité individuelle. Dans cette approche, la fréquence et le coût sont modélisés dans une approche sinistre par sinistre. Cette modélisation peut être illustrée par l'égalité :

$$X = \sum_{i=0}^N S_i$$

Avec :

- X la même variable que précédemment;
- S_i la sévérité du i^{me} sinistre survenu lors de l'année considérée;
- N le nombre aléatoire de sinistres survenus.

Le choix des lois, l'estimation des paramètres et les méthodes utilisées pour comparer nos résultats théoriques aux résultats empiriques sont les mêmes que pour l'approche fréquence - sévérité moyenne.

Approche agrégée. Dans le cas où les données sur les nombres ne sont pas disponibles, les méthodes de fréquence - sévérité ne sont plus utilisables. Nous pouvons cependant considérer une méthode dite agrégée où seuls les montants des sinistres sont considérés.

Comme dans les deux méthodes précédentes, les sinistres payés (ou encouru dans le cas où la segmentation n'est pas possible) vont être inflatés puis projetés à l'ultime.

Ensuite, nous allons sélectionner la meilleure distribution de probabilité pour modéliser les charges totales. L'estimation des paramètres des lois se fait toujours par maximum de vraisemblance et par la méthode des moments. Le choix des distributions de probabilité va être le même que lorsque l'on considérait la sévérité dans les approches précédentes.

Approche par loss ratio. Si les données de notre historique ne sont pas fiables, aucunes des méthodes évoquées précédemment ne va être applicables. Une méthode simplifiée, appelée méthode de *Loss Ratio*, peut être appliquée à condition de faire des hypothèses supplémentaires. En effet, dans ce cas de figure, nous devons faire des hypothèses sur l'estimation des primes futures, sur le ratio S/P ultime et notamment sur le coefficient de variation et la distribution de probabilité appropriée pour représenter le comportement des sinistres. De manière générale, nous considérons soit un modèle normal, soit un modèle log-normal soit un modèle Gamma.

Sinistres larges

La méthode utilisant les triangles de liquidation n'est plus adaptée lorsque nous considérons les sinistres plus exceptionnels du fait de leur plus grande volatilité. Cependant, en ce qui concerne la fréquence des sinistres larges, rien ne change quant aux projections des nombres et aux ajustements de lois par rapport à l'approche fréquence - sévérité individuelle dont nous avons discuté précédemment.

En ce qui concerne la sévérité des sinistres, il convient de considérer l'évolution des montants payés et des montants pas encore payés pour chaque sinistre s'étant déroulé dans la décennie passée. Les sinistres payés doivent être inflatés comme pour les sinistres attritionnels étant donné que la valeur temporelle de l'argent doit être rapportée à la fin de l'année t .

Une loi de probabilité doit ensuite être choisie pour modéliser la sévérité des sinistres individuels. De la même manière que pour la sévérité des sinistres attritionnels, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments pour estimer les paramètres des lois considérées et nous utilisons les mêmes méthodes pour comparer les différentes lois théoriques à nos données empiriques. Nonobstant, nous utilisons un éventail plus large de lois de probabilité pour modéliser la sévérité des sinistres larges notamment des lois à queue lourde. En effet, nous examinons les lois suivantes : les lois de Pareto et Pareto généralisées, la log-normale *shiftée* à droite ou tronquée à gauche, les lois Gamma, Weibull, Burr et Exponentielle.

Sinistres catastrophes

Étant donné la nature des sinistres catastrophes, il semblerait logique de les modéliser comme des sinistres larges. Cependant, nous pouvons aussi utiliser des modèles CAT spécia-

lisés afin d'avoir une meilleure fiabilité de nos résultats. Le modèle interne intègre ensuite les sorties fournies par le modèle utilisé. Nous allons décrire comment fonctionne les modèles utilisés.

Les modèles CAT sont des modèles scientifiques qui simulent les effets qu'auraient des catastrophes sur un portefeuille d'assurance en utilisant en données d'entrée des données telles que l'exposition du portefeuille pour un péril donné ou encore des caractéristiques sur le territoire concerné. Ces modèles ont donc pour but d'estimer la perte que subirait un portefeuille pour un péril donné sur un territoire donné. Ils sont paramétrés sur un historique de marché ainsi que sur l'expérience des pertes connus. Ils nous fournissent une distribution d'événement dans une table d'événement.

Étant donné que dans le modèle interne nous utilisons le modèle RMS, tout ce que nous allons dire par la suite s'applique à ce modèle. Les composantes principales d'un modèle de catastrophe sont les suivantes :

- L'Event Data Set⁴
- Le module de risque
- Le module de vulnérabilité
- Le module financier

L'EDS. L'EDS représente les fondements du modèle, il est une sorte de catalogue de tous les événements catastrophes significatifs pour chaque territoire et péril. Ces événements peuvent être stochastiques c'est-à-dire générés à partir de données historiques ou d'études scientifiques ou alors historiques *id est* des événements passés. Chaque événement va être caractérisé par différentes données :

- sa localisation *e.g.* l'épicentre d'un tremblement de terre;
- ses caractéristiques physiques *e.g.* l'intensité d'un tremblement de terre;
- sa fréquence d'occurrence;

Les corrélations entre les événements sont induites du modèle utilisé ou alors dérivées des sciences que le modèle utilise comme les modèles météorologiques. Idéalement, les différents événements devraient couvrir la totalité d'une zone/ d'un bassin⁵ afin de mieux prendre en compte les dépendances entre les pays.

Le module de risque. Le but de ce module est de calculer le risque d'un événement pour un endroit spécifique. Il va générer et simuler les effets d'un événement à partir des productions de l'EDS pour une localisation spécifique. Pendant les simulations, les événements de l'EDS vont générer différents niveaux de risques sur l'ensemble de la zone étudiée. L'estimation de ce risque va dépendre de plusieurs critères :

4. En français : l'ensemble des données d'événement

5. Par exemple, l'Atlantique nord pour les ouragans, Europe pour les tempêtes...

- l'intensité et les caractéristiques de l'événement : plus l'événement sera intense plus le péril sera élevé. Les caractéristiques de la zone étudiée vont aussi être déterminantes dans le niveau du péril. Par exemple, un ouragan dans une zone montagneuse ne fera pas autant de dégâts que sur une plaine.
- la distance entre l'événement et les éléments assurés : plus l'événement est éloigné des éléments assurés plus l'intensité sur ces éléments sera faible.
- des caractéristiques spécifiques à une zone précise peuvent aussi influencer le niveau de péril.

Le module de risque produit donc des paramètres qui seront utiles dans le module de vulnérabilité.

Le module de vulnérabilité. Le module de vulnérabilité associe les paramètres donnés par le module précédent avec les données d'exposition de la zone analysée. Cela va nous donner une estimation des dommages causés par l'événement sur les éléments assurés dans notre portefeuille : nous allons obtenir un ratio de dommages.

Les fonctions de vulnérabilité sont développées sur la combinaison des données historiques, de tests en laboratoire (comme les tables de tremblement de terre), de jugements d'experts et d'inspection post événements des sites touchés.

Les caractéristiques individuelles des éléments assurés vont aussi avoir une grande influence sur les dommages causés par le péril. Par exemple, si nous considérons de l'assurance construction ; l'âge du bâtiment, sa taille, la réglementation du pays vont être des caractéristiques influençant le taux de destruction causé par un péril.

Une fois que le niveau de dommages du portefeuille est produit, nous passons au module financier qui estimera le montant des pertes.

Le module financier. Une fois que nous avons nos ratios de destruction pour chaque élément assuré pour nos différents événements, nous pouvons donc calculer les montants des pertes en prenant en compte les coûts de reconstruction, les limites, les exclusions *etc.*

Les coûts sont calculés événements par événements avant d'être agrégés avec le reste du portefeuille d'assurance et de réassurance (les pertes sont calculées brutes et nettes de réassurance).

Pour calculer les pertes assurées, le ratio de dommage va être multiplié par la valeur des sommes assurées. En utilisant les techniques d'estimation appropriées, une distribution de la gravité va être ajustée pour chaque événement afin d'obtenir une distribution des pertes liées à chaque événement.

Le modèle catastrophe va donc faire toutes les étapes évoquées précédemment sur chacun des événements de l'EDS. Ils vont ensuite être agrégés pour créer une sortie qui représentera le comportement du portefeuille pour un péril et un territoire donné.

Dans le modèle financier de RMS, l'hypothèse d'indépendance entre les différents événements lors de l'étape d'agrégation est faite. En d'autres termes, cela signifie que le déroulement d'un événement n'impacte pas les occurrences des autres événements.

En considérant les événements individuellement, le modèle calcule les pertes moyennes, les écart-types et les valeurs d'exposition pour chaque perspective financière. Il va ensuite stocker ces sorties dans des **Event Loss Tables**⁶ où chaque perte sera calculée pour chaque événement. Les résultats des simulations vont donc être synthétisés de diverses manières :

- ELT qui contient l'identifiant de l'événement, sa fréquence, la perte estimée, son écart-type (une mesure de sa volatilité) et l'exposition (la perte maximale pour chaque événement).
- l'**Occurrence Exceeding Probability curves** qui est une courbe qui nous renseigne sur les montants que l'on peut s'attendre à dépasser pour un sinistre unique.

Ces outputs vont contenir les informations représentant la distribution des pertes totales d'un portefeuille.

Sinistres *Man Made*

Les *severe Man Made* sont des cas très particuliers de sinistres pour le risque de prime. Ils sont calibrés à partir de l'exposition du portefeuille, de l'expérience de Generali et des sinistres du marché⁷. La calibration se fait sur une approche fréquence - sévérité avec l'utilisation d'une loi de Poisson pour la fréquence et d'une loi de Pareto pour la sévérité.

4.2 Exigence de capital brute

Dans la partie précédente, nous avons regardé comment traiter nos données historiques et quelles méthodologies étaient utilisées afin d'identifier les distributions de probabilité représentant le mieux nos sinistres observés afin de, plus tard, les modéliser.

Dans la présente partie, nous allons nous intéresser à l'évaluation du résultat technique brut de réassurance puis à la manière retenue par Generali pour calculer son SCR. Commençons par définir le résultat technique :

$$TR_{GROSS} = P_{GROSS} - GE - AC - X_{GROSS}$$

Avec les variables :

1. TR_{GROSS} représente le résultat technique brut ;
2. P_{GROSS} représente le montant des primes acquises brutes estimées pour l'année suivante. A l'échelle d'une entité, ce montant est obtenu en sommant toutes les estimations des primes de tous les portefeuilles étant donné que ce montant est déterministe dans le modèle interne de Generali ;

6. tables d'événement

7. e.g. les attentats du *World Trade Center* en 2001, l'explosion de Beyrouth en 2020

3. GE représente les frais généraux qui sont introduit comme un pourcentage des primes de chaque groupe homogène qui, par la suite, est sommé car ils sont, eux aussi, déterministes;
4. AC représente les coûts d'acquisition des contrats, ils sont comme les frais généraux déterministes.
5. X_{GROSS} représente les sinistres que l'on estime pour l'année suivante. Nous allons expliquer ci-après comment cette variable est calculée.

Les sinistres sont donc la seule composante stochastique de notre résultat technique brute. Dans le modèle interne de Generali France, les sinistres sont estimés par une approche par simulation pour chaque groupe de risque homogène. Pour chacun d'entre eux, 50000 sinistres vont être générés à partir des distributions de probabilités qui ont été retenu dans la partie de Paramétrisation.

Comme nous l'avons déjà explicité précédemment, les sinistres larges et attritionnels sont modélisés à part. Afin d'avoir la somme totale des sinistres par groupe de risque, nous prenons en compte une diversification de 25%. Cela nous permet donc d'obtenir $X_{i,GROSS}$ représentant le montant (aléatoire) des sinistres pour le portefeuille i .

Une fois que nous avons pris en compte la dépendance entre les sinistres attritionnels et larges, il s'agit maintenant de prendre en compte le bénéfice de diversification entre les portefeuilles.

En effet, dans le risque de prime, nous avons deux niveaux de corrélation. Le premier se situe sur la corrélation entre les portefeuilles afin de capturer les dépendances entre les différents risques d'une LoB et le second niveau de corrélation permet de capturer les dépendances entre les différentes lignes d'activité. La calibration de ces dépendances se fait à partir de données historique des sinistres et avec un outil fourni par le Groupe.

Nous avons aussi la même structure de dépendance pour le risque CAT sauf que nous avons un niveau de dépendance supplémentaire. Effectivement, pour les risques modélisés par les ELT, une autre structure de dépendance doit être ajoutée afin de prendre en compte les dépendances entre les scénarios des pays et des différentes entités.

Précédemment, nous avons estimé la distribution de probabilité de notre résultat technique par ligne de business, nous allons maintenant voir comment évaluer le capital réglementaire. Comme nous l'avons déjà explicité précédemment, le risque de prime (et de catastrophe) quantifie le risque que les primes récoltées en $t+1$ ne soient pas suffisantes pour payer les sinistres (et les frais) en $t+1$; c'est en quelque sorte le risque que notre résultat technique soit inférieur à 0. Ainsi, le SCR pour un ligne de business k est défini comme le profit moyen estimé moins le quantile 0.5% de la distribution du résultat technique de la LoB considérée :

$$SCR_{k,GROSS} = \mathbb{E}(TR_{k,GROSS}) - VaR_{0,5\%}(TR_{k,GROSS})$$

Cela signifie que l'assureur sera capable de faire face aux sinistres catastrophes et non catastrophes (et à ses frais associés) dans 99,5% des scénarios possibles. En prenant en compte le fait que seul les sinistres sont stochastiques, nous pouvons remarquer que :

$$SCR_{k,GROSS} = \mathbb{E}(TR_{k,GROSS}) - VaR_{0,5\%}(TR_{k,GROSS})$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(P_{k,GROSS} - GE_k - AC_k - X_{k,GROSS}) - VaR_{0,5\%}(P_{k,GROSS} - GE_k - AC_k - X_{k,GROSS}) \\
&= P_{k,GROSS} - GE_k - AC_k - \mathbb{E}(X_{k,GROSS}) - (P_{k,GROSS} - GE_k - AC_k - VaR_{99,5\%}(X_{k,GROSS})) \\
&= VaR_{99,5\%}(X_{k,GROSS}) - \mathbb{E}(X_{k,GROSS})
\end{aligned}$$

Ainsi, dans le modèle interne de Generali, le SCR de primes (et catastrophes) brut peut-être vu comme la différence entre la *value at risk* de la sinistralité et de son espérance mathématique.

4.3 Exigence de capital nette

Jusqu'ici nous avons calculé le capital réglementaire sans la prise en compte de la réassurance. Le but est donc de prendre en compte les différents traités de réassurance proportionnelle et non-proportionnelle.

Définissons le résultat technique net de réassurance :

$$TR_{NET} = P_{NET} - EXP - PS - LS - X_{NET}$$

Où les variables correspondent à :

1. TR_{NET} : le résultat technique net de réassurance ;
2. P_{NET} : le montant des primes acquises estimées pour l'année t+1 net de réassurance. Elles sont calculées comme la différence entre les primes brutes et les primes de réassurance (cédées au réassureur). D'une part, en ce qui concerne les traités proportionnels, les primes de réassurance sont déterministes et sont définies contractuellement comme un pourcentage des primes de la cédante. D'autre part, pour les traités non-proportionnel, les primes de réassurance sont stochastiques : elles sont la somme entre un montant contractuel déterministe et un montant de primes de reconstitution. Elles sont donc stochastiques étant donné qu'elles dépendent des sinistres (stochastiques) cédées. En effet, lorsque des sinistres rentrent dans le cadre d'un traité non-proportionnel, la couverture est prise en compte uniquement si la portée n'est pas dépassée et, auquel cas, si une prime de reconstitution a été payée ;
3. $EXP = GE - AC - C$: les frais nets des commissions de réassurance payés par les réassureurs dans le cadre des traités de réassurance proportionnelle. Dans le cadre de la réassurance non proportionnelle, ce montant est donc fixé à 0. Dans le modèle interne de Generali, ce montant de commission dépend d'une variable d'entrée : en l'occurrence, à *Generali France*, il dépend du montant de prime et n'est donc pas stochastique ;
4. PS et LS : la participation aux gains ou aux pertes du réassureur qui peuvent être inclus dans un contrat de réassurance proportionnelle. Comme pour les commissions, ce montant est fixé à 0 si il n'y a pas de contrat de réassurance proportionnelle. Ces montants sont des entrées du modèle et dépendent des contrat de réassurance ;
5. X_{GROSS} : le montant des sinistres net de réassurance estimés pour l'année t+1. Ce montant est obtenu en soustrayant les sinistres cédés par les contrats proportionnels et non-proportionnels aux sinistres bruts. Le pourcentage de sinistres cédés (QP) et le nombre

de ligne (surplus) sont des inputs du modèle pour les proportionnels et le nombre de re-constitution (et la priorité et la portée) le sont aussi. De la même manière, les paramètres des *stop loss* sont des inputs ;

Les effets de diversification entre les portefeuilles et les *LoB* sont alors calculés pour les sinistres nets de la même façon que sur l'évaluation du brut de réassurance. Comme pour le calcul du SCR brut, nous calculons le SCR net comme la moyenne du résultat technique net moins le quantile 0,5%. Pour le portefeuille k , le SCR net se calcule de la manière suivante :

$$SCR_{k,NET} = \mathbb{E}(TR_{k,NET}) - VaR_{0,5\%}(TR_{k,NET})$$

Chapitre 5

Calcul de l'exigence de capital

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons travailler sur une segmentation en ligne de business et sur *Excel* (en-dehors du logiciel¹ utilisé usuellement par *Generali France*). Cependant, nous utiliserons les simulations de sinistres agrégées (puis les cessions de réassurance lors du passage au net) par *LoB* étant donné que la calibration se fait sur une maille plus fine ; nous ne pouvons pas directement simuler nos sinistres par ligne d'activité.

Ainsi, nous nous proposons, à partir de certaines sorties d'*Igloo*, de recalculer les SCR par ligne d'activité puis d'agréger nos données sur *Excel* afin de faire un contrôle avec les données officielles. Cette partie vise à expliquer plus en détail les différentes étapes que nous suivrons pour produire le SCR total d'une entité. .

Nous allons prendre en exemple deux lignes de business différentes : une contenant des sinistres catastrophes et une n'en contenant pas. La méthodologie est globalement la même mais nous expliquerons comment nous traiterons le CAT.

Medical expense & Income protection.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la partie 3.2.1, les deux lignes d'activité *Medical expense* et *Income protection* sont modélisées ensemble et ne présentent pas de sinistres catastrophes. De plus, les portefeuilles contenus dans cette ligne de business ne sont pas réassurés, ainsi, le résultat brut sera donc le même que le résultat net.

Pour calculer le SCR de prime pour cette ligne d'activité selon la méthode du modèle interne de *Generali*, nous avons besoin des estimations de primes futures, des estimations des frais futures et des 50000 simulations de nos sinistres futures.

Il faut bien noter que nos simulations de sinistres à la maille *LoB* provenant d'*Igloo* intègre déjà la diversification avec les autres lignes d'activité. Ensuite, pour chaque simulation de sinistres, le calcul du résultat technique est effectué en soustrayant les sinistres et les frais aux primes.

1. *Igloo*, logiciel créé par Willis Tower Watson

Sinistres Non Cat	Primes	Frais Acquisition	Frais de gestion	Frais administratif	Résultat technique
8902149,084	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-555 215,38
10584988,54	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-2 238 054,84
11123659,81	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-2 776 726,11
10542266,34	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-2 195 332,64
8568233,02	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-221 299,32
9687894,079	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-1 340 960,38
12491352,98	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-4 144 419,28
10589916,39	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-2 242 982,69
10322799,76	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-1 975 866,06
9887356,681	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	-1 540 422,98
8105550,789	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	241 382,91
8215392,247	10 609 747,99	366 092,66	1 616 072,02	280 649,62	131 541,45

FIGURE 5.1 – Données de sortie du modèle interne

Moyenne RT	-1 612 540,69
VaR 0,5%	-4 177 097,27
SCR Excel	2 564 556,59
SCR REP 22	2 564 547,40

FIGURE 5.2 – Comparaison SCR

Une fois les 50000 simulations de résultat technique obtenues, nous pouvons calculer la moyenne et la *Value At Risk* 0,5%. Nous prenons la VaR 0,5% afin d'avoir le résultat technique minimal potentiel qui ne devrait être atteint qu'avec une probabilité 0,005 à horizon 1 an. Ceci correspond au quantile 99,5% des sinistres ce qui représente la pire perte que l'on atteindrait avec une probabilité 0,005 à horizon un an.

Une fois la moyenne et la *Value at Risk* calculées, nous pouvons calculer le SCR comme la soustraction de la première composante avec la deuxième. En comparant notre SCR brut calculé sur Excel avec le SCR officiel de la ligne d'activité *Medical expense & Income protection*, nous remarquons que l'écart est très faible (<0,001%).

Cette *LoB* ne faisant l'objet d'aucun traité de réassurance, le SCR brut correspond à notre SCR net.

Fire and other damage to property.

Pour cette ligne d'activité, nous avons des sinistres catastrophes et de la réassurance. Contrairement à l'exemple précédent, nous aurons des cessions à appliquer et nous obtiendrons un SCR Catastrophe et prime. Le calcul direct des SCR Cat et prime séparé est, en effet, rendu compliqué de par le fait que le *split* des primes futures en CAT/non CAT n'est pas disponible.

Pour pouvoir calculer le SCR brut, nous avons donc besoin des 50000 simulations des estimations des sinistres CAT et non CAT, des estimations des frais futurs et des primes futures. Comme pour l'exemple précédant, les simulations de sinistre provenant de *Igloo* intègrent déjà

la diversification des *LoB* et la diversification CAT/non CAT. Ainsi, pour avoir les sinistres totaux de cette ligne d'activité, il suffit de sommer les deux types de sinistres.

Sinistres Cat	Sinistres Non Cat	Primes	Frais Acquisition	Frais de gestion	Frais administratif	Résultat technique
124 959 223,55	539 214 547,40	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	58 859 599,77
24092979,12	660 977 015,72	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	37 963 375,89
444474365,5	461 417 073,05	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-182 858 067,77
281628338,5	530 630 156,51	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-89 225 124,28
226081563,5	576 427 486,77	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-79 475 679,51
292561240,5	522 789 989,95	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-92 317 859,74
44275345,74	541 571 840,02	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	137 186 184,96
54055755,6	495 659 137,55	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	173 318 477,59
31675832,97	544 010 986,15	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	147 346 551,61
53064601,2	801 325 573,90	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-131 356 804,36
16671738,01	613 292 951,28	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	93 068 681,44
40810848,95	400 406 296,41	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	281 816 225,37
184344157,7	526 879 205,34	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	11 810 007,67
149311215,9	697 175 976,99	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-123 453 822,13
64335395,01	587 490 850,79	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	71 207 124,93
39077053,07	636 379 956,74	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	47 576 360,92
148883227	580 641 629,82	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	-6 491 486,08
60703085,92	553 239 801,94	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	109 090 482,88
98282815,71	479 453 951,65	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	145 296 603,38
129379729,2	437 855 860,94	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	155 797 780,56
61086210,88	527 972 047,30	1 052 914 009,32	180 840 903,41	68 427 699,80	80 612 035,38	133 975 112,55

FIGURE 5.3 – Données de sortie du modèle interne

Ainsi, afin d'obtenir le résultat technique, il suffit donc de soustraire la somme de nos sinistres et les frais à l'ensemble de nos primes. Une fois que nous avons les 50000 simulations de résultats techniques, nous pouvons calculer le SCR comme pour la ligne de business précédente.

Moyenne RT	74 755 762,64
VaR 0,5%	-580 536 443,74
SCR	655 292 206,38
SCR REP	1 013 058 689,79

FIGURE 5.4 – Comparaison SCR

Cependant, à la différence avec la ligne d'activité *Medical expense - Income protection*, nous obtenons un SCR brute prime et catastrophe. Il est d'ailleurs à noter que nous obtenons une importante différence entre le SCR que nous avons calculé sur Excel et celui officiel. Cette différence s'explique par le fait que, sur Excel, nous avons calculé un SCR CAT-prime en prenant en compte la diversification entre les sinistres catastrophes et non catastrophes alors que, sur le SCR de référence, nous avons un SCR CAT-prime sans diversification *i.e.* la somme du SCR prime et du SCR CAT.

	Primes cédées Non CAT	Commission Non CAT	Primes cédées CAT	Commissions CAT	Sinistres larges cédés non CAT	Sinistres attri cédés non CAT
1	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	55 447 778,71	52 213 060,02
2	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	97 038 548,35	62 207 469,66
3	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	7 461 738,37	43 268 852,36
4	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	30 780 690,97	51 166 466,51
5	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	41 688 776,72	77 329 316,42
6	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	25 991 768,96	51 141 097,56
7	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	21 497 334,70	55 199 196,68
8	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	42 287 876,39	45 781 644,54
9	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	49 966 672,32	44 715 240,04
10	95 800 144,89	19 904 816,05	82 029 939,94	2 818 552,26	218 615 997,47	65 195 664,21
	Sinistres larges cédés CAT	Sinistres attri cédés CAT	Primes de reconstitution non CAT	Primes de reconstitution CAT		
	18 065 153,91	8 568 027,24	8878809,58	0		
	1 961 856,23	3 573 360,17	10721029,17	0		
	301 863 424,82	26 311 246,48	0	19886862,36		
	163 100 956,51	9 931 995,26	4752892,531	18951706,94		
	86 058 412,69	23 545 325,99	6524871,136	1360125,256		
	137 983 111,08	26 197 311,03	1471664,939	1780533,657		
	2 206 987,47	3 860 573,27	1608427,621	0		
	3 063 632,57	3 270 913,96	283007,6956	0		
	964 932,13	5 287 998,49	0	0		
	854 880,61	6 448 073,95	13700772,7	0		

FIGURE 5.5 – Données réassurance du modèle interne

Afin de pouvoir passer au SCR net, il nous faut donc les données sur les cessions pour les traités de réassurance proportionnelle et non-proportionnelle. Nous avons donc besoin :

- du montant des sinistres cédés ;
- des primes cédées c'est-à-dire le coût de la réassurance ;
- le montant des commissions de réassurance correspondant à une participation aux frais de l'assureur dans le cadre d'un traité en quote-part. Généralement, ce montant est défini comme un pourcentage des frais mais, en l'occurrence, chez Generali, il est défini contractuellement comme un pourcentage des primes ;
- le montant des primes de reconstitution qui représente le coût du renouvellement de la portée des contrats de réassurance non-proportionnelle.

Nous pouvons donc remarquer que seules les composantes dépendantes de la sinistralité (brute) sont stochastiques, à savoir : les sinistres cédés et les primes de reconstitutions. Les commissions étant un pourcentage des primes sont naturellement déterministes. De plus, les primes cédées sont aussi déterministes car elles sont composées d'une part, pour les contrats proportionnels, d'un pourcentage des primes brutes et, d'autre part, d'un montant déterministe pour la première capacité des contrats non-proportionnels.

	Primes nettes	Frais nets (brut +commissions-rec)	Sinistres nets	Résultat technique
1	875 083 924,48	316 036 079,86	529 879 751,07	29 168 093,56
2	875 083 924,48	317 878 299,45	520 288 760,43	36 916 864,61
3	875 083 924,48	327 044 132,64	526 986 176,49	21 053 615,36
4	875 083 924,48	330 861 869,75	557 278 385,76	-13 056 331,03
5	875 083 924,48	315 042 266,67	573 887 218,42	-13 845 560,61
6	875 083 924,48	310 409 468,87	574 037 941,83	-9 363 486,22
7	875 083 924,48	308 765 697,90	503 083 093,64	63 235 132,94
8	875 083 924,48	307 440 277,97	455 310 825,69	112 332 820,83
9	875 083 924,48	307 157 270,28	474 751 976,13	93 174 678,07

FIGURE 5.6 – Données nettes

Ensuite, afin de pouvoir calculer le résultat technique net, nous devons appliquer les données de réassurance citées précédemment à nos données brutes, nous déterminons donc les composantes suivantes :

- les primes nettes qui correspondent à la soustraction des primes brutes par les primes cédées ;
- les sinistres nets qui correspondent aux sinistres bruts moins les sinistres cédés ;
- les frais nets qui correspondent à la somme des frais bruts (acquisition, administratif, gestion) et des primes de reconstitution à laquelle on soustrait les commissions.

Moyenne RT	61 297 714,82
VaR 0,5%	-110 871 528,69
SCR	172 169 243,51
SCR REP 22	234 354 777,89

FIGURE 5.7 – Comparaison SCR net

Nous pouvons donc calculer le SCR net de cette ligne d'activité en soustrayant les sinistres nets et les frais nets aux primes nettes. Comme lors du SCR brut précédant, nous observons un *gap* entre ce que nous avons calculé et le SCR officiel mais cela se justifie de la même manière.

Agrégation de nos résultats

Une fois que nous avons les 50000 simulations des résultats techniques pour chacune des lignes d'activité de notre entité, nous devons agréger nos résultats par *LoB* afin d'avoir un SCR global.

Dans le cadre de la formule standard, il suffit de prendre les SCR calculés par ligne d'activité (voir figure 5.10) et de les sommer en prenant en compte la corrélation des lignes d'activité :

$$SCR^{Prime,CAT} = \sqrt{\sum Corr_{i,j} SCR_i^{Prime,CAT} SCR_j^{Prime,CAT}}$$

Cependant, cette méthode n'est pas la plus efficiente pour capter les dépendances entre les différents scénarios. Ainsi, dans le modèle interne de Generali, le passage de la maille ligne d'activité à la maille globale se fait par une approche par copule gaussienne.

ME IP	Motor	MOC	MAT	Fire	Liability	Somme
-555 215,38	-23 199 758,44	47 070 610,37	-15 328 127,48	29 168 093,56	-12 378 463,44	24 777 139,19
-2 238 054,84	-17 738 824,61	41 922 756,53	-18 041 424,51	36 916 864,61	6 184 540,32	47 005 857,50
-2 776 726,11	-82 972 626,25	15 933 392,16	-15 312 576,55	21 053 615,36	-18 433 751,63	-82 508 673,01
-2 195 332,64	-12 884 851,98	42 526 052,05	-7 561 131,60	-13 056 331,03	-5 419 798,58	1 408 606,23
-221 299,32	-19 612 942,35	48 979 664,16	-25 050 777,60	-13 845 560,61	-4 996 289,03	-14 747 204,75
-1 340 960,38	-31 420 730,47	40 443 105,92	-11 774 458,79	-9 363 486,22	-28 555 832,02	-42 012 361,95
-4 144 419,28	-29 534 717,05	49 206 548,65	-15 468 980,64	63 235 132,94	-27 520 095,21	35 773 469,41
-2 242 982,69	-56 870 274,04	14 716 758,76	-37 956 769,00	112 332 820,83	-14 864 623,24	15 114 930,61
-1 975 866,06	-83 129 385,92	29 979 475,71	-2 852 265,33	93 174 678,07	-4 481 785,21	30 714 851,26
-1 540 422,98	-70 992 723,16	35 789 777,67	-21 215 031,57	-9 049 677,35	-5 480 797,87	-72 488 875,26
241 382,91	-52 588 052,57	25 137 684,56	-12 006 325,03	58 615 386,85	-25 453 668,27	-6 053 591,55
131 541,45	5 041 710,93	63 093 115,54	-1 414 464,20	182 376 477,04	-8 086 784,23	241 141 596,53
-1 876 330,24	-68 766 009,28	13 555 739,60	-45 180 036,66	13 489 404,06	5 434 894,17	-83 342 338,34
-2 310 700,93	-40 435 317,68	28 866 843,85	-9 156 954,10	-70 649 429,31	1 579 048,20	-92 106 509,97
-619 086,64	-72 861 323,21	20 507 902,25	4 011 887,28	25 685 768,76	-10 539 887,70	-33 814 739,27
-1 357 654,56	-40 838 679,19	30 752 993,62	-20 248 084,94	36 954 433,32	-26 443 225,40	-21 180 217,16
-1 753 397,78	-72 099 923,82	19 946 393,28	-32 120 778,03	-13 403 275,61	-6 387 102,56	-105 818 084,53
-3 490 056,63	-28 811 261,62	51 786 979,00	-8 088 259,61	81 368 575,48	-24 475 013,18	68 290 963,44
-896 562,98	-42 827 913,37	28 671 028,13	-4 731 375,97	70 719 210,52	-15 687 098,39	35 247 287,93

FIGURE 5.8 – Simulations des résultats techniques par *LoB*

Afin d'avoir le résultat technique total de l'entité étudiée, nous sommions les résultats techniques de chacune des lignes d'activité pour chaque simulation. Nous pouvons directement sommer nos résultats techniques par *LoB* étant donné que, comme nous l'avons déjà explicité, nous travaillons avec les montants des sinistres intégrant déjà la diversification inter-*LoB*.

Moyenne	26 670 850,34
VaR	-228 277 396,65
SCR	254 948 246,99

FIGURE 5.9 – SCR prime et CAT total

Une fois que la distribution des résultats techniques de l'entité est calculée, le calcul du SCR se fait de manière classique : la moyenne des résultats techniques moins le quantile 0,5 de la distribution des résultats techniques.

	SCR
Income protection	2 564 547,40
Motor vehicle liability	84 618 450,61
Other motor	39 734 956,57
Marine, aviation and transport	38 868 620,62
Fire and other damage to property	172 169 243,51
General liability	46 903 730,63
SCR diversifié	254 948 246,99

FIGURE 5.10 – Récapitulatif SCR

Le SCR que nous venons de calculer est donc la somme diversifiée du SCR catastrophe et du SCR prime de GIARD. Lorsque nous comparons le montant calculé avec Excel avec le montant officiel, nous remarquons que nous sommes très proches. Cette différence peut s'expliquer par la *seed* lors de la simulation et aussi par le nombre de simulations : pour les résultats officiels, ce sont pas 50000 simulations qui sont effectuées mais 250000.

SCR Prime et Catastrophe (diversifié) calculé par Excel	254 948 246,99
SCR Prime et Catastrophe (diversifié) officiel	254 681 462,61
Ecart	0,10%

FIGURE 5.11 – Comparaison du SCR prime-CAT calculé le SCR officiel

Afin d'obtenir le montant du SCR prime et du SCR catastrophe sans diversification, nous allons utiliser un *proxy*².

Pour cela, nous avons besoin de certaines données officielles telles que le SCR prime-CAT diversifié, le SCR prime standalone et le SCR CAT standalone. Nous allons donc calculer le

2. Une méthode simplifiée permettant d'avoir un résultat approximatif

SCR Total	254 681 463
SCR Non CAT	215 898 575
SCR CAT	122 113 244
Non CAT / total	85%
CAT/Total	48%

FIGURE 5.12 – Allocation du SCR prime-CAT en SCR prime et SCR CAT

ratio SCR prime (resp. CAT) standalone sur la somme diversifié CAT-prime qui nous donne le taux de "dé-diversification" pour le SCR prime (resp. CAT). Ensuite, en faisant l'hypothèse que le risque de catastrophe et le risque de prime se diversifient de la même façon que lors des *runs* officiels, il suffit de multiplier le SCR prime-CAT par ce taux afin d'obtenir le SCR prime (resp. CAT).

Lorsque nous appliquons ces deux taux au SCR prime-CAT diversifié, nous obtenons un très léger écart avec les SCR "cibles" (voir la figure 5.13) : 120 000 pour le SCR catastrophe et 220 000 pour le SCR prime. Quoiqu'il en soit nous gardons le même écart relatif (0,1%) que lors de notre calcul de leur somme diversifiée.

Afin de pouvoir calculer le SCR risque de souscription non-vie, nous allons devoir faire le même type d'hypothèse que précédemment, nous considérons que tous les sous-modules non-vie se diversifient de la même manière que lors du dernier *run* 2021.

Pour écrire les calculs, nous allons considérer que la diversification s'applique comme un scalaire sur la somme *standalone* de nos sous-modules. Nous avons donc les deux quantités suivantes :

$$SCR_{NL}^{run} = \sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{run} * coef_div \quad (5.1)$$

$$SCR_{NL}^{Excel} = \sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{Excel} * coef_div \quad (5.2)$$

Où :

- $SCR_{Standalone,i}$ correspond au SCR du i^{me} sous-module non-vie sans la prise en compte de la diversification avec les autres sous-modules ;
- SCR_{NL} correspond au SCR total des risques de souscription non-vie.

De l'égalité 5, nous en déduisons que :

$$coef_div = \frac{SCR_{NL}^{Excel}}{\sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{Excel}} \quad (5.3)$$

En injectant l'équation 5.3 dans 5.2 :

$$SCR_{NL}^{run} = \sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{run} \frac{SCR_{NL}^{Excel}}{\sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{Excel}}$$

$$\Leftrightarrow SCR_{NL}^{Excel} = SCR_{NL}^{run} \frac{\sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{Excel}}{\sum_{i=1}^4 SCR_{Standalone,i}^{run}}$$

En comparant notre SCR non-vie calculé par le *proxy* avec celui du *run* officiel (figure 5.13), nous remarquons que l'écart relatif diminue par rapport au SCR CAT-primés diversifiés : notre calcul nous donne un SCR plus élevé de 300 000 soit 0,05% de plus que le run officiel.

Enfin, pour obtenir notre SCR final, nous considérons comme inchangées les quantités suivantes :

- la diversification entre les modules ;
- les absorptions de taxes ;
- les *addons*.

Nous obtenons donc un SCR total pour GIARD de 754,7 millions d'euros soit une différence de moins de 0,02% par rapport à notre SCR de référence.

FR001	YEO 21 avec Excel	YEO 21 Group Run 3
Financial	220,5	220,5
Equity Price	244,7	244,7
Equity IV	0,1	0,1
Property Price	80,1	80,1
IR Yields	92,5	92,5
IR Volatility	2,2	2,2
Currency	37,6	37,6
Concentration	6,7	6,7
Financial Cross term*	0,0	0,0
Credit	208,8	208,8
CS Widening	152,8	152,8
Credit Default	64,3	64,3
CDL	40,4	40,4
Credit Cross Term*	-2,5	-2,5
Life UW	15,7	15,7
Mortality	0,0	0,0
Longevity	15,7	15,7
Morbidity Disability	0,0	0,0
Life Lapse	0,0	0,0
Expense	0,0	0,0
GCR	0,0	0,0
Health Cat	0,0	0,0
Health Claims	0,0	0,0
Life Cross Term*	0,0	0,0
Non Life UW	419,4	419,2
Cat	87,7	87,6
NL Lapse	2,2	2,2
Pricing	155,1	154,9
Reserve	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9
SCR as SUM	966,3	966,1
Cross Terms	1,5	1,5
Diversification Benefit	-235,5	-235,4
% Diversification	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	732,3	732,1
Tax Absorption	179,3	179,3
% Taxes	24,5%	24,5%
SCR	553,0	552,9
Model adjustment Financia	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23
SCR	754,7	754,6

FIGURE 5.13 – Résultats modèle interne

Chapitre 6

Limites du modèle

Dans cette section, nous allons aborder les différentes limites du modèle utilisé par Generali en nous attardant sur celle faisant l'objet de ce mémoire.

- l'indépendance entre les années de survenance lors de la calibration.
- l'indépendance entre la fréquence et la sévérité moyenne lors des modèles de fréquence sévérité.
- La non considération de l'incertitude des paramètres provenant de la profondeur de l'historique pour la calibration mais aussi de la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (notamment sur les fonctions de vraisemblance plate). Cette limite a été traitée par mon prédécesseur **Virgil Djogbessi**¹.
- Les primes et les frais futurs sont traités comme des variables déterministes dans le modèle du risque de prime et de catastrophe. En effet, l'approche retenue pour modéliser ces risques inclue une approche déterministe (frais et primes) à une approche stochastique (sinistres) afin d'obtenir une distribution de probabilité de notre résultat technique. Dans notre estimation brute de notre SCR uniquement les sinistres sont stochastiques et, dans l'estimation nette, il n'y a que les composantes liées à la sinistralité qui sont stochastiques (prime de reconstitution et sinistres cédés). La justification avancée par Generali est que l'ajout d'une incertitude sur les primes et les frais augmenterait la complexité du modèle pour un risque très faible voire négligeable. En effet, cette hypothèse est basée sur le fait que le risque de prime est majoritairement causé par la volatilité des sinistres plutôt que celle des primes et des frais. De plus, la volatilité des primes et des frais devrait être faible du fait que leur estimation provienne des chiffres de la planification commerciale qui fournit des estimations les plus fiables possibles à partir de l'expérience de Generali et d'informations pertinentes concernant l'activité futur (situation du marché, décision stratégique, ...).

1. Virgil D. - "Prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du risque de prime" (présenté en juin 2022 mais pas encore référencé sur le site de l'Institut des Actuaire).

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté la méthode de calcul retenue pour le risque de prime et de catastrophe de la manière la plus exhaustive possible. Nous avons aussi recalculé le SCR de GIARD à partir des données (et de la segmentation) que nous utiliserons dans la suite de mémoire. Ce calcul avait deux objectifs :

- se familiariser avec les données que nous allons utiliser par la suite ;
- expliquer et comprendre les différents proxies et méthodes que nous utiliserons dans la suite du mémoire et vérifier que celles-ci sont cohérentes.

Enfin, nous avons évoqué les différentes limites du modèle et plus particulièrement celle concernant les frais et les primes futures déterministes. En effet, sur les lignes d'activité avec d'assez peu de volume, nous pourrions nous attendre à ce que la volatilité soit assez élevée. Cet impact pourrait être d'autant plus élevé sur le SCR si la ligne de business ne contient pas de réassurance. C'est notamment le cas de la LoB "*Medical expense, Income protection*" qui, comme nous pouvons l'apercevoir ci-dessous, a un écart relatif important entre les estimations de primes/frais et la réalisation de ceux-ci.

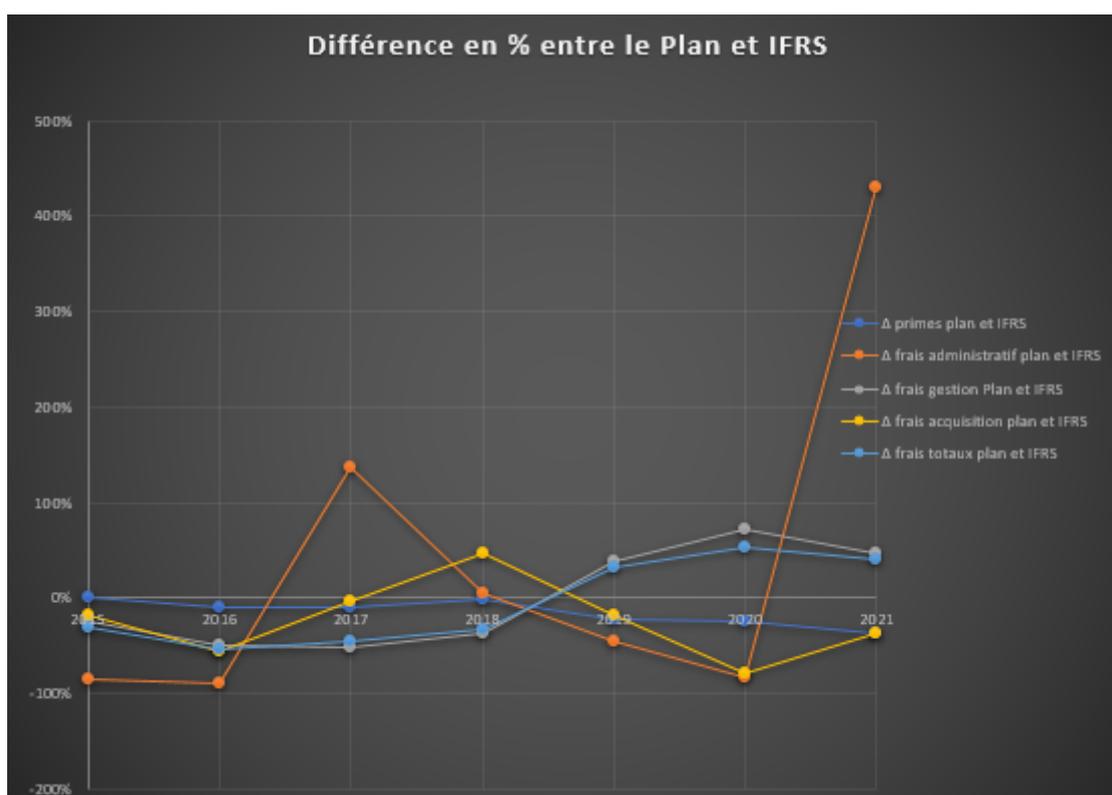


FIGURE 6.1 – Différence entre les estimations et le réalisé (en %)

Étant donné que les portefeuilles de cette ligne d'activité ne sont pas réassurés, nous pouvons nous attendre à un impact significatif de la prise en compte de la volatilité des primes et des frais futurs malgré les faibles volumes.

Troisième partie

Incertitude sur les primes et frais futurs : introduction des primes et frais stochastiques

Chapitre 7

Pré-requis mathématiques

Avant de commencer à travailler sur une manière d'implémenter notre modèle, nous allons nous attarder sur certaines connaissances mathématiques qui sont utilisées dans le présent mémoire :

- les notions de dépendance entre différentes composantes ;
- la décomposition de Cholesky qui nous sera utile pour la modélisation de la dépendance ;
- les notions d'estimation de paramètres de loi de probabilité.

7.1 Notions de dépendance

Étudier et modéliser les dépendances entre les risques est essentiel pour avoir une bonne modélisation et une bonne compréhension de nos risques. En effet, comme nous l'avons déjà vu dans la partie traitant de la formule standard, la dépendance entre les modules et sous-modules est prise en compte dans le calcul du SCR mais il y a encore d'autres à prendre en compte : comme les corrélations entre les lignes de business ou entre les composantes entrant dans le calcul des risques.

Par exemple, il existe différents types de frais qui peuvent être corrélés avec les primes ou les sinistres :

- frais de gestion : correspondant aux frais qu'une entreprise d'assurance paye pour le suivi des contrats ou pour le traitement et l'indemnisation des sinistres. En assurance non-vie, ces frais concernent les frais d'expertise, les salaires des gestionnaires de sinistres ;
- frais d'acquisition : correspondant au montant payé pour l'acquisition de nouveau contrat. Ce montant est généralement une commission donnée au réseau qui a ramené le contrat ou encore les frais liés à la publicité ;

- frais administratifs : correspondant aux frais de développement (nouveaux logiciels , etc), aux frais de gestion de primes, aux montants payés pour les salaires et les locaux.

En effet, intuitivement les frais de gestion (resp. d'acquisition) peuvent être corrélés avec le montant des sinistres (resp. primes) étant donné qu'ils sont souvent exprimés comme un pourcentage de celui-ci.

Il existe plusieurs types de corrélations que nous allons détailler ci-après.

7.2 Corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire permet de quantifier l'intensité et le sens de la relation **linéaire** entre deux variables.

Pour mesurer la corrélation linéaire entre deux variables aléatoires, on utilise le coefficient de Pearson. Soit X et Y deux variables aléatoires, on définit le coefficient de Pearson de la manière suivante :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Pour estimer ce coefficient de corrélation, nous utilisons les estimations empiriques de la covariance et de la variance ce qui, pour un échantillon de taille n, nous donne :

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\widehat{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\widehat{Var}(X)\widehat{Var}(Y)}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Ce coefficient est compris entre -1 et 1 :

- plus $\rho(X, Y)$ est proche de 1, plus la relation linéaire positive entre X et Y est forte ;
- plus $\rho(X, Y)$ est proche de -1, plus la relation linéaire négative entre X et Y est forte ;
- plus $\rho(X, Y)$ est proche de 0, plus la relation linéaire entre X et Y est faible.

Il est important de noter qu'un coefficient de corrélation linéaire nulle ne signifie pas que les variables sont indépendantes (même si la réciproque est vraie). Nous allons illustrer nos propos avec un petit exemple.

Considérons les variables X, Y et Z suivantes :

X	Y = X	Z = X ²
-5	-5	25
-4	-4	16
-3	-3	9
-2	-2	4
-1	-1	1
0	0	0
1	1	1
2	2	4
3	3	9
4	4	16
5	5	25

Nous obtenons les coefficient de Pearson suivant :

$\rho(X,Y)$	100%
$\rho(X,Z)$	0%

Ce résultat est logique car X et Z n'ont pas de relation linéaire mais quadratique : il existe bel et bien une dépendance entre ces deux variables même si le coefficient linéaire est nul.

De plus, le coefficient de Pearson présente un autre inconvénient : il n'est pas invariant par transformation strictement croissante c'est à dire qu'en général :

$$\rho(X, Y) \neq \rho(T(X), T(Y)).$$

7.2.1 Copules

En utilisant les corrélations linéaires pour lier les différents risques, certains modèles (dont la formule standard) prennent pour hypothèse une agrégation gaussienne des facteurs de risques ce qui généralement n'est pas l'approche la plus adaptée pour capter au mieux les dépendances. Il faut donc trouver une structure de dépendance non-linéaire afin d'avoir la meilleure modélisation de nos risques : la copule répond à ce besoin.

Une copule est une fonction de répartition multi-variée de $[0; 1]^d$ (d entier naturel strictement supérieur à 1) dans $[0;1]$ définie de la manière suivante :

$$C(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$$

Où $\forall i \in \llbracket 1, \dots, d \rrbracket, X_i \rightsquigarrow \mathcal{U}[0; 1]$

Nous nous proposons d'énoncer le théorème principal des copules : le théorème de Sklar.

Théorème de Sklar :

Soit F une distribution jointe de lois marginales $(F_i)_{i \in \llbracket 1, \dots, d \rrbracket}$ continues, alors il existe une unique copule satisfaisant :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Réciproquement, si on a une copule C et $(F_i)_{i \in \llbracket 1, \dots, d \rrbracket}$ des fonctions de répartition alors $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ est une fonction de répartition ayant $(F_i)_{i \in \llbracket 1, \dots, d \rrbracket}$ comme marginales.

En d'autres termes, le théorème de Sklar nous montre qu'il existe une unique copule décrivant la dépendance entre nos variables. Il vient donc justifier l'importance de la modélisation des dépendances par l'utilisation de copules. De plus, les copules vérifient la propriété d'invariance par transformation strictement croissante des marginales c'est-à-dire que si les $(T_i)_{i \in \llbracket 1, \dots, d \rrbracket}$ sont strictement croissantes alors $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ a la même copule que (X_1, \dots, X_d) .

Notons que, si la densité d'une copule C existe, alors elle est définie de la manière suivante :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

Nous pouvons d'ailleurs remarquer que la fonction de densité d'une distribution multivariée peut être réécrite en fonction de la densité de la copule associée et des densités des marginales :

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))f_1(x_1) \dots f_d(x_d) \tag{7.1}$$

Nous nous proposons de présenter succinctement en dimension 2 les copules que nous utiliserons dans ce mémoire. Nous allons uniquement nous servir de copules elliptiques (Gaussienne et Student) faisant parties de la famille des copules paramétriques. Comme le nom de la famille l'indique, il y aura un ou plusieurs paramètres à estimer sur les copules utilisées ; nous reviendrons plus tard sur la méthode d'estimation utilisée.

- **la copule Gaussienne** : pour le couple de variables aléatoires continues (X, Y) , la copule Gaussienne de paramètre $\rho \in [-1; 1]$ est définie par :

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\inf}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\inf}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(\frac{-(x^2 - 2\rho xy + y^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy$$

Avec Φ la fonction de répartition d'une loi normale.

- la **copule de Student** : pour le couple de variables aléatoires (X,Y) continues, la copule de Student de degré de liberté ν et de paramètre $\rho \in [-1; 1]$ est définie par :

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\inf}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\inf}^{t_\nu^{-1}(v)} \left(1 + \frac{-(x^2 - 2\rho xy + y^2)}{2(1-\rho^2)}\right)^{\frac{\nu+2}{2}} dx dy$$

Avec t_ν la fonction de répartition d'une loi de Student à ν degrés de liberté.

Contrairement à la copule Gaussienne, la copule de Student a de la dépendance dans les extrêmes. Nous pouvons d'ailleurs noter que plus le degré de liberté est élevé, plus la copule de Student se "rapprochera" d'une copule Gaussienne.

7.2.2 Corrélation de rang

Lorsque nous cherchons à étudier la corrélation non-linéaire entre deux variables, nous pouvons nous intéresser aux corrélations de rang. Au lieu de chercher un coefficient de corrélation entre les valeurs prises par les variables, nous allons le chercher entre les rangs de ces valeurs. Nous utilisons généralement deux coefficients pour quantifier la corrélation de rang : le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Soit C la copule de deux variables aléatoires continues X et Y alors :

- le rho de Spearman est défini comme :

$$\rho_s(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(x, y) - xy) dx dy$$

Il peut aussi être interprété comme le coefficient de Pearson appliqué aux rangs des données d'un échantillon ordonné, il peut donc être estimé de la manière suivante :

$$\hat{\rho}_s(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{X,i} - \bar{r}_X)(r_{Y,i} - \bar{r}_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{X,i} - \bar{r}_X)^2 \sum_{i=1}^n (r_{Y,i} - \bar{r}_Y)^2}}$$

- le tau de Kendall est défini comme :

$$\tau(X, Y) = 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) dC(x, y) - 1$$

Il peut être interprété comme la différence entre la probabilité de concordance et de discordance. Ce coefficient de corrélation peut être estimé de la manière suivante :

$$\hat{\tau}(X, Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{signe}((x_i - x_j)(y_i - y_j)) \quad (7.2)$$

Avec n la taille de X et Y , $\text{signe}(x) = 1$ si $x > 0$, -1 sinon

Les coefficients de corrélations de rang ont des propriétés intéressantes (que le coefficient linéaire n'a pas) :

- les coefficients de Kendall et de Spearman dépendent uniquement de la copule des variables étudiées;
- ρ_s et ρ_τ sont invariants par transformation strictement positive *i.e.* $\rho_s(X, Y) = \rho_s(T(X), T(Y))$;

7.3 Estimation des paramètres d'une copule

Nous avons donc vu l'importance de l'utilisation de copule lors de la modélisation des dépendances, nous allons maintenant nous intéresser aux méthodes pour estimer les paramètres des copules. Nous allons présenter succinctement les méthodes suivantes :

- une méthode paramétrique ;
- une méthode semi-paramétrique ;
- une méthode non-paramétrique ;

7.3.1 Méthode du maximum de vraisemblance exacte

La méthode d'estimation paramétrique la plus connue est la méthode du maximum de vraisemblance exacte aussi appelée *Full Maximum Likelihood*.

Considérons un cadre bivarié avec des observations $(x_i, y_i)_{i=1 \dots n}$ provenant d'une distribution $H(x, y)$. D'après le théorème de Sklar, il existe une copule telle que :

$$H(x, y) = C_\theta(F_1(x, \alpha), F_2(y, \beta))$$

Avec α, β les paramètres des distributions marginales et θ le paramètre de la copule. La méthode du maximum de vraisemblance exacte va permettre d'estimer (α, β, θ) en utilisant la densité de la copule que nous avons définie précédemment (7.1).

$$h(x, y) = C_\theta(F_1(x, \alpha), F_2(y, \beta))f_1(x)f_2(y)$$

Il en découle donc la fonction de log-vraisemblance :

$$L(\alpha, \beta, \theta) = \sum_{i=1}^n \log(c(F_1(x_i, \alpha), F_2(y_i, \beta); \theta)) + \sum_{i=1}^n \log(f_1(x_i, \alpha)) + \log(f_2(y_i, \beta))$$

Il s'agit donc de maximiser la log-vraisemblance par rapport à notre vecteur de paramètres afin d'obtenir nos estimateurs.

Bien qu'étant l'une des meilleures méthodes pour estimer les paramètres d'une copule, cette méthode n'est pas la plus utilisée car d'un point de vue calculatoire elle est lourde.

7.3.2 Méthode du maximum de vraisemblance canonique

L'approche par maximum de vraisemblance canonique est une méthode semi-paramétrique. Cela signifie que l'estimation des paramètres des copules se fait par le biais de modèles paramétriques alors que l'on utilise des modèles non-paramétriques pour les marginales.

Les marginales peuvent être estimées à l'aide de la fonction de répartition empirique :

$$\hat{F}_1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq x) \quad ; \quad \hat{F}_2(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(Y_i \leq y)$$

L'estimateur du paramètre de notre copule s'obtient de la manière suivante :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^n \log c(\hat{F}_1(x_i), \hat{F}_2(y_i); \theta)$$

7.3.3 Méthode d'inversion du tau de Kendall

La méthode d'inversion du tau de Kendall, aussi appelé méthode des moments, est une méthode non-paramétrique. Les méthodes non-paramétriques peuvent devenir intéressantes lorsque l'estimation par un modèle paramétrique ou semi-paramétrique n'est pas chose aisée.

Comme le nom de la méthode l'indique, elle utilise le tau de Kendall afin d'estimer le paramètre de la copule. Dans un premier temps, il faut estimer la tau de Kendall comme spécifié dans l'équation 7.2. Dans un second temps, en supposant qu'il existe une relation entre le tau de Kendall et le paramètre θ , nous déterminons le paramètre de la copule en utilisant la formule suivante :

$$\hat{\tau}(X, Y) = g(\hat{\theta})$$

Ce qui implique que :

$$\hat{\theta} = g^{-1}(\hat{\tau}(X, Y))$$

Il est cependant à noter que ces égalités sont vraies seulement dans le cas où les fonctions de répartition de X et Y sont continues.

Prenons l'exemple de la copule Gaussienne (et de Student), le tau de Kendall pour une telle copule s'exprime comme :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

En isolant ρ , on obtient

$$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$$

Ainsi, un estimateur du paramètre d'une copule Gaussienne (ou Student) sera :

$$\hat{\rho} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}\right)$$

Cette méthode d'estimation des paramètres de copules présente l'avantage de la simplicité et de la rapidité d'exécution ; c'est ainsi que nous utiliserons cette méthode lorsque nous aurons à estimer des paramètres de copule.

Nous pouvons d'ailleurs noter que cette méthode pourrait aussi s'appliquer avec le rho de Spearman. Néanmoins, les équations peuvent vite devenir plus complexes et nous ne pouvons pas toujours tomber sur des formules fermées.

7.4 Simulation d'une copule

Après avoir défini les copules et expliqué comment estimer les paramètres de celles-ci, nous allons voir comment simuler *à la main* les copules qui nous intéressent, à savoir les copules Gaussienne et Student.

Afin de simuler nos copules, nous allons utiliser les algorithmes proposés par Yohan Kabla dans son rapport de stage à la Société Générale (15).

7.4.1 Copule Gaussienne

L'algorithme que nous allons présenter permet de simuler des variables aléatoires uniformes u dont la fonction de répartition jointe est une copule Gaussienne de matrice de corrélation Σ :

- Transformer la matrice de corrélation Σ en le produit matriciel $A.A^T$ (A matrice triangulaire inférieure) en utilisant la décomposition de Cholesky (7.5);
- Simuler $z = (z_1, \dots, z_n)$ où $z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout i ;
- Effectuer $x = Az$;
- Calculer $u_i = \Phi(x_i)$ avec Φ la densité d'une normale centrée réduite;
- Nous obtenons un vecteur u dont les composantes suivent la structure de dépendance d'une copule Gaussienne de matrice de corrélation Σ .

7.4.2 Copule de Student

L'algorithme que nous allons présenter permet de simuler des variables aléatoires uniformes u dont la structure de dépendance est une copule de Student à ν degrés de liberté et de matrice de covariance Σ :

- Transformer la matrice de corrélation Σ en le produit matriciel $A.A^T$ (A matrice triangulaire inférieure) en utilisant la décomposition de Cholesky (7.5);
- Simuler $z = (z_1, \dots, z_n)$ où $z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout i ;
- Simuler s de loi χ_ν^2 indépendante de z ;
- Effectuer $y = Az$;
- Effectuer $x = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{s}}y$;
- Calculer $u_i = t_\nu(x_i)$ avec t_ν est la densité d'une student à ν degrés de liberté;
- Nous obtenons un vecteur u dont les composantes suivent la structure de dépendance d'une copule de Student à ν degrés de liberté et de matrice de corrélation Σ .

7.5 Décomposition de Cholesky

La méthode de Cholesky est une méthode directe de résolution de système linéaire. Son objectif est de décomposer une matrice symétrique définie positive en le produit d'une matrice triangulaire et de sa transposée. De manière un peu plus formelle :

Théorème : Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que :

$$A = L \cdot {}^t L \quad (7.3)$$

De plus, cette factorisation est unique sous la condition supplémentaire que les coefficients diagonaux de L soient positifs.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'algorithme permettant de calculer les composantes de L . Le but est de déterminer les $l_{i,j}$ de notre matrice L :

L'équation 7.3 devient donc :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & \cdots & l_{n,1} \\ 0 & l_{2,2} & \cdots & l_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

Il en découle donc que $a_{i,j} = \sum_{i=1}^n l_{i,j} l_{j,i}$. De plus, comme L est triangulaire, les $l_{i,j}$ sont nulles pour tous j supérieurs à i . Ainsi, on en déduit que :

$$a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\min(i,j)} l_{i,j} l_{j,i}$$

Étant donné que la matrice A est symétrique, il suffit seulement de calculer la partie triangulaire inférieure de A .

1. Détermination de la première colonne de A en commençant par le facteur diagonal :

- $i = 1$, $a_{1,1} = l_{1,1} l_{1,1}$, on en déduit donc que $l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$;
- $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $a_{i,1} = l_{1,1} l_{i,1}$ ainsi $l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{l_{1,1}}$;

2. Détermination de la j^{eme} colonne de A : il faut au préalable avoir calculé la colonne $j-1$.

- Pour $i = j$, $a_{i,i} = l_{i,1}l_{i,1} + \dots + l_{1,1}$ d'où $l_{i,j} = \sqrt{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2}$
- Pour $i = j + 1$, $a_{i,j} = l_{i,1}l_{j,1} + \dots + l_{i,i}l_{j,i}$ d'où $l_{j,i} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}l_{j,k}}{l_{i,i}}$

Étant donné que nous resterons globalement en deux dimensions lors de nos décompositions de Cholesky, nous allons expliciter le cas $n = 2$. Étant donné que nous allons manipuler des matrices de covariance, la diagonale de notre matrice A va être rempli de 1. Nous sommes donc dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1} \\ a_{2,1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} \\ 0 & l_{2,2} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

1. Commençons par déterminer la première colonne :

- $i = 1$; $a_{1,1} = l_{1,1}l_{1,1} \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$ or comme la diagonale de 1 est rempli de 1 nous avons $l_{1,1} = 1$
- $i = 2$; $a_{2,1} = l_{2,1}l_{1,1} \Rightarrow l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}}$ ainsi $l_{2,1} = a_{2,1}$

2. Nous pouvons passer à la deuxième et dernière colonne :

$$a_{2,2} = l_{2,1}l_{2,1} + l_{2,2}l_{2,2} \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{1 - a_{2,1}^2}$$

Ainsi, notre matrice A peut se décomposer de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{2,1} & \sqrt{1 - a_{2,1}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1} \\ 0 & \sqrt{1 - a_{2,1}^2} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

7.6 Estimation des paramètres d'une loi

Lorsque nous souhaitons ajuster une loi sur des données (comme ce qui est fait lors de l'étape de paramétrisation 4.1), il n'est pas seulement nécessaire de choisir une loi parmi un panel; il faut aussi choisir les paramètres de cette loi e.g. la moyenne et l'écart-type pour une loi Gaussienne.

Nous allons présenter deux méthodes d'estimation de paramètres de loi :

- La méthode des moments (*Method of Moment*)
- La méthode du maximum de vraisemblance (*Maximum of Likelihood*)

7.6.1 Méthode des moments

La méthode des moments est une méthode d'estimation paramétrique consistant à égaliser les moments théoriques avec leur estimation empirique. Cette égalité se justifie par le fait que nous nous plaçons dans un cadre *i.i.d.*¹ permettant l'application de la loi des grands nombres.

Supposons X_1, \dots, X_n un échantillon *i.i.d.* de même loi de paramètre θ , alors la méthode des moments revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} m_1(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ \vdots \\ m_i(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^i \end{cases}$$

7.6.2 Maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance est une méthode d'estimation paramétrique qui permet de trouver les paramètres d'un modèle qui sont les plus vraisemblables aux vues de nos données observées. Pour ce faire, nous allons regarder la fonction de vraisemblance qui est la densité de nos données observées par rapport à une mesure de probabilité. Dans le cas d'observations $(X_i)_{i \in \llbracket 1:n \rrbracket}$ *i.i.d.*, la fonction de vraisemblance se définit comme :

$$L_n(\theta) = f_\theta(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est le paramètre θ qui maximise la quantité précédente *i.e.* $\hat{\theta}$ vérifie :

$$L_n(\hat{\theta}) = \sup_{\theta} L_n(\theta)$$

Les estimations que nous feront dans la suite de ce mémoire seront disponibles en annexes.

1. indépendant et identiquement distribué

Chapitre 8

Ajout des frais et primes stochastiques

Maintenant que nous avons décrit les différents outils et les différentes notions mathématiques que nous allons utiliser, nous pouvons commencer à expliquer les travaux menés sur la prise en compte de la volatilité des primes et frais futurs dans le calcul du SCR.

Actuellement, les primes et les frais futurs (de l'année N+1) utilisés dans le modèle interne pour le risque de prime et le risque CAT sont déterministes. Cependant, le montant réalisé peut être différent des estimations. De fait, il existe un risque sur les primes et frais futurs que nous ne captions pas dans le modèle actuel. Effectivement, si le réalisé des frais (*resp.* primes) est plus élevé (*resp.* faible) que l'estimation déterministe utilisée, alors notre résultat technique s'en retrouverait impacté. Ainsi, le SCR calculé par le modèle interne ne serait pas totalement en adéquation avec le risque réel supporté par *Generali France*. Cette hypothèse a d'ailleurs fait l'objet d'une observation de l'ACPR :

“ Pour le calcul du risque de primes, Generali France considère ses primes et ses frais comme déterministes. Ce faisant, la société néglige un élément contribuant à la volatilité et sous-estime donc son exigence en capital au titre de ce risque (article R352-2§2 du code des assurances). ”

Même si, dans les *guidelines*, ce choix est justifié, entre autres, par le fait que les estimations des frais et primes sont le plus fiable possible et calculés à partir de données historiques et stratégiques. Nous pouvons observer des écarts entre ces estimations et les réalisations des primes et frais comme nous l'avons vu dans les limites du modèle (figure 6.1). Ces écarts ne s'observent pas seulement sur les *LoB* à faibles volumes, nous pouvons observer ci-dessous (8.1) que, même sur la ligne de business dominante de *GIARD*, il existe des écarts plus ou moins grands entre les estimations de primes et de frais et leurs réalisations.

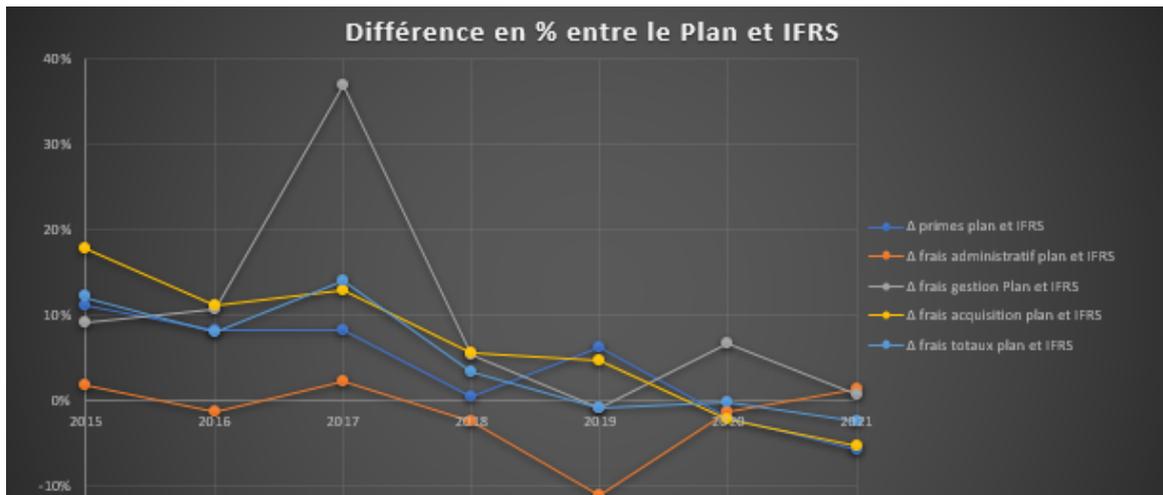


FIGURE 8.1 – Différence entre l'estimation et le réalisé sur la *LoB Fire* (en %)

Le but de nos travaux est donc de prendre en compte dans la modélisation des risques de prime et de catastrophe cette volatilité des primes et des frais futurs. Comme précisé dans la première partie, les travaux seront menés à la maille *LoB SII* qui représente la maille minimale pour avoir une bonne estimation de notre risque sans trop avoir de portefeuilles à calibrer.

Pour ce faire, nous allons suivre la logique du modèle actuel :

- la **paramétrisation** qui se divise en deux étapes comme dans le modèle classique. Une première étape sur le traitement de nos données puis une seconde sur la calibration des différents paramètres : corrélation entre les lignes de business, paramètres sur nos lois de primes et de frais futurs ;
- Une **évaluation du SCR brute** ;
- L'application de la réassurance afin d'obtenir l'**évaluation du SCR net**.

8.1 Traitement des données

Au vu de ce que nous venons de voir précédemment, nous allons devoir comparer nos données comptables, *i.e.* les données enregistrées l'année N, avec nos données estimées pour l'année N (calculées lors de l'année N-1).

Ces données sont disponibles à la maille produit, il nous faut donc les agréger à la maille "ligne de business". Pour ce faire, nous allons utiliser une matrice d'allocation. La plupart des portefeuilles n'appartiennent qu'à une ligne d'activité. Cependant, d'autres portefeuilles tels que les flottes peuvent être réparties en plusieurs portefeuilles ; les produits flottes se divisent dans les *LoB Motor* et *Other Motor*. La matrice utilisée pour les primes brutes est disponible ci-dessous ; il faut d'ailleurs noter que la séparation n'est pas nécessairement la même pour les primes, les PSAP, *etc.*

Produit	LOB	Prime brute
Auto mono	Motor, Third Party Liability	37%
Auto mono	Motor, Other Classes	63%
Flottes	Motor, Third Party Liability	39%
Flottes	Motor, Other Classes	61%
Garages	Fire	100%
Concession	Fire	100%
MRH	Fire	100%
MRC	Fire	100%
MRI	Fire	100%
Divers Part et Pro	Fire	63%
Divers Part et Pro	General Liability	37%
DAB des Entreprises	Fire	100%
RC Générale	General Liability	100%
RC Mandataires	General Liability	100%
RC Pro	General Liability	100%
Transport maritime et terrestre	MAT	100%
Construction	General Liability	88%
Construction	Fire	12%
Risque technique	Fire	95%
Risque technique	General Liability	5%
Grêle et Agricole	Fire	100%
Aviation et Spatial	MAT	100%
Incap/Inval Individuelle	Income protection	100%
Incap/Inval Collective	Income protection	100%
Santé Individuelle	Medical exp	100%
Santé Collective	Income protection	100%

FIGURE 8.2 – Matrice de passage maille produit à maille *LoB SII*

Nous obtenons le montant des frais, des primes et des sinistres par *LoB* en appliquant cette matrice à chaque portefeuille. Cependant, nous remarquons des incohérences dans certaines des chroniques de primes ou de frais¹. En effet, nous n'avons aucune comptabilisation de primes acquises (ou émises) pour les lignes d'activité *Medical Expense* et *Income Protection* pour l'année 2014 alors qu'en 2013, le Plan avait fait une estimation non nulle de celles-ci. De plus, au vu de la chronique des primes estimées pour ces deux *LoB*, les montants sembleraient être soit faux soit mal alloués.

En k€	Primes brutes du Plan							
LoB/Année	REP 2014	REP 2015	REP 2016	REP 2017	REP 2018	REP 2019	REP 2020	REP 2021
Medical expense	5 901,26	982,80	1 079,55	873,11	620,64	679,56	652,61	593,74
Income protection	2 142,44	9 219,01	9 685,33	9 291,36	10 366,52	9 714,70	10 337,02	9 382,52

En k€	Primes IFRS (brutes)							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0	1 027	897	855	813	1 499	1 457	1 630
Income protection	0	9 074	10 971	10 275	10 299	11 813	13 194	14 332

FIGURE 8.3 – Chronique primes brutes *ME* et *IP*

1. Les chroniques complètes sont disponibles en Annexe A

Ce type d'incohérence se répète aussi sur les trois types de frais pour l'année 2014. En effet, lorsque nous regardons la chronique des frais estimés par type, nous remarquons que les montants de 2014 ne semblent pas cohérent avec le reste de la chronique. Cependant, les montants totaux des frais estimés semblent s'inscrire dans la suite logique des autres années : nous pouvons donc penser à un problème d'allocation des frais sur le fichier d'estimation de 2014.

Ainsi, avec les données que nous avons, l'année 2014 est marquée par de grands écarts entre les estimations et les réalisations (figure 8.4). Cependant, cet écart observé est plus dû à un problème de qualité de données qu'à un problème d'estimation. De ce fait, l'année 2014 sera exclue de notre étude.

LoB/Type de frais	Estimation			Réalisé		
	Administratif	Acquisition	Gestion	Administratif	Acquisition	Gestion
Medical expense	-1 681,61	-1 512,53	0,00	0,00	0,00	0,00
Income protection	0,00	-399,18	0,00	0,00	0,00	0,00
Motor vehicle liability	-1 285,12	-60 347,47	-684,59	-13 618,15	-29 378,34	-12 882,89
Other motor	-2 140,92	-100 783,30	-1 101,95	-26 451,92	-60 409,46	-25 427,79
Marine, aviation and transport	-2 490,33	-37 845,43	-2 925,14	-17 005,33	-22 788,17	-17 932,04
Fire and other damage to property	-5 330,04	-323 838,47	-3 602,10	-69 797,50	-166 013,03	-53 952,42
Third Party Liability	-1 494,69	-46 478,80	-1 690,60	-13 484,21	-35 839,86	-17 462,82

FIGURE 8.4 – Frais observés *versus* Frais estimés pour l'année 2014

Une fois qu'une analyse globale de nos données par année est réalisée dans le but d'analyser la fiabilité de nos données et que les potentielles exclusions sont appliquées, une mise en *as-if* de nos données doit être effectuée .

Effectivement, la mise en *as-if* est nécessaire afin de rendre comparable nos données. L'objectif de notre mémoire étant de déterminer la volatilité sur une estimation donnée par le Plan, nous devons avoir des données centrées en cette estimation. Ainsi, pour chaque année entre 2015 et 2021, nous calculons l'écart en pourcentage entre les estimations fournies par le Plan et les montants réalisés. Puis, nous appliquons ce taux à l'estimation de l'année 2022. Mathématiquement, pour le montant de primes de l'année i cela peut se traduire de la manière suivante :

$$P_{est,i}^{as-if} = P_{est,2022} * \frac{P_{est,i}}{P_{real,i}}$$

Dès lors que nos données ont été *as-ifé*, une étude graphique de nos données est effectuée afin de détecter d'éventuelles tendances. Comme pour le modèle classique, si nous détectons une tendance dans nos données alors elle sera enlever afin d'obtenir des données plus homogènes.

Ensuite, une extraction des différentes données simulées par *Igloo*, le logiciel utilisé par *Generali* pour la modélisation du risque de prime et de catastrophe, est effectuée. En effet, étant donné que notre étude sur les primes se fait à la maille *LoB* alors que les simulations se

font à une maille plus fine, nous prenons les données simulées à la maille la plus fine. Cela permet un meilleur captage de la volatilité que si nous avions re-calibré les sinistres par nous-même à la maille *LoB*. De plus, nous ne pourrions pas constater l'effet marginale des primes et frais stochastiques si nous avions effectué une calibration des sinistres à la maille *LoB*.

De la même manière, nous avons besoin d'extraire les simulations de réassurance depuis *Igloo* afin d'obtenir le capital réglementaire net de réassurance.

Toutes ces données sont simulées à la maille portefeuille puis agrégées par *LoB* en intégrant les dépendances intra-*LoB*. Comme nous le verrons lors du calcul des exigences brut et net, ces extractions seront modifiées en fonction de nos primes et frais stochastiques.

8.2 Calibration des copules

À la fin de la partie précédente, nous obtenons nos données de travail. Il s'agit maintenant de déterminer les corrélations entre les différents frais et les primes/sinistres.

Effectivement, nous allons traiter les frais en les divisant en trois catégories : administratifs, gestion et acquisition. Nous allons corrélérer les frais d'acquisition avec les primes et les frais de gestion avec les sinistres. Ce choix peut se justifier du fait que ces frais soient souvent définis comme un pourcentage de ces valeurs. En effet, lorsque nous regardons les ratios frais d'acquisition sur primes et frais de gestion sur sinistres (sur les données comptables *i.e.* réalisées), nous remarquons que ces taux restent plutôt stables comme nous pouvons le voir pour la *LoB Fire* ci-dessous.

Frais de gestion/Sinistres	Frais d'acquisition/primes
9%	18%
9%	18%
8%	18%
10%	17%
12%	17%
11%	17%
10%	16%

FIGURE 8.5 – Proportion des frais pour la *LoB Fire*

La corrélation de nos frais se fera à partir de copule gaussienne. Afin de calibrer le paramètre de nos copules gaussiennes, nous utilisons la méthode du rho de Kendall qui est la méthode la plus simple et la plus efficace (7.3.3).

Dans un premier temps, nous allons calculer différents coefficients de corrélation entre les primes (resp. sinistres) et les frais d'acquisition (resp. gestion). Puis, dans un second temps, nous estimerons le paramètre de notre copule en faisant l'hypothèse d'un paramètre plancher à 0%. En effet, sur certaines lignes d'activité, nous pouvons obtenir des paramètres traduisant une anti-corrélation entre les sinistres et les frais de gestion. Ce résultat semblant être incohérent avec ce que nous avons avancé précédemment dans cette partie et résultant certainement

du peu de données à disposition, il a été choisi de faire l'hypothèse conservatrice que les copules seront tout au plus indépendantes ($\rho = 0$). En effet, comme nous le ferons remarquer pour la ligne d'activité *Other Motor*, une ou deux données atypiques/ aberrantes peuvent avoir un fort impact sur les coefficients de corrélation et *a fortiori* sur le paramètre de notre copule. Nous allons prendre l'exemple de la *LoB Fire* pour la calibration des copules.

8.2.1 *LoB Fire*

Nous pouvons, à titre indicatif, commencer par calculer les coefficients de corrélation linéaire. Ils pourront déjà nous donner une première idée sur les dépendances de nos données. De plus, normalement, le paramètre de la copule gaussienne est le coefficient de Pearson. Ainsi, idéalement, nous devrions obtenir une estimation du paramètre de notre copule proche du coefficient de corrélation linéaire calculé.

Afin d'obtenir le coefficient de corrélation linéaire, nous utilisons directement les fonctions d'Excel (nul besoin de ré-inventer la roue). Ainsi, nous obtenons une corrélation linéaire négative pour les frais de gestion et une corrélation de 55% pour les frais d'acquisition. Nous comparerons nos estimations des paramètres des copules avec les coefficients linéaires et, du fait du peu de données, nous choisirons la valeur la plus élevée dans le but d'être le plus conservateur possible.

Coefficient de corrélation linéaire Gestion / Sinistres	-41%
Coefficient de corrélation linéaire Acquisition / Prime	55%

FIGURE 8.6 – Coefficients linéaires pour la *LoB Fire*

Le tau de Kendall peut être calculé comme la différence entre le nombre de concordance et le nombre de discordance divisée par le nombre de combinaisons possible de 2 parmi n (ici 7).

$$\tau = \frac{\#Concordance - \#Discordance}{\binom{2}{n}} \quad (8.1)$$

Soit $(X, Y) = (x_i, y_i)_{i=1..n}$, si x_i est élevé en termes de rang et que y_i l'est aussi alors on dit que la paire (x_i, y_i) est concordante. En termes mathématiques, pour $i < j$ on aura une paire concordante si (x_i, y_i) et (x_j, y_j) satisfont la condition suivante :

$$x_i < x_j, y_i < y_j$$

Une paire sera discordante si x_i est de rang élevé mais que y_i est de rang faible. C'est-à-dire que la paire sera discordante si (x_i, y_i) et (x_j, y_j) satisfont la condition suivante :

$$x_i < x_j, y_i > y_j$$

Ainsi, pour calculer le nombre de concordances et de discordances (8.7), nous commençons par déterminer les rangs de nos observations. Puis, nous trions les doublets $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 7}$ par ordre croissant par rapport à la composante X (les primes dans l'exemple ci-dessous). Enfin, nous comptons le nombre de concordances et de discordance pour chaque doublet.

Prenons l'exemple de la première ligne, étant donné que les rangs des primes sont rangés dans l'ordre croissant, afin d'avoir le nombre de concordance, il suffit de compter le nombre d'observation des frais d'acquisition dont le rang est supérieur (à partir de la ligne suivant le doublet considéré) à celui que le considère.

Pour obtenir le nombre de discordances, nous raisonnons de la même manière mais en comptant le nombre d'observation avec un rang inférieur.

Primes	Acquisition	Rang Primes	Rang Acquisition	Rang primes rangées	Rang Acquisition avec Primes rangées
913 733,12	161 992,25	6	4	1	2
936 399,55	167 310,47	3	1	2	3
912 819,35	161 418,70	7	5	3	1
918 013,32	157 584,83	5	6	4	7
933 879,58	156 593,46	4	7	5	6
958 139,70	164 460,75	2	3	6	4
1 013 299,16	166 302,25	1	2	7	5

Concordant	Discordant
5	1
4	1
4	0
0	3
0	2
1	0
0	0

FIGURE 8.7 – Calcul des discordances et concordances

Une fois que nous avons calculé le nombre de discordances et de concordances, l'estimation du tau de Kendall peut être effectué suivant la formule 7.2. Pour obtenir le coefficient de Spearman, il suffit de calculer le coefficient linéaire sur nos rangs. Nous pouvons remarquer que le tau de Kendall est relativement loin du coefficient linéaire que nous avons calculé alors que le coefficient de Spearman en est très proche.

Somme discordances	7
Somme concordances	14
Combinaison de 2 parmi n	21
Tau de kendall	33%
Coef de Spearman	57%

FIGURE 8.8 – Calcul tau de Kendall

Maintenant que le calcul du tau de Kendall est effectué, nous pouvons utiliser la méthode d'inversion du tau de Kendall (7.3.3) afin d'estimer le paramètre de notre copule Gaussienne. Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\hat{\rho}_{sinistre} = -50\% \quad \hat{\rho}_{prime} = 57\%$$

Ainsi, nous choisissons le paramètre plancher pour la copule sinistre/frais de gestion et le ρ estimé pour la copule prime/frais d'acquisition.

Frais d'acquisition/primes

Une fois le paramètre de notre copule estimé, nous allons appliquer l'algorithme décrit à la page 67 pour simuler nos frais d'acquisition. Nous utilisons cet algorithme de simulation de deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ afin d'obtenir deux vecteurs de probabilités corrélés. Ensuite, la simulation de nos données se fera par la méthode d'inversion dont nous reparlerons lorsque les simulations de primes et frais seront faites.

Nombre de simulation	Simulation prime 1					
	Vecteur Z1 (prime)	Vecteur Z2	X1	X2	U1	U2
1	1,557	-2,646	1,557	0,026	0,940	0,510
2	-1,125	0,839	-1,125	-0,555	0,130	0,290
3	0,497	-1,326	0,497	-0,232	0,690	0,408
4	0,876	0,794	0,876	1,155	0,809	0,876
5	-0,606	-0,203	-0,606	-0,627	0,272	0,265
6	-0,295	-0,196	-0,295	-0,354	0,384	0,362

FIGURE 8.9 – Application de l'algorithme pour les frais d'acquisition de la *LoB Fire*

Pour ce faire, nous devons appliquer la décomposition de Cholesky à notre matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,57 \\ 0,57 & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant la méthode décrite dans la partie 7.5, nous obtenons la décomposition de notre matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,57 & 0,82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,57 \\ 0 & 0,82 \end{pmatrix}$$

Ensuite, nous avons besoin de deux vecteurs Z_1 et Z_2 de loi normale centrée réduite :

- Pour Z_1 , nous utilisons le vecteur de probabilité des simulations de primes pour ensuite simuler une loi normale centrée réduite²;
- Pour Z_2 , nous simulons de manière usuelle les réalisations d'une gaussienne centrée réduite.

Puis, nous déterminons $(X_1, X_2) = X$ en utilisant la matrice triangulaire obtenue par la décomposition de Cholesky sur notre matrice $(Z_1, Z_2) = Z$. Par exemple, en notant T la matrice triangulaire obtenue, pour la i^{eme} simulation, nous déterminons X de la manière suivante :

$$X_1^i = 1 * Z_1^i + 0 * Z_2^i$$

$$X_2^i = 0,57 * Z_1^i + 0,82 * Z_2^i$$

Enfin, nous appliquons la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite³ sur les 50000 simulations des $(X_i)_{i=1,2}$ afin d'obtenir deux vecteurs de probabilités corrélés à 57%.

Un calcul du coefficient de Pearson est effectué afin de contrôler que l'algorithme fonctionne et est bien appliqué. Nous pouvons remarquer que nous passons d'une corrélation très proche de 0 à une corrélation très proche de notre paramètre de copule.

Coefficient de corrélation avant algorithme	-0,54%
Coefficient de corrélation après algorithme	57,70%

FIGURE 8.10 – Contrôle corrélation

Ainsi, nous obtenons deux vecteurs de probabilité corrélés :

- le premier correspond à nos primes;
- le second correspond aux frais d'acquisition.

2. Utilisation de la fonction "LOI.NORMALE.INVERSE.N()" sur Excel

3. Utilisation de la fonction "LOI.NORMALE.N()" sur Excel

Frais de gestion / Sinistres

La même méthodologie que pour les frais d'acquisition va être appliquée pour les frais de gestion mais avec une légère différence sur la détermination du vecteur Z_1 . En effet, nous avons les sinistres uniquement en montant par ligne d'activité. Pour chacune des simulations, nous allons calculer son rang en pourcentage puis nous simulons une gaussienne centrée réduite en utilisant ce rang comme sa probabilité de réalisation.

8.2.2 LoB Other Motor

En plus de la LoB précédente, nous allons aussi étudier le cas de la LoB *Other Motor* car nous avons appliqué une exclusion pour la calibration du paramètre de la copule entre les frais de gestion et les sinistres.

Comme nous l'avons fait remarquer dans la première partie (3.2.3), à l'exception de l'année 2017, une lecture graphique peut nous amener penser que les frais de gestion et les sinistres sont corrélés.

Ainsi, nous pourrions donc penser que l'année 2017 serait donc une valeur aberrante et son exclusion pour la calibration des copules pour cette ligne d'activité pourrait être envisagée. Les différents coefficients de corrélation ont donc été calculés avant et après l'exclusion de l'année 2017 afin de voir l'impact de cette exclusion :

		Avant exclusion	Après exclusion
Frais de Gestion / Sinistre	Coefficient de corrélation linéaire (Pearson)	6%	68%
	Coefficient de corrélation de rank Tau de Kendall	14%	60%
	Coefficient de corrélation de Spearman	4%	66%

FIGURE 8.11 – Comparaison coefficients de corrélation avant/après exclusion de 2017

En comparant les coefficients obtenus avant et après l'exclusion, nous remarquons que garder l'année 2017 nous mènerait à sous-estimer la corrélation entre les frais de gestion et les sinistres de cette ligne de business. Effectivement, en excluant 2017, nous obtenons une corrélation presque 4 fois plus importantes. Par la suite, nous garderons le paramètre obtenu après exclusion de l'année 2017.

8.3 Calibration des lois de primes et de frais

À l'image du modèle interne actuelle de *Generali France* pour la sinistralité, une calibration des lois de primes et de frais doit être effectuée.

Théoriquement, lors du choix de la loi pour calibrer nos données, nous considérons un panel de loi : log-normale, Weibull, Gamma, Burr et Exponentielle. Dans les faits, vu le peu d'historique de données à disposition, nous avons fait le choix d'utiliser la loi log-normale pour les frais et les primes. Ce choix s'appuie majoritairement sur le fait que le modèle log-normale est celui utilisé dans la directive Solvabilité II. De plus, cette loi permet d'avoir une queue plus lourde que la gaussienne classique sans pour autant avoir une queue excessivement lourde qui pourrait surestimer la *Value at Risk* de nos données. Il est aussi à noter que le choix de la log-normale peut aussi se justifier avec des arguments statistiques ou graphiques pour la plupart des calibrations que nous avons effectuées. En effet, l'ajustement de cette loi nous donne des p-valeurs suffisamment élevés pour ne pas pouvoir rejeter l'hypothèse nulle lors d'un test du χ^2 d'adéquation.

Comme précédemment, nous allons nous intéresser à une seule ligne de business étant donné que pour les autres, le travail sera globalement le même.

Other Motor

Tout d'abord, nous pouvons commencer par regarder les graphiques de nos données et leurs statistiques afin de pouvoir comparer les statistiques des lois calibrées avec celles de nos données empiriques.

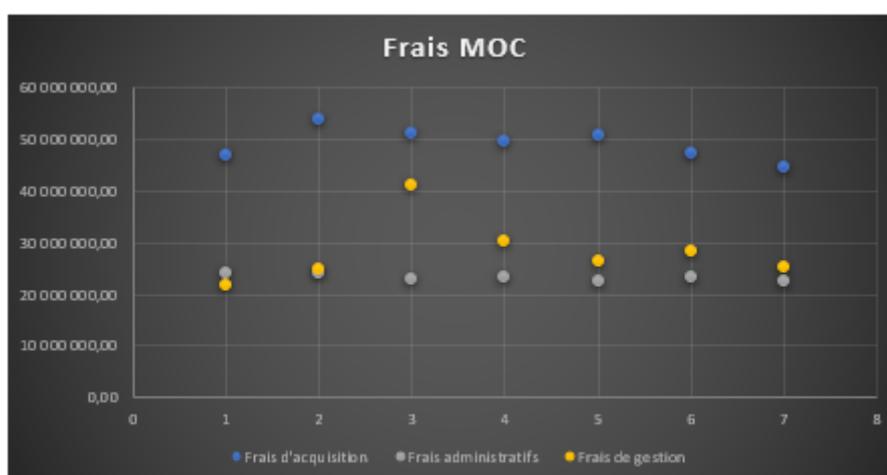


FIGURE 8.12 – Données as-ifé de la *LoB MOC(1)*

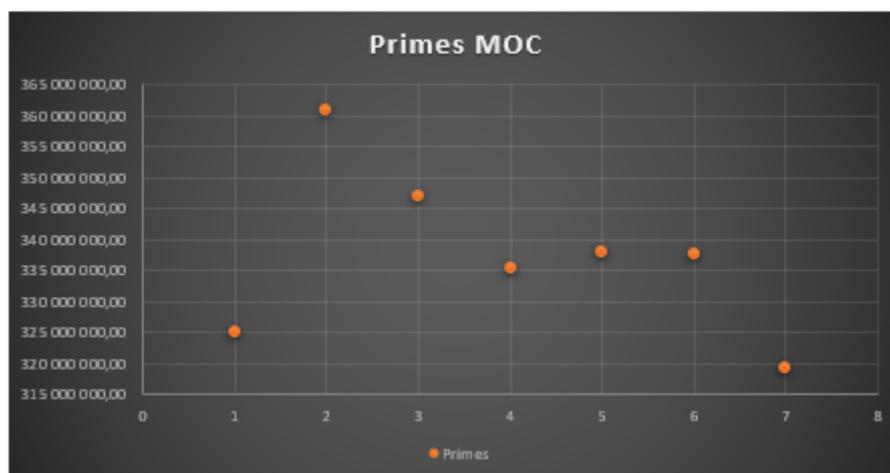


FIGURE 8.13 – Données as-ifé de la *LoB MOC(2)*

En observant les graphiques ci-dessus, les données as-ifé semblent être homogènes, du moins sans tendance marquée; nous n'avons donc *a priori* pas besoin d'enlever de tendance ou d'appliquer d'autres traitements à nos données.

Nous avons choisi la ligne d'activité *MOC* car elle présente à la fois le cas de figure où la loi log-normale peut se justifier et aussi le cas où ce choix se fait par "défaut". Nous allons étudier la calibration pour les primes et les frais d'acquisition de cette *LoB*.

8.3.1 Frais d'acquisition

Dans un premier temps, nous estimons les paramètres⁴ des différentes lois listées dans le tableau ci-dessous (8.14). Puis, dans un second temps, nous calculons les différentes métriques qui nous permettent de choisir la loi qui s'ajuste le mieux sur nos données : la log-vraisemblance et la p-valeur pour le test du khi 2 d'adéquation.

Lois ajustées	Log-vraisemblance	p-valeur	Statistique	degré de liberté
Lognormal ML	-114,08	36%	0,82770501	1
Lognormal MoM	-114,08	36%	0,8281153	1
Gamma ML	-114,08	35%	0,86756385	1
Gamma MoM	-114,08	35%	0,8676291	1
Weibull	-114,32		0,14517385	0
Burr	-114,27		0,02971191	-1

FIGURE 8.14 – Récapitulatif des p-valeurs des lois testées

4. Le calcul des estimateurs est disponible en annexe B

Tout d'abord, la première chose que nous remarquons est que nous n'avons pas de p-valeur pour les lois de Weibull et de Burr cela étant dû au fait que leur degré de liberté soit nul ou négatif. Nous obtenons de faibles degrés de liberté à cause du peu de données à notre disposition.

L'hypothèse nulle du test d'adéquation du χ^2 est "La variable aléatoire (nos primes ou frais) suit la loi de probabilité testée". Ainsi, nous pouvons rejeter cette hypothèse lorsque la p-valeur est faible. Nous pouvons remarquer que nous ne pouvons donc pas rejeter cette hypothèse pour les loi log-normal et Gamma (peu importe la méthode d'estimation). De plus, ces lois présentent la même log-vraisemblance donc *a priori* le choix de la log-normal serait à privilégier de part la p-valeur légèrement plus élevée.

	Moyenne	Ecart-Type	Coefficient de variation	95th Percentile	99th Percentile
Data	49 210 510,84	3 128 049,88	6,4%	53 972 755,58	53 972 755,58
Lognormal ML	49 210 600,95	2 902 314,48	5,9%	54 125 095,30	56 342 877,61
Lognormal MoM	49 210 510,84	2 896 011,45	5,9%	54 114 040,20	56 326 469,59
Gamma ML	49 210 508,66	2 897 376,40	5,9%	54 071 262,80	56 200 579,79
Gamma MoM	49 210 510,84	2 896 011,45	5,9%	54 068 931,29	56 197 171,88
Weibull	49 150 091,00	3 269 470,20	6,7%	53 658 148,41	54 913 800,88
Burr	49 171 132,80	3 104 975,60	6,3%	53 828 787,03	55 731 680,60

FIGURE 8.15 – Comparaison données empiriques / données théoriques

Enfin, lorsque nous comparons les données empiriques aux données théoriques des lois Gamma et Log-normale, nous remarquons que cette dernière nous donne des valeurs plus élevées pour les plus grands quantiles ainsi le choix de la log-normale serait donc légèrement plus prudente que la loi Gamma.

Pour finir, nous comparons les paramètres obtenus avec les différentes méthodes d'estimation (figure 8.16) et nous remarquons qu'ils sont très proches. Ainsi, ce choix n'aura certainement pas un grand impact sur le calcul du SCR. Cependant, comme il faut faire un choix, nous choisissons l'estimateur par la méthode des moments car celui-ci permet d'avoir une loi avec la même moyenne que nos données.

Lognormal ML	logmean	17,71
	logSD	5,89%
Lognormal MoM	logmean	17,71
	logSD	5,88%

FIGURE 8.16 – Comparaison paramètres de la loi log-normale

8.3.2 Primes

Après avoir vu un cadre idéal, nous allons nous intéresser au cadre où le choix de la loi pourrait être un peu plus compliqué. En effet, comme nous pouvons le remarquer sur la figure 8.17, aucune p-valeur ne peut être calculée du fait d'un degré de liberté au moins nul. Nous pourrions donc regarder la log-vraisemblance et prendre la loi avec la plus faible log-vraisemblance. Cependant, elles sont toutes très proches donc cela ne serait pas très pertinent de prendre comme seul critère la log-vraisemblance.

Lois ajustées	Log-vraisemblance	p-valeur	Statistique	degré de liberté
Lognormal ML	-124,37		0,697369792	0
Lognormal MoM	-124,37		0,68765459	0
Gamma ML	-124,39		0,707867716	0
Gamma MoM	-124,39		0,700696842	0
Weibull	-125,04		1,028584949	0
Burr	-124,48		0,653981576	-1

FIGURE 8.17 – Comparaison données empiriques / données théoriques

En comparant les statistiques des lois que nous pouvons choisir avec les statistiques de nos données empiriques (figure 8.19), nous remarquons que la loi de Burr, malgré un bon ajustement sur nos données de par sa moyenne, son écart-type et son coefficient de variation, semble surestimé de manière significative les grands quantiles⁵. De plus, lorsque nous regardons l'erreur-type (*standard error*) de nos paramètres estimés, nous remarquons qu'elle est grande relativement à la valeur des paramètres. Cette grande incertitude sur les paramètres de la loi de Burr est due au faible nombre de données disponibles. Ainsi, cette loi ne semble pas être adéquate pour modéliser notre risque.

		Standard Error	Paramètres
Truncated Burr	alpha	0,92	0,70
	theta	13 362 268,06	333 295 572,40
	gamma	34,15	53,51
	threshold	0,00	0,00

FIGURE 8.18 – Erreur-type des estimateurs de la loi Burr

Ensuite, nous allons préférer la lognormal et la Gamma à la loi de Weibull car leurs statistiques semblent mieux correspondre à nos données.

Enfin, le choix de la loi log-Normale est, comme évoqué en début de section, plus arbitraire que basé sur des arguments particuliers même si nous pourrions évoquer qu'au vu des quantiles ce choix semble être légèrement plus prudent.

5. Ceci semble être vrai pour la quasi-totalité des calibrations effectuées.

	Moyenne	Ecart-Type	Coefficient de variation	95th Percentile	99th Percentile
Data	337 634 142,54	13 688 135,54	4,05%	360 885 727,19	360 885 727,19
Lognormal ML	337 633 279,72	12 605 399,85	3,73%	358 759 567,66	368 001 452,26
Lognormal MoM	337 634 142,54	12 672 751,01	3,75%	358 875 363,75	368 170 202,12
Gamma ML	337 634 137,22	12 622 490,89	3,74%	358 661 083,76	367 690 525,07
Gamma MoM	337 634 142,54	12 672 751,01	3,75%	358 745 858,49	367 812 967,36
Weibull	336 959 952,71	15 757 072,82	4,68%	358 342 363,54	364 154 796,64
Burr	337 564 711,79	13 463 916,12	3,99%	360 896 363,70	376 799 481,99

FIGURE 8.19 – Comparaison paramètres de la loi log-normale

Comme pour le choix des frais d'acquisition, nous remarquons que les paramètres estimés par le maximum de vraisemblance et par la méthode des moments sont très proche. Nous allons préférer les paramètres issus de la méthode des moments car elle nous fournit une loi centrée en la moyenne de nos données.

Lognormal ML	logmean	19,64
	logSD	3,73%
Lognormal MoM	logmean	19,64
	logSD	3,75%

FIGURE 8.20 – Comparaison paramètres

A la fin de cette étape, tous les calculs des estimateurs et les choix des lois ont été effectués (8.21) et les dépendances sont déjà calibrées. Nous pouvons donc passer à la réalisation de nos simulations et à la détermination du SCR brut.

	Moyenne	Log SD	Ecart type	Moyenne LN
Primes	337 634 142,54	3,75%	13 688 135,54	19,64
Frais Totaux	100 829 221,23	6,31%	6 243 616,00	18,43
Frais d'acquisition	49 210 510,84	5,88%	3 128 049,88	17,71
Frais de gestion	28 315 583,22	20,23%	6 251 141,22	17,14
Frais administratifs	23 303 127,17	2,65%	665 943,68	16,96

FIGURE 8.21 – Récapitulatif des paramètres de la *LoB Other Motor*

8.4 Évaluation brute du SCR

Dans la partie traitant de la calibration des copules, nous avons obtenu des vecteurs de valeurs comprises en $[0; 1]$ correspondant à des probabilités. Nous avons voulu obtenir ce type de données car nous allons simuler des réalisations de nos lois en utilisant la méthode d'inversion. Cette méthode repose sur la propriété suivante :

Propriété : Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X . On définit l'inverse généralisé F^{-1} de F sur $]0; 1[$:

$$F^{-1}(x) = \inf(t \in \mathbb{R} \mid x \leq F(t))$$

Alors si U suit une loi uniforme sur $]0; 1[$ alors $F^{-1}(U)$ a même loi que X .

Soit F la fonction de répartition d'une loi log-Normale de paramètres μ et σ^2 . Ainsi, si nous générons 50000 simulations d'une loi uniforme sur $]0; 1[$ alors $(x_i = F^{-1}(u_i))_{i=1, \dots, 50000}$ sera la réalisation d'une loi log-Normale de paramètres μ et σ^2 .

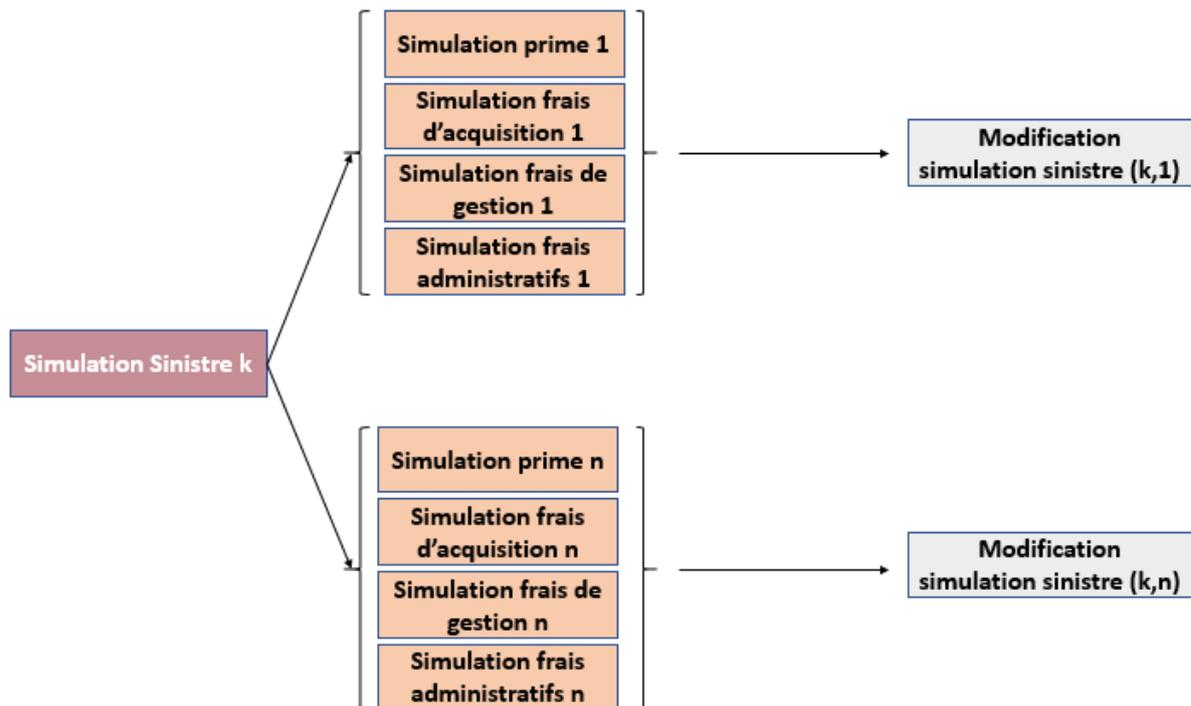


FIGURE 8.22 – Schéma

Nous allons appliquer une approche proche de la méthodologie simulation dans simulation (8.22) pour le calcul du SCR. En effet, pour chaque simulation de sinistre récupérée dans *Igloo*, nous allons faire une simulation de primes et de frais. Puis, un réajustement de nos simulations de sinistres est effectué.

Ainsi, avec k simulations de sinistres et n simulations de primes, nous ferons un total de $k * 4n$ simulations et nous obtiendrons $n * k$ simulations de résultats techniques : le temps de calcul peut donc rapidement augmenter. De fait, sachant que nous avons 50000 simulations de sinistres, si nous faisons 5 simulations de primes et frais, un total de 250000 résultats techniques sera effectué par ligne de business. Le choix de 5 simulations de primes et de frais a été retenu car à partir de ce seuil *Excel* commence à éprouver quelques difficultés. Cependant, une sensibilité sur le nombre de simulation sera menée afin de voir à partir de combien de simulations de primes et de frais notre SCR converge.

Nous allons présenter le processus suivi pour la première simulation de primes et de frais sur la *LoB Other Motor* ; les autres simulations se feront d'une manière similaire.

- **Simulation des primes** : nous générons 50000 réalisations d'une loi uniforme $[0; 1]$. Puis, la simulation des réalisations de prime se fait en appliquant l'inverse généralisé de la fonction de répartition d'une loi log-Normale avec les paramètres présent dans le tableau 8.21.
- **Ajustement des sinistres** : Un ré-ajustement des sinistres est effectué après la simulation des primes futurs. Cette estimation du montant des sinistres futurs s'appuie sur le montant des primes futures toujours égale à l'estimation déterministe fournie par le Plan. Or, une variation du montant des primes récoltées l'année suivante peut avoir un effet sur le montant des sinistres. En effet, si Generali fait plus de business que prévu, nous pouvons aussi nous attendre à avoir plus de sinistre. De plus, cet ajustement fait d'autant plus sens que la calibration de la fréquence et des montants se fait des sinistres par euro de primes.
- **Simulation des frais** : la manière pour simuler les frais va être légèrement différente en fonction du type de frais simulé.
 - les frais administratifs sont considérés comme indépendants des sinistres, primes et de tous les autres frais. Ainsi, nous pouvons générer l'échantillon de 50000 simulations d'une uniforme $[0; 1]$ puis les réalisation d'une log-normale de la même manière que pour les primes.
 - frais de gestion : pour générer le vecteur de loi uniforme $[0; 1]$, nous appliquons ce qui a été évoqué dans la partie Calibration des copules avec le vecteur de sinistres. Puis nous simulons les réalisations de nos frais avec la méthode d'inversion.
 - frais d'acquisition : le même processus que pour les frais de gestion est appliqué mais en utilisant les primes.

MOC simulation 1			
Aléa prime	Aléa gestion	Aléa administratif	Aléa acquisition
91,383179%	41,642517%	88,120445%	95,500305%
2,900891%	28,548576%	45,864337%	2,519150%
26,482289%	83,100787%	39,455695%	68,698282%
13,185481%	15,134835%	93,679088%	5,065310%
59,171161%	31,023428%	21,137107%	66,667290%
86,006884%	65,633589%	25,436015%	86,996090%

FIGURE 8.23 – Vecteurs des lois uniformes sur $[0; 1]$

- **Vérification des corrélations** : Un rapide calcul des corrélations linéaires est effectué afin de s'assurer qu'aucune erreur n'a été commise. Nous remarquons que les corrélations linéaires calculées sur nos données simulées sont très proches des paramètres de nos copules.

	Frais de gestion / Sinistres	Frais d'acquisition/primes
corrélation linéaire calculée	80,452%	82,962%
paramètre de copule	80,902%	82,624%

FIGURE 8.24 – Comparaison paramètres des copules avec les corrélations linéaires

- **Calcul des résultats techniques** : Une fois les sinistres ajustés, les primes et les frais simulés, nous pouvons calculer les résultats techniques pour chacune des simulations de sinistres. Ce résultat technique se calcule comme la différence des primes avec sinistres et frais.

Simulation 1						
Primes	Rescaling des sinistres non-cat	Rescaling des sinistres cat	Frais administratifs	frais de gestion	frais d'acquisition	Résultat technique 1
355 081 613	184 867 791	1 209 189	24 032 837	26 494 127	54 259 601	64 218 069
314 196 563	165 739 097	3 708 353	23 229 713	24 655 241	43 773 998	53 090 159
329 494 021	189 942 146	20 870 237	23 129 394	33 564 066	50 538 962	11 449 216
323 502 253	160 341 603	22 646 913	24 254 679	22 445 983	44 600 560	49 212 516
340 305 829	175 961 620	428 220	22 804 840	25 014 133	50 371 132	65 725 885
351 316 589	190 201 965	1 243 710	22 889 962	29 995 340	52 473 612	54 512 000

FIGURE 8.25 – Données simulées pour la simulation 1

- **Calcul du SCR** : Il nous suffit de calculer la moyenne et la *Value at Risk* 0,5% afin d'obtenir le SCR pour chaque simulation. Nous obtenons les résultats suivants :

	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Simulation 4	Simulation 5	Sur les 5 simulations
Moyenne RT	46 582 178,33	46 541 359,97	46 550 162,10	46 509 376,54	46 546 226,49	46 545 860,68
VaR 0,5%	-21 024 368,68	-19 938 177,12	-20 248 374,00	-20 501 402,84	-20 785 430,80	-20 516 729,97
SCR Excel	67 606 547,01	66 479 537,09	66 798 536,10	67 010 779,38	67 331 657,29	67 062 590,65
impact	13,6%	11,7%	12,3%	12,6%	13,2%	12,7%

FIGURE 8.26 – SCR brut par simulation

Tout d'abord, nous remarquons une augmentation conséquente du SCR brut pour la *LoB* considérée. Cette augmentation est en grande partie due à la forte volatilité sur les frais de gestion (voir figure 8.21). En effet, si nous avions comme paramètre pour le log-écart-type 6%, nous aurions un impact de moins de 3% sur le SCR.

De plus, l'impact de l'exclusion de l'année 2017 lors de la Calibration des copules peut être chiffré. Comme le montre le graphique ci-dessous, la prise en compte de tout l'historique pour la calibration de la copule nous mènerait à une sous-estimation du SCR de plus de 8%.

	SCR prime-CAT brute
Other motor avec exclusion	67 062 590,65
Other motor sans exclusion	61 919 068,79
Variation	8,3%

FIGURE 8.27 – Impact de l'exclusion

Sur la figure 8.26, nous pouvons remarquer que le SCR semble osciller aux alentours de 67 millions d'euros. Cependant, sur le graphique 8.28, nous remarquons que le SCR pour cette ligne d'activité semble rapidement converger avec l'ajout de simulations. Ainsi, *a priori* nous n'aurions pas besoin de faire plus de 5 simulations de primes et de frais pour avoir des résultats stables.

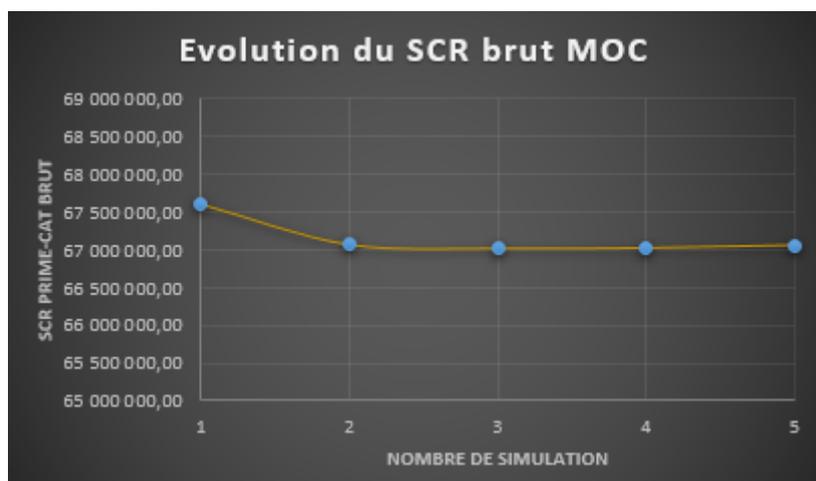


FIGURE 8.28 – Convergence SCR brut MOC

Nous obtenons globalement une légère augmentation du SCR brute pour chacune des *LoB* de GIARD. Les lignes d'activité *Income Protection - Medical Expense* et *Other Motor* sont les plus impactées. Effectivement, nous remarquons une très forte volatilité (e.g. un log-écart-type de 190% pour les frais administratifs de *IP-ME*) sur les frais de celles-ci ce qui a un fort impact sur le calcul du SCR. Cela n'est pas étonnant pour l'*Income Protection* car comme nous l'avions déjà énoncé lors des limites du modèle de *Generali France*, cette *LoB* présente de faibles volumes. Ainsi, une faible erreur en volume sur l'estimation des frais peut être une grosse erreur en relatif.

Enfin, le SCR brut de la ligne d'activité *Fire* diminue ce qui *a priori* peut sembler contre intuitif car nous rajoutons de l'incertitude ce qui devrait augmenter le SCR. Cependant, cette légère baisse est dû au fait que *Generali France* sur-estime ses primes futures pour cette *LoB*. Ainsi, lors de la phase de réajustement des sinistres, les simulations de primes inférieures à l'estimation vont réduire la valeur des quantiles élevés des sinistres. Il en résulte une baisse de plus de 2 millions sur la *Value at Risk* des sinistres. Même si la *VaR* n'est pas additive, il est fort possible que cela soit l'origine de la baisse de la *VaR* du résultat technique.

	SCR		Impact
	Primes stochastiques	Sans primes stochastiques	
Income protection	20 773 156,82	2 564 547,40	710%
Motor vehicle liability	153 000 638,42	152 104 802,58	0,59%
Other motor	67 062 590,65	59 490 649,84	12,73%
Marine, aviation and transport	217 258 110,71	214 508 389,75	1,28%
Fire and other damage to property	654 450 872,71	655 292 206,38	-0,13%
General liability	96 795 925,15	94 779 746,54	2,13%
Somme SCR standalone	1 209 341 294,47	1 178 740 342,50	2,60%

FIGURE 8.29 – Récapitulatif des SCR Prime-CAT bruts par *LoB*

8.5 Application de la réassurance

Précédemment, nous avons expliqué comment obtenir l'exigence de capital brut de réassurance pour les risques de prime et de catastrophe. Nous allons maintenant nous intéresser à l'application de la réassurance.

L'application des traités de réassurance est rendu compliquée de par la maille que nous avons choisie pour la calibration des frais et primes. Pour les traités de réassurance proportionnelle (en particulier pour les quotes-parts) *a priori* le changement de segmentation ne devrait pas être problématique. Cependant, les traités non-proportionnels s'appliquent à la sinistralité des portefeuilles ainsi il nous faudrait les sinistres par simulation et par portefeuille pour appliquer les potentiels excédents de sinistres ou excédents de pertes. Ainsi, ayant les sinistres agrégés à la maille *LoB*, il est impossible d'appliquer correctement les traités non-proportionnels.

Deux options s'offrent à nous afin d'adapter les cessions à nos scénarios générés précédemment :

- Appliquer le même taux de cession que sur le run officiel, ce qui nous donnerait donc :

$$SCR_{net} = SCR_{brut} \frac{SCR_{net,run}}{SCR_{brut,run}}$$

Avec

- SCR_{brut} correspondant au SCR brut calculé avec les primes et frais stochastique
- $SCR_{brut,run}$ (resp. net) correspondant au SCR brut (resp. net) calculé sans primes et frais stochastiques.
- Ajuster les différentes données de cession proportionnellement aux données des différents scénarios générés.

La première méthode est la plus facile et la plus rapide à mettre en place mais ne semble pas la plus adaptée. Nous appliquerons les deux méthodes puis nous choisirons la plus prudente.

Nous proposons d'illustrer la seconde méthode avec la ligne d'activité *Other Motor*. Tout d'abord, rappelons que seul ce qui est directement lié à la sinistralité est stochastique :

les cessions de sinistre et les primes de reconstitution. Les primes n'étant plus déterministes, il apparaît comme nécessaire de ne plus avoir un montant déterministe pour les cessions de primes et les commissions.

Toutes les composantes de la réassurance vont être ajustées par nos primes, détaillons cela point par point :

- **Primes cédées** : elles sont ré-ajustées sur les simulations de primes réalisées. En effet, si le montant de primes simulé est plus important que le montant estimé (déterministe), alors le montant des cessions des contrats proportionnels augmenteront proportionnellement (et inversement dans le cas contraire). Aussi, le prix de la réassurance non-proportionnelle peut être exprimé comme un pourcentage de l'*EPI*⁶ donc une augmentation des primes dans nos simulations induirait une augmentation des primes cédées initialement.
- **Commissions** : elles vont être ajustées en fonction des simulations de nos primes. De prime abord, cela peut paraître étrange étant donné qu'elles ont vocation à être une participation du réassureur pour les frais d'acquisition. Nonobstant, dans le modèle de Generali France, elles sont définies comme un pourcentage des primes. Ainsi, une variation entre l'estimation déterministe et la valeur des simulations devrait impacter le montant des commissions.
- **Sinistres cédés** : étant donné que, dans la partie d'Évaluation brute du SCR, nous ajustons nos sinistres sur nos simulations de prime, il peut paraître logique de faire de même sur nos cessions de sinistre. Pour la réassurance proportionnelle cela fait sens : nous réalisons plus de primes donc nous cédon plus de primes donc nous cédon plus de sinistres (proportionnellement aux primes cédées). Cependant, pour la réassurance proportionnelle ce n'est pas nécessairement vrai tout le temps. On peut distinguer au moins deux cas où l'augmentation de nos sinistres proportionnellement aux primes peut ne pas se répercuter par une augmentation des cessions proportionnelle aux primes :
 - le montant de sinistres (à la maille portefeuille) avait déjà dépasser la priorité puis après réajustement⁷ :
 - * dépasse la portée : alors en ajustant proportionnellement aux primes, nous allons potentiellement céder plus de sinistres que la portée nous le permet (simulation 1 dans la figure 8.30). Nous surestimons donc le montant cédé.
 - * passe en dessous de la priorité : alors en ajustant nos cessions aux primes, la cession de sinistres du portefeuille ne sera pas nulle alors qu'elle le devrait. Nous surestimons encore le montant des cessions de la *LoB*.
 - le montant de sinistres (à la maille portefeuille) n'avait pas dépasser la priorité puis après réajustement :
 - * ne dépasse toujours pas la priorité : alors il n'y avait aucune cession et il n'y en a toujours pas.

6. *Expected Premium Income* ce qui correspond aux estimations de primes futures

7. Augmenter le montant des sinistres à la maille *LoB* augmente nécessairement (et proportionnellement en considérant les montants diversifiés) le montant de sinistres de portefeuilles composant cette ligne d'activité

* dépasse la priorité : alors nous appliquons un facteur proportionnel à un montant nul donc il n'y a aucune cession alors que nous devrions constater des cessions (simulation 2 dans la figure 8.30). Nous sous-estimons donc le montant des cessions.

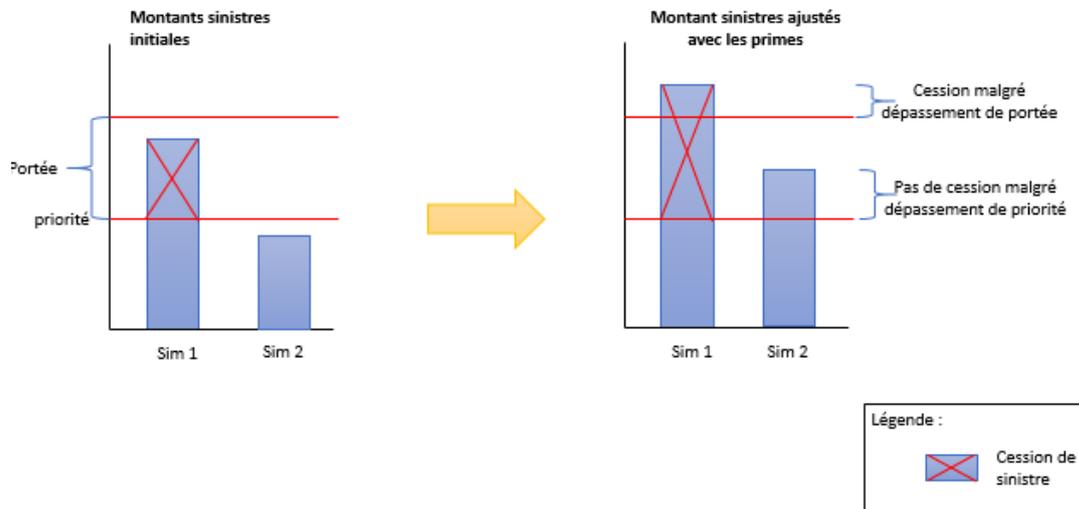


FIGURE 8.30 – Illustration des exemples

- **Primes de reconstitutions** : elles vont être, comme pour les cessions de sinistres ajustées proportionnellement aux primes car le montant payé pour reconstituer notre garantie est exprimé comme un pourcentage de l'EPI. En faisant cela, nous aurons les mêmes limites liées à la portée et à la priorité : nous allons modifier le prix de la reconstitution mais pas le nombre. De plus, nous ne prenons pas en compte l'Aggregate Annual Limit correspondant au maximum de cession pris par le contrat et l'Aggregate Annual Deductible qui correspond à une franchise qui vient en sus de la priorité afin de réduire l'intervention du réassureur.

Après ajustement par le montant des primes simulées, nous obtenons les données ci-dessous pour le non-CAT, nous pouvons d'ailleurs noter que nous avons les mêmes types de données pour le CAT. Nous pouvons remarquer que les montants de commissions et de primes cédées ne sont plus déterministes et que nous avons une distribution de ceux-ci.

Non Cat						
	Primes cédées	Commissions	Sinistres larges cédés	Sinistres attritionnels cédés	Sinistres totaux cédés	Primes de reconstitutions
1	45 112 739,03	31 729 522,23	0,00	1 369 984,35	1 369 984,35	0,00
2	39 918 337,11	28 076 099,84	0,00	1 217 610,14	1 217 610,14	0,00
3	41 861 862,84	29 443 056,13	0,00	1 390 018,11	1 390 018,11	0,00
4	41 100 615,12	28 907 641,37	0,00	1 202 249,34	1 202 249,34	0,00
5	43 235 491,48	30 409 181,92	0,00	1 293 098,36	1 293 098,36	0,00
6	44 634 396,72	31 393 085,71	0,00	1 405 035,69	1 405 035,69	0,00
7	42 274 283,89	29 733 127,70	0,00	1 241 592,02	1 241 592,02	0,00
8	44 317 787,12	31 170 402,02	0,00	1 520 935,47	1 520 935,47	0,00

FIGURE 8.31 – Données de cession

8.6 Évaluation nette du SCR

Maintenant que nous avons les simulations brutes des résultats techniques et toutes les données de réassurance, nous pouvons maintenant calculer le SCR net.

Comme pour toutes les étapes précédentes, nous allons présenter la méthodologie pour une ligne de business en particulier (*Other Motor*) avant d'agréger nos résultats afin d'obtenir l'impact total sur l'entité considérée.

LoB Other Motor

Pour ce faire, nous pouvons commencer par calculer les diverses composantes⁸ de notre résultat technique pour chacune des simulations effectuées à savoir : les primes nettes, les frais nets et les sinistres nets.

Nous obtenons ainsi un vecteur de résultat technique pour chacune de nos simulations. Cette distribution de résultat technique permet le calcul du SCR prime et CAT net de réassurance.

Simulation 1				
	Primes nettes	Frais nets	Sinistres net	Resultat technique 1
1	308 520 127	73 057 043	184 706 995	50 756 090
2	272 996 291	63 582 853	168 229 840	41 183 598
3	286 287 810	77 825 549	201 747 133	6 715 127
4	281 081 736	62 497 989	172 529 920	46 053 827
5	295 681 876	67 780 923	175 096 741	52 804 212
6	305 248 807	73 965 828	189 644 578	41 638 400
7	289 108 303	62 852 282	170 980 410	55 275 612
8	303 083 555	76 018 343	214 878 365	12 186 847
9	284 285 287	68 668 083	186 760 324	28 856 880

FIGURE 8.32 – Données nettes de réassurance

En comparant le SCR net calculé avec celui sans primes/frais stochastiques, nous pouvons remarquer qu'il augmente de manière très significative. Lorsque nous regardons plus en détail, la moyenne du résultat technique net est très peu impactée alors que la *Value at Risk* augmente. Le fait qu'elle augmente n'est pas étonnant (et même totalement normale) puisque nous ajoutons une volatilité sur des variables qui n'en présentaient pas. Cependant, une telle augmentation peut sembler étonnante mais s'explique aisément. En effet, les explications résident dans l'application de la réassurance du modèle interne : uniquement la volatilité des sinistres (et des primes) est prise en compte dans les traités de réassurance. C'est ainsi que la forte volatilité sur les frais, plus particulièrement les frais de gestion, font augmenter le SCR net.

Ensuite, nous réitérons pour les autres lignes d'activité afin d'obtenir une distribution de résultat technique pour chacune d'entre elles.

8. Pour plus de détails, voir la partie Exigence de capital nette

	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Simulation 4	Simulation 5	Sur les 5
Moyenne RT	35 039 974,10	35 001 653,05	35 010 211,12	34 972 497,06	35 007 073,24	35 006 281,71
VaR 0,5%	-19 663 750,00	-20 035 160,75	-19 636 074,80	-19 580 457,64	-19 792 243,83	-19 770 924,89
SCR	54 703 724,09	55 036 813,80	54 646 285,91	54 552 954,70	54 799 317,07	54 777 206,61
Variation	37,67%	38,51%	37,53%	37,29%	37,91%	37,86%

FIGURE 8.33 – SCR primes-cat net de la *LoB MOC*

Agrégation des résultats

Il s'agit maintenant d'agréger nos résultats techniques afin de calculer l'exigence de capital de l'entité considérée.

Nous allons procéder de la même manière que ce que nous avons présenté pour le modèle actuel : nous allons sommer les résultats techniques des différentes *LoB* afin d'obtenir une distribution des résultats techniques de GIARD. Lorsque nous sommes les résultats techniques, nous faisons globalement (mais pas totalement) l'hypothèse que la volatilité sur les frais et primes est indépendante entre les *LoB*⁹.

ME IP	Motor	MOC	MAT	Fire	Liability	Somme
-127 474	-20 338 255	50 756 090	-13 710 967	66 846 098	-11 738 929	71 686 562
-4 355 541	-15 121 257	41 183 598	-18 454 915	6 618 723	-858 617	9 011 991
-1 898 061	-76 058 171	6 715 127	-20 964 101	51 878 012	-21 631 507	-61 958 701
-2 692 844	-13 674 037	46 053 827	-6 347 217	-12 003 486	-3 226 314	8 109 928
-835 877	-17 817 366	52 804 212	-16 943 289	-18 215 516	-14 990 579	-15 998 415
-42 844 527	-28 852 274	41 638 400	-13 386 625	-6 586 818	-26 131 469	-76 163 313
-3 982 488	-30 636 541	55 275 612	-14 055 747	38 232 128	-35 551 903	9 281 060
-1 680 996	-55 658 473	12 186 847	-31 240 420	97 501 675	-10 469 163	10 639 471

FIGURE 8.34 – Calcul résultats techniques de GIARD

Une fois que nous obtenons une distribution des résultats techniques nets, le calcul du SCR prime-CAT peut être effectué. Avec l'ajout de nos travaux, celui-ci augmente d'un peu plus de 5% principalement du fait de l'augmentation de la *VaR*. Celle-ci est tout-à-fait logique du fait de l'ajout de volatilité sur plusieurs composantes du résultat technique.

Moyenne	28 066 107,25
VaR	-240 688 874,62
SCR prime-CAT	268 754 981,86
SCR prime	227 828 979,26
SCR CAT	128 861 136,12

FIGURE 8.35 – Calcul SCR GIARD

9. Pour plus de détail, voir l'annexe C.

Nous appliquons la seconde méthode que nous avons évoquée dans la partie Application de la réassurance à savoir appliquer le même taux de cession constaté sur le *Run* officiel. Nous constatons que cette méthode sous-estime de 5% l'exigence de capital. De plus, au vue des impacts de la mise en place des primes et frais stochastiques sur les *LoB* (figure 8.37), même avec les effets de diversification, cela semblerait peu cohérent d'avoir un impact si faible sur le SCR prime-catastrophe. Ainsi, nous ne retiendrons pas cette méthode.

Brut primes/frais stochastiques	784 672 111
Ratio Gross to Net	33%
SCR Net GIARD	256 493 972
Variation avec première méthode	-5%

FIGURE 8.36 – SCR Net GIARD méthode proportionnelle

En observant le tableau récapitulatif des impact des primes et frais stochastiques, nous remarquons que nos travaux ont maintenant un impact positif sur la *LoB Fire* alors qu'au brut ils avaient un impact négatif. Cela provient essentiellement du fait que la volatilité des frais n'est pas cédée lors de l'application des traité de réassurance ainsi la *VaR* diminue moins lors du passage au net que pour les résultats officiels.

Notons d'ailleurs que l'augmentation du SCR de la *LoB MAT* est dû aux mêmes raisons que pour *Other Motor*.

	SCR		Impact
	Primes stochastiques	Sans primes stochastiques	
Income protection	20 773 156,82	2 564 547,40	710%
Motor vehicle liability	85 380 546,13	84 618 450,61	0,90%
Other motor	54 777 206,61	39 734 956,57	37,86%
Marine, aviation and transport	50 315 364,05	38 868 620,62	29,45%
Fire and other damage to property	176 334 055,73	172 169 243,51	2,42%
General liability	50 564 218,82	46 903 730,63	7,80%
Somme SCR standalone	438 144 548,15	384 859 549,35	13,85%
SCR Diversifié par LoB (copule)	268 754 981,86	254 948 246,99	5,42%

FIGURE 8.37 – Récapitulatif des SCR nets

Enfin, nous allons utiliser les *proxy* dont nous avons déjà parlé afin d'avoir le SCR total de GIARD après l'ajout des primes et frais stochastiques. En effet, un impact de 5% sur le SCR prime-CAT ne se traduira ni par un impact de 5% sur le SCR souscription non-vie ni par un impact de 5% sur le SCR total grâce aux effets de diversification inter et intra-modules de risque, aux absorptions de taxes et aux add-ons.

L'ajout des primes et des frais stochastiques entraîne une augmentation du SCR de GIARD de 7,6 millions d'euros soit une augmentation de 1%.

Standalone by Risk		
FR001	YEO 21 avec Excel	YEO 21 avec primes/frais stochastiques
Financial	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7
Non Life UW	419,4	429,4
Cat	87,7	92,5
NL Lapse	2,2	2,2
Pricing	155,1	163,5
Reserve	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9
SCR as SUM	966,3	976,3
Diversification Benefit	-235,5	-237,9
% Diversification	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	732,3	739,9
Tax Absorption	179,3	179,3
% Taxes	24,5%	24,2%
SCR	553,0	560,6
Model adjustment Financial	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23
SCR	754,7	762,3
Variation		1,01%

FIGURE 8.38 – SCR total GIARD

Chapitre 9

Sensibilités

Après avoir justifié les choix de calibration, nous allons réaliser des sensibilités sur les différents paramètres de notre modèle afin de remarquer leur impact sur le SCR. Nous allons appliquer des sensibilités sur :

- les corrélations sinistres/frais de gestion, primes/frais d'acquisition ;
- les lois des primes et des frais ;
- les copules utilisées ;
- l'impact d'une non-séparation des frais *i.e.* la seule considération d'une variable "frais totaux" ;
- le nombre de simulations de prime et de frais afin de regarder à partir de combien de simulation le SCR prime-CAT converge.

9.1 Corrélations

Nous avons effectué une sensibilité sur les corrélations des copules gaussiennes des primes (resp. sinistres) et des frais d'acquisition (resp. frais de gestion). Effectivement, l'objectif est de regarder si le SCR total est sensible à la calibration des coefficients des copules.

Les différents tests effectués visent à regarder l'impact qu'aurait :

- une-non prise en compte des corrélations des frais *i.e.* une corrélation à 0% ;
- une approche très prudente qui serait de prendre une corrélation de 100% ;
- un changement de ± 10 et ± 20 points de pourcentages lors de la calibration des paramètres tout en gardant un taux plancher à 0% et un taux plafond à 100%.

Nous pouvons déjà remarquer que l'effet des corrélations n'est pas symétrique ceci étant dû aux paramètres planchers / plafond. Globalement, nous pouvons remarquer qu'une variation de ± 10 points sur les paramètres n'aurait pas une grande incidence sur le SCR de GIARD.

Standalone by Risk							
FR001	YEO 21 avec primes et frais stochastique	+25pts	+10pts	-10pts	-25pts	100%	0%
Financial	220,5	220,5	220,5	220,5	220,5	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8	208,8	208,8	208,8	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7	15,7	15,7	15,7	15,7	15,7
Non Life UW	429,4	445,9	431,3	429,2	424,7	468,1	425,0
Cat	92,5	100,3	93,4	92,4	90,3	110,8	90,4
NL Lapse	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2
Pricing	163,5	177,3	165,1	163,3	159,6	195,9	159,8
Reserve	304,6	304,6	304,6	304,6	304,6	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9	101,9	101,9	101,9	101,9	101,9
SCR as SUM	976,3	992,8	978,3	976,1	971,7	1015,0	971,9
Diversification Benefit	-237,9	-241,9	-238,4	-237,9	-236,8	-247,3	-236,8
% Diversification	-24,4%	-24,4%	-24,4%	-24,4%	-24,4%	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	739,9	752,3	741,3	739,7	736,4	769,1	736,5
Tax Absorption	179,3	179,3	179,3	179,3	179,3	179,3	179,3
% Taxes	24,2%	23,8%	24,2%	24,2%	24,3%	23,3%	24,3%
SCR	560,6	573,0	562,1	560,4	557,1	589,8	557,2
Model adjustment Financial	164,51	164,51	164,51	164,51	164,51	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23	37,23	37,23	37,23	37,23	37,23
SCR	762,3	774,8	763,8	762,2	758,8	791,6	759,0

FIGURE 9.1 – Sensibilités sur les corrélations

	+25pts	+10pts	-10pts	-25pts	100%	0%
Variation par rapport à YE21 primes/frais stochastiques	1,65%	0,19%	-0,02%	-0,47%	3,87%	-0,44%
Variation par rapport aux résultats officiels	2,68%	1,21%	0,99%	0,54%	4,92%	0,57%

FIGURE 9.2 – Impact de la corrélation

Ainsi, nous pourrions imaginer arrondir les paramètres des copules à la dizaine supérieure afin d'avoir des paramètres plus lisibles.

Mettre une corrélation de 100% sur chaque copule aurait un impact très significatif sur le SCR et permet d'obtenir un des scénarios les plus prudents que nous pourrions effectuer. À l'inverse, avoir une indépendance des frais aurait pour conséquence (prévisible) une sous-estimation notable du risque.

9.2 Lois

Une sensibilité sur les lois ajustées sur nos données est faite afin de voir l'impact qu'une autre loi que la log-Normale aurait sur le SCR.

9.2.1 Loïs sur les primes

Pour le calibrage des primes, le choix de la log-Normale était parfois arbitraire et d'autres lois auraient pu être choisies à partir des p-valeurs et des statistiques de nos données :

- la loi Gamma;
- la loi de Weibull.

Standalone by Risk			
FR001	YEO 21 avec primes et frais stochastique	Avec loi gamma	Avec loi weibull
Financial	220,5	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7	15,7
Non Life UW	429,4	429,0	429,8
Cat	92,5	92,3	92,7
NL Lapse	2,2	2,2	2,2
Pricing	163,5	163,1	163,9
Reserve	304,6	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9	101,9
SCR as SUM	976,3	975,9	976,8
Cross Terms	1,5	1,5	1,5
Diversification Benefit	-237,9	-237,8	-238,0
% Diversification	-24,4%	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	739,9	739,6	740,2
Tax Absorption	179,3	179,3	179,3
% Taxes	24,2%	24,2%	24,2%
SCR	560,6	560,3	560,9
Model adjustment Financial	164,51	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23	37,23
SCR	762,3	762,0	762,7

FIGURE 9.3 – Sensibilités sur les lois (primes)

	Avec loi gamma	Avec loi weibull
Variation par rapport à YE21 primes frais stochastiques	-0,04%	0,04%
Variation par rapport aux résultats officiels	0,97%	1,06%

FIGURE 9.4 – Impact de la séparation des frais

Au vu de l'impact peu significatif des lois des primes sur le SCR final de GIARD (9.4), il semble cohérent de garder la loi log-Normale comme loi utilisée pour modéliser les primes.

9.2.2 Lois sur les frais

A l'image des lois pour les primes, nous avons testé d'autres lois que la log-normale qui auraient pu être choisies d'après les p-valeurs ou les statistiques des données :

- la loi Gamma;
- la loi Exponentielle.

Standalone by Risk			
FR001	YEO 21 avec primes et frais stochastique	Avec loi gamma	Avec loi exponentielle
Financial	220,5	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7	15,7
Non Life UW	429,4	428,7	849,4
Cat	92,5	92,1	291,4
NL Lapse	2,2	2,2	2,2
Pricing	163,5	162,9	515,1
Reserve	304,6	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9	101,9
SCR as SUM	976,3	975,7	1396,4
Cross Terms	1,5	1,5	2,5
Diversification Benefit	-237,9	-237,8	-340,3
% Diversification	-24,4%	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	739,9	739,4	1058,6
Tax Absorption	179,3	179,3	179,3
% Taxes	24,2%	24,2%	16,9%
SCR	560,6	560,1	879,3
Model adjustment Financial	164,51	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23	37,23
SCR	762,3	761,8	1 081,0

FIGURE 9.5 – Sensibilités sur les lois(frais)

	Avec loi gamma	Avec loi exponentielle
Variation par rapport à YE21 primes/frais stochastiques	-0,07%	42,02%
Variation par rapport aux résultats officiels	0,94%	43,46%

FIGURE 9.6 – Impact des lois des frais

Un rapide coup d'oeil permet de se rendre compte que la loi exponentielle n'est pas adéquate pour modéliser notre risque. En effet, nous savons que l'espérance est égale à la variance pour cette loi ce qui fait exploser notre SCR.

Nous obtenons les mêmes conclusions pour la loi Gamma que lors des sensibilités sur Lois sur les primes.

9.3 Copules

Étant donné que les copules Gaussiennes ne présentent pas de dépendances dans les extrêmes, nous avons réalisé une sensibilité avec des copules semblables aux Gaussiennes mais présentant des dépendances dans les extrêmes : les copules de Student. Nous allons tester deux degrés de liberté différents afin de voir si ce choix a un impact sur le SCR. Les copules de Student ont été réalisées à partir de l’algorithme présenté dans la partie Copule de Student.

Standalone by Risk			
FR001	YE0 21 avec primes et frais stochastique	Copule de Student 3DF	Copule de Student 6DF
Financial	220,5	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7	15,7
Non Life UW	429,4	428,8	428,6
Cat	92,5	92,2	92,1
NL Lapse	2,2	2,2	2,2
Pricing	163,5	163,0	162,8
Reserve	304,6	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9	101,9
SCR as SUM	976,3	975,7	975,6
Diversification Benefit	-237,9	-237,8	-237,7
% Diversification	-24,4%	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	739,9	739,4	739,3
Tax Absorption	179,3	179,3	179,3
% Taxes	24,2%	24,2%	24,3%
SCR	560,6	560,1	560,0
Model adjustment Financial	164,51	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23	37,23
SCR	762,3	761,9	761,7

FIGURE 9.7 – Sensibilités sur les copules

	Copule de Student 3DF	Copule de Student 6DF
Variation par rapport à YE21 primes/frais stochastiques	-0,06%	-0,08%
Variation par rapport aux résultats officiels	0,95%	0,94%

FIGURE 9.8 – Impact de la séparation des frais

Tout d’abord, nous pouvons remarquer que le nombre de degrés n’a pas un effet significatif sur le capital réglementaire de GIARD. De plus, nous constatons l’inverse de l’effet escompté : plus le degré de liberté augmente plus nous devrions nous rapprocher d’une gaussienne. Ceci pouvant peut-être s’expliquer par le nombre de simulations utilisées certainement trop faible pour voir la convergence de la copule de Student vers la copule normale. L’impact du choix de la copule ne semble pas significatif même si la copule gaussienne est très légèrement plus prudent.

9.4 Séparation des frais

Une sensibilité sur la non-distinction des types de frais c'est-à-dire la considération seule des frais totaux a été effectuée afin d'investiguer la pertinence de cette séparation. Les frais totaux ont été corrélés aux primes et aux sinistres par l'algorithme présenté dans la partie Copule Gaussienne.

Standalone by Risk		
FR001	YEO 21	
	avec primes et frais	Sans split des frais
Financial	220,5	220,5
Credit	208,8	208,8
Life UW	15,7	15,7
Non Life UW	429,4	419,4
Cat	92,5	87,7
NL Lapse	2,2	2,2
Pricing	163,5	155,1
Reserve	304,6	304,6
Operational Risk	101,9	101,9
SCR as SUM	976,3	966,4
Diversification Benefit	-237,9	-235,5
% Diversification	-24,4%	-24,4%
SCR Pre Tax	739,9	732,3
Tax Absorption	179,3	179,3
% Taxes	24,2%	24,5%
SCR	560,6	553,0
Model adjustment Financia	164,51	164,51
Model adjustment Risk Op	37,23	37,23
SCR	762,3	754,8

FIGURE 9.9 – Sensibilités sur la séparation des frais

	Sans split des frais
Variation par rapport à YE21 primes/frais stochastiques	-1,0%
Variation par rapport aux résultats officiels	0,01%

FIGURE 9.10 – Impact de la séparation des frais

Nous pouvons remarquer que si nous ne considérons pas les frais par catégorie nous sous-estimerions le risque. En effet, cette hypothèse donne presque le même SCR que si les primes et frais stochastiques n'étaient pas implémentés.

La baisse constatée peut s'expliquer du fait que nous captions beaucoup moins de volatilité sur les frais car les écarts entre les différents types de frais se compensent lorsque nous

	SCR Net		
	Sans split	Avec split	Impact
Income protection	4 802 026,33	20 773 156,82	-76,88%
Motor vehicle liability	84 792 671,92	85 380 546,13	-0,69%
Other motor	40 187 967,43	46 617 774,94	-13,79%
Marine, aviation and transport	39 014 773,44	50 315 364,05	-22,46%
Fire and other damage to property	172 026 729,26	176 334 055,73	-2,44%
General liability	51 932 157,65	50 564 218,82	2,71%
Somme SCR standalone	392 756 326,02	429 985 116,49	-8,66%
SCR Diversifié par LoB (copule)	255 022 109,11	262 796 033,23	-2,96%

FIGURE 9.11 – Impact par *LoB* de la séparation des frais

les agrégeons en frais totaux. Ceci se remarque notamment sur la ligne d'activité *Income protection* où le log-écart-type est de seulement 46% (contre 58% pour l'acquisition, 50% pour la gestion et 190% pour l'administratif) ce qui se traduit par une baisse de près de 77% du SCR.

9.5 Nombre de simulation

Nous avons parlé à maintes reprises de convergence du SCR lors de ce mémoire, nous allons maintenant nous y intéresser plus en détail. En effet, dans nos travaux, nous avons fait seulement 5 simulations de primes et de frais par simulations de sinistres. Nous pouvons donc nous demander si cela est suffisant pour avoir un résultat stable chaque fois que nous relançons le modèle.

Pour pouvoir faire plus de simulation, nous avons utilisé *RStudio* sur une version "simplifiée" de notre modèle. En effet, nous avons regardé l'évolution du SCR prime-CAT en fonction du nombre de simulation dans le cas où nous ne considérons aucune dépendance. Ce choix a été fait afin de simplifier le code R. De surcroît, la présence de dépendance ou non ne devrait pas impacter la convergence du SCR du modèle.

Si nous regardons le graphique de gauche qui est un zoom de celui de droite, nous remarquons que le SCR varie légèrement sur les 5 à 10 premières simulations avant de se stabiliser totalement autour de 50 simulations. Cependant, si nous changeons l'échelle du SCR, nous distinguons à peine les variations constatées pour un nombre faible de simulations. Ainsi, le SCR prime-CAT semble être très peu sensible au nombre de simulations des primes et frais.

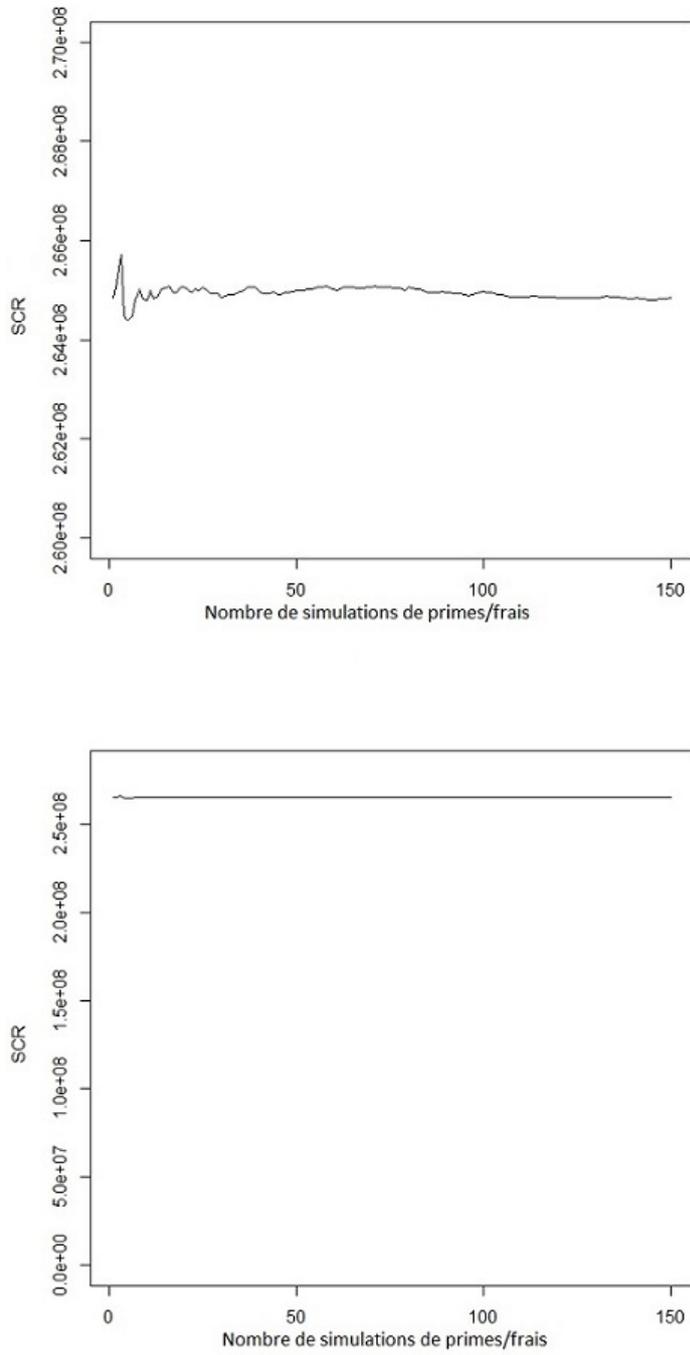


FIGURE 9.12 – Évolution du SCR prime-CAT en fonction du nombre de simulations

Chapitre 10

Limites

Lors des parties précédentes, nous avons mis en avant un certain nombre de limites techniques que nous allons récapituler dans cette partie.

10.1 Incertitude sur nos paramètres

Dans la partie Limites du modèle, nous avons évoqué qu'une part du risque était négligée car le modèle interne actuel ne prend pas en compte l'incertitude sur les paramètres lors de l'estimation de ceux-ci. Étant donné que nous avons encore moins de points que lors de la calibration de sinistres, cette limite vaut aussi pour nos travaux. Nous pourrions imaginer d'appliquer les méthodes mises en avant par Virgil ([19]) afin de prendre en compte cette incertitude.

10.2 La réassurance

Une autre limite réside dans l'application de la réassurance. En effet, de par la segmentation que nous avons choisie, il est impossible d'appliquer correctement les contrats qui, eux, s'appliquent à une maille plus fine. Nous avons fait le choix d'adapter toutes les composantes de la réassurance proportionnellement aux primes mais, comme nous l'avons vu dans les exemples de la figure 8.30, cette hypothèse peut nous amener à sur-estimer comme sous-estimer le montant de sinistres cédés, les primes de reconstitutions, etc.

10.3 Prise en compte des dépendances inter-LoB

Enfin, lors de l'agrégation des résultats techniques de la maille *LoB* à la maille entité, nous faisons l'hypothèse que les primes et frais sont indépendants entre les lignes d'activités. Même si ce choix a été justifié en Annexe C, il n'en demeure pas moins une piste d'amélioration.

De plus, si nous voulons mener une étude à une maille plus fine afin d'appliquer les traités de réassurance, il nous faudra en effet considérer des corrélations entre les différents produits/portefeuilles pour les agréger à la maille ligne de business.

Conclusion

La directive Solvabilité II impose aux assureurs le calcul d'un capital réglementaire permettant de limiter leur risque de ruine à 0,5% à horizon 1 an. Ce capital, le SCR, peut être calculé à partir d'une formule standard ou à partir d'un modèle interne élaboré par la compagnie d'assurance ; *Generali* a fait le second choix.

Cependant, comme dans chaque modèle, des choix de modélisation, des hypothèses sont faits. Il peut arriver que l'ACPR fasse des observations sur ses hypothèses car elles peuvent être jugées comme pas assez prudentes. En retour à ses observations, l'ACPR s'attend à ce qu'une étude challengeant les hypothèses en question soit faite afin de voir si elles viennent sous-estimer de manière significative l'évaluation du SCR. Cela a été le cas pour l'hypothèse concernant les frais et primes futurs lors du calcul du SCR pour le risque de prime et de catastrophe qui, globalement, représente le risque du résultat technique.

En effet, lors de la modélisation de ce risque, *Generali France* fait une hypothèse forte sur ses primes et frais futurs : ils sont considérés comme déterministes et égales à l'estimation faite par un service de *Generali*. Cependant, empiriquement, nous constatons des écarts plus ou moins grands suivant les *LoB* considérés entre les estimations et les réalisations. Ces écarts constatés pourraient donc avoir un impact sur le calcul du SCR du risque associé.

Pour mesurer l'impact qu'aurait la prise en compte de frais et primes stochastiques, nous avons choisi d'appliquer une méthodologie de simulation dans simulation. La calibration des lois pour modéliser les primes et frais a suivi une méthode analogue à ce que *Generali France* utilise déjà pour la modélisation de ses sinistres futurs. Et, nous avons cherché à créer des dépendances entre les différents types de frais et les primes et sinistres.

Au final, nous remarquons un impact de 1% sur le SCR total de l'entité GIARD après la mise en place des primes et des frais stochastiques. Ce résultat montre donc que l'utilisation des estimations déterministes entraîne bel et bien une sous-estimation significative des risques de prime et de catastrophe. Cependant, cet impact n'est pas suffisamment élevé pour justifier un changement de modèle ; effectivement, le seuil qu'il faut excéder pour un changement de modèle mineur est de 2,5% sur le SCR total.

Ensuite, nous avons fait des sensibilités sur les différents paramètres et choix du modèle afin de savoir à quel point les choix et hypothèses que nous avons faits pouvaient impacter notre résultat. Ces sensibilités sont d'ailleurs venues justifier le choix de la loi log-normale pour la calibration des lois de primes et de frais ; un autre choix de loi crédible n'aurait pas un effet significatif sur le calcul du SCR.

Enfin, nous avons mis en lumière les différentes limites de nos travaux notamment sur l'incertitude des paramètres estimés lors des phases de calibration, limite déjà existante dans le modèle actuel de *Generali France* et qui a été traité dans le sujet de mon prédécesseur M. Djogbessi. Son mémoire avait comme conclusion que la prise en compte de cette incertitude avait un impact significatif mais pas suffisant pour justifier un changement de modèle. Nous connaissons donc les effets marginaux de ces deux mémoires, il pourrait être intéressant de voir l'impact conjoint.

Aussi, une des autres limites est due à la segmentation choisie. En effet, nous ne pouvons pas appliquer de manière rigoureuse les traités de réassurance. Il pourrait donc être intéressant de mener la même étude que nous avons faite à une maille plus fine afin de pouvoir appliquer proprement les traités de réassurance.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Chroniques des primes et frais

Primes brutes

En k€	Primes IFRS (brutes)							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0	1 027	897	855	813	1 499	1 457	1 630
Income protection	0	9 074	10 971	10 275	10 299	11 813	13 194	14 332
Motor vehicle liability	209 192	200 644	191 145	191 548	197 244	193 556	199 459	195 868
Other motor	403 361	364 227	327 375	335 049	348 346	349 961	357 242	366 807
Marine, aviation and transport	175 020	189 791	158 575	158 011	160 585	171 812	159 924	182 988
Fire and other damage to property	924 783	913 733	936 400	912 819	918 013	933 880	958 140	1 013 299
Third Party Liability	196 622	181 548	191 091	184 890	194 161	210 076	203 237	238 679

En k€	Primes brutes du Plan							
LoB/Année	REP 2014	REP 2015	REP 2016	REP 2017	REP 2018	REP 2019	REP 2020	REP 2021
Medical expense	5 901,26	982,80	1 079,55	873,11	620,64	679,56	652,61	593,74
Income protection	2 142,44	9 219,01	9 685,33	9 291,36	10 366,52	9 714,70	10 337,02	9 382,52
Motor vehicle liability	214 881,36	203 052,97	202 035,59	198 806,53	199 607,35	220 004,54	206 254,56	200 272,48
Other motor	358 897,22	339 386,13	338 490,78	333 122,79	334 752,22	338 785,89	345 642,22	335 549,81
Marine, aviation and transport	193 504,19	177 839,40	101 694,88	157 658,20	159 620,81	155 831,89	144 612,68	152 439,15
Fire and other damage to property	1 063 907,57	1 015 288,95	1 014 008,37	987 578,28	922 058,68	991 906,37	939 513,53	955 116,93
Third Party Liability	144 681,57	139 063,20	174 441,34	137 712,77	194 046,21	251 645,05	214 605,85	208 307,95

FIGURE A.1 – Chroniques primes brutes (1)

Frais

En k€	Frais Admin IFRS							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0	-21	-18	-17	-16	-16	-14	-17
Income protection	0	-411	-421	-43	-59	-60	-53	-10
Motor vehicle liability	-13 618	-12 603	-11 978	-12 519	-13 017	-13 264	-12 509	-12 665
Other motor	-26 452	-22 645	-20 470	-21 625	-22 820	-23 888	-23 875	-23 967
Marine, aviation and transport	-17 005	-19 466	-16 748	-18 865	-24 418	-22 422	-15 903	-15 443
Fire and other damage to property	-69 798	-70 522	-71 946	-73 671	-74 144	-81 039	-77 999	-81 490
Third Party Liability	-13 484	-14 785	-16 703	-16 801	-18 164	-20 564	-18 186	-20 385

En k€	Frais Acquisition IFRS							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0	-81	-70	-65	-61	-58	-55	-66
Income protection	0	-292	-857	-272	-154	-2 551	-2 022	-2 431
Motor vehicle liability	-29 378	-29 304	-27 172	-27 050	-27 631	-26 605	-26 760	-26 647
Other motor	-60 409	-54 079	-48 088	-47 802	-49 441	-48 592	-52 293	-51 784
Marine, aviation and transport	-22 788	-23 368	-15 610	-25 668	-19 434	-19 171	-21 873	-27 790
Fire and other damage to property	-166 013	-161 992	-167 310	-161 419	-157 585	-156 593	-164 461	-166 302
Third Party Liability	-35 840	-33 783	-36 070	-33 917	-34 097	-35 747	-35 283	-40 079

FIGURE A.2 – Chronique frais réalisés brutes

En k€	Frais Gestion IFRS							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0	-28	-23	-22	-20	-19	-18	-24
Income protection	0	-2 159	-2 113	-2 036	-2 024	-165	-161	-338
Motor vehicle liability	-12 883	-12 034	-11 828	-12 044	-14 510	-13 503	-13 096	-15 508
Other motor	-25 428	-25 180	-21 471	-13 854	-19 162	-22 284	-18 769	-21 714
Marine, aviation and transport	-17 932	-11 787	-8 520	-6 866	-7 196	-8 721	-6 931	-4 346
Fire and other damage to property	-53 952	-56 116	-56 052	-47 551	-57 374	-61 702	-57 199	-57 473
Third Party Liability	-17 463	-18 107	-11 461	-11 959	-15 943	-15 608	-14 346	-14 062

En k€	Frais total IFRS							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0	-129	-111	-104	-96	-93	-87	-108
Income protection	0	-2 862	-3 390	-2 351	-2 238	-2 776	-2 236	-2 778
Motor vehicle liability	-55 879	-53 941	-50 978	-51 614	-55 159	-53 372	-52 365	-54 820
Other motor	-112 289	-101 904	-90 029	-83 281	-91 423	-94 764	-94 937	-97 466
Marine, aviation and transport	-57 726	-54 620	-40 878	-51 399	-51 049	-50 314	-44 708	-47 578
Fire and other damage to property	-289 763	-288 630	-295 308	-282 640	-289 103	-299 334	-299 659	-305 265
Third Party Liability	-66 787	-66 675	-64 234	-62 677	-68 204	-71 919	-67 815	-74 527

FIGURE A.3 – Chronique frais réalisés brutes(2)

En k€	Frais Admin PLAN							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	-1 681,61	-31,74	-34,73	-138,55	-11	-27	-7,21	-6
Income protection	0,00	-3 205,35	-2 090,42	-1 969	-2 477	-14	-4,00	-136
Motor vehicle liability	-1 285,12	-13 487,57	-12 409,54	-12 409,54	-13 335	-13 282	-13 787,20	-13 500
Other motor	-2 140,92	-22 551,86	-20 612,33	-20 733,64	-22 315	-22 255	-23 053,84	-22 529
Marine, aviation and transport	-2 490,33	-8 374,14	-8 825,19	-18 291,88	-19 294	-20 477	-18 645,80	-24 996
Fire and other damage to property	-5 330,04	-71 667,91	-71 003,72	-75 250,15	-72 224	-71 969	-76 997,47	-82 517
Third Party Liability	-1 494,69	-9 524,00	-10 452,93	-11 293,10	-16 409	-16 577	-23 650,33	-21 308

En k€	Frais Acquisition Plan							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	-1 512,53	-119,85	-151,99	-88,40	-45	-118	-27,16	-44
Income protection	-399,18	-189,53	-258,60	-238	-272	-64	-19,00	-213
Motor vehicle liability	-60 347,47	-30 182,56	-29 091,70	-29 091,70	-29 264	-29 368	-29 376,47	-27 570
Other motor	-100 783,30	-50 440,39	-51 674,52	-48 654,51	-49 001	-49 132	-49 178,20	-46 116
Marine, aviation and transport	-37 845,43	-28 308,08	-17 956,02	-17 496,56	-18 564	-18 202	-17 014,85	-13 012
Fire and other damage to property	-323 838,47	-190 668,33	-186 030,31	-182 085,42	-166 323	-163 663	-160 625,44	-157 389
Third Party Liability	-46 478,80	-28 978,59	-27 287,47	-27 082,40	-36 035	-36 294	-26 598,21	-34 025

FIGURE A.4 – Chronique frais estimées brutes (1)

En k€	Frais Gestion plan							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	0,00	-35,47	-38,82	-20,74	-13	-15	-8,06	-7
Income protection	0,00	-31,06	-13,75	-3	-67	-1 891	-1 871,77	-2 041
Motor vehicle liability	-684,59	-13 481,12	-13 863,73	-13 863,73	-14 191	-14 245	-13 040,32	-13 339
Other motor	-1 101,95	-22 415,26	-21 628,04	-23 140,96	-23 706	-23 837	-21 827,02	-22 288
Marine, aviation and transport	-2 925,14	-9 070,34	-6 202,71	-5 615,19	-6 185	-6 558	-6 329,79	-4 915
Fire and other damage to property	-3 602,10	-61 171,97	-61 968,42	-65 073,05	-60 371	-61 084	-60 961,87	-57 836
Third Party Liability	-1 690,60	-10 907,84	-9 972,47	-10 070,23	-16 807	-18 099	-21 393,66	-18 748

En k€	Frais total plan							
LoB/Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Medical expense	-3 194	-187	-226	-248	-69	-159	-42	-58
Income protection	-399	-3 426	-2 363	-2 210	-2 816	-1 968	-1 895	-2 391
Motor vehicle liability	-62 317	-57 151	-55 365	-55 365	-56 790	-56 895	-56 204	-54 409
Other motor	-104 026	-95 408	-93 915	-92 529	-95 022	-95 225	-94 059	-90 932
Marine, aviation and transport	-43 261	-45 753	-32 984	-41 404	-44 043	-45 237	-41 990	-42 924
Fire and other damage to property	-332 771	-323 508	-319 002	-322 409	-298 918	-296 715	-298 585	-297 743
Third Party Liability	-49 664	-49 410	-47 713	-48 446	-69 251	-70 969	-71 642	-74 081

FIGURE A.5 – Chronique frais estimées brutes (2)

Annexe B

Estimateurs des lois

B.1 Maximum de vraisemblance

B.1.1 Normale

La fonction de vraisemblance pour un échantillon (x_1, \dots, x_n) pour une distribution log-normale de paramètre μ et σ est :

$$LV = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

En dérivant cette fonction par rapport à μ , nous obtenons :

$$\frac{\partial LV}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i) - n\mu \right)$$

On cherche à maximiser la log-vraisemblance donc on cherche à égaliser la dérivée avec 0 :

$$\frac{\partial LV}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i) - n\mu \right) = 0$$

On obtient donc :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Enfin, on dérive par rapport à σ :

$$\frac{\partial LV}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Comme précédemment, on cherche le point qui annule cette équation et on obtient :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

B.1.2 Log-Normale

La fonction de vraisemblance pour un échantillon (x_1, \dots, x_n) pour une distribution log-normale de paramètre μ et σ est :

$$\begin{aligned} LV &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \mu)^2 - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i))^2 + \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{n\mu^2}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \end{aligned}$$

Nous remarquons que cette log-vraisemblance pour un échantillon (x_1, \dots, x_n) est égale à la log-vraisemblance d'une distribution gaussienne évaluée en $(\ln(x_1), \dots, \ln(x_n))$ moins le terme constant $\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$. Étant donné que les termes constants ne modifient pas l'évaluation de nos paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance, nous pouvons en conclure que le maximum est atteint pour les mêmes valeurs de μ et σ que pour une distribution gaussienne d'un échantillon $(\ln(x_1), \dots, \ln(x_n))$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \mu)^2$$

B.1.3 Exponentielle

La densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Ainsi, sa log-vraisemblance est :

$$LV = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i = n(\ln(\lambda) - \lambda \bar{x})$$

En dérivant par rapport à λ , on obtient :

$$\frac{\partial LV}{\partial \lambda} = n\left(\frac{1}{\lambda} - \bar{x}\right)$$

En égalisant avec 0 cette dérivée, nous obtenons notre estimateur :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

B.1.4 Weibull

La fonction de distribution d'une loi de Weibull de paramètres α et β est :

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}$$

On cherche à maximiser la log-vraisemblance qui est donnée par :

$$\begin{aligned} LV &= \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\ln(\beta) - \ln(\alpha) + (\beta - 1)\ln(x_i) - (\beta - 1)\ln(\alpha) - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta) \\ &= n(\ln(\beta) - \beta \ln(\alpha) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta) \end{aligned}$$

Ensuite, il faut trouver les valeurs de α et β qui maximisent la log-vraisemblance. Soit la résolution se fait par un solveur (*Excel* ou sur *Igloo*), soit par la méthode de Newton sur *Excel*. Cette dernière procède de la manière suivante :

- Étape 1 : Choisir une valeur initiale β_0 de β ;

- Étape k : En ayant obtenu en étape k-1 β_{k-1} , on définit β_k de la manière suivante :

$$\beta_k = \beta_{k-1} - \frac{h(\beta_{k-1})}{h'(\beta_{k-1})}$$

Où :

$$h(\beta) = \frac{1}{\beta} + \frac{u}{n} + \frac{w}{v} \quad ; \quad h'(\beta) = \frac{1}{\beta^2} + \frac{w^2}{v^2} + \frac{s}{v}$$

Avec :

$$u = \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad ; \quad v = \sum_{i=1}^n x_i^\beta \quad ; \quad w = \sum_{i=1}^n x_i^\beta \ln(x_i) \quad ; \quad s = \sum_{i=1}^n x_i^\beta \ln(x_i)^2$$

On itère jusqu'à ce que notre valeur de β_k converge (i.e. $\beta_k - \beta_{k+1}$ très proche de 0). Une fois que nous convergeons sur le calcul de $\hat{\beta}$, un estimateur de α est donné par :

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

B.1.5 Gamma

La distribution d'une loi Gamma de paramètres α et β est donnée par :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

Ainsi, la log-vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} LV &= (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i - n(\alpha \ln(\beta) + \ln(\Gamma(\alpha))) \\ &= n((\alpha - 1) \ln(\bar{x}) - \frac{\bar{x}}{\beta} - \alpha \ln(\beta) - \ln(\Gamma(\alpha))) \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à β , on obtient que le maximum de la fonction est obtenu en :

$$\beta = \frac{\bar{x}}{\alpha}$$

Pour obtenir une estimation de alpha, soit nous utilisons un solveur soit nous utilisons la méthode itérative suivante (17) :

- Initialisation de α :

$$\alpha_0 = \frac{5}{\ln(\bar{x}) - \ln(\bar{x})}$$

- Étape k : En ayant au préalable calculé α_{k-1} , le calcul de α_k se fait de la manière suivante :

$$\frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{\ln(\bar{x}) - \ln(\bar{x}) + \ln(\alpha_{k-1}) - \psi(\alpha_{k-1})}{\alpha_{k-1}^2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \psi_1(\alpha_{k-1}) \right)}$$

Où les fonctions ψ et ψ_1 sont les fonctions digamma et trigamma que l'on peut estimer de la façon suivante :

$$\psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{30x^5} + \frac{1}{42x^7} - \frac{1}{30x^9} + \frac{5}{66x^{11}} - \frac{691}{2730x^{13}} + \frac{7}{6x^{15}}$$

Une fois alpha estimé, une estimation de beta est :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$$

B.2 Méthodes des moments

B.2.1 Gamma

Soit X une variable aléatoire suivant une loi Gamma de paramètres α et β alors nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad \mathbb{V}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

On exprime les paramètres en fonction de la variance et de l'espérance :

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{V}[X]} \quad ; \quad \beta = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{V}[X]}$$

Étant donné que la moyenne empirique \bar{x} et la variance empirique S^2 sont des estimateurs convergents d'espérance et de la variance, nous en déduisons deux estimateurs convergents de nos paramètres :

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{S^2} \quad ; \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{S^2}$$

B.2.2 Log-Normale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 alors nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad ; \quad \mathbb{E}[X^2] = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mu = \ln(\mathbb{E}[X]) - \frac{\sigma^2}{2}$$

De plus, en utilisant le moment d'ordre deux :

$$\begin{aligned} 2\mu + 2\sigma^2 &= \ln(\mathbb{E}[X^2]) \Rightarrow \sigma^2 = \ln(\mathbb{E}[X^2]) - 2\ln(\mathbb{E}[X]) \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \ln\left(\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}\right) = \ln\left(\frac{\mathbb{V}[X] + \mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2}\right) = \ln\left(\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2} + 1\right) \end{aligned}$$

En utilisant la moyenne empirique et la variance empirique pour estimer l'espérance et la variance, on obtient un estimateur de σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \ln\left(\frac{S^2}{\bar{x}^2} + 1\right)$$

En injectant $\hat{\sigma}^2$ dans μ :

$$\mu = \ln(\mathbb{E}[X]) - \frac{\ln\left(\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)}{2} = \ln(\mathbb{E}[X]) - \ln\left(\frac{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}}{\mathbb{E}[X]}\right) = \ln\left(\frac{\mathbb{E}[X]}{\frac{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}}{\mathbb{E}[X]}}\right) = \ln\left(\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}}\right)$$

Ainsi, un estimateur de μ est :

$$\hat{\mu} = \ln\left(\frac{\bar{x}^2}{\sqrt{S^2 + \bar{x}^2}}\right)$$

B.2.3 Exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi Exponentielle de paramètre λ alors nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

On obtient directement qu'un estimateur consistant de λ est :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Nous aurions pu aussi remarquer qu'une loi Exponentielle de paramètre λ est aussi une loi Gamma de paramètres $\alpha = 1$ et λ

Annexe C

Explication sur les corrélations inter-*LoB*

Lorsque nous agrégeons les résultats techniques de la maille *LoB* à la maille entité, nous sommons les différents résultats techniques ensemble et cela reviendrait, en partie, à considérer que les frais et les primes ne sont pas corrélés entre les *LoB*. Ce choix a été pour plusieurs raisons :

- L'ajout de corrélation entre les lignes d'activité pour les primes et les frais rajouterait beaucoup trop de complexité à notre modèle. En effet, pour prendre en compte cette corrélation tout en prenant en compte les corrélations entre les primes/sinistres et les frais, nous obtiendrions une matrice de corrélation d'une taille démesurée ne pouvant être exploitée sur les outils utilisés lors de ce mémoire. Si nous avions modifié le modèle actuel directement sur *Igloo*, nous aurions certainement pu considérer la totalité des dépendances mais cela aurait nécessité davantage de temps. De plus, ce mémoire avait plus pour vocation à chiffrer l'impact des frais et primes stochastiques dans le but de déterminer si il était nécessaire de faire un changement de modèle plutôt que faire un changement de modèle.
- Une partie des dépendances est tout de même captée lorsque nous simulons nos frais par le biais de copule et lorsque nous réajustons nos sinistres. En effet, lorsque nous comparons la matrice de corrélation linéaire empirique de nos résultats avant (C.1) et après (C.2) application des frais et primes stochastiques, nous remarquons que nous captions tout de même une bonne partie des dépendances avec "seulement" une perte maximale de 7 points de pourcentage sur les coefficients linéaires. La perte de la corrélation sur la *LoB* IP-ME s'explique par le fait que les frais ont une telle volatilité (en particulier les frais administratifs) qu'ils deviennent le facteur prépondérant du *SCR* expliquant ainsi la perte de la dépendance.

Corrélation entre LoB	IP-ME	MTPL	MOC	MAT	Fire	TPL
IP-ME	100%	24%	24%	23%	15%	23%
MTPL	24%	100%	67%	21%	15%	44%
MOC	24%	67%	100%	20%	36%	22%
MAT	24%	21%	20%	100%	26%	20%
Fire	15%	15%	36%	26%	100%	14%
TPL	23%	44%	22%	20%	14%	100%

FIGURE C.1 – Matrice de corrélation linéaire empiriques des résultats techniques avant ajout des primes et frais stochastiques

Corrélation entre LoB	IP-ME	MTPL	MOC	MAT	Fire	TPL
IP-ME	100%	5%	4%	3%	2%	4%
MTPL	5%	100%	67%	17%	14%	38%
MOC	5%	67%	100%	16%	29%	19%
MAT	4%	17%	16%	100%	20%	14%
Fire	2%	14%	29%	20%	100%	11%
TPL	4%	38%	19%	14%	11%	100%

FIGURE C.2 – Matrice de corrélation linéaire empiriques des résultats techniques après ajout des primes et frais stochastiques

- Les résultats de tests statistiques ne permettent pas d'affirmer que les frais et les primes des *LoBs* ne sont pas indépendants. L'hypothèse nulle du test effectué est "Les variables sont indépendantes" ainsi nous pouvons rejeter cette hypothèse si la p-valeur au niveau de confiance α si elle est inférieure à α . En effet, lorsque nous calculons les p-valeurs croisées des tests de significativité des *tau* de Kendall, nous obtenons qu'ils ne le sont pas pour un niveau de confiance 5% pour la totalité des *LoB* (voir figure C.4)¹. De plus, si nous regardons de manière agrégée les p-valeurs, nous obtenons une p-valeur moyenne et médiane assez élevée (C.3). En effet, si nous regardons au total (*i.e.* prime + frais) nous obtenons une p-valeur moyenne à 52% c'est à dire que, si nous rejetons l'hypothèse nulle, nous nous tromperions un peu plus d'une fois sur deux.

	Prime	Administratif	Gestion	Acquisition	Au total
p-valeur médiane	77%	56%	24%	77%	56%
p-valeur moyenne	59%	50%	41%	59%	52%

FIGURE C.3 – P-valeur médiane/moyenne

1. Excepté *IP-ME/Liability* pour les frais de gestion mais, conceptuellement, cela ne semble pas être cohérent.

		Prime					
		IPME	Motor	MOC	MAT	Fire	TPL
IPME		0%	56%	100%	77%	38%	7%
Motor		56%	0%	38%	77%	77%	56%
MOC		100%	38%	0%	77%	38%	77%
MAT		77%	77%	77%	0%	7%	77%
Fire		38%	77%	38%	7%	0%	77%
TPL		7%	56%	77%	77%	77%	0%

		Acquisition					
		IPME	Motor	MOC	MAT	Fire	TPL
IPME		0%	56%	100%	77%	38%	7%
Motor		56%	0%	38%	77%	77%	56%
MOC		100%	38%	0%	77%	38%	77%
MAT		77%	77%	77%	0%	7%	77%
Fire		38%	77%	38%	7%	0%	77%
TPL		7%	56%	77%	77%	77%	0%

		Administratif					
		IPME	Motor	MOC	MAT	Fire	TPL
IPME		0%	56%	7%	14%	77%	24%
Motor		56%	0%	56%	77%	56%	38%
MOC		7%	56%	0%	14%	100%	24%
MAT		14%	77%	14%	0%	100%	14%
Fire		77%	56%	100%	100%	0%	100%
TPL		24%	38%	24%	14%	100%	0%

		Gestion					
		IPME	Motor	MOC	MAT	Fire	TPL
IPME		0%	14%	77%	38%	14%	3%
Motor		14%	0%	77%	7%	7%	24%
MOC		77%	77%	0%	77%	100%	77%
MAT		38%	7%	77%	0%	56%	24%
Fire		14%	7%	100%	56%	0%	24%
TPL		3%	24%	77%	24%	24%	0%

FIGURE C.4 – Matrice de p-valeurs

Ainsi, corrélérer les frais et primes des différentes lignes d'activité n'a pas paru être primordial même si nous savons qu'il existe nécessairement une corrélation notamment due à l'inflation.

Bibliographie

- [1] C. Kault (2021), "Solvabilité 2 : Aspects théoriques et pratiques"
- [2] M. Kratz (2021), "Extrem Value Theory - Theory and Application to Risk Management"
- [3] ACPR (2017), "Solvabilité II : principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5)"
- [4] ACPR (2019), "Gouvernance dans Solvabilité II"
- [5] EIOPA (2009), Directive Solvabilité II
- [6] EIOPA (2015), Règlement délégué de Solvabilité II
- [7] ACPR (2017), "Réglementation générale des assurances"
- [8] Institut des Actuaires - Groupe de travail « Best Estimate Liabilities Non-vie » (2016), Manuel BEL Non-Vie
- [9] Ministère de la Santé et de la Prévention (2021), "Le plafond de la sécurité sociale"
- [10] Bibmaths, "Décomposition de Cholesky"
- [11] R. Laïla, " Construction d'un Modèle Interne Partiel en Assurance non-vie"(septembre 2014), Mémoire de fin d'étude, EURIA
- [12] M. Hersent, "Modélisation du risque de prime sous Solvabilité II " (2013), Mémoire de fin d'étude, Université Paris Dauphine
- [13] A. Bergeron, "Copules dynamiques pour séries chronologiques"(juin 2020), Mémoire de fin d'étude, Sherbrooke Québec Canada, Département de Mathématiques de la Faculté des sciences université de Sherbrooke
- [14] Slimani , "Estimation des paramètres d'une copule"(2012), Mémoire de fin d'étude, République Algérienne Démocratique et Populaire, Département de Mathématiques de l'université Mohamed Khider Biskra
- [15] Y. Kabla, "Utilisation des copules pour analyser l'impact des dépendances sur un portefeuille de crédits"(novembre 2002), Rapport de stage d'ingénieur, École Centrale Paris
- [16] A. Ezzamiti, "Modélisation de l'exposition du portefeuille Generali France face au péril tempête : Application à la tarification en réassurance" (septembre 2017), Mémoire de stage de fin d'étude, Université Paris Nanterre

- [17] C. Zaiontz, "Fitting Gamma Parameters via MLE" , Real Statistics
- [18] M. Ettien, "Application de la méthode de Munich Chain-Ladder au calcul du SCR de réserve en modèle interne" (décembre 2020), Mémoire de fin d'étude, EURIA.
- [19] V. Djogbessi, "Prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du risque de prime" (juin 2022), Mémoire de fin d'étude, Institut de Science Financière et d'Assurances.
- [20] R. Nelsen (1999), "An introduction to copulas". Springer
- [21] S. Resnick (2007). "Heavy-Tail Phenomena : Probabilistic and statistical Modeling". Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.
- [22] J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Seger, J. Teugels, D. De Waal, C. Ferro (2006). "Statistics of extremes : Theory and Applications". Wiley Series in Probability and Statistics