

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Monsieur Martin Froelicher-Bournaud	
Etude du modèle de taux LMM+ et optimisation de son Displacement Parameter	
Confidentialité : <input type="checkbox"/> NON <input checked="" type="checkbox"/> OUI (Durée : <input type="checkbox"/> 1 an <input checked="" type="checkbox"/> 2 ans)	
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.	
<u>Membres présents du jury de la filière :</u>	Signature : <u>Entreprise</u> : Société Générale Assurances Nom : Martin Froelicher-Bournaud Signature : 
<u>Membres présents du jury de l'Institut des Actuares :</u>	<u>Directeur de mémoire en entreprise</u> Nom : Kévin Dubourg Signature : 
	<u>Invité</u> : Nom : Signature :
	Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité) <u>Signature du responsable entreprise</u> : 
	<u>Signature du candidat</u> : 

Résumé

Mots clés : *Générateur de scénarios économiques, Displacement parameter, Modèle de taux, LMM+, IFRS 17, Solvabilité 2, Market-Consistency, Univers risque-neutre, Test de martingalité, Volatilité implicite, Calibrage, Volatilité déterministe, Volatilité stochastique, Swaption*

Dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2 ainsi que IFRS 17, l'évaluation du passif et de l'actif d'une compagnie d'assurance doit se faire en valeur de marché (market consistent) et en monde risque neutre (martingalité). La modélisation des flux futurs liés à l'actif et au passif nécessite l'utilisation de simulations stochastiques produites à l'aide d'un Générateur de Scénarios Economiques (GSE).

Les assureurs, en raison de leur structure et de la composition de leurs actifs, sont très exposés aux taux d'intérêts. Il est primordial de les modéliser correctement et d'avoir une maîtrise complète des modèles utilisés. Pour cela de nombreux modèles stochastiques existent sur le marché. Le modèle de taux LMM+ étudié dans ce mémoire présente des corrections permettant une meilleure modélisation des taux dans le contexte économique récent. Ainsi, il introduit un facteur de déplacement (appelé *Displacement Parameter* ou *shift*) forçant le modèle à générer des taux négatifs et une volatilité stochastique afin de permettre au modèle de capter au mieux la réalité du marché.

Dans le cadre de ce mémoire, il a été question d'étudier la calibration du modèle de taux LMM+ et plus précisément le *Displacement Parameter* en proposant une méthode permettant d'objectiver le choix de sa valeur. Au-delà de la calibration pure du modèle de taux, le mémoire a apporté un aspect plus concret avec notamment l'étude de l'impact du changement de *Displacement Parameter* sur les résultats de SOGECAP dans le cadre des réglementations Solvabilité 2 et IFRS 17.

Abstract

Keywords: *Economic scenario generator, Displacement parameter, Rate model, LMM+, IFRS 17, Solvency 2, Market-Consistency, Risk-neutral universe, Martingale test, Implied volatility, Calibration, Deterministic volatility, Stochastic volatility, Swaption*

Within the framework of Solvency II regulation and IFRS 17, the evaluation about liabilities and assets of an insurance company must be done at market value (market consistent) and in a risk neutral world (martingality). The modeling of future flows related to assets and liabilities requires the use of stochastic simulations produced with an Economic Scenario Generator (GSE).

Due to their structure and asset mix, insurers are highly exposed to interest rates. It is essential to model them correctly and to have complete control over the models used. For this purpose, many stochastic models exist on the market. The LMM+ rate model studied in this thesis presents corrections allowing a better modeling of rates in the recent economic context. Thus, it introduces a shift factor forcing the model to generate negative rates and a stochastic volatility in order to allow the model to better understand the market reality.

In this thesis, we have studied calibration of the LMM+ rate model and more precisely the Displacement Parameter by proposing a method allowing us to objectively choose its value. Beyond the pure calibration of the rate model, this thesis brings a more concrete aspect of the impact of the change of the displacement parameter on the results of SOGECAP in the framework of the Solvency 2 and IFRS 17 regulations

Note de synthèse

De nombreux modèles de taux stochastiques existent sur le marché, tels que le modèle LMM qui a longtemps été utilisé. Celui-ci est un modèle log-normal qui ne permet la génération que de taux positifs. Or, il y a peu, le marché mondial des taux d'intérêt a été confronté pendant une longue période à des taux d'intérêt négatifs. Ainsi, a été mis en place le modèle LMM+, semblable au modèle LMM mais qui se différencie en deux points : l'ajout d'un déplacement parameter (DP) qui permet de générer des taux négatifs, et l'ajout d'une volatilité stochastique qui permet de capter au mieux la réalité des marchés.

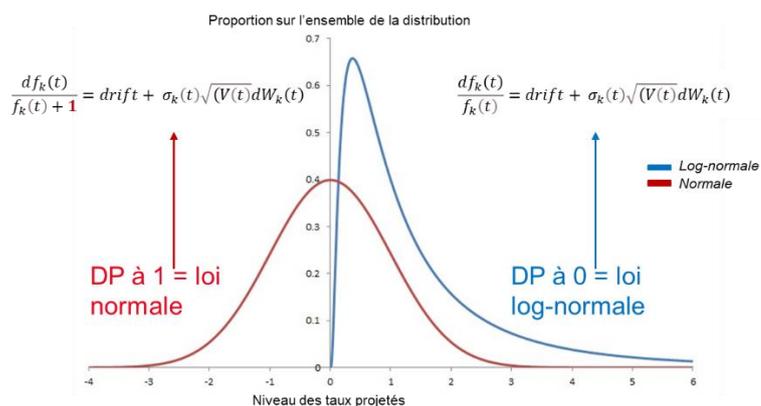


Figure 1. Distribution des taux en fonction du DP

Après quelques rappels du contexte réglementaire actuel, ce mémoire présente les travaux réalisés sur le modèle de projection de taux LMM+ d'un assureur vie épargne, dans le cadre des calculs réglementaires sous Solvabilité 2 et IFRS 17. Il se focalise plus particulièrement sur le Displacement Parameter, qui est un paramètre primordial du modèle de projection de taux. Celui-ci n'est pas calibré automatiquement à chaque simulation, contrairement aux autres paramètres du modèle. Ainsi, une étude permettant d'objectiver un niveau adéquat de Displacement Parameter a été réalisée. Calibrer revient à trouver les valeurs des paramètres du modèle afin qu'il reproduise le plus fidèlement possible les données de marchés observées (fournies en entrée du modèle), permettant ainsi à celui-ci d'avoir des projections futures *risque-neutre* et *market consistent*.

Volatilité stochastique

Contrairement au modèle LMM, le LMM+ possède une volatilité stochastique. Il est ainsi composé d'une volatilité déterministe et d'une volatilité stochastique.

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t) + DP} = drift + \sigma_k(t) \sqrt{V(t)} dW_k(t)$$

Volatilité déterministe

Volatilité stochastique

Les modèles sans volatilité stochastique ne peuvent répliquer certaines caractéristiques de la volatilité implicite, telles que le « smile » de volatilité ou le « skew » de volatilité, qui indiquent que la volatilité implicite a tendance à varier avec le prix d'exercice et la date d'expiration du dérivé. On utilise le terme stochastique car la volatilité du sous-jacent est traitée comme un processus aléatoire, dépendant des caractéristiques des produits dérivés tels que le prix du sous-jacent, la variance du processus de la volatilité, et la vitesse de convergence de la volatilité vers sa valeur limite.

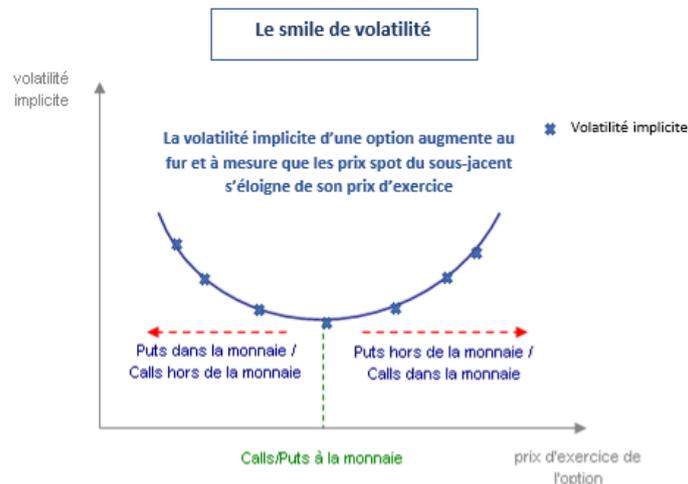


Figure 2. Illustration du smile de volatilité

Le LMM+ présente l'avantage de pouvoir être calibré sur les volatilités implicites des swaptions, à la fois avec une matrice de volatilité à la monnaie, et en dehors de la monnaie. La matrice à la monnaie (ATM) est à la maille maturité x tenor (strike = 0), tandis que la matrice en dehors de la monnaie (AFTM) est à la maille strike x maturité (tenor = 10 ans).

Displacement parameter

Le modèle LMM+ se différencie également avec l'ajout d'un displacement parameter (noté DP). Ce paramètre va permettre de modéliser des taux négatifs.

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t) + \mathbf{DP}} = \text{drift} + \sigma_k(t) \sqrt{V(t)} dW_k(t)$$



 Displacement parameter

Le DP n'est pas calibré automatiquement à chaque simulation comme le sont les autres paramètres du modèle LMM+, sa valeur par défaut est de 45%. Un des objectifs de ce mémoire est d'étudier et de justifier le niveau de ce paramètre. Cette étude se base sur le principe de la méthode de Monte-Carlo. Elle consiste à réaliser un grand nombre de calibrages, avec plusieurs niveaux de Displacement Parameter (compris entre 0% et 60%) tirés de manière aléatoire. On observe ensuite le niveau qui est en moyenne le plus approprié, c'est-à-dire le niveau qui reproduit le plus fidèlement les données marchés. Cela se traduit par une minimisation des écarts entre les volatilités implicites de marché des swaptions et les volatilités implicites reproduites par le modèle. La nappe de volatilité contenant plus

de 189 points (sur la surface tenors/maturites/strikes), elle ne peut être parfaitement ajustée par un modèle à 8 paramètres, des écarts modèle/marché persisteront toujours. Dans cette analyse, la justification du choix passe par l'analyse de la qualité du calibrage pour chaque déplacement parameter en situation centrale ainsi que sur plusieurs situations de stress.

Méthode

1- Lancement de 1000 calibrages à la même date et avec les mêmes conditions économiques en définissant les valeurs initiales de tous les paramètres du modèle de manière aléatoire. Le DP est également choisi de manière aléatoire. Nous avons une erreur quadratique moyenne (notée RMSE) pour chaque calibrage, qui correspond à l'écart entre les matrices de volatilité de marché des swaptions (matrice à la monnaie et en dehors de la monnaie) et celles en sorties du modèle.

$$RMSE = \sqrt{RMSE_{ATM} + RMSE_{AFTM}}$$

Où

$$RMSE_{ATM} = \frac{\sum_i^{11} \sum_j^{14} (\sigma_{i,j}^{marché ATM} - \sigma_{i,j}^{modèle ATM})^2}{11 * 14}$$

$$RMSE_{AFTM} = \frac{\sum_i^{11} \sum_j^{11} (\sigma_{i,j}^{marché AFTM} - \sigma_{i,j}^{modèle AFTM})^2}{11 * 11}$$

Avec :

- $\sigma_{i,j}^{marché ATM}$ Volatilité de la matrice ATM maturité i , ténor j
- $\sigma_{i,j}^{marché AFTM}$ Volatilité de la matrice AFTM maturité i , strike j

Réaliser un grand nombre de calibrages et choisir les valeurs initiales de manières aléatoires permettent à l'étude d'être objective sans être biaisée par les pré réglages du modèle. Les valeurs initiales des paramètres influant sur le calibrage et donc sur la RMSE.

	Seed Values 1	Seed Values 2	Seed Values 3	Seed Values 4	...	Seed Values N
a	0.241	0.295	0.347	0.369		0.140
b	0.135	0.062	0.101	0.100		0.094
c	0.087	0.032	0.085	0.063		0.051
d	0.000	0.000	0.000	0.000		0.000
Mean Rev. Speed of Variance	0.885	0.634	0.753	0.431		0.200
Mean Rev. Level of Variance	1.456	2.582	0.163	0.042		1.538
Volatility of Variance	0.476	0.308	0.413	0.376		0.191
Correlation	0.676	-0.050	0.523	0.244		0.026
Forward Rate Displacement	0.517	0.324	0.042	0.160		0.478

Figure 3. Initialisation des paramètres lors des 1000 calibrages

2- Observation de la RMSE afin de voir avec quel DP le modèle est le mieux calibré.

Des statistiques ont été réalisées afin de mieux visualiser les résultats. Les DP ont été regroupés par tranche (par exemple la tranche 0-5 comporte tous les DP allant de 0% à 5%), puis la moyenne des RMSE de chaque tranche a été calculée.

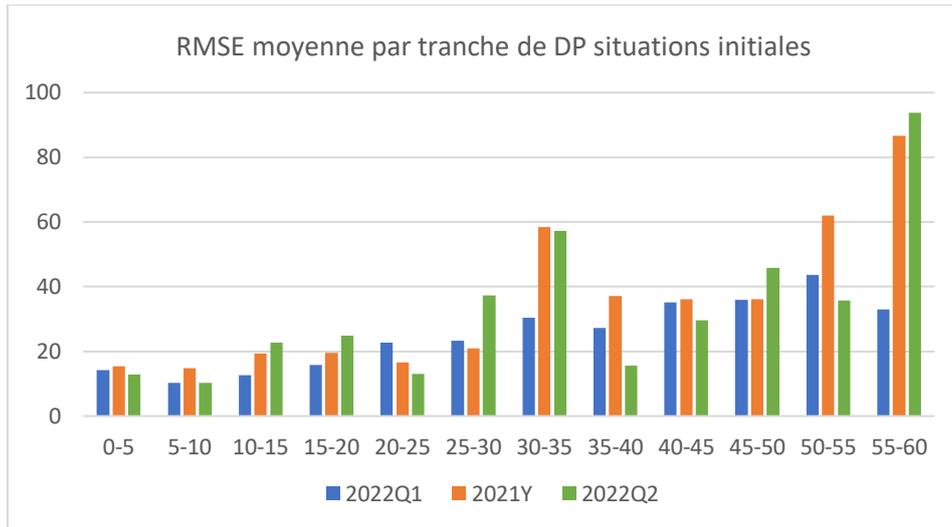


Figure 4. RMSE moyenne par tranche de déplacement parameter

En moyenne, ces calibrages obtiennent une RMSE plus faible pour les DP compris entre 0 et 10. Cela signifie que le modèle lors du calibrage reproduit mieux en moyenne, les matrices de volatilités implicites des swaptions pour un déplacement parameter compris entre 0 et 10.

D'autres statistiques ont été calculées comme le taux de RMSE dites extrêmes (c'est-à-dire la proportion de RMSE > 10).

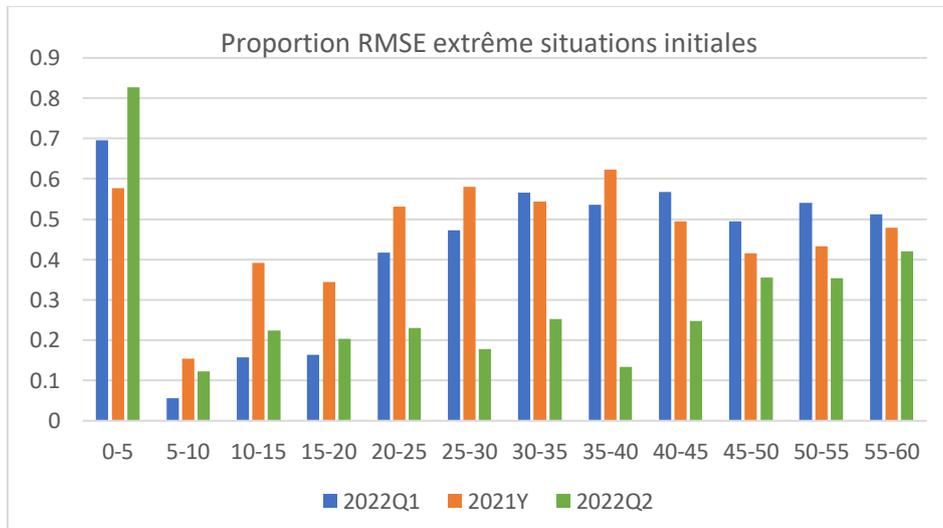


Figure 5. Proportion calibrage extrême par tranche de déplacement parameter

Le nombre de RMSE extrême explose pour les DP compris entre 0 et 5%. Ce résultat est dû à leur valeur trop faible qui empêche le modèle de répliquer parfaitement les volatilités de marché et justifie le choix d'un DP de 10%.

Impact sur les scénarios

Après avoir établi un niveau de déplacement parameter approprié au sein du calibrage, une étude plus complète de l'impact de celui-ci sur la qualité des scénarios générés par le modèle a été effectuée au 31/12/2021. La qualité d'un jeu de scénarios économiques s'apprécie principalement à l'aide de l'analyse des tests de validation. Dans le cadre de l'étude, la validation des scénarios générés passe par les tests de martingalité et de market-consistency. Le test de martingalité s'assure que la diffusion des actifs actualisés à chaque pas de temps, vu en $t = 0$ est une martingale (équivalent à vérifier que la projection est risque-neutre). Tandis que le test de *market-consistency* vérifie que les scénarios générés permettent de retrouver les volatilités de marché des produits dérivés qui ont servi au calibrage des modèles. Pour le LMM+ se sont les volatilités implicites des swaptions (peut également se faire sur le prix des swaptions).

Tableau 1. Test de martingalité et de market consistency pour plusieurs déplacement parameter

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Tests	Test martingalité obligation ZC	0.21%	0.23%	0.23%	0.24%	0.21%	0.13%
	Test MC swaptions ATM	0.019%	0.019%	0.019%	0.019%	0.019%	0.025%
	Test MC swaptions AWFTM	0.025%	0.026%	0.026%	0.026%	0.025%	0.046%

Les impacts sur les tests restent mesurés et mettent en évidence certains mécanismes du calibrage au sein du LMM+. Ces mécanismes permettent grâce à des compensations sur d'autres paramètres, d'obtenir des calibrages de bonne qualité, en gardant la même amplitude entre les scénarios positifs et négatifs.

Tableau 2. Evolution des valeurs des paramètres en sortie de calibrage pour plusieurs déplacement parameter

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Calibrage	RMSE swaptions	8.12	8.08	8.08	8.04	8.06	9.53
	a	0.009	0.012	0.019	0.037	0.055	0.170
	b	0.001	0.002	0.002	0.005	0.008	0.033
	c	0.047	0.048	0.049	0.053	0.057	0.078
	Mean Rev. Speed of Variance	0.099	0.100	0.103	0.113	0.122	0.157
	Mean Rev. Level of Variance	0.325	0.314	0.288	0.229	0.189	0.091
	Volatility of Variance	0.507	0.502	0.487	0.455	0.431	0.339
	Correlation	0.45	0.43	0.41	0.31	0.20	-0.44

A travers ce tableau, qui représente les valeurs des paramètres du modèle en sortie de calibrage, nous constatons que plus le DP baisse, plus le modèle compense en réduisant la corrélation et en augmentant la volatilité déterministe. En effet, la corrélation est le lien entre les taux et la volatilité des taux. Si cette corrélation est élevée alors à taux bas la volatilité sera basse, et plus cette dernière est faible plus la volatilité sera élevée. Ainsi un abaissement de la corrélation permet au modèle de capter un éventail de taux plus large et de compenser la baisse du DP.

Volatilité déterministe

La volatilité déterministe suit une fonction de Rebonato de la forme :

$$\sigma_k(t) = (a + b(T_k - t))e^{-c(T_k - t)} + d$$

Où $a + d$ correspondent à la volatilité initiale, b joue sur la valeur maximale et c est la vitesse de convergence vers la volatilité limite d qui est mise à 0 par Moody's.

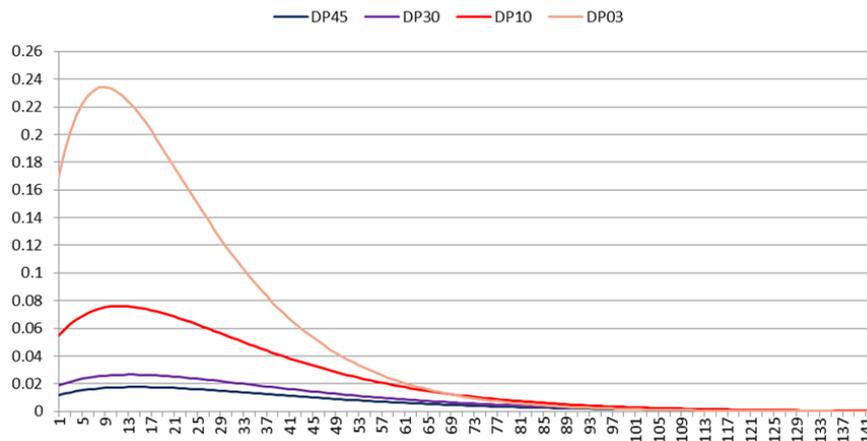


Figure 6. Distribution de la volatilité déterministe pour plusieurs displacement parameter

Sur le graphique ci-dessus, sont affichées les distributions de la volatilité déterministe en sortie de calibrage pour plusieurs valeurs de displacement parameter. Ainsi plus le DP baisse, plus la volatilité déterministe prend une valeur élevée. Le modèle compense la baisse du DP en allant chercher des taux plus loin autour de la valeur centrale.

Nappe de distribution

Pour observer cette compensation sur les scénarios, dans un premier temps tous les paramètres sont fixés à la valeur qu'ils ont en sortie du calibrage avec le displacement actuel (45%).

	Seed Values	Lower Bound	Upper Bound
a	0.0124	0.0124	0.0124
b	0.0016	0.0016	0.0016
c	0.0478	0.0478	0.0478
d	0.0000	NA	NA
Stochastic Volatility Component:			
Initial Variance	1.0000	NA	NA
Mean Rev. Speed of Variance	0.1004	0.1004	0.1004
Mean Rev. Level of Variance	0.3140	0.3140	0.3140
Volatility of Variance	0.5021	0.5021	0.5021
Correlation	0.4302	0.4302	0.4302

Figure 7. Paramètres fixés

Une fois les paramètres fixés, un calibrage est réalisé en changeant uniquement le DP, ce changement sera ainsi le seul impact présent sur les scénarios.

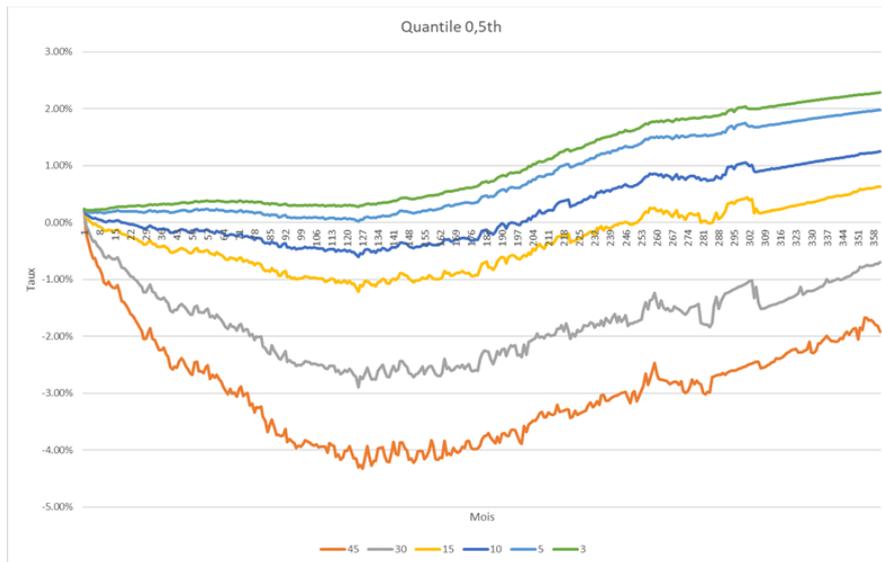


Figure 8. Quantile 0.5th des taux nominaux 10 ans pour plusieurs DP paramètres bloqués

Ce graphique représente les quantiles 0.5th de la distribution des scénarios (5ème taux le plus bas des 1000 scénarios) générés avec le calibrage expliqué précédemment. Ainsi, sans recalibrage une augmentation du DP réhausse naturellement les taux.

Dans un second temps, a été généré des scénarios en laissant le modèle calibrer librement ses paramètres (sans appliquer de contrainte), et en changeant uniquement le DP.

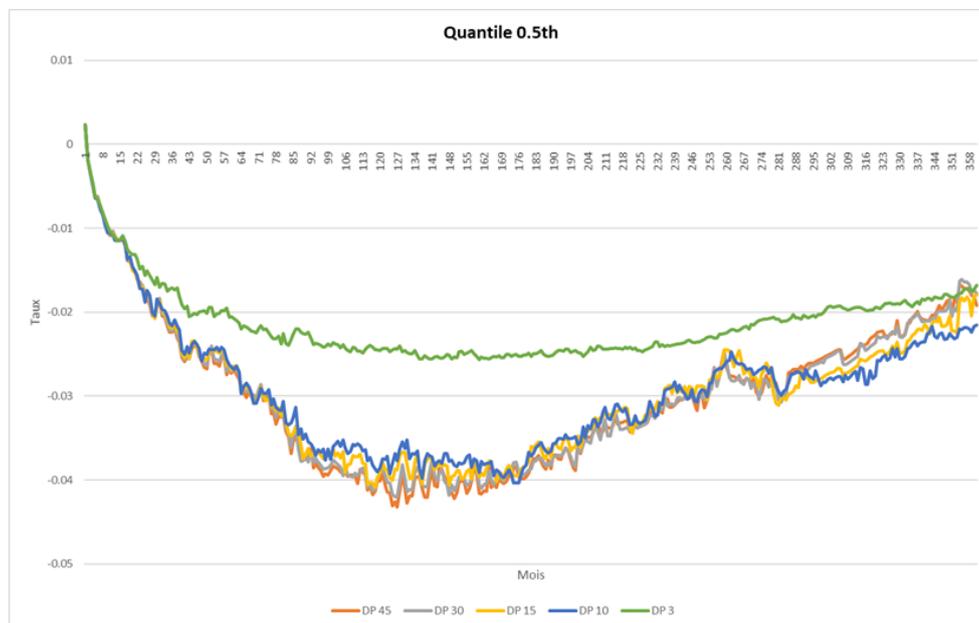


Figure 9. Quantile 0.5th des taux nominaux 10 ans pour plusieurs DP paramètres libres

Ce graphique représente également les quantiles 0.5th de la distribution des nouveaux scénarios. Comme attendu, en observant les valeurs des paramètres en sortie de calibrage, nous constatons que le modèle compense totalement la baisse du DP sans qu'il y ait une remontée des taux. Cependant, ce n'est pas le cas pour le DP03 car le déplacement parameter sert de « taux plancher » naturel à la

projection. Ainsi, aucun taux ne descendra sous les 3%. Les autres déplacement parameter sont suffisamment élevés pour ne pas impacter les scénarios.

Nous pouvons conjecturer qu'un changement de déplacement parameter n'aura qu'un impact limité sur les calculs réglementaires.

Calculs réglementaires

Plusieurs calculs réglementaires pour IFRS 17 et Solvabilité 2 ont été réalisés au 31/12/2021 avec des valeurs différentes de déplacement parameter.

Tableau 3. Résultat IFRS 17 pour plusieurs DP

IFRS 17				
M€	DP45	DP10	DP05	DP03
NAV totale net	7 666	7 623	7 658	7 717
RA	1 855	1 832	1 834	1 848
NAV - RA	5 812	5 791	5 824	5 869
CSM Transition	5 633	5 610	5 641	5 662
Impact FP Brut au 01/01/2022	179	182	183	207

Sous IFRS 17, le passage d'un DP45 à un DP10 entraîne une légère baisse de la NAV et de la CSM mais remonterait légèrement les impacts fonds propres. Un DP encore plus bas remonte artificiellement les taux les plus faible ce qui augmenterait la NAV, la CSM et les impacts fonds propres.

Tableau 4. Résultat Solvabilité 2 pour plusieurs DP

Solvabilité 2					
M€	DP45	DP30	DP15	DP10	DP03
NAV totale net	327	327	329	341	512
ELEMENTS ELIGIBLES	9 833	9 833	9 835	9 853	10 056
SCR	3 691	3 689	3 685	3 689	3 688
RATIO DE COUVERTURE SCR	266.44%	266.58%	266.91%	267.05%	272.62%

Sous solvabilité 2, un DP10 entraîne des légères augmentations de la NAV et du ratio SCR.

Les impacts restent mesurés. Comme vu dans les parties précédentes, le modèle compense le gain qu'on pourrait espérer obtenir avec la baisse du DP en calibrant différemment les autres paramètres, notamment la volatilité déterministe et la corrélation.

Synthesis note

Many stochastic rate models exist on the market, such as the LMM model which has been used for a long time. This is a normal log model which makes possible the generation of positive rates. However, recently, the global interest rate market was confronted with a long period of negative interest rates. Thus, the LMM+ model was implemented, similar to the LMM model but which differs in two points: the addition of a displacement parameter (also called shift in financial literature) which makes possible the generation of negative rates, and the addition of a stochastic volatility which allows to better understand the reality of the markets.

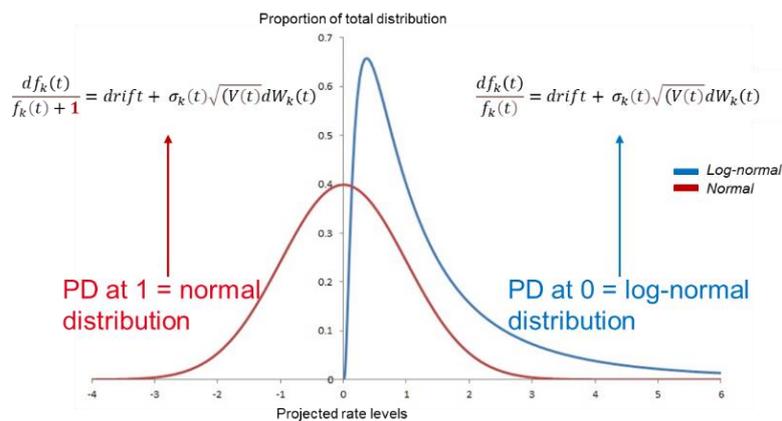


Figure 1. Rate distribution by DP

After a few reminders of the current regulatory context, this thesis presents work done on the LMM+ rate projection model of a life and savings insurer, in the context of regulatory calculations of Solvency 2 and IFRS 17. It focuses particularly on the Displacement Parameter, which is a key parameter of the rate projection model. This parameter is not automatically calibrated at each simulation, unlike other parameters of the model. Thus, a study allowing to objectify an adequate level of Displacement Parameter was carried out. Calibration means finding the values of the model's parameters to reproduce as closely as possible the observed market data (provided as input to the model), in order to have risk-neutral and market consistent future projections.

Stochastic volatility

Unlike the LMM model, the LMM+ has a stochastic volatility. It is composed of a deterministic volatility and a stochastic volatility.

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t)+DP} = drift + \sigma_k(t) \sqrt{V(t)} dW_k(t)$$

Deterministic volatility
Stochastic volatility

Models without stochastic volatility can't replicate some characteristics of implied volatility, such as the volatility "smile" or the volatility "skew", which indicate that implied volatility tends to vary with the strike price and expiration date of the derivative. The term stochastic is used because underlying volatility is treated as a random process, depending on financial derivatives characteristics such as underlying price, variance of the volatility process, and speed of convergence of volatility to its limit value.

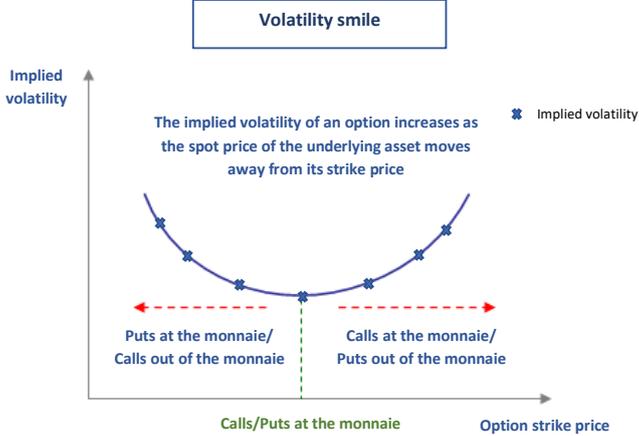


Figure 2. Illustration of volatility smile

The LMM+ has the benefit to be able to be calibrated on implied volatilities of swaptions, both with an in-the-money and an out-of-the-money volatility matrix. The in-the-money matrix (ATM) is in the maturity x tenor (strike = 0) grid, while the out-of-the-money matrix (AFTM) is in the strike x maturity (tenor = 10 years) grid.

Displacement parameter

The LMM+ model also differs with the addition of a displacement parameter (noted DP). This parameter will make possible to model negative rates.

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t)+DP} = drift + \sigma_k(t) \sqrt{V(t)} dW_k(t)$$

Displacement parameter

DP is not automatically calibrated at each simulation as are other parameters of the LMM+ model, its default value is 45%. One of the objectives of this thesis is to study and justify the level of this parameter. This study is based on the principle of Monte-Carlo method. It consists of performing a large number of calibrations, with several levels of Displacement Parameter (between 0% and 60%) randomly drawn. Then we observe the level which is on average the most appropriate, that is to say the level which most closely reproduces market data. This is characterized by minimizing differences between swaptions market implied volatilities and implied volatilities reproduced by the model. Given that the volatility sheet contains more than 189 points (on the tenors/maturities/strikes surface), it can't be perfectly fitted by an 8-parameter model, model/market discrepancies will always persist. In this analysis, justification of the choice is based on analysis of quality of calibration for each parameter displacement in central situation as well as on several stress situations.

Method

1- Launch of 1000 calibrations at the same date and with the same economic conditions by defining the initial values of all parameters of the model in a random way. The DP is also chosen randomly. We have a root mean square error (denoted RMSE) for each calibration, which corresponds to the difference between our swaptions market volatility matrices (in-the-money and out-of-the-money matrix) and those in the model outputs.

$$RMSE = \sqrt{RMSE_{ATM} + RMSE_{AFTM}}$$

With

$$RMSE_{ATM} = \frac{\sum_i^{11} \sum_j^{14} (\sigma_{i,j}^{market\ ATM} - \sigma_{i,j}^{model\ ATM})^2}{11 * 14}$$

$$RMSE_{AFTM} = \frac{\sum_i^{11} \sum_j^{11} (\sigma_{i,j}^{market\ AFTM} - \sigma_{i,j}^{model\ AFTM})^2}{11 * 11}$$

Performing many calibrations and choosing initial values randomly allows the study to be objective without being biased by model's presettings. Initial values of parameters influence calibration and therefore the RMSE.

	Seed Values 1	Seed Values 2	Seed Values 3	Seed Values 4	...	Seed Values N
a	0.241	0.295	0.347	0.369		0.140
b	0.135	0.062	0.101	0.100		0.094
c	0.087	0.032	0.085	0.063		0.051
d	0.000	0.000	0.000	0.000		0.000
Mean Rev. Speed of Variance	0.885	0.634	0.753	0.431		0.200
Mean Rev. Level of Variance	1.456	2.582	0.163	0.042		1.538
Volatility of Variance	0.476	0.308	0.413	0.376		0.191
Correlation	0.676	-0.050	0.523	0.244		0.026
Forward Rate Displacement	0.517	0.324	0.042	0.160		0.478

Figure 3. Initialization of the parameters during the 1000 calibrations

2- Observation of RMSE in order to see with which DP the model is best calibrated.

Statistics were performed in order to better visualize results. The DPs were grouped (for example the group 0-5 includes all the DPs from 0% to 5%), then the average of RMSE of each group was calculated.

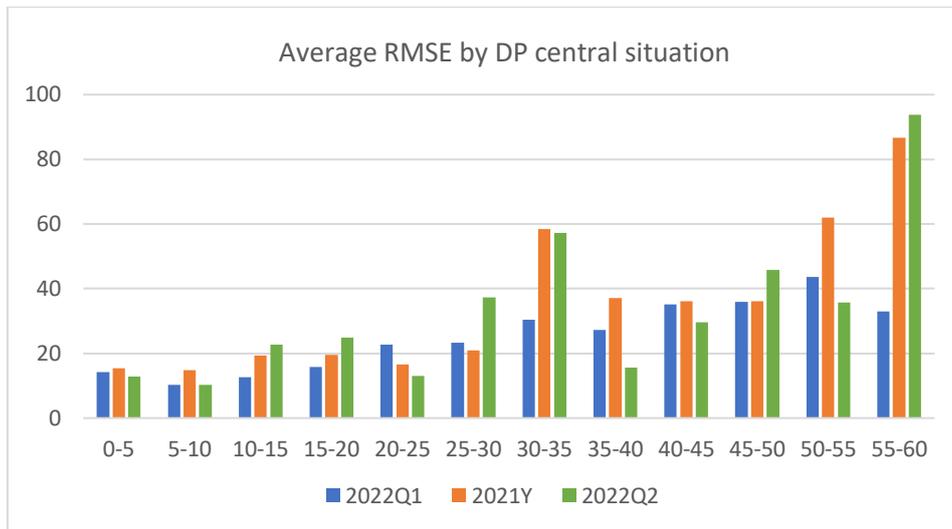


Figure 4. Average RMSE by displacement parameter

On average, these calibrations obtain a lower RMSE for DPs between 0 and 10. This means that during calibration, on average, the model better reproduces implied swaptions implied volatility matrices between 0 and 10.

Other statistics were calculated such as the rate of extreme RMSE (i.e. proportion of RMSE > 10)

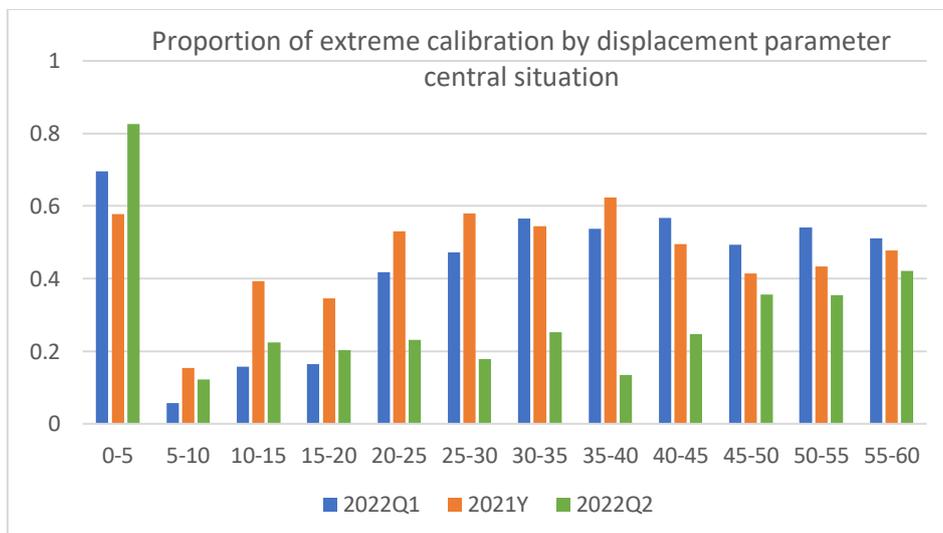


Figure 5. Proportion of extreme calibration by displacement parameter

The number of extreme RMSEs explodes for DPs between 0 and 5%. This is due to their low value which prevents the model from perfectly replicating market volatilities. This supports the choice of a DP of 10%.

Impact on scenarios

After establishing an appropriate level of displacement parameter within calibration, a more complete study of impact on the quality of scenarios generated by the model was carried out on 31/12/2021. The quality of a set of economic scenarios is mainly assessed through analysis of validation tests. In the context of the study, validation of generated scenarios is based on martingality and market-consistency tests. The martingality test ensures that diffusion of discounted assets at each time step, seen at $t = 0$, is a martingale (equivalent to verify that projection is risk-neutral). While market-consistency test verifies that generated scenarios make it possible to recover derivatives market volatilities which were used to calibrate models (swaptions implied volatilities for LMM+ can also be done on the price of swaptions).

Table 1. Martingality and market consistency test for several displacement parameters

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Tests	Test martingalité obligation ZC	0.21%	0.23%	0.23%	0.24%	0.21%	0.13%
	Test MC swaptions ATM	0.019%	0.019%	0.019%	0.019%	0.019%	0.025%
	Test MC swaptions AWFTM	0.025%	0.026%	0.026%	0.026%	0.025%	0.046%

Impacts on tests remain measured and highlight some calibration mechanisms within LMM+. Thanks to compensations on other parameters, these mechanisms allow to obtain good quality calibrations, keeping same amplitude between positive and negative scenarios.

Table 2. Evolution of parameter values at the end of calibration for several displacement parameters

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Calibrage	RMSE swaptions	8.12	8.08	8.08	8.04	8.06	9.53
	a	0.009	0.012	0.019	0.037	0.055	0.170
	b	0.001	0.002	0.002	0.005	0.008	0.033
	c	0.047	0.048	0.049	0.053	0.057	0.078
	Mean Rev. Speed of Variance	0.099	0.100	0.103	0.113	0.122	0.157
	Mean Rev. Level of Variance	0.325	0.314	0.288	0.229	0.189	0.091
	Volatility of Variance	0.507	0.502	0.487	0.455	0.431	0.339
	Correlation	0.45	0.43	0.41	0.31	0.20	-0.44

Through this table, which represents values of parameters of the model at the end of calibration, we see that the more DP decreases, the more model compensates by reducing correlation and increasing deterministic volatility. Indeed, correlation is the link between rates and rates volatility. If this correlation is high, then at low rates volatility will be low, and the lower the correlation, the higher the volatility. Thus a lowering of correlation allows the model to capture a wider range of rates and to compensate for decrease in the DP.

Deterministic volatility

The deterministic volatility follows a Rebonato function like:

$$\sigma_k(t) = (a + b(T_k - t))e^{-c(T_k - t)} + d$$

Where $a + d$ are initial volatility, b is the maximum value and c is the convergence speed to limit volatility d which is set to 0 by Moody's.

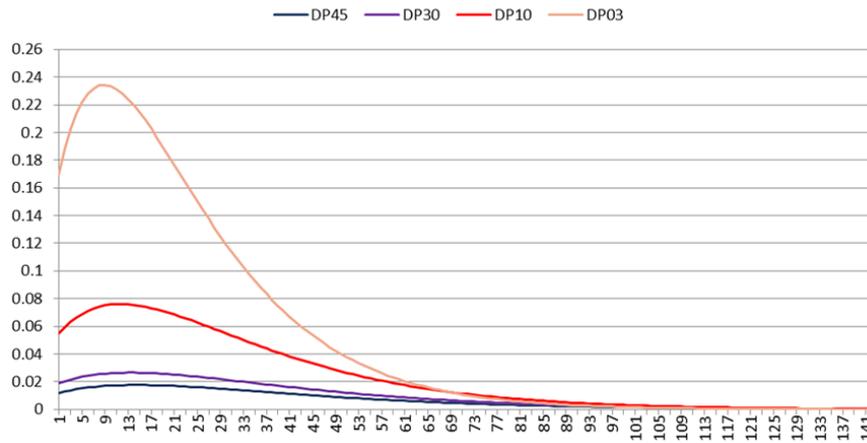


Figure 6. Distribution of the deterministic volatility for several displacement parameters

On the graph above, distributions of deterministic volatility at the output of calibration are displayed for several values of displacement parameter. Thus, the lower the DP, the higher the deterministic volatility. The model compensates for decrease in the DP by searching for rates further around the central value.

Table of distribution

To observe this compensation on scenarios, first all the parameters are fixed at the value they have at the end of calibration with the current displacement (45%).

	Seed Values	Lower Bound	Upper Bound
a	0.0124	0.0124	0.0124
b	0.0016	0.0016	0.0016
c	0.0478	0.0478	0.0478
d	0.0000	NA	NA
Stochastic Volatility Component:			
Initial Variance	1.0000	NA	NA
Mean Rev. Speed of Variance	0.1004	0.1004	0.1004
Mean Rev. Level of Variance	0.3140	0.3140	0.3140
Volatility of Variance	0.5021	0.5021	0.5021
Correlation	0.4302	0.4302	0.4302

Figure 7. Fixed parameters

Once the parameters are set, a calibration is performed by changing only the DP, this change will be the only impact on scenarios.

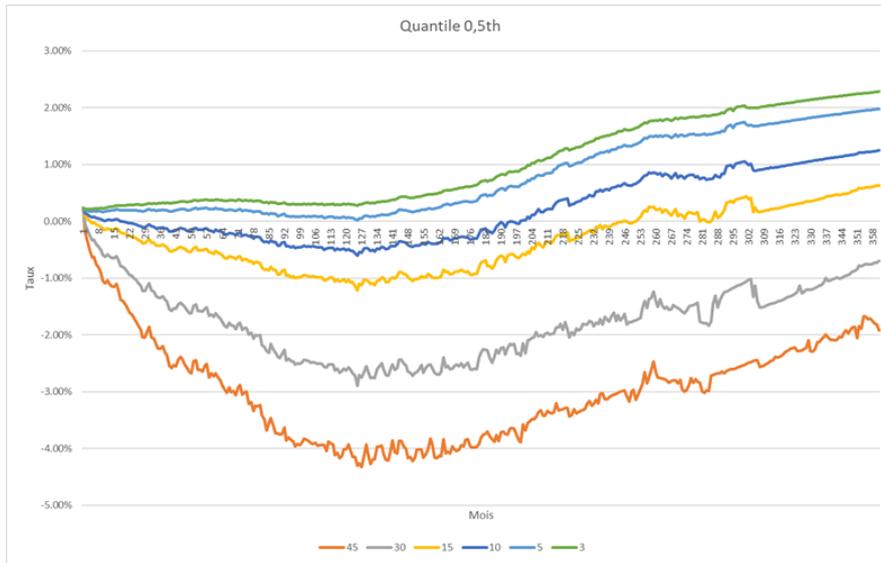


Figure 8. Quantile 0.5th of the 10-year nominal rates for several displacement parameters locked parameter

This graph represents the 0.5th quantiles of scenarios distribution (5th lowest rate of the 1000 scenarios) generated with calibration explained above. So, without recalibration, an increase in DP naturally raises rates.

In a second step, scenarios were generated by letting the model calibrate its parameters freely (without applying any constraint), and by only changing the DP.

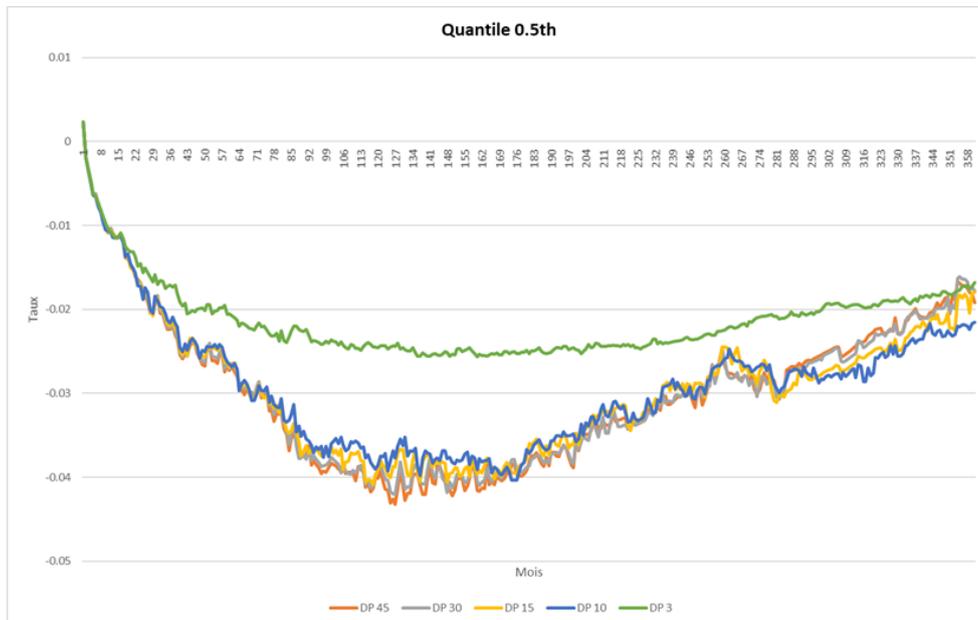


Figure 9. Quantile 0.5th of the 10-year nominal rates for several displacement parameters free parameter

This graph also represents the 0.5th quantiles of new scenarios distribution. As expected, looking at parameter values at calibration output, we see that the model fully compensates for the drop in the DP without a rise in rates. However, this is not the case for DP03 because displacement parameter serves as a natural "floor rate" for the projection. Thus, no rate will fall below 3%. Other's displacement parameters are high enough that this doesn't impact scenarios.

We can surmise that a change in displacement parameter will have a limited impact on regulatory calculations.

Regulatory calculations

Several regulatory calculations for IFRS 17 and Solvency 2 have been performed on 31/12/2021 with different displacement parameter values.

Table 3. IFRS 17 result for several displacement parameters

IFRS 17				
M€	DP45	DP10	DP05	DP03
NAV totale net	7 666	7 623	7 658	7 717
RA	1 855	1 832	1 834	1 848
NAV - RA	5 812	5 791	5 824	5 869
CSM Transition	5 633	5 610	5 641	5 662
Impact FP Brut au 01/01/2022	179	182	183	207

Under IFRS 17, the change from a DP45 to a DP10 leads to a slight decrease of NAV and CSM but would slightly increase equity impacts. An even lower DP artificially raises the lowest rates, which would increase NAV, CSM and equity impacts.

Table 4. Solvency 2 result for several displacement parameters

Solvabilité 2					
M€	DP45	DP30	DP15	DP10	DP03
NAV totale net	327	327	329	341	512
ELEMENTS ELIGIBLES	9 833	9 833	9 835	9 853	10 056
SCR	3 691	3 689	3 685	3 689	3 688
RATIO DE COUVERTURE SCR	266.44%	266.58%	266.91%	267.05%	272.62%

Under Solvency 2, a DP10 leads to slight increases in NAV and SCR ratio.

The impacts remain measured. As seen in the previous sections, the model offsets the gain that could be expected from the lower PD by calibrating the other parameters differently, including deterministic volatility and correlation.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Kévin Dubourg, tuteur de ce mémoire ainsi que Thomas Daller référent ALM pour leur encadrement, leur bienveillance ainsi que leurs conseils.

Je remercie également Romain Thion, ainsi que toute l'équipe ALM de SOGECAP pour leur accueil chaleureux et leur professionnalisme.

Mes remerciements s'adressent également au corps enseignant de l'ISUP pour la qualité des enseignements, et à Thomas Debais, tuteur académique de ce mémoire.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour mon grand-père qui m'a toujours soutenu et qui nous a récemment quitté.

Glossaire

ATM : At The Monnaie
AFTM: Away From The Monnaie
BE: Best Estimate
BP: Base point/Point de pourcentage
CRA: Credit Risk Adjustment
CIR : Cox-Ingersoll-Ross
CSM : Contractual Service Margin
DP: Displacement Parameter
EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority
FP: Fonds Propres
FVA : Fair Value Approach
GSE : Générateur de scénarios économiques
IFRS : International Financial Reporting Standards
LLP: Last Liquid Point
LMM : Libor Market Model
LMM+ : Libor Market Model plus
MCR: Minimum Capital Requirement
MRA: Modified Retrospective Approach
RA: Risk Adjustment
RM: Risk Margin
RMSE: Root-Mean-Square Error
NAV: Net Asset Value
SCR: Solvency Capital Requirement
SVJD: Stochastic Volatility Jump Diffusion
SW: Smith-Wilson
UC : Unité de compte
UFR: Ultime Forward Rate
VA: Volatility Adjustment
ZC: Zéro Coupon

Table des matières

Résumé.....	2
Abstract.....	3
Note de synthèse.....	4
Synthesis note.....	12
Remerciements.....	20
Glossaire.....	21
Introduction.....	24
1. Normes.....	25
1.1. Solvabilité 2.....	25
1.1.1. Généralités.....	25
1.1.2. Les piliers.....	26
1.1.2.1. Le pilier 1.....	26
1.1.2.2. Le pilier 2.....	29
1.1.2.3. Le pilier 3.....	29
1.2. IFRS 17.....	30
1.2.1. Généralités.....	30
1.2.2. Calcul des provisions techniques IFRS17.....	32
1.2.2.1. Best Estimate IFRS17.....	32
1.2.2.2. Risk Adjustment.....	33
1.2.2.3. CSM.....	36
2. Le générateur de scénarios économiques.....	39
2.1. Rappels financiers.....	39
2.2. Généralités.....	41
2.3. Les différents modèles de diffusion.....	43
2.3.1. Diffusion des probabilités de défaut.....	43
2.3.2. Diffusion des taux réels.....	44
2.3.3. Diffusion des indices.....	44
2.3.4. Diffusion du prix des indices.....	45
2.3.4.1. CAC40 et Eurostoxx50.....	45
2.3.4.2. Diffusion des prix des indices immobiliers, private equity et hedge fund.....	46
2.3.5. Diffusion du rendement des dividendes.....	47
2.3.6. Diffusion de l'inflation.....	47
2.3.7. Diffusion des taux nominaux.....	47
2.4. Fonctionnement du GSE.....	49

3. Calibrage du model LMM+	50
3.1. Données de marché utilisées pour le calibrage	50
3.2. Construction du calibrage	52
3.3. Volatilité déterministe	57
3.4. Volatilité stochastique	64
3.5. Impact du DP sur la distribution des tables	71
4. Etude pour le choix du displacement parameter	76
4.1. Méthode	76
4.2. Les tests	84
4.2.1. Les martingales	85
4.2.2. Market consistency	90
5. Impact sur les résultats	97
5.1. Impact sur les résultats de solvabilité 2	97
5.2. Impact sur les résultats IFRS17	99
Conclusion	102
Bibliographie	103
Table des figures	104

Introduction

Les assureurs en raison de leurs structures et de la composition de leurs actifs sont très exposés aux variations des taux d'intérêts que ce soit à la baisse ou à la hausse. En effet, une baisse des taux oblige les assureurs à se refinancer avec des nouveaux actifs ayant des rendements plus faibles. La marge financière future peut être ainsi réduite et devenir insuffisante face aux taux garantis par les anciens contrats. Tandis qu'une hausse des taux réduit la valeur de marché des actifs, en particulier celle des portefeuilles obligataires, et peut provoquer simultanément le rachat de contrats par certains assurés ayant un rendement garanti inférieur à celui des nouveaux contrats proposés. Ces rachats obligeraient les assureurs à vendre leurs obligations à des prix très bas en réalisant potentiellement des moins-values.

Il est primordial que quel que soit le contexte économique, les assureurs atteignent des objectifs de solvabilité afin qu'ils puissent faire face à leurs engagements à tout instant. Ainsi, afin de mieux surveiller l'activité des assureurs, de nombreuses réglementations propres au secteur de l'assurance sont mises en place. Les assureurs utilisent un générateur de scénarios économiques (GSE) qui est un outil de simulation stochastique afin de projeter dans le temps les facteurs de risques économiques auxquels l'assureur est exposé, notamment les taux d'intérêt. Les normes imposent aux assureurs que les projections soient cohérentes avec les prix du marché (Market-Consistent) et qu'elles se fassent dans un univers risque-neutre, c'est-à-dire que tous les actifs aient une performance moyenne égale au taux sans risque.

Pour cela de nombreux modèles stochastiques existent sur le marché, comme le modèle *Libor Market Model* (LMM) qui a longtemps été utilisé. Celui-ci est un modèle log-normal qui ne permet la génération que de taux positifs. Or, il y a peu, le marché mondial des taux d'intérêt a été confronté pendant une longue période à des taux d'intérêt négatifs. Ainsi, a été mis en place le modèle LMM+, semblable au modèle LMM mais qui se différencie en deux points : l'ajout d'un déplacement parameter (également appelé shift dans la littérature financière) qui permet de générer des taux négatifs, et l'ajout d'une volatilité stochastique qui permet de capter au mieux la réalité des marchés. L'objectif de ce mémoire est d'étudier le calibrage de ce modèle de taux, ainsi que d'optimiser et d'objectiver la valeur du DP.

1. Normes

1.1. Solvabilité 2

1.1.1. Généralités

A la suite de la réglementation Solvabilité 1 qui était consacrée à la marge de solvabilité, le projet Solvabilité 2 a pour but de mettre à jour le système de solvabilité européen en intégrant tous les risques qui pèsent de manière effective sur les sociétés d'assurance.

Si Solvabilité 1 présente l'avantage d'être simple à appréhender et à mettre en œuvre, on lui reconnaît de nombreuses limites comme le fait de ne pas être assez fidèle au profil de risque des organismes assureurs. C'est dans ce contexte que s'installe progressivement le dispositif Solvabilité 2.

En pratique, le principe général des exigences de fonds propres de ce nouveau dispositif consiste à disposer aujourd'hui d'un montant de fonds propres évalué en « valeur de marché » permettant d'avoir dans un an des fonds propres positifs dans 99,5 % des cas.

On appelle exigence minimale de marge de solvabilité, la richesse minimale dont doit disposer une société pour faire face aux aléas évoqués.

La réforme Solvabilité 2 a pour ambition de donner aux organismes assureurs les moyens de mieux garantir leur solvabilité, tout en construisant un marché unique européen de l'assurance. Elle vise notamment à adopter le niveau d'exigence minimal de fonds propres aux risques réels auxquels les organismes assureurs sont exposés. Ainsi, plus les actifs ou les passifs détenus par les organismes seront risqués, plus les exigences minimales de fonds propres correspondantes seront importantes.

L'objectif est « d'établir un cadre européen sûr et pérenne pour que l'assurance soit un vecteur de croissance et de stabilité économique pour l'Europe » en imposant aux compagnies de :

- Piloter, mesurer et arbitrer leurs risques ;
- Contrôler que le niveau de capital reflète la situation de la compagnie ;
- Harmoniser les normes européennes ;
- D'avoir leurs actifs et passifs en valeur de marché (cohérence avec le projet IFRS) ;
- Fixer la marge de solvabilité à un niveau suffisamment conservateur pour donner le délai nécessaire aux autorités pour intervenir ;

Ces objectifs sont regroupés dans 3 piliers (Figure 1.1).

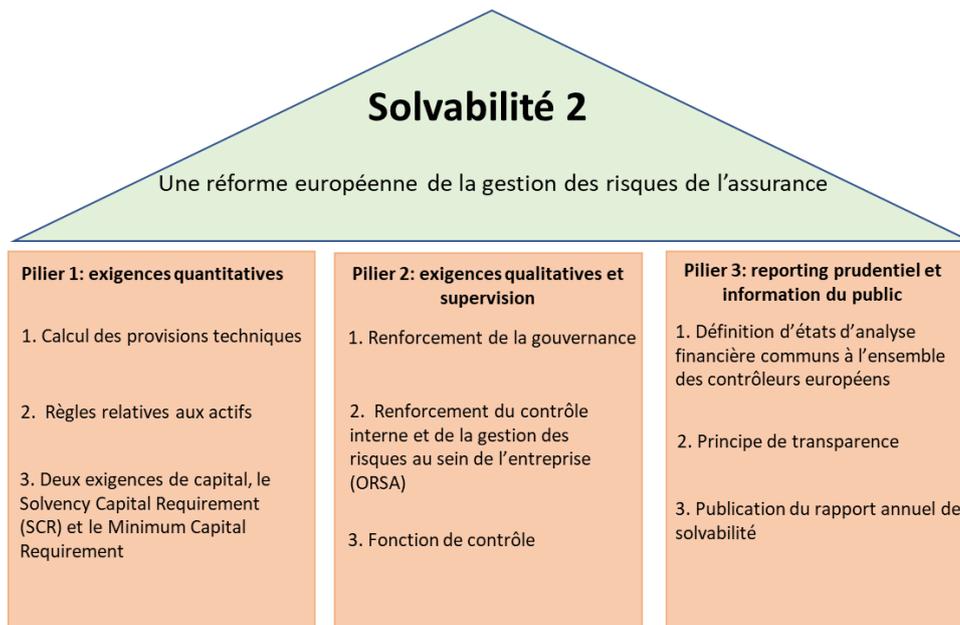


Figure 1.1 Les piliers de solvabilité 2

1.1.2. Les piliers

1.1.2.1. Le pilier 1

Le premier pilier a pour objectif de définir les normes actif/passif quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres. L'évaluation des actifs et des passifs d'assurance doit se faire suivant le principe de « juste valeur », principe qui garantit une vision fidèle de la richesse en temps réel. La directive introduit de manière quantitative des règles prudentielles pour le calcul des provisions techniques. Elles doivent être calculées :

- En valeur de marché ;
- Comme la somme d'un « Best Estimate » et d'une marge de risque complémentaire ;
- De manière harmonisée entre les états membres de l'UE.

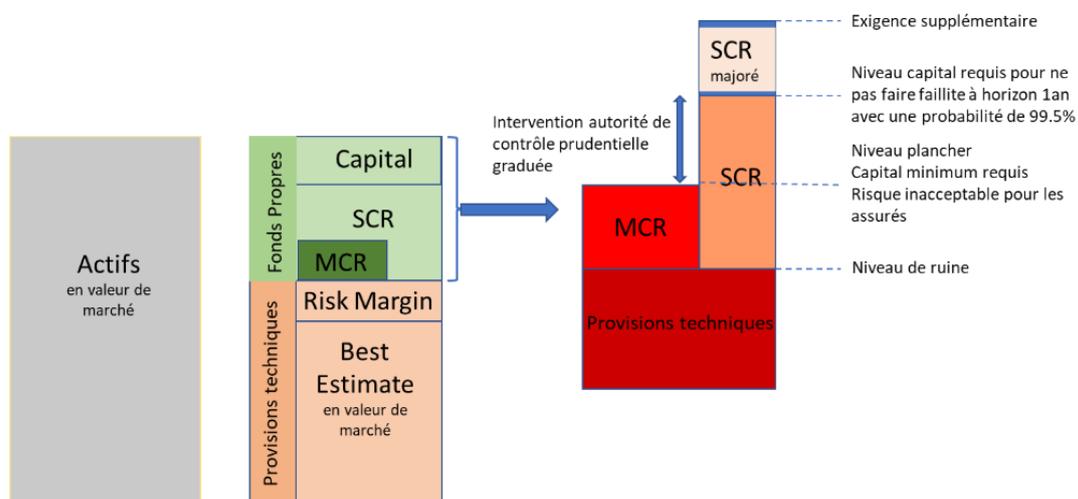


Figure 1.2 Bilan solvabilité 2

Sous Solvabilité 2, le passif est égal à la somme des éléments suivants :

- Le Best Estimate, qui correspond à la valeur actuelle nette probable des flux futurs (prestations, frais, commissions, primes). Le calcul du Best Estimate doit inclure les flux futurs associés uniquement aux contrats existants à la date d'évaluation.

Afin de modéliser les paramètres économiques nécessaires à la projection des flux du BE, un générateur de scénarios économiques (GSE) est utilisé. Pour le calcul du BE, 1000 scénarios stochastiques risques-neutres d'une maturité de 30 ans sont générés. Cette partie est détaillée dans la suite du mémoire.

Le BE calculé dans l'outil de projection est la somme des éléments suivants :

$$BE(n) = \sum_{n=\text{début projection}}^{\text{fin de projection}} VA_{Presta}(n) - VA_{PrimesF}(n) + VA_{Frais}(n) + VA_{com} + PT(n)$$

Avec :

- $VA_{Presta}(n)$ le montant actualisé de prestations versées lors de la période n ;
- $VA_{PrimesF}(n)$ le montant actualisé des primes perçues au cours de la période n ;
- $VA_{Frais}(n)$ le montant actualisé des frais au cours de la période n ;
- VA_{com} le montant actualisé des commissions payées au cours de la période n ;
- $PT(n)$ le montant actualisé des éléments de fin de projection qui reviennent à l'assuré.

- La marge de risque ou risk margin qui s'interprète comme le montant de provisions complémentaires au Best Estimate. Elle est calculée de façon que le montant total de provisions inscrit au bilan corresponde à celui qu'exigerait une entité de référence pour honorer les engagements à la charge de l'assureur.

$$RM = CoC \sum_{n=\text{début de projection}}^{\text{fin de projection}} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{n+1})^{n+1}}$$

Prix de l'immobilisation du capital
(le coût du capital est de 6%)
Taux sans risque

A noter que le calcul de la marge pour risque nécessite la connaissance du SCR en t=0, ainsi que des SCR futurs.

Pour tenir compte de l'effet de diversification du portefeuille, la marge de risque est calculée au niveau de l'entreprise, puis ventilée par LoB (line of business : ligne d'activité d'assurance) au prorata des SCR.

- Le Capital de Solvabilité Requis (ou SCR en anglais) qui correspond au capital économique dont a besoin une entreprise d'assurance afin de ne pas faire faillite dans l'année qui suit dans 99.5% des cas, c'est-à-dire à une seule fois tous les 200 ans.

L'un des défis majeurs de la modélisation ALM est le temps nécessaire pour obtenir des résultats. En effet, pour des portefeuilles avec un grand nombre de contrats, le nombre de calculs peut vite devenir considérable, le temps et la puissance de calcul nécessaires deviennent alors problématique. Pour éviter ce problème, il est possible de faire des regroupements de polices (appelé model points) dès lors que les polices considérées et les risques sous-jacents sont similaires et que l'utilisation de ces regroupements de polices ne fausse pas les résultats.

Construction des model points Passif

Les données du passif servant au calcul du BE sont extraites du système de gestion à chaque date d'arrêté. Ces données sont constituées principalement de références de contrats (famille de contrats, famille de produits, portefeuilles associés...), des engagements contractuels (TMG, durée des contrats, durée des garanties, année de souscription...) et des caractéristiques des assurés.

Afin de réduire le temps de traitement et de faciliter l'analyse des résultats issus de l'outil de projection ALM, les données de passif sont agrégées pour former des groupes de contrats homogènes.

La méthode d'agrégation varie selon le périmètre considéré. En effet, pour les contrats « euros », elle est fonction des paramètres suivants : produit, portefeuille d'actifs, ancienneté, niveau de Taux Minimum Garanti (TMG) et durée de TMG. Pour les contrats en UC, les critères discriminants sont le produit, l'ancienneté et le type de fonds sous-jacent.

Construction des model points d'Actif

La construction des « *Model Point* » (MP) d'actif permet de faire le lien entre les actifs réels d'inventaire et ceux modélisés.

La construction des MP est réalisée en amont de la projection (comme la construction des MP de passif) et commence par la récupération des données de l'actif à partir des systèmes de gestion ou des gestionnaires d'actifs. Les données brutes peuvent subir un premier retraitement pour pallier le manque de certaines informations ou pour corriger leur format.

Il existe plusieurs catégories de MP :

- Obligataire : contient les obligations à taux fixe, les obligations à taux variable, les obligations indexées sur l'inflation, les montages action, les convertibles... ;
- Action : contient les actions, les OPCVM, l'immobilier ;
- Dérivés de taux : contient les swaps, les swaptions et les caps ;
- Les actifs sont implémentés dans le modèle ligne à ligne et par portefeuille d'actifs. Ils peuvent pour certains être retraités par le modèle, en début de projection, pour assurer la cohérence du stock d'actif initial avec une projection risque-neutre.

1.1.2.2. Le pilier 2

Le pilier 2 concerne la gouvernance des compagnies et exige les conditions suivantes :

- Quatre fonctions clés (Actuariat, Gestion des risques, Conformité, Audit interne) avec pour chacune d'elle, un responsable de la fonction qui a accès au point le plus haut de l'organisation de la compagnie ;
- Un système de gestion des risques et un système de contrôle interne ;
- Des politiques écrites validées par l'AMSB avec la formalisation importante sur les travaux de tarification et le provisionnement, la rémunération des dirigeants, la gestion actif/passif ou encore les investissements ;
- Une évaluation prospective des risques (ORSA–Own Risk and Solvency Assessment);
- Le principe de la personne prudente à respecter pour la gestion des placements.

1.1.2.3. Le pilier 3

Le pilier 3 de Solvabilité 2, relatif aux obligations de reporting et de diffusion d'informations au public, est un élément essentiel du nouveau cadre prudentiel. Ainsi, les organismes d'assurance et de réassurance doivent fournir des données quantitatives (via les « QRT » pour Quantitative Reporting Template) à l'ACPR :

- Des états annuels (bilan prudentiel, provisions techniques par LoB, SCR par module, liste des actifs, fonds propres prudentiels, etc.) ;
- Des états trimestriels (uniquement pour les acteurs de marché les plus importants). Un reporting narratif est également exigé sous Solvabilité 2, via :
 - Le rapport régulier au superviseur (« RSR » pour Regular Supervisory Report), qui doit être transmis uniquement à l'ACPR ;
 - Le rapport sur la solvabilité et la situation financière (« SFCR » pour Solvency and Financial Condition Report), qui est public.

1.2. IFRS 17

1.2.1. Généralités

Comme pour S2 avec le secteur assurantiel, les normes IFRS ont pour objectifs de définir des standards internationaux pour la comptabilité des entreprises en harmonisant les pratiques au niveau mondial. Le principal objectif est d'harmoniser les reportings financiers entre toutes les entreprises, diffusant une information pouvant être utilisée par tous les acteurs du marché. La situation financière, les positions de risque et les résultats de tous les assureurs sont comparés et diffusés de manière transparente, permettant de limiter l'asymétrie d'informations qu'il peut exister entre les différents acteurs du marché.

Pour atteindre ces objectifs, l'IASB (International Accounting Standard Board) qui est un organisme international privé et indépendant chargé de l'élaboration des normes comptables internationales IFRS, a établi une série de normes, notamment la norme IFRS17. Pour pouvoir être appliquées en Europe, les normes publiées par l'IASB doivent d'abord être adoptées par la Commission Européenne. Chaque norme doit vérifier trois critères : être en adéquation avec l'intérêt public européen, être conforme au principe d'image fidèle et satisfaire les critères de pertinence, de comparabilité et d'éligibilité.

Les entreprises d'assurance sont particulièrement concernées par les normes IFRS 9 et IFRS 17 dont l'entrée en vigueur est fixée au 1er janvier 2023 et concerne 150 juridictions dans le monde.

Un organisme applique IFRS 17 à ses contrats d'assurance, aux traités de réassurance qu'il émet et détient, ainsi qu'aux contrats d'investissement contenant une composante assurantielle. Dans le cas de l'épargne retraite, on peut retrouver des contrats monosupport UC (sans arbitrage possible vers un fond euros) sans garantie assurantielle (garantie plancher par exemple). Ces contrats sont alors des contrats d'investissement et seront comptabilisés sous IFRS 9.

IFRS 17 a défini un nouveau cadre de valorisation du passif des assureurs en juste valeur. Il existe 3 modèles qui sont plus ou moins adaptés à certaines activités d'assurance et de réassurance (épargne, retraite, prévoyance, IARD ...). Le choix du modèle dépend des caractéristiques de chaque portefeuille. Il existe trois modèles pour la valorisation des passifs :

- BBA (Building Blocks Approach) : Modèle de base de la norme IFRS17;
- PAA (Premium Allocation Approach) : Modèle simplifié utilisé en général pour les passifs à faible durée (durée de couverture inférieure ou égale à un an), notamment dans le cadre de l'assurance non-vie (assurance automobile, etc...);
- VFA (Variable Fee Approach) : Modèle utilisé pour les produits d'assurance contenant des participations aux bénéficiaires directs, c'est-à-dire les contrats pour lesquels l'assureur s'engage à partager avec l'assuré le rendement financier d'actifs clairement identifiés (comme les contrats d'épargne en euros). Sa particularité est contrairement au modèle de base, d'ajuster une provision qui concentrera les profits futurs attendus dès la souscription des contrats en fonction des variations de l'actif (la CSM marge sur services contractuels). Ce modèle constitue en effet la meilleure alternative pour évaluer un portefeuille de contrats épargne euros. Ces produits peuvent être considérés comme des placements aussi bien par les assureurs que par les assurés et sont considérés

comme de la gestion d'actifs. Il est alors plus pertinent de les évaluer dans un modèle où les profits futurs sont pris en compte, et où la performance des actifs financiers est une partie intégrante de la CSM et non du résultat immédiat.

La granularité exigée pour le calcul des différentes provisions et paramètres IFRS 17 se base sur trois niveaux de segmentations, portefeuille, rentabilité et cohorte :

- Il existe plusieurs portefeuilles par groupe de risques ou ligne d'activité ;
- Au sein de chaque portefeuille séparation par rentabilité :
 - Onéreux;
 - Profitables avec risque de devenir onéreux;
 - Profitables.
- Au sein de chaque groupe de rentabilité, groupement par cohorte.

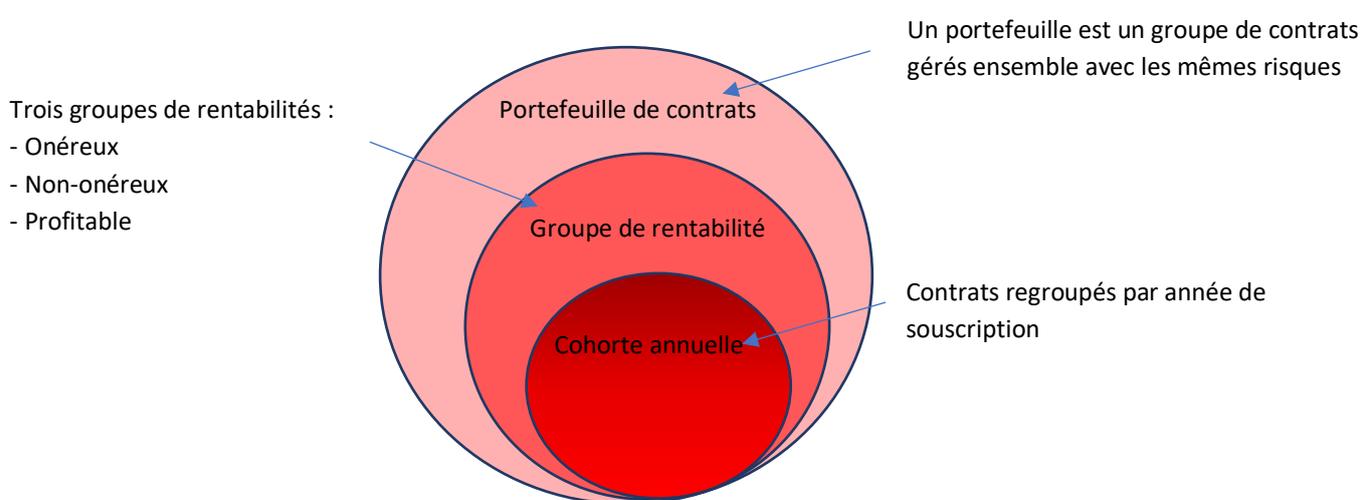


Figure 1.3 Segmentation des portefeuilles à 3 niveaux

La granularité voulue par Solvabilité 2 demande des calculs par type de contrats et risques similaires, alors qu'IFRS 17 se focalise sur la dimension « contrat », ce qui entraîne une granularité plus fine. Cette finesse des calculs soulève une vraie difficulté en comparaison avec Solvabilité 2, car elle exige des assureurs qu'ils multiplient le nombre de "model points". IFRS 17 demande de classer les contrats par type de risque (comme Solvabilité 2), mais aussi par année de souscription et par onérosité. Pour les contrats souscrits avant la norme, cette démarche coûteuse en calculs et en données est souvent compliquée à mettre en place.

Les contrats sont agrégés par portefeuilles homogènes et, sont ensuite segmentés en trois groupes selon leur rentabilité lors de la comptabilisation initiale :

- Les contrats onéreux à l'origine ;
- Les contrats non-onéreux à l'origine avec un risque significatif de devenir onéreux ;
- Les contrats profitables ne présentant pas de risque significatif de devenir onéreux.

Par-dessus ce deuxième niveau d'agrégation par rentabilité des contrats, vient s'appliquer une dernière segmentation basée sur les cohortes de souscription. Pour être agrégés dans un même groupe, les contrats doivent être souscrits la même année. En effet, la norme IFRS 17 précise que les groupes ne peuvent pas inclure des contrats commercialisés à plus d'une année d'intervalle, dans le but de ne pas agréger des générations profitables avec des générations non profitables.

1.2.2. Calcul des provisions techniques IFRS17

La norme IFRS 17 a pour objectif de palier les problèmes sous IFRS 4 entre l'évaluation de l'actif en Fair Value et celle du passif, basée sur des coûts historiques. Pour cela, IFRS 17 introduit une évaluation des passifs d'assurance, en cohérence avec l'évaluation des actifs en valeur de marché.

Sous IFRS 17, le Best Estimate des engagements est la base du calcul des provisions techniques (données de marché pour les paramètres financiers, valorisation des options et garanties financières et non financières au travers d'un calcul stochastique, prise en compte du comportement des assurés...). De plus les provisions techniques sont complétées par un ajustement pour risques non-financiers. Enfin, une provision, la CSM, regroupe les profits futurs attendus dès la souscription des contrats. Cette-dernière sera définie plus loin.

Dans la partie suivante seront présentées les provisions techniques IFRS 17 et leur calcul. Une comparaison des provisions techniques Solvabilité II sera faite.

1.2.2.1. Best Estimate IFRS17

Le Best Estimate représente la valeur actuelle nette probable des flux futurs liés à la vie des contrats. Ces flux sont notamment les primes, les rachats, les commissions, les décès...

La méthodologie de calcul du BE sous IFRS 17 reste la même que sous Solvabilité II : les flux futurs sont estimés de manière stochastique, à partir de la moyenne des projections sur 1000 scénarios économiques différents. Un générateur de scénarios économiques permettra de générer ces scénarios risques-neutres d'une maturité de 40 ans (30 ans sous S2) qui serviront au calcul du BE.

La grande différence avec S2, se fait au niveau de la frontière des contrats qui diffèrent pour les deux normes. En effet, les flux associés aux primes futures sont à prendre en compte dans l'évaluation du BE sous IFRS 17 lorsque l'assureur a d'une part la possibilité de contraindre l'assuré à payer la prime, et d'autre part une obligation de fournir une couverture d'assurance ou d'autres services.

Cela implique quelques différences dans les flux pris en compte dans le calcul du BE IFRS 17. Contrairement à la norme S2, les versements libres (échelonnés et exceptionnels), qui permettent aux souscripteurs d'alimenter leurs contrats d'assurance vie quand ils le souhaitent, peuvent être pris en compte sous IFRS 17. L'objectif étant aussi de représenter d'une manière fidèle et le plus juste économiquement les flux futurs et le comportement des assurés. Cette prise en compte des versements libres dans les calculs nécessite plusieurs données :

- Les versements libres de l'année, par année de souscription ;
- Une loi de versement structurel appliquée aux versements dans le modèle ALM ;
- Une loi de versement conjoncturel intégrée au modèle ALM

D'autre part, le BE IFRS 17 se distingue dans sa projection des frais généraux. Sous S2, la totalité des frais généraux du portefeuille en run-off sont projetés, soit les frais généraux liés à la vie du contrat, c'est-à-dire les frais liés à la gestion, au décès, au rachat et au placement. IFRS 17 ajoute une notion de rattachabilité aux frais : seuls ceux réellement attribuables aux contrats seront projetés à travers le

BE. Les frais non attribuables aux contrats, eux, impacteront directement le résultat IFRS 17, sans toutefois être projetés. La rattachabilité des frais généraux est encore à l'étude chez la plupart des assureurs.

Enfin, le BE IFRS 17 se distingue également du BE S2 par les courbes d'actualisation des flux de trésoreries futurs. Sous Solvabilité II, la courbe des taux à utiliser est une courbe de taux sans risque, corrigée d'un ajustement pour volatilité et d'un ajustement pour risque de crédit (fournis par l'EIOPA). L'objectif de la norme IFRS 17 à travers l'actualisation est d'incorporer la valeur temps de l'argent dans le calcul des flux futurs de trésoreries. La courbe des taux doit aussi représenter les caractéristiques de liquidité des contrats. La norme laisse le choix quant à la courbe à utiliser mais propose deux approches : « top-down » et « bottom-up ». Chez SOGECAP, la méthode retenue est la « bottom-up », qui consiste à rajouter à une courbe de taux sans risque une prime d'illiquidité calculée sur le portefeuille obligataire. En effet, la norme autorise à traduire l'illiquidité du passif par celle de l'actif qui lui fait face. Cette courbe de taux est spécifique à l'assureur et à ses contrats.

1.2.2.2. Risk Adjustment

Le « Risk Adjustment » comme son nom l'indique consiste en un ajustement pour risque, nommé très souvent RA. Il vient augmenter le montant de provisions déjà induit par le calcul du BE, en y ajoutant un montant couvrant l'incertitude liée aux risques non financiers autour des flux de trésorerie futurs (par exemple, un certain pourcentage du BE pour couvrir les risques de mortalité, de longévité, de rachat...). Le RA, tel que défini dans le cadre de la norme IFRS 17, est une grandeur qui joue un rôle assez similaire à la marge de risque sous S2. La norme IFRS 17 n'impose aucune méthodologie pour le calcul du RA, la méthode utilisée au sein de SOGECAP se rapproche du calcul du SCR sous S2. Cependant, la norme énonce tout de même certains principes qualitatifs que l'assureur devra suivre quelle que soit la méthode utilisée :

- Le RA associé à un risque de forte fréquence mais de faible intensité devra être inférieur au RA associé à un risque de faible fréquence mais de forte sévérité.
- À risques similaires, les contrats ayant une durée plus longue doivent avoir un RA plus élevé.
- Plus un risque a de probabilité de se produire, plus le RA doit être élevé.
- Moins il y a d'informations disponibles et d'hypothèses sur les estimations des engagements futurs, plus le RA augmente.
- Plus l'information est importante sur les montants et dates des versements des flux futurs, c'est-à-dire plus l'incertitude vis-à-vis de ces versements baisse, plus le RA doit être faible.

Pour chaque facteur de risque non financier (c'est-à-dire les risques de souscriptions), ce capital économique correspond à la différence en t=0 entre le $BE_{choquée}$ et le $BE_{centrale}$ soit:

$$SCR = \Delta_{BE} = BE_{choquée} - BE_{centrale}$$

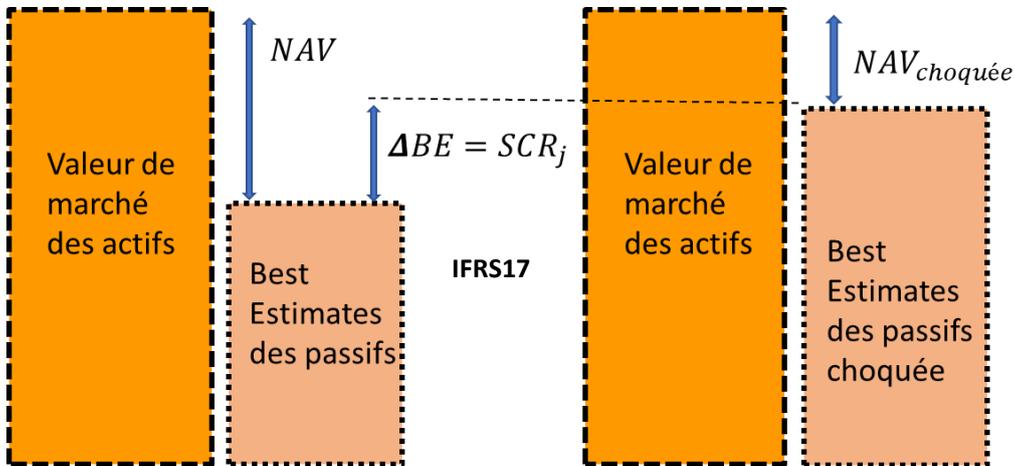


Figure 1.4 SCR IFRS17

Sous solvabilité 2 nous avons :

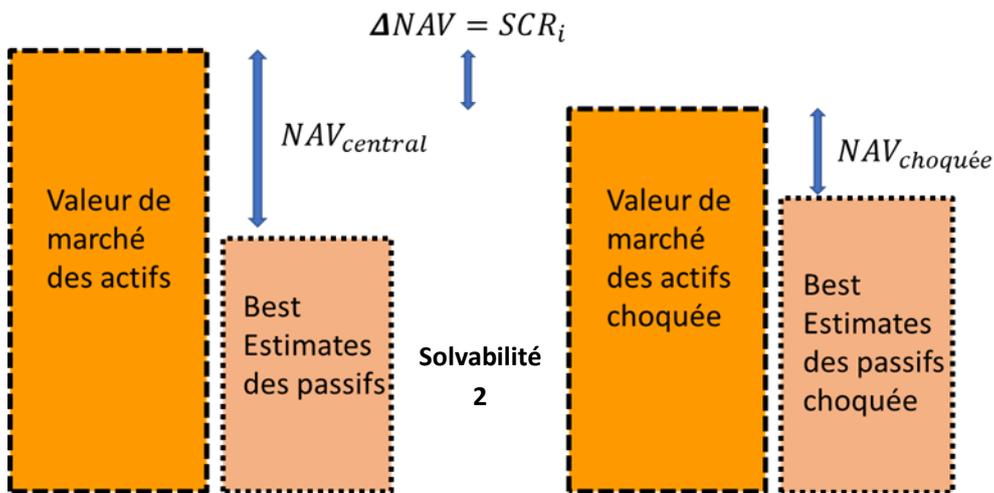


Figure 1.5 SCR Solvabilité 2

Le principe reste le même que la marge de risque sous Solvabilité 2. Cependant, les différences proviennent du fait que l'actif n'est pas choqué (seulement les risques souscriptions) et que les taux de choc à appliquer dans le cadre du calcul des RA élémentaires sont recalculés (tout de même à partir des taux de chocs de la formule standard S2). Ils vont dépendre du niveau du seuil de confiance défini par SOGECAP et de l'horizon de risque choisi, qui correspond à la durée moyenne du passif.

Pour passer des chocs S2 aux chocs IFRS 17, la formule, issue d'hypothèse de normalité est la suivante :

$$T_{RA_i} = \frac{q(\alpha)}{q(0.995)} \times \sqrt{t} \times T_{SCR_i}$$

Avec :

- T_{RA_i} : le taux de choc du risque de souscription i pour le calcul du RA élémentaire ;
- $q(\alpha)$: le quantile d'une loi normale centrée réduite de niveau $\alpha\%$;
- $q(0.995)$: le quantile d'une loi normale centrée réduite de niveau 99.5% ;
- t : l'horizon de risque ;
- T_{SCR_i} : le taux de choc du risque de souscription i pour le calcul du SCR élémentaire.

Chez SOGECAP, le seuil de confiance défini est de 80% et l'horizon de risque de 14 ans soit :

- $\alpha = 80\%$;
- $t = 14$ ans.

Après avoir calculé les RA élémentaires pour chaque risque relatif au RA au niveau portefeuille, les RA sont agrégés entre eux à l'aide d'une matrice de corrélation similaire à S2. Cette agrégation permet de prendre en compte l'effet de la diversification des risques au sein des différents portefeuilles. La matrice de corrélation utilisée est la matrice de corrélation de la formule standard S2, calibrée à l'aide du GSE avec pour horizon 1 an.

On obtient un RA au niveau portefeuille noté $RA_{niveau\ de\ diversification\ 1}^{ptf}$, correspondant au premier niveau de diversification et calculé comme :

$$RA_{niveau\ de\ diversification\ 1}^{ptf} = \sqrt{\sum_{i,j \in R} corr_{i,j} \times RA_i \times RA_j}$$

Avec :

- R : l'ensemble des risques utilisés dans le calcul du RA
- $corr_{i,j}$: le coefficient de corrélation entre le risque i et le risque j
- RA_i : le RA associé au facteur de risque i

Le niveau de diversification correspond au stade du calcul du RA. Le premier niveau consiste à calculer pour l'entité SOGECAP, le RA avec les SCR de manière classique. Le deuxième niveau de diversification prend en compte les interactions sur les actifs entre les différentes entités de Société Générale Assurances telles que :

$$RA^{ptf} = \frac{RA_{niveau\ de\ diversification\ 1}^{ptf} \times RA^{ent}}{\sum_{ptf} RA_{niveau\ de\ diversification\ 1}^{ptf}}$$

: $RA^{ent} = RA$ pour chaque entité

Le RA est recalculé à chaque date d'arrêt. Une partie du RA de l'arrêt précédent sera relâché en résultat, au titre de la diminution du risque non financier au cours du temps. Le RA est un enjeu majeur sous la norme IFRS 17, en termes de pilotage du résultat.

1.2.2.3. CSM

Une marge de service contractuelle, nommée CSM, pour "Contractual Service Margin" est une nouvelle notion propre à IFRS 17. Elle représente la part des profits de l'assureur qui n'ont pas encore été réalisés. Cette quantité est, au même titre que le BE, une estimation. La norme IFRS 17 tend à répartir la reconnaissance des profits dans le temps : il n'y a plus de profits reconnus à la signature du contrat, mais plutôt des profits amortis sur toute la durée de couverture. Dans le cas d'un contrat onéreux (i.e. qui fera perdre de l'argent à l'assureur), la CSM est remplacée par une Loss Component (LC).

Comme nous l'avons vu précédemment, les groupes de contrats IFRS 17 sont scindés en fonction de leur rentabilité dès leur première comptabilisation. Cette rentabilité est reflétée à travers la CSM de chaque groupe de contrats :

- Si le groupe est rentable, ou potentiellement onéreux, la CSM sera positive et constituée des profits futurs non acquis.
- Si le groupe est onéreux, il n'y aura pas de profits futurs, la CSM sera nulle.

En effet, telle que définie dans la norme, la CSM ne peut être que positive ou nulle. Si son montant devait être négatif, le montant indiqué en CSM serait nul, et comptabilisé au sein de la Loss Component.

Pour rappel IFRS17 a pour objectif de permettre la comparaison entre une entreprise d'assurance et n'importe quelle autre entreprise et ce, tout secteur confondu. Il est ainsi nécessaire de rendre nulle l'inversion du cycle de production. Il s'agit de la seule solution afin qu'une comparaison entre le secteur assurantiel et les autres secteurs ait du sens. En effet, comme un assureur vend un contrat avant de savoir combien celui-ci va lui coûter, la prévision des résultats d'une compagnie d'assurance est très difficile. Si un groupe de contrats est anticipé comme étant rentable lors de sa première comptabilisation, alors la CSM viendra absorber ses profits futurs, annulant tous les gains qu'un contrat d'assurance peut avoir à la souscription, et neutralisant ainsi les problèmes liés à l'inversion du cycle de production. En revanche, si un groupe de contrats est prédit comme étant onéreux, la perte attendue sera alors immédiatement reconnue en résultat.

La CSM est calculée à chaque exercice IFRS 17. Elle ne concerne pas les périodes de services passées mais uniquement les profits futurs. La CSM de fin de période est calculée par récurrence à partir de la CSM d'ouverture, complétée avec divers éléments. La première étape consiste à calculer la CSM_0 , qui correspond à la CSM à la date de transition. Trois méthodes d'évaluation de la CSM à la transition sont proposées par la norme IFRS 17 :

- La Full Retrospective Approach, (FRA), méthode qui repose sur le principe que la norme s'applique depuis l'origine des contrats.
- La Modified Retrospective Approach (MRA), méthode assez proche de la FRA mais incluant des simplifications au niveau des calculs.
- La Fair Value Approach (FVA) méthode qui s'appuie directement sur les données à la date de transition, et non sur des données passées.

La méthode choisie par SOGECAP en épargne est la FVA, notamment pour le niveau des données utilisées. En effet, il n'est pas nécessaire d'aller récupérer des données passées.

Le modèle FVA introduit le concept de Variable Fee. La CSM introduit un partage de profits entre l'assureur et l'assuré d'un ensemble d'actifs clairement identifié dans le contrat, dans les périmètres épargne et retraite. L'assureur devient un gestionnaire d'actifs auprès de l'assuré et les services rendus dans le cadre des contrats deviennent des services d'investissements. La variable fee correspond à la part que l'assureur tire des activités d'investissements et de gestion des actifs. Cette variable fee constitue un ajustement de la CSM. Elle est définie comme :

$$\text{Variable Fee} = \Delta VM_{\text{marchés}} - \Delta BE_{\text{marchés}} - \Delta RA_{\text{marchés}}$$

Une fois la CSM ajustée de la variable fee, des ajustements ont lieu comme des changements d'estimations sur les flux de trésorerie d'exécution liés aux variations d'hypothèses économiques, financières et non financières. Effectivement, sous modèle FVA, les variations d'hypothèses de marchés sont absorbées directement dans la CSM. (Figure 1.6)

Enfin, chaque année lors de la dernière étape de l'évaluation de la CSM, une partie de cette dernière est allouée en résultat. Cette allocation de la CSM en résultat à chaque date d'arrêté se fait au titre des services rendus sur la période. Ceci permet de lisser les profits attendus au fil du temps.

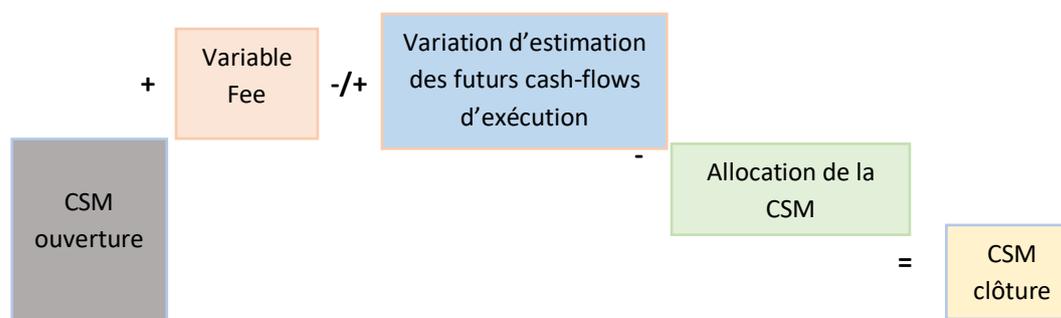


Figure 1.6 Calcul de la CSM sous le modèle FVA

En pratique, la CSM est calculée avant son allocation dans le résultat. En notant CSM'_n la CSM avant son allocation dans le résultat, celle-ci se calcule comme :

$$CSM'_n = CSM_{n-1} + \Delta VM - \Delta BE - \Delta RA + \text{Résultat IFRS 4} - \text{Relachement RA} - \text{Ecart} Exp_n^{\text{non dépôt}}$$

Avec :

- ΔVM correspond à la différence de valeur de marché des actifs entre les périodes n et $n - 1$
- ΔBE correspond à la différence de Best Estimate entre les périodes n et $n - 1$
- ΔRA correspond à la différence du Risk Adjustment entre les périodes n et $n - 1$
- *Relachement RA*, est à soustraire car il est reconnu en résultat et que ΔRA le contient déjà
- $Ecart Exp_n^{\text{non dépôt}} = fluxBE^{\text{attendu non depot}} - fluxBE_n^{\text{reel non depot}}$ correspond à l'écart d'expérience sur la composante non-dépôt déjà reconnue en résultat

Le *Résultat IFRS 4* est rajouté à la CSM de la période précédente car le ΔVM ne contient pas les marges réelles (qui sont désinvesties dans le modèle ALM), alors qu'elles doivent figurer dans la CSM et être reconnues en résultat par l'intermédiaire du relâchement.

Quant au montant d'allocation de la CSM dans le résultat, il se calcule à partir de CSM'_n en lui appliquant un facteur d'allocation, noté f . La CSM de fin de période n notée CSM_n se calcule, comme la différence entre CSM'_n et le montant d'allocation de la CSM dans le résultat. Finalement, on aura :

$$CSM_n = (1 - f) \times CSM'_n$$

Ainsi, le bilan sous IFRS17 se décompose de la façon suivante :

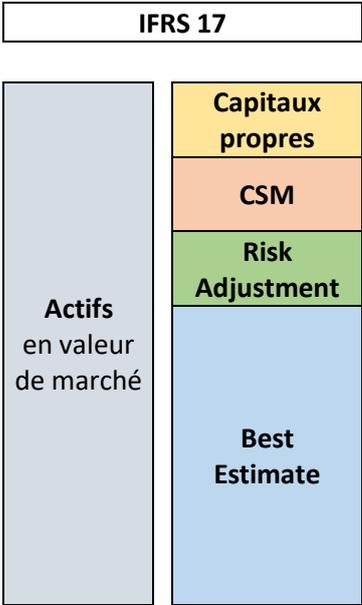


Figure 1.7 Bilan IFRS17

2. Le générateur de scénarios économiques

2.1. Rappels financiers

Le calibrage du GSE nous impose l'utilisation d'actifs financiers qui sont liquides. La market-consistency du GSE oblige une cohérence avec la façon dont le marché analyse les prix d'options. On réplique ainsi le passif d'un assureur par des actifs liquides. Calibrer revient à trouver les valeurs des paramètres des modèles afin qu'ils reproduisent le plus fidèlement possible les données de marchés observées

En pratique, un calibrage market-consistent se fait en deux temps :

- Choix de données de marché ;
- Calibrage du modèle de manière à permettre une réplification des données choisies.

Nous introduirons, dans cette partie différents produits financiers utiles au GSE et au modèle de taux LMM+ notamment les swaptions. Ce sont les volatilités provenant des swaptions qui serviront par la suite pour le calibrage du modèle.

Facteur d'actualisation stochastique :

Un déflateur noté $D(t, T)$ permet d'obtenir la valorisation « Market Consistent » voulue des flux projetés, ainsi après application du déflateur aux actifs risqués, on retrouvera leur valeur initiale. Il peut être vu comme étant le montant à l'instant t , équivalent à une unité monétaire en T . Nous avons:

$$D(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

Avec :

- r_s le taux sans risque.

Pour les marchés actions et marchés des changes, ce taux est souvent modélisé de façon déterministe. Cependant pour les produits dépendant de taux d'intérêt, ce taux est défini de manière stochastique.

Obligation zéro-coupon ZC

Une obligation ZC de maturité T est un actif financier qui garantit à son détenteur le paiement d'une unité monétaire à maturité T , sans aucun versement intermédiaire. Nous notons $P(t, T)$ la valeur du zéro coupon de maturité T à l'instant t ($0 < t < T$) et $P_T = P(T, T) = 1$.

En prenant P' le prix d'un actif quelconque qui suit un processus (F_t) adapté de payoff:

$$P'_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(t, T) P'_T | F_t]$$

Dans le cas d'une obligation ZC et sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, nous avons $P_T = 1$. Ainsi, on obtient :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(t, T) | F_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | F_t]$$

Avec :

- \mathbb{Q} la probabilité risque neutre. Dans le cas où r_s est déterministe, nous avons $P(t, T) = D(t, T)$

Taux forward

Les taux forward correspondent au taux d'un placement futur à une date déterminée avec une maturité fixée. Ils sont caractérisés par la date t à laquelle on considère le taux et par la maturité T .

On a :

$$(1 + r(t))^t (1 + F(0, t, T))^{T-t} = (1 + r(T))^T$$

$$\Leftrightarrow (1 + F(0, t, T))^{T-t} = \frac{(1+r(T))^T}{(1+r(t))^t}$$

On reconnaît le prix en 0 de deux obligations ZC de maturité t et T

$$\Leftrightarrow (1 + F(0, t, T))^{T-t} = \frac{P(0, t)}{P(0, T)}$$

Avec un développement limité d'ordre 1, nous avons : $(1 + F(0, t, T))^{T-t} = 1 + (T - t)F(0, t, T)$

Ainsi, nous obtenons une expression du taux forward en fonction des obligations ZC :

$$F(0, t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{P(0, t)}{P(0, T)} - 1 \right)$$

Taux SWAP

Un swap de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré entre deux contreparties dans lequel une des contreparties s'engage à verser un taux fixe (appelé jambe fixe) et l'autre un taux variable (appelé jambe variable). Les dates de flux sont fixées à l'avance et l'échéancier des flux des taux fixes peut être différent de celui des taux variables .

Swaption

Une swaption est une option de swap de taux. Elle donne le droit et non l'obligation d'entrer dans un swap de taux à une date donnée future. Une swaption est caractérisée par son ténor T qui est la maturité du sous-jacent de l'option (le swap), le strike K de ce swap ainsi que la maturité t de l'option en elle-même. La swaption receveuse donne à l'acheteur le droit de recevoir la jambe fixe du swap et inversement la swaption payeuse donne à l'acheteur le droit de payer la jambe fixe du swap. Les swaptions sont très souvent cotées en volatilité.

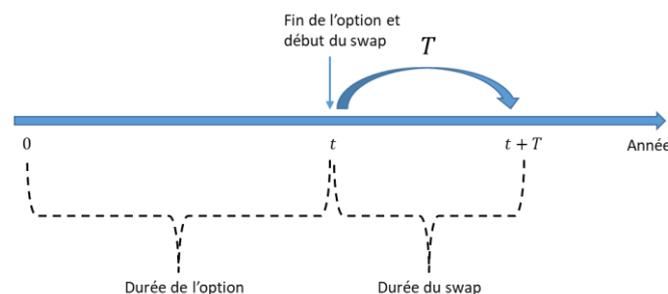


Figure 2.1 Illustration swaption

2.2. Généralités

L'actif et le passif pour les compagnies d'assurances sont étroitement liés, notamment pour celles qui commercialisent des contrats d'épargne contenant des options et garanties dépendant directement des conditions économiques. Afin d'obtenir la meilleure estimation des flux futurs et de valoriser ces options et garanties, il est primordial de disposer d'un outil permettant de diffuser des grandeurs économiques : le générateur de scénarios économiques, et d'un modèle pouvant prendre en compte les interactions entre l'actif et le passif : le modèle ALM.

L'objectif de l'utilisation du générateur est d'envisager l'ensemble des situations économiques possibles afin de valoriser les contrats d'épargne et de calculer le Best Estimate. La valorisation des contrats ne peut pas se faire de manière déterministe car certaines options et garanties du contrat sont déclenchées seulement dans des situations économiques particulières.

SOGECAP utilise le générateur Moody's Analytics ESG pour générer les trajectoires stochastiques des grandeurs économiques. Ces scénarios économiques servent d'input au modèle ALM pour permettre la projection de l'actif et du passif du groupe afin d'obtenir les Best Estimates pour chacun des chocs standards réglementaires, pour ensuite calculer le ratio de couverture SCR pour solvabilité 2 et la CSM, le RA ainsi que le résultat de SOGECAP pour IFRS17.

Il existe deux univers de probabilités pour générer des scénarios économiques :

- Un univers de **probabilités réelles**, lorsque l'on cherche à déterminer les évolutions futures compatibles avec les observations historiques : dans ce cas, les simulations reproduisent le plus fidèlement possible la réalité, et les modèles sont calibrés sur les données historiques. Dans cette configuration, les actifs risqués offrent une prime de risque, ce qui rend difficile la réalisation d'une évaluation correcte.
- Un univers de **probabilités risque neutre**, lorsque l'on est dans une logique d'évaluation : dans ce cas, tous les actifs ont une performance moyenne égale au taux sans risque (les primes de risque sont nulles), ce qui permet de réaliser des évaluations en actualisant les flux futurs au taux sans risque. En outre, pour garantir des projections cohérentes avec les prix observés sur les marchés, les modèles doivent être calibrés à partir de ces prix de marché.

Pour S2 et IFRS17, nous sommes sous l'univers risque neutre.

Les durées de projection utilisées dans ce mémoire sont de 30 ans pour S2 et 40 ans pour IFRS17, le nombre de scénarios aléatoires est de 1000. Ce sont des choix internes justifiés (ils doivent être suffisamment grands pour respecter les règles de projection concernant notamment la PM résiduelle). La différence de durée de projection entre S2 et IFRS17 vient du fait que nous avons des versements libres sous IFRS17, ce qui vient augmenter la PM résiduelle en fin de simulation qui deviendrait trop importante si nous restions à 30 ans.

Les scénarios de marché sont projetés à pas mensuel et comportent la modélisation stochastique des facteurs de risque suivant :

- La courbe des taux nominaux;
- Les probabilités de défaut;
- La courbe des taux réels;
- Les indices de croissance des actions (CAC40 et Eurostoxx), des actions non cotées (« *private equity* ») et de la gestion alternative (« *hedge fund* ») en capital et dividendes;
- L'indice de croissance de l'immobilier (capital et loyers).

Les données peuvent venir de plusieurs sources différentes. On trouvera les données communes au marché qui viennent de l'EIOPA ou de Moody's et les données propres à SOGECAP. Ces données servent au calibrage de nos différents modèles, qui viennent ensuite projeter nos 1000 scénarios. Le schéma ci-dessous explique le fonctionnement global du GSE.

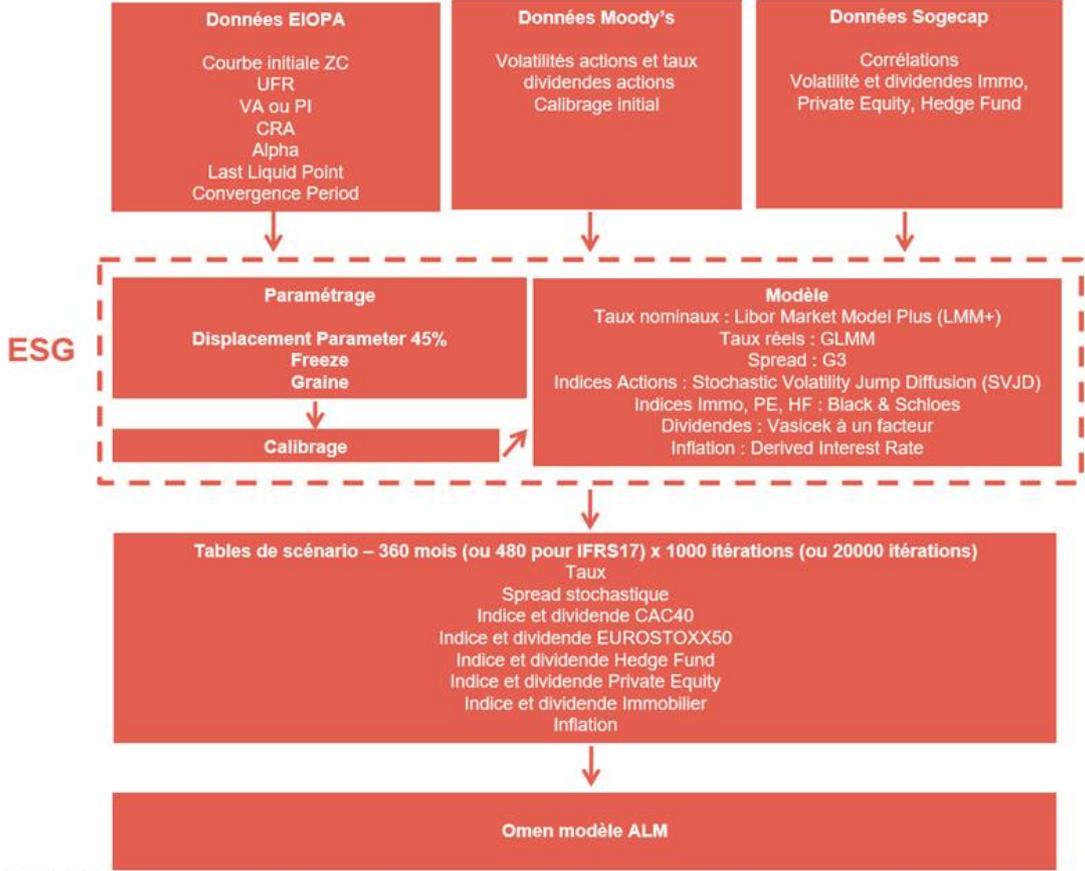


Figure 2.2 Fonctionnement global GSE

2.3. Les différents modèles de diffusion

Dans cette partie seront présentés les modèles utilisés au sein du GSE par SOGECAP pour la projection des différentes classes d'actifs.

2.3.1. Diffusion des probabilités de défaut

Les probabilités de défaut sont modélisées par le modèle G3. Ce modèle se place dans la catégorie des modèles de défaut dits "à intensité".

La base de ces modèles se trouve dans la supposition suivante : Il existe une fonction de t , notée $\varphi(t)$, et appelée fonction d'intensité de défaut, telle que la probabilité de faire défaut au cours d'un intervalle de temps Δt à venir, soit égale au produit de l'intensité de défaut en t et de la durée de cet intervalle :

$$\varphi(t) * \Delta t = Prob_Q(t \leq \tau \leq t + \Delta t)$$

En développant et en passant à la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, on trouve finalement cette expression pour la probabilité de défaut en t sur une durée T :

$$Prob_Q(t \leq \tau \leq t + T) = 1 - e^{(-\int_t^{t+T} \varphi(t) dt)}$$

Le modèle G3 possède une fonction d'intensité pour chaque rating M , telle que :

$$\varphi^M(t) = \sum_{m=1}^M \pi^m(t)$$

Où chaque $\pi^m(t)$ correspond à un processus stochastique de Cox-Ingersoll-Ross propre au numéro de rating m ($m = 1$ correspond au rating AAA, $m = 2$ au rating AA, et ainsi de suite).

Ainsi, l'intensité de défaut augmente avec le numéro de rating, ce qui est cohérent.

L'intensité de défaut d'une obligation AA en t est par exemple égal à $\pi^1(t) + \pi^2(t)$

Un processus de Cox-Ingersoll-Ross se modélise de la sorte :

$$d\pi^m(t) = \alpha^m(\gamma^m - \pi^m(t))dt + \sigma^m \sqrt{\pi^m(t)} dW^m(t)$$

Avec :

- α la vitesse de retour à la moyenne du processus ;
- μ le niveau de retour à la moyenne du processus ;
- σ la volatilité du processus.

Chacun des processus $\pi^m(t)$ sont indépendants les uns des autres et dirigés par des mouvements Browniens $dW_m(t)$.

2.3.2. Diffusion des taux réels

La modélisation des taux réels est basée sur le modèle GLMM (Gaussian LIBOR Market Model) mensuel. SOGECAP n'utilise pas directement les taux réels dans le modèle ALM mais leur modélisation est nécessaire pour le calcul du taux d'inflation.

L'équation de diffusion des taux forward avec le modèle GLMM Mensuel est la suivante :

$$\frac{dF_k(t)}{(F_k(t) + \mathbf{DP})} = \left(\sum_{j=m(t)}^k \frac{\delta(F_k(t) + \mathbf{DP})}{1 + \delta F_k(t)} \times \sum_{i=1}^n \zeta_k^i(t) \zeta_j^i(t) \right) dt + \sum_{i=1}^n \zeta_k^i dZ^i(t)$$

Avec :

- $F_k(t)$ le taux forward en t sur la période $[T_k, T_{k+1}]$;
- ζ_k^i le $i^{\text{ème}}$ facteur de la composante de volatilité du taux forward F_k ;
- ζ_j^i le $i^{\text{ème}}$ facteur de la composante de volatilité du taux forward F_j avec $j \leq k$;
- Z^i la $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur de mouvements browniens indépendants ;
- \mathbf{DP} le *displacement parameter*.

La volatilité des taux forward est supposée constante entre chaque intervalle de temps.

La structure des taux forward donnée par le modèle GLMM est normale ce qui implique que les taux générés par ce dernier peuvent être négatifs, répondant ainsi à la réalité économique.

2.3.3. Diffusion des indices

SOGECAP modélise plusieurs indices afin de prendre en compte l'évolution des actifs en portefeuille. Il s'agit des indices suivants :

- Indices CAC 40 et Eurostoxx 50, censés respectivement modéliser l'investissement sur le marché action français et zone euro.
- Indice immobilier qui reflète l'évolution des investissements de SOGECAP dans les actifs de type immobilier.
- Indice de fonds « private equity » et « hedge funds » qui modélisent l'investissement de SOGECAP dans d'autres véhicules diversifiés tels que les actions non cotées et les fonds de gestion alternative.

Pour chaque indice, SOGECAP modélise l'évolution des **prix et des dividendes**. Si, l'évolution des prix suit une modélisation différente en fonction de l'indice, la modélisation du dividende, elle, suit le même modèle quel que soit l'indice considéré.

2.3.4. Diffusion du prix des indices

2.3.4.1. CAC40 et Eurostoxx50

Les modélisations de prix des indices CAC 40 et Eurostoxx 50 suivent le même modèle et sont basées sur le modèle de diffusion de saut à volatilité stochastique (SVJD). Ce modèle est la combinaison du modèle de **Heston à volatilité stochastique** et du modèle **à sauts de Merton**.

Le modèle SVJD vient corriger certaines limites du modèle de *Black & Scholes (B&S)* :

- « Smile de volatilité » : la volatilité implicite du modèle B&S est supposée constante, néanmoins, l'observation des volatilités historiques et implicites sur le marché action montre le contraire.
- « Normalité de la distribution » : la distribution des rendements des actions est asymétrique décalée vers la gauche et est *leptokurtique* (on dit qu'une distribution est leptokurtique si elle possède une cloche plus en pointe et des queues plus épaisses que la distribution normale).
- « Chutes et pics » : les prix des actions issus du modèle *Black & Scholes* varient autour de leur moyenne et ne s'en écartent que très peu. Or, l'observation de l'historique des prix des actions montre que ces derniers peuvent avoir un comportement erratique, impliquant de forts mouvements à la hausse ou à la baisse dans une courte période (sauts).

Afin de pallier les limites ci-dessus, le modèle SVJD permet de modéliser le prix d'une action comme le produit de deux composantes :

- La première, S_t^{sv} , suit un processus de Heston et permet de capturer le caractère stochastique de la volatilité du prix des actions.
- La deuxième, S_t^{JD} , suit le modèle de Merton à sauts et permet de prendre en compte à la fois l'impact des sauts des prix des actions via par processus log-normal et le nombre d'occurrences des sauts par un processus de Poisson.

Modèle de Heston

$$\frac{dS_t^{sv}}{S_t^{sv}} = \left(\mu - \frac{v(t)}{2} \right) dt + \sqrt{v(t)} dW(t)$$

Avec :

- μ prime de risque qui vaut 0 en univers risque-neutre ;
- $W(t)$ un processus de Wiener ;
- $v(t)$ variance stochastique du processus S_t^{sv} , qui suit un processus de retour à la moyenne de type *Cox-Ingersoll-Ross (CIR)* :

$$dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)} dB(t)$$

Avec :

- k la vitesse de retour à la moyenne du modèle CIR ;
- θ la moyenne long-terme de l'élasticité $V(t)$;
- σ la volatilité, du modèle CIR, de l'élasticité $V(t)$;
- $W(t)$ et $B(t)$ deux mouvements browniens géométriques corrélés.

Modèle de Merton

La composante de prix S_t^{JD} reflétant l'impact des sauts vérifie l'équation différentielle suivante :

$$d \ln(S_t^{JD}) = -\lambda \bar{\mu} dt + \ln(J) dN(t)$$

Avec :

- $N(t)$ le nombre aléatoire de sauts sur l'intervalle $[0, t]$. Le nombre N suit une loi de Poisson de paramètre λt .
- J est une variable aléatoire qui suit une loi log-normale de moyenne μ_J et de variance σ_J^2 , c'est-à-dire $\ln(J) \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$. Où :

$$\bar{\mu} = \exp\left(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}\right) - 1$$

Ainsi, le prix S_t d'un actif modélisé par le modèle SVJD est donné par la formule suivante :

$$S_t = S_t^{sv} \times S_t^{JD}$$

Avec S_t^{sv} et S_t^{JD} les composantes décrites plus haut et qui vérifient $S_0^{sv} = S_0$ et $S_t^{JD} = 1$

2.3.4.2. Diffusion des prix des indices immobiliers, private equity et hedge fund

Les indices immobiliers (capital et loyer), « private equity » et « hedge fund » (capital et dividendes) sont modélisés par un mouvement brownien à volatilité constante (modèle de *Black & Scholes*). Ils suivent la dynamique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

Avec :

- S_t cours de l'indice à l'instant t ;
- μ_t rendement espéré ;
- σ_t volatilité de l'indice ;
- W_t mouvement brownien.

2.3.5. Diffusion du rendement des dividendes

Le « log-rendement » du dividende d'un indice action suit un processus de diffusion stochastique avec retour à la moyenne de type *Vasicek à 1 facteur* :

$$d \ln(y_t) = \alpha (\beta - \ln(y_t)) dt + \gamma dW_y$$

Avec :

- α vitesse de retour à la moyenne du processus de diffusion de $\ln(y_t)$;
- β moyenne long terme de $\ln(y_t)$;
- γ volatilité du processus de diffusion de $\ln(y_t)$.

2.3.6. Diffusion de l'inflation

L'inflation pour chaque date et chaque marché stochastique est générée par le modèle « *Derived Interest Rate* » de Moody's Analytics. Comme son nom le suggère, l'inflation de ce modèle est entièrement dérivée des courbes de taux nominaux et réels.

Le taux d'inflation est la différence entre le taux court nominal et la moyenne du taux court réel :

$$Inflation = e^{\left(Taux_{nominaux}(t-\Delta t) - \frac{1}{2}(Taux_{réel}(t-\Delta t) + Taux_{réel}(t)) \right)} - 1$$

2.3.7. Diffusion des taux nominaux

La modélisation des taux nominaux est basée sur le modèle de taux Libor Market Model plus (LMM+). Ce modèle fournit le processus stochastique de diffusion des taux forward instantanés.

Le modèle LMM+ est une variante du modèle LMM auquel a été ajouté un facteur de déplacement de la courbe des taux (appelé déplacement parameter) ainsi qu'une volatilité stochastique permettant de capturer le smile de volatilité des swaptions. Le modèle LMM est un modèle de marché à plusieurs facteurs qui permet de modéliser des taux forward observés sur le marché LIBOR. Cependant, le modèle LMM est un modèle de diffusion log-normal, ce qui implique qu'il ne peut pas générer de taux négatifs et peut dans certains cas prendre des valeurs explosives. Le facteur de déplacement a pour but de déplacer la distribution des taux afin de permettre au modèle LMM+ de générer des taux négatifs. La volatilité stochastique permet de capter au mieux la réalité des marchés notamment certaines caractéristiques de la volatilité implicite, telles que le « smile » de volatilité.

L'équation complète de diffusion des taux forward avec le modèle LMM+ est la suivante :

$$\frac{dF_k(t)}{(F_k(t) + DP)} = V(t) \left(\sum_{j=m(t)}^k \frac{\delta(F_k(t) + DP)}{1 + \delta F_k(t)} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \zeta_k^i(t) \zeta_j^i(t)}_{= \zeta_j(t) \cdot \zeta(t)^1} \right) dt + \sqrt{V(t)} \sum_{i=1}^n \zeta_k^i dW^i(t)$$

Avec :

- $F_k(t)$ le taux forward en t sur la période $[T_k, T_{k+1}]$;
- ζ_k^i le $i^{\text{ème}}$ facteur de la composante de volatilité du taux forward F_k ;
- ζ_j^i le $i^{\text{ème}}$ facteur de la composante de volatilité du taux forward F_j avec $j \leq k$;
- W^i la $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur de mouvements browniens indépendants ;
- **DP** le *displacement parameter*.

Une partie de la volatilité du modèle LMM+ est une volatilité stochastique dont le coefficient d'élasticité $V(t)$ suit un processus de diffusion avec retour à la moyenne, de type *Cox-Ingersoll-Ross* (CIR).

L'équation différentielle partielle de diffusion de $V(t)$ est :

$$dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)} dB(t)$$

Avec :

- k la vitesse de retour à la moyenne du modèle CIR ;
- θ la moyenne long-terme de l'élasticité $V(t)$;
- σ la volatilité, du modèle CIR, de l'élasticité $V(t)$.

La structure de corrélation entre le taux forward et le processus stochastique de variance est définie comme suit :

$$B(t) = \frac{\rho}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z^i(t) + \sqrt{1 - \rho^2} Z(t)$$

Avec ρ coefficient de corrélation entre le taux forward et sa volatilité stochastique et $Z(t)$ suit la loi normale $N(0,1)$.

Ainsi, le processus utilisé par SOGECAP pour la modélisation des taux nominaux est le LMM+, qui est construit à partir du LMM en y appliquant les modifications suivantes :

- Intégration d'une volatilité stochastique afin de :
 - Prendre en compte les phénomènes de smile/skew de la volatilité ;
 - Modéliser de manière plus réaliste les mouvements des surfaces de volatilité implicite au cours du temps.
- Intégration d'un coefficient de déplacement pour :
 - Prendre en compte les phénomènes de smile/skew ;

¹ La composante $\zeta_j(t) = f(a, b, c, d)$ est la composante de volatilité de taux forward qui suit la distribution de Rebonato et dépend de la durée jusqu'à l'échéance.

- Palier la problématique des taux explosifs (à condition de choisir judicieusement le facteur de déplacement) ;
- Autoriser la génération de taux négatifs en « déplaçant » la distribution des taux.

SOGECAP recalibre le paramétrage du modèle LMM+ effectué par Moody's Analytics. Ce paramétrage permet de définir les paramètres du modèle, qui peuvent être répartis comme suit :

- La courbe de taux initiale et le *displacement parameter* ;
- Les facteurs de la composante de la volatilité déterministe a, b, c et d qui seront définis plus loin ;
- Les paramètres de la variance stochastique κ, θ, σ qui seront également définis dans la suite ;
- La corrélation entre le processus du taux forward et la variance stochastique : ρ .

2.4. Fonctionnement du GSE

La génération des tables est réalisée avec un outil proposé par Moody's : l'Automation Module. C'est une interface qui automatise la génération. Le schéma récapitulatif (Figure 2.3) présente la manière dont une table est générée. Moody's fournit à ses clients des fichiers BHS et BHC qui doivent être attachés à l'Automation Module à chaque génération de tables de scénario. Le fichier BHS contient des paramètres de modèle et de structuration de la simulation. Il est mis à jour par SOGECAP. Le fichier BHC contient les données économiques fournies par Moody's trimestriellement pour les calculs aux dates d'arrêté. Durant ce mémoire, nous nous sommes intéressés dans un premier temps au fichier XML également fourni par Moody's. C'est notamment dans ce fichier qu'a lieu le calibrage du modèle LMM+.

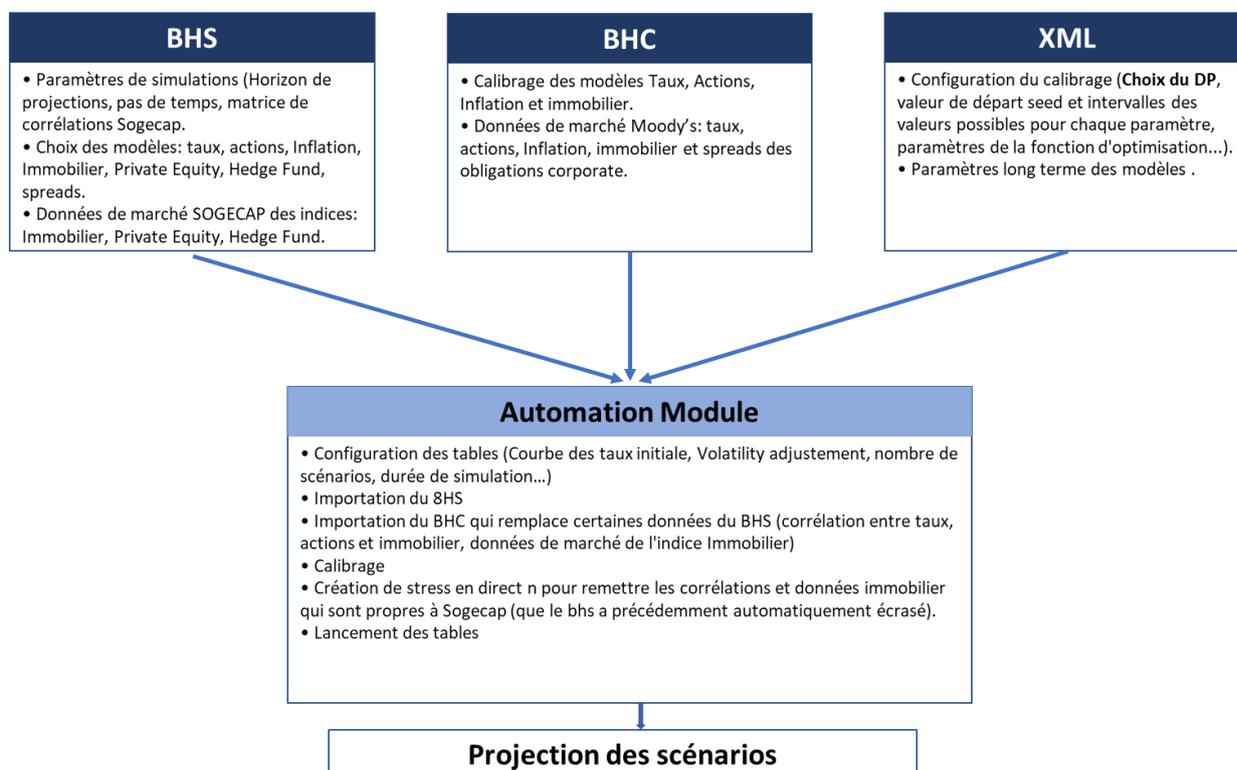


Figure 2.3 Alimentation GSE

3. Calibrage du model LMM+

Les scénarios économiques utilisés pour la valorisation du *best-estimate* des contrats d'épargne en euros doivent être cohérents avec les prix du marché (*Market-Consistent*). Une évaluation en valeur de marché consiste à valoriser en se référant aux valeurs des actifs et des passifs réellement échangés (approche Mark to Market). L'objectif est de fabriquer une juste valeur qui soit cohérente avec les prix et les risques observables et mesurables sur le marché.

Cependant, appliquer une approche Mark to Market pour évaluer le best-estimate en juste valeur est impossible. En effet, il n'existe pas de marché où le prix des options et garanties d'un contrat d'assurance sont observables. Dans ce cadre Mark to Model, le GSE est calibré non pas sur les options et garanties du contrat d'assurance mais sur des produits financiers (swaptions, caps, floors...). Sa qualité est appréciée par sa capacité à reproduire les prix de ces produits financiers.

3.1. Données de marché utilisées pour le calibrage

La question du choix des données utilisées pour le calibrage du modèle de taux est contrainte par la nécessité de disposer d'un marché profond et liquide afin d'observer des données fiables. La question de la cohérence, entre la structure optionnelle des contrats d'assurance et les produits dérivés utilisés, est traitée dans plusieurs travaux de recherche (notamment par Armel et Planchet). Les swaptions sont les instruments choisis pour calibrer le modèle de taux car il s'agit de produits largement échangés et cotés sur le marché et les prix de ces options sont disponibles pour différents ténors, maturités et niveaux d'exercice. Le marché des swaptions est ainsi suffisamment profond et liquide.

Le calibrage des taux nominaux utilise les données de marché suivantes :

- La courbe des taux swap *Euribor*, qui est lissée par le GSE pour calculer les taux forwards pour toutes les maturités selon le pas de projection choisi pour le modèle LMM+. Les taux swap *Euribor* des maturités intermédiaires peuvent être obtenus à l'aide d'une interpolation par splines cubiques. Les taux, se situant au-delà de la maturité maximale des données du marché, sont obtenus par une extrapolation selon la méthode de Smith-Wilson pour S2 et la méthode des points lissés pour IFRS17. Cette dernière possède de nombreuses similitudes avec la méthode Smith-Wilson. La courbe reste semblable pour les faibles maturités, mais pour les taux extrapolés à partir du *Last Liquid Point*, elle entraîne une baisse. La principale différence vient du fait que pour la méthode des points lissés, l'interpolation et l'extrapolation se font indépendamment, alors que pour la méthode de Smith-Wilson une seule fonction des prix $P(t)$ permet d'obtenir les points interpolés et les points extrapolés.
- La structure de corrélation des taux forwards pour les différentes maturités est basée sur des valeurs cibles de corrélation en monde réel, calculées par Moody's Analytics à partir des données historiques du marché européen pour des maturités allant jusqu'à 15 ans.
- Les volatilités des swaptions qui sont collectées sur la base des données des volatilités observées sur le marché pour des swaptions :

- A la monnaie (ATM²), pour plusieurs prix d'exercice, et pour des maturités allant jusqu'à 30 ans, maille : strike x maturité (tenor = 10 ans) ;

Tenor >		Market Swaption Data													
Maturity	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	
1	1.12%	1.17%	1.12%	1.07%	1.02%	0.99%	0.96%	0.93%	0.89%	0.85%	0.85%	0.84%	0.84%	0.85%	
2	1.16%	1.13%	1.09%	1.05%	0.99%	0.96%	0.94%	0.90%	0.87%	0.83%	0.81%	0.81%	0.80%	0.80%	
3	1.14%	1.12%	1.07%	1.02%	0.98%	0.95%	0.92%	0.88%	0.85%	0.81%	0.78%	0.77%	0.77%	0.76%	
4	1.11%	1.09%	1.04%	0.99%	0.94%	0.91%	0.89%	0.86%	0.83%	0.79%	0.76%	0.75%	0.74%	0.73%	
5	1.05%	1.03%	0.99%	0.95%	0.91%	0.88%	0.86%	0.83%	0.80%	0.78%	0.74%	0.72%	0.72%	0.70%	
7	0.93%	0.92%	0.89%	0.86%	0.84%	0.82%	0.80%	0.78%	0.76%	0.75%	0.71%	0.69%	0.67%	0.66%	
10	0.81%	0.81%	0.79%	0.77%	0.75%	0.74%	0.73%	0.72%	0.71%	0.69%	0.66%	0.63%	0.61%	0.59%	
15	0.70%	0.70%	0.69%	0.68%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.64%	0.60%	0.57%	0.55%	0.53%	
20	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.59%	0.55%	0.52%	0.50%	0.48%	
25	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%	0.57%	0.57%	0.56%	0.55%	0.51%	0.48%	0.46%	0.43%	
30	0.59%	0.58%	0.57%	0.57%	0.57%	0.56%	0.55%	0.54%	0.53%	0.52%	0.48%	0.45%	0.42%	0.40%	

Figure 3.1 Matrice volatilité swaption ATM

- Hors de la monnaie (AFTM³) pour des tenors 10 ans, maille : strike x maturité (tenor = 10 ans) ;

Strike >		Market Swaption Data										
Maturity	-0.025	-0.02	-0.015	-0.01	-0.005	0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025	
1		0.95%		0.84%	0.82%	0.85%	0.93%	1.03%		1.26%		
2		0.86%		0.80%	0.80%	0.83%	0.89%	0.96%		1.13%		
3						0.81%						
4						0.79%						
5		0.75%		0.74%	0.76%	0.78%	0.80%	0.83%		0.92%		
7						0.75%						
10		0.66%		0.67%	0.68%	0.69%	0.70%	0.72%		0.77%		
15						0.64%						
20						0.59%						
25						0.55%						
30						0.52%						

Figure 3.2 Matrice volatilité swaption AFTM

Nous obtenons deux tranches du cube de la volatilité implicite des swaptions (maturité x tenor x strike).

A noter que dans le cadre de ce mémoire nous utilisons des données marchés et ne disposons pas de toutes les informations nécessaires afin de remplir totalement la matrice AFTM. Le calibrage se fera sur 189 données et non sur 264 si toutes ces dernières étaient cotées.

- La volatilité inconditionnelle décrit la structure de la volatilité des taux forwards à long terme, indépendamment du temps. Pour les fins de calibration, le modèle considère que la structure de volatilité à long terme est décroissante et converge vers 0 à partir de 120 ans.

La courbe des taux initiale est ensuite calculée à partir de la courbe des swaps **Euribor** issue de Reuters, lissée et extrapolée par Moody's Analytics. Le displacement parameter est au moment de la rédaction du mémoire fixé à **45%**.

La calibration des paramètres du modèle LMM+ est réalisée selon un processus d'optimisation itératif (réduction de l'écart entre les données du marché et celles issues du modèle). Les travaux de calibrage doivent permettre de valider que :

- Le modèle reproduit « raisonnablement » la volatilité implicite de marché des swaptions ;
- Les taux courts n'évoluent pas rapidement vers des valeurs aberrantes (absence du phénomène des taux explosifs) ;
- Le comportement de la volatilité à long terme est cohérent avec la cible de volatilité inconditionnelle des taux forward à long terme.

² At The Money.

³ Away From The Money.

Le modèle est en réalité calibré sur le prix des swaptions. Il convertit les volatilités swaptions en prix pour le calibrage puis reconvertit les prix calibrés en volatilités afin de comparer les matrices marché/modèle. Dans certains cas, une modification de la volatilité implicite a très peu d'impact sur le prix d'une swaption. Cela implique qu'une petite variation de prix qui peut être due à des erreurs numériques (un arrondi de résultat par exemple) peut avoir un impact important sur les volatilités implicites. Ainsi, dans certains cas les volatilités sont considérées comme incertaines et sont exclues du processus d'ajustement. Cette option appelée vega filtering regarde la dépendance entre les prix et les volatilités à l'aide du grec vega. Si pour un ténor, une maturité ou un strike donnés le vega descend sous les 100bps alors cette volatilité implicite est exclue du calibrage. Ces volatilités sont exclues en mettant à zéro leur cellule dans la matrice de poids (la matrice de poids est définie par la suite).

3.2. Construction du calibrage

Nous allons voir que certains modèles, utilisés pour la production des tables de scénarios économiques, reposent sur un nombre conséquent de paramètres qui leur permettent de répliquer finement les spécificités des données de marché. Cependant, l'hyper paramétrisation de ces modèles induit différentes problématiques de calibrage et de gouvernance :

- Difficultés d'interprétation des paramètres utilisés ;
- Saturation fréquente du calibrage et problématiques de rejet des paramètres calibrés ;
- Complexité des interactions entre les paramètres et des effets de compensation.

Ce mémoire a pour but de comprendre le rôle de chaque paramètre du modèle et d'objectiver le choix du DP. Nous allons commencer par présenter la construction théorique du modèle LMM+, en regardant particulièrement le calibrage de celui-ci.

Cela nécessite d'expliquer, en amont, le calibrage du modèle LMM.

Le modèle LMM (volatilité déterministe) suppose que chaque taux forward 1 an dans i années issu de la courbe des taux initiale suit un processus log-normal :

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \mu_i(t)dt + \zeta_i(t)dB_t$$

$$F_i(0, T) = F_0^i$$

Or dans l'univers risque-neutre le prix du ZC de maturité i $P_i(t)$ suit la dynamique :

$$dP_i(t) = r_t P_i(t)dt + \vartheta_i(t)P_i(t)dB_t$$

$$P(0, T) = P_0$$

Où :

- $\vartheta_i(t)$ est la volatilité de $P_i(t)$ à l'instant t
- r_t est le taux sans risque.

En exprimant le taux forward 1 an dans i années à partir de cette formule (d'après Lemme d'Ito) on trouve :

$$d\left(\frac{P_i(t)}{P_{i+1}(t)}\right) = \delta_i dF_i(t) = (\vartheta_i(t) - \vartheta_{i+1}(t))(1 + \delta_i F_i(t))dB_t^{i+1}$$

$F_i(t)$ est bien une martingale et en identifiant la partie brownienne et non brownienne (après lemme d'Ito) : $t \leq T_i$, $\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \zeta_i(t) \sum_{j=k}^i \frac{\delta_j F_j(t) \zeta_j(t)}{1 + \delta_j F_j(t)} dt + \zeta_i(t) dB_t^k$

On voit que μ est entièrement déterminé par le risque-neutralité et qu'il dépend à la fois du niveau des taux et des vols.

En discrétisant (après encore lemme d'Ito sur la fonction \ln) et après passage à l'exponentielle on trouve : $F_i(t_{j+1}) = F_i(t_j) \exp \left[\left(\sum_{k=j+1}^i \left(\frac{\delta_i F_i(t_j) \zeta_i(t_j) \zeta_k(t_j)}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\zeta_k^2(t_j)}{2} \right) \delta_j + \zeta_k(t_j) \epsilon_j + \sqrt{\delta_j} \right) \right]$ où $\delta_j = t_{j+1} - t_j$

D'après la formule discrétisée, on peut calculer chaque taux forward 1 an projeté dans le temps comme suit :

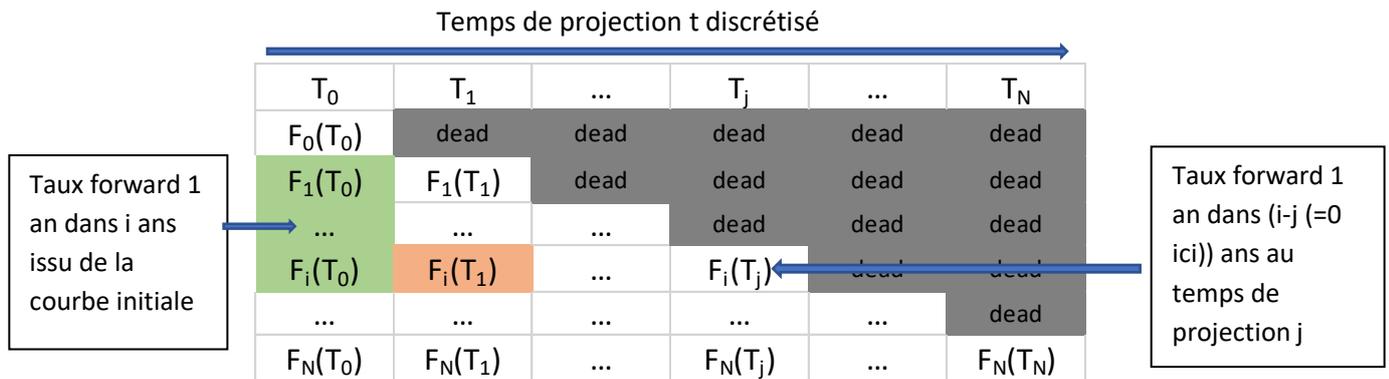


Figure 3.3 Projection taux forward

Le taux forward 1 an dans $(i - j)$ ans à l'année de projection j (case orange) se calcule à partir des taux k ans, $0 < k \leq i$ de l'année de projection $(j - 1)$ (cases vertes).

A partir des forwards 1 an dans k ans pour chaque année de projection, on peut ensuite reconstruire des courbes ZC et swap pour chaque année de projection.

Les taux étant projetés, il reste à calibrer les paramètres du modèle afin qu'il réplique correctement les prix des produits financiers qui répliquent le mieux notre portefeuille passif (options et garanties) : les swaptions.

Le but du modèle LMM est d'être parfaitement compatible avec les prix de marché des options : on trouve en effet une cohérence parfaite entre le modèle LMM et le modèle de Black, dans lequel le prix du sous-jacent de l'option suit la dynamique suivante : $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$

Ce qui correspond exactement à la formule de projection du taux forward 1 an par le modèle LMM. Pour reproduire correctement les prix de marché des swaptions à partir du modèle de taux forward du LMM, il faut donc que les volatilités implicites ($\sigma_{(imp)}^{(Black)}$) de tenor 1 pour toutes les maturités i vérifient :

Vol tenor 1 issue de la matrice de marché

$$\sigma_{(imp)}^{(Black)}(F_i) = \sqrt{\frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \zeta_i^2(t) dt}$$

Volatilité des taux forward 1 an projeté par le modèle

$\sigma_{(imp)}^{(Black)}(F_i) = \text{moyenne}$

	T_0	T_1	...	T_j	...	T_N
$F_0(T_0)$		dead	dead	dead	dead	dead
$F_1(T_0)$		$C_1(T_1)$	dead	dead	dead	dead
...		dead	dead	dead
$F_i(T_0)$		$C_i(T_1)$...	$C_i(T_j)$	dead	dead
...		dead
$F_N(T_0)$		$C_N(T_1)$...	$C_N(T_j)$...	$C_N(T_N)$

Figure 3.4 Projection volatilité taux forward

La volatilité déterministe du modèle suit le modèle de volatilité de Rebonato qui suppose que la volatilité des taux dépend du temps restant à maturité et que celle-ci est de la forme :

$$\zeta_i(t) = (a + b(T_k - t))e^{-c(T_k - t)} + d$$

Calibrer le modèle revient dans un premier temps à déterminer les 4 paramètres a, b, c et d tels que l'on retombe sur $\sigma_{(imp)}^{(Black)}(F_i)$.

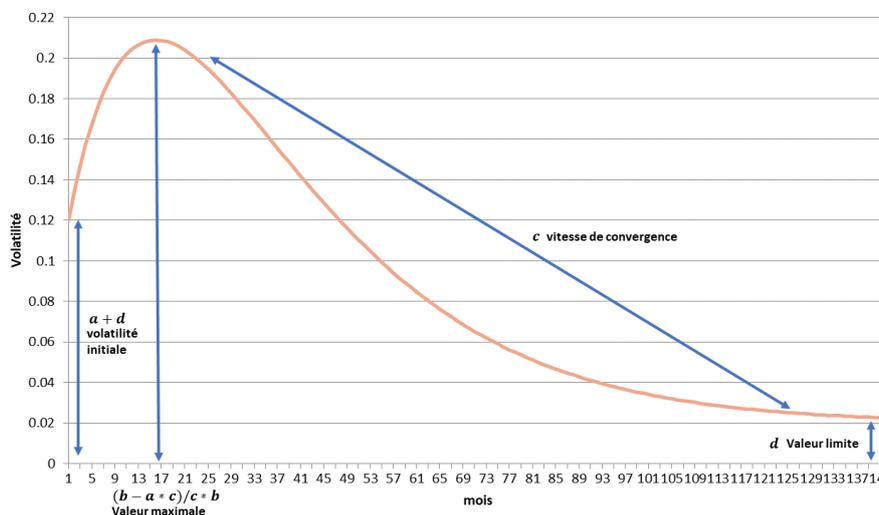


Figure 3.5 Illustration volatilité déterministe

Sur la figure ci-dessus il est possible d'observer le rôle de chaque paramètre dans la distribution de la volatilité déterministe cette partie sera détaillée par la suite.

Après avoir calibré les volatilités des $tenor > 1$, Il faut exprimer les taux swap forward de maturité i et $tenor(n - i)$. On a :

$$S^{(i,n)}(t) = \frac{P(t, T_i) - P(t, T_n)}{\sum_{j=i+1}^n \tau_j P(t, T_j)}$$

Et donc en posant : $W_i(t) = \frac{\tau_j P(t, T_j)}{\sum_{j=i+1}^n \tau_j P(t, T_j)}$: $S^{i,n} = \sum_{j=i+1}^n W_j(t) F_j(t)$

En faisant l'hypothèse que la volatilité des poids w_i est plus faible par rapport à celle des F_k , on peut écrire :

$$S^{i,n}(t) = \sum_{j=i+1}^n W_j(0) F_j(t)$$

Etant une somme de log-normale, le taux swap forward de tenor $(n - i)$ suit bien une loi log-normale. On peut alors calculer la volatilité à partir des volatilités des taux forward de tenor 1 an générés par le modèle.

Il ne nous reste plus, comme pour le taux forward de tenor 1 an, qu'à faire correspondre la volatilité marché de tenor $(n - i)$ à la volatilité du modèle log-normale de $S^{(i,n)}(t)$ ci-dessus.

Nous avons ici calibré le modèle de taux LMM qui ne comprend pas de volatilité stochastique. Le calibrage se réalise uniquement sur la matrice de volatilité maturité X tenor. Le modèle LMM+, avec sa volatilité stochastique, permet lui de prendre en compte une 3ème dimension : le strike.

Ainsi, nous savons que l'équation de diffusion des taux forward est :

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t)+DP} = \text{drift} + \sigma_k(t)\sqrt{V(t)}dW_k(t)$$

La méthode de calibrage du LMM+ est celle-ci :

- 1- Calibrage de la volatilité déterministe σ_k de la forme de Rebonato suivant la matrice de volatilité taux maturité X tenor en supposant que $V(t) = 1$ en moyenne.
- 2- Calibrage de la volatilité stochastique $V(t)$ sur la matrice maturité X strike à tenor 10 fixé.

La volatilité stochastique suit un modèle de CIR, c'est à dire de la forme :

$$dV(t) = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dB_t$$

Il s'agit dans cette partie du calibrage de déterminer les paramètres k , θ et σ tels que la matrice hors de la monnaie soit atteinte.

Cela jouera alors sur les queues de distribution du taux forward projeté, puisqu'il s'agit de reproduire correctement les volatilités des taux, pour des niveaux de taux au-dessus ou en-dessous des niveaux observés en 0.

Le modèle de volatilité est comme le modèle de taux, dirigé par un Brownien. Le bon calibrage de la corrélation entre ces 2 browniens va permettre une meilleure atteinte de la matrice de volatilité hors la monnaie.

Finalement, le calibrage du modèle LMM+ se réalise sur 8 paramètres :

- a, b, c et d de Rebonato (volatilité déterministe)
- k, θ et σ de CIR
- ρ la corrélation entre les browniens dirigeants le niveau de la vol stochastique et le niveau des taux (volatilité stochastique)

Avec un déplacement parameter, la projection et le calibrage des taux se font de la même manière qu'énoncé précédemment mais en posant $F_k' = F_k + DP$

Les F_k sont ensuite obtenus en soustrayant le DP au résultat final.

Les $(F_k + DP)$ étant construits suivant le modèle log-normale, ils sont tous supérieurs à 0 et après soustraction du DP, on aura des taux $F_k > DP$, le DP crée ainsi un « taux plancher » naturel.

Le LMM+ comporte 8 paramètres (8 + le DP dans notre cas) que le modèle cherche à optimiser pour obtenir la plus petite RMSE possible. La RMSE étant l'erreur quadratique entre les volatilités en sortie de modèle et les volatilités marché.

Évolution de la distribution des taux en fonction du DP

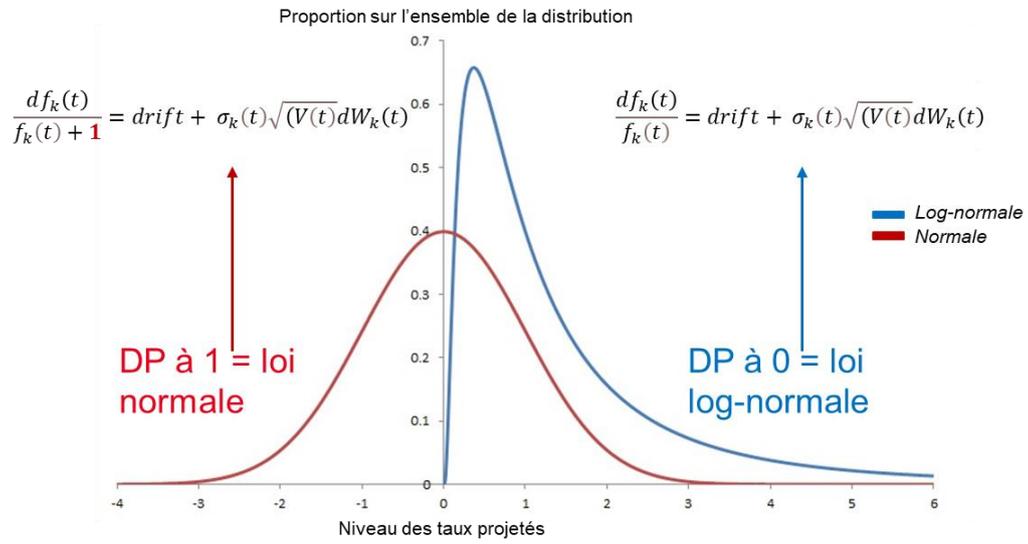


Figure 3.6 Distribution des taux en fonction du DP

3.3. Volatilité déterministe

La volatilité déterministe dépend du temps. Elle est modélisée en utilisant la forme d'une fonction de Rebonato. Cela permet une transition fluide des volatilités initiales vers une volatilité cible (fixée en amont). Pour rappel, la fonction de Rebonato permet de reproduire de nombreuses formes selon ses quatre paramètres (a, b, c et d) :

$$\zeta_i(t) = (a + b(T_k - t))e^{-c(T_k - t)} + d$$

Cette composante du modèle a un impact significatif sur les options à la monnaie.

Le rôle de chaque paramètre va être expliqué afin d'appréhender l'impact d'un changement de DP.

Un calibrage est réalisé en amont de la génération des tables. Il permet de déterminer les 8 paramètres du modèle LMM+ qui répliquent le mieux les données de marché. Ensuite, chaque paramètre de la volatilité déterministe est isolé afin d'observer leurs impacts. Pour cela le modèle est recalibré en fixant tous les paramètres à leur valeur de sortie de la table initiale, et en fixant à sa valeur maximale le paramètre que nous souhaitons étudier. Pour rappel, calibrer revient à trouver les valeurs des paramètres du modèle afin qu'il reproduise le plus fidèlement possible les données de marchés observées.

Pour la table initiale DP10, les paramètres en sortie de calibrage sont les suivants :

a	0.055	Mean Rev. Speed of Variance	0.122
b	0.0079	Mean Rev. Level of Variance	0.1892
c	0.0567	Volatility of Variance	0.4305
d	0.0000	Correlation	0.1982

Tout d'abord sera observé l'impact des paramètres sur la distribution de la fonction de Rebonato, puis, l'impact de ces paramètres sur les nappes de distribution des taux.

Sensibilité au paramètre α

Pour tester la sensibilité du paramètre α , nous réalisons une simulation en le bloquant à sa valeur maximale qui est de 0.37 (vs 0.055 pour la table initiale).

-Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre α :

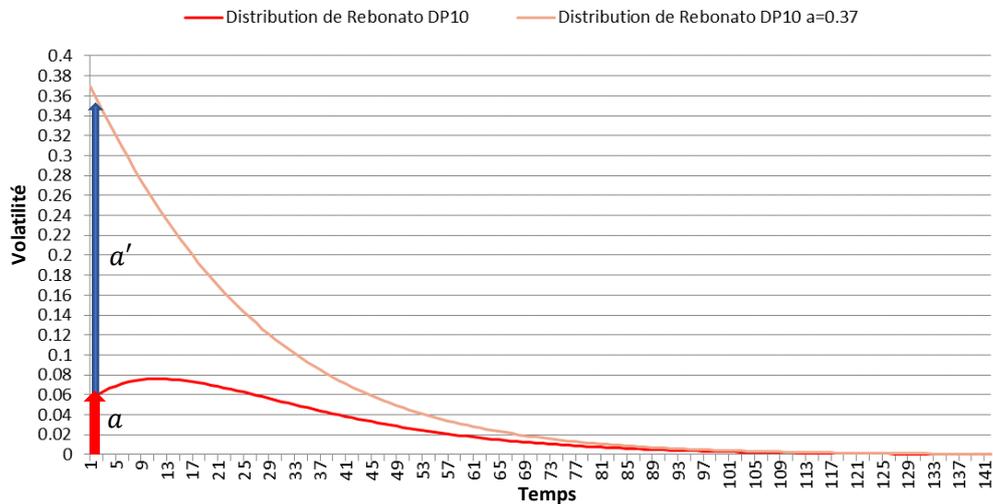


Figure 3.7 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre α

Ci-dessus sont affichées la volatilité déterministe en sortie de calibrage (la courbe en rouge) et la volatilité déterministe en sortie de calibrage lorsque le paramètre α est mis à sa valeur maximale (courbe beige). Le paramètre α influe sur la volatilité initiale du modèle, ainsi en le mettant à sa valeur maximale, la volatilité explose dès le début de la projection puis converge vers 0.

-Sensibilité des taux nominaux 10 ans au paramètre α :

Le premier graphique correspond à la nappe de distribution du taux 10 ans de la table avec le calibrage classique. Tandis que le deuxième graphique correspond à la nappe de distribution du taux 10 ans de la table avec le paramètre α à sa valeur maximale de 0.37.

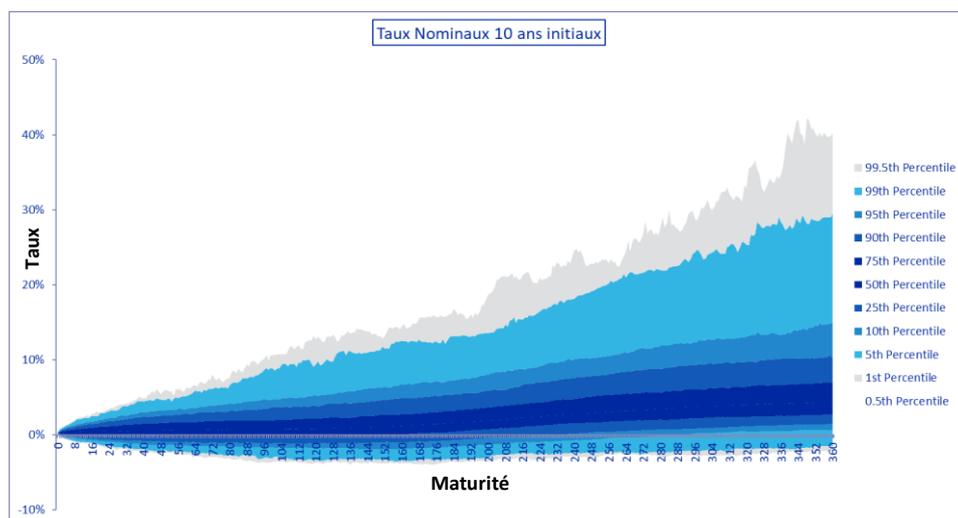


Figure 3.8 Nappe de distribution taux nominaux initiale 10 ans

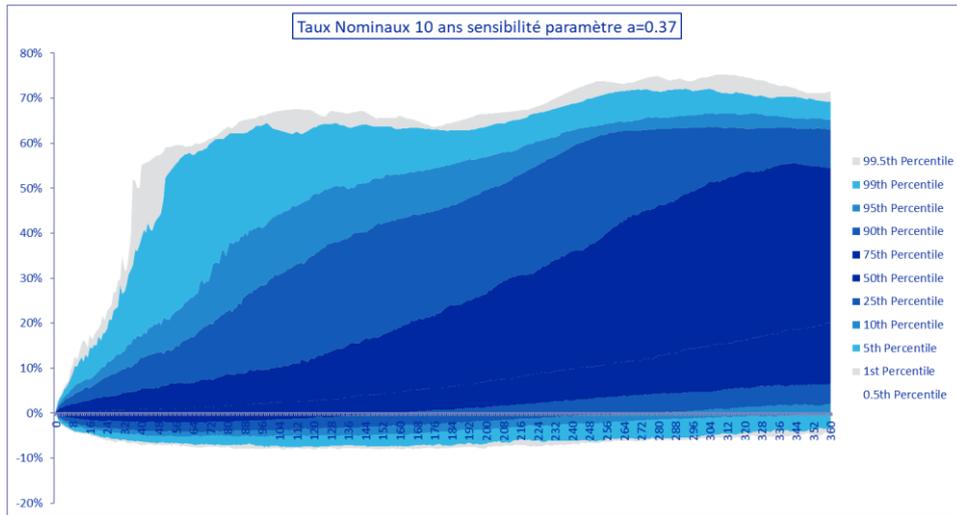


Figure 3.9 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètre a

En observant les nappes de la distribution des taux nominaux 10 ans (DP10 vs DP10 $a=0.37$) (Figure 3.8 vs Figure 3.9), nous remarquons que le paramètre a influe sur la valeur initiale de la volatilité déterministe. Ainsi plus a est grand plus la distribution des taux sera large au début de la projection. La volatilité déterministe converge ensuite vers d qui est égale à 0, d'où la baisse de volatilité au cours de la projection.

Sensibilité au paramètre b

-Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre b :

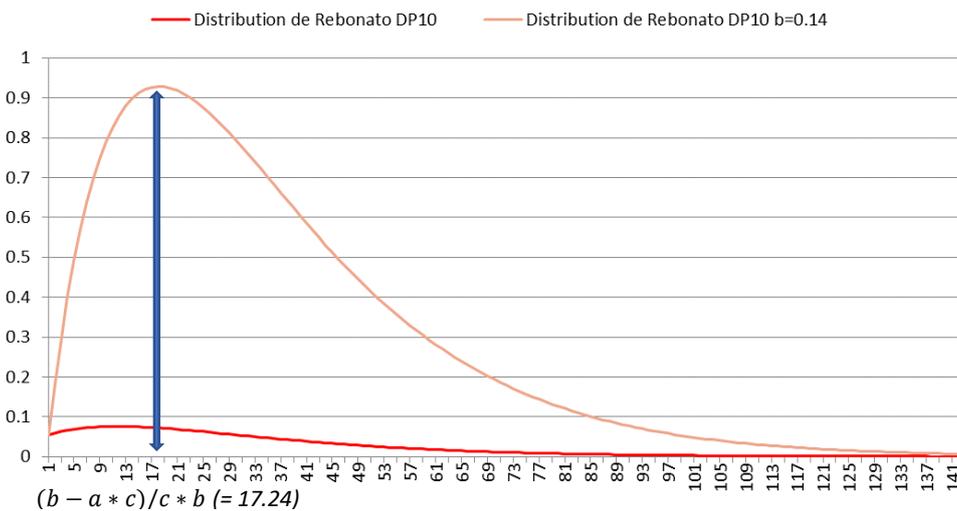


Figure 3.10 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre b

Ci-dessus sont affichées la volatilité déterministe en sortie de calibrage (la courbe en rouge), ainsi que la volatilité déterministe en augmentant le paramètre b à sa valeur maximale 0.14 (la courbe beige). Le paramètre b influe sur la valeur maximale de la volatilité.

-Sensibilité des taux nominaux 10 ans au paramètre b :

Le graphique ci-dessous correspond à la nappe de distribution du taux 10 ans avec le calibrage classique hormis pour le paramètre b qui est choqué $b = 0.14$ (vs 0.0079 pour la table initiale).

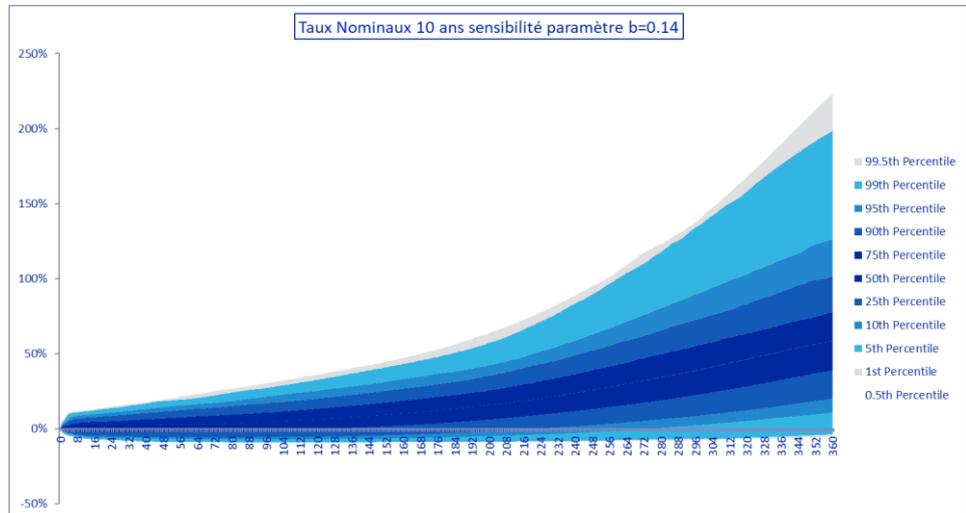


Figure 3.11 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètre b

Le paramètre b du modèle de Rebonato influe sur la volatilité à long terme. On peut effectivement observer que pour les grandes maturités, la distribution des taux explose (comparer à la figure 3.8). Cette évolution est due au fait que la valeur maximale de la volatilité déterministe est très grande et met plus de temps à converger vers d .

Sensibilité au paramètre c

-Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre c :

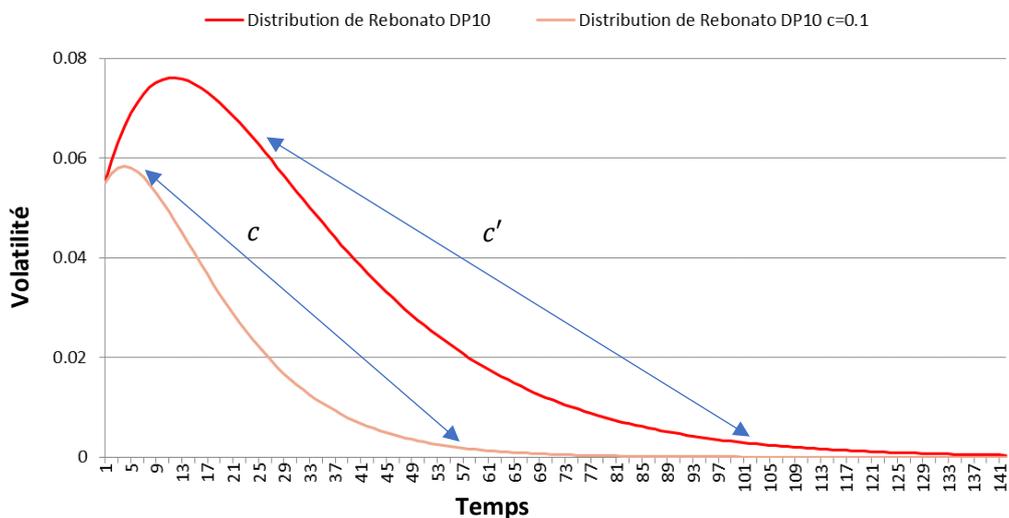


Figure 3.12 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre c

Ci-dessus sont affichées la volatilité déterministe en sortie de calibrage (la courbe en rouge) ainsi que la volatilité déterministe en augmentant le paramètre c (la courbe en beige).
 Nous constatons que le paramètre c correspond à la vitesse de convergence vers la volatilité long terme d ($= 0$ ici).

-Sensibilité des taux nominaux 10 ans au paramètre c :

Le graphique ci-dessous correspond à la nappe de distribution du taux 10 ans de la table ayant le même calibrage que la table initiale hormis pour c qui est bloqué à son maximum $c = 0.1$.

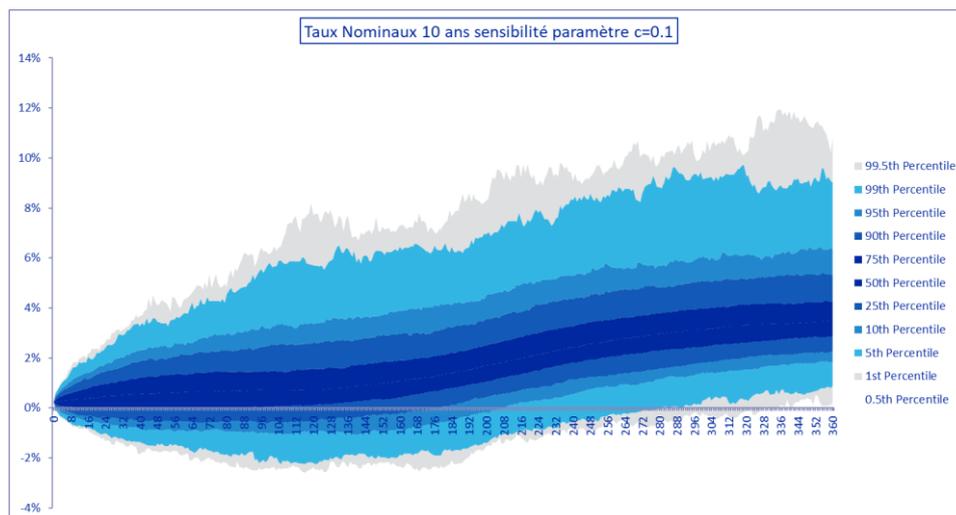


Figure 3.13 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètres c

En observant les nappes de la distribution des taux nominaux 10 ans (DP10 vs DP10 $c=0.1$), nous remarquons que lorsque le paramètre c est augmenté, la volatilité déterministe converge plus vite vers d qui est égal à 0. En effet, la distribution avec c plus élevé est beaucoup plus centrée autour de la moyenne (comparer à la figure 3.8). Le calcul de l'écart type sur les 1000 scénarios du taux 10 ans confirme ce résultat. Nous obtenons un écart type de 1.91% pour le paramètre $c=0.1$ et de plus de 4.094% pour la table avec le calibrage classique.

Sensibilité au paramètre d

-Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre d :

Enfin, la dernière sensibilité porte sur le paramètre d qui passe de 0 à 0.1. L'analyse de la distribution de la fonction de Rebonato, montre que mettre le paramètre d à 0.1 uniformise quasiment la volatilité tout au long de la projection. La distribution de la volatilité est quasiment plate tout au long de la distribution.

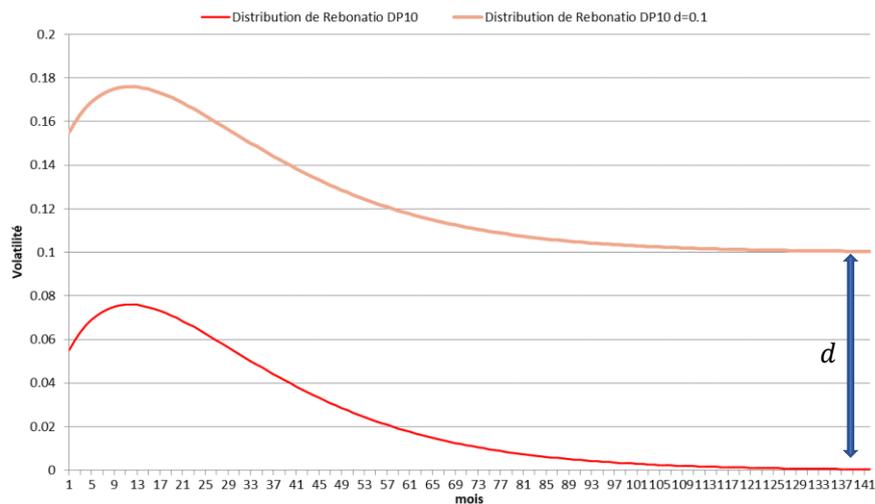


Figure 3.14 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre d

-Sensibilité de nos taux au paramètre d :

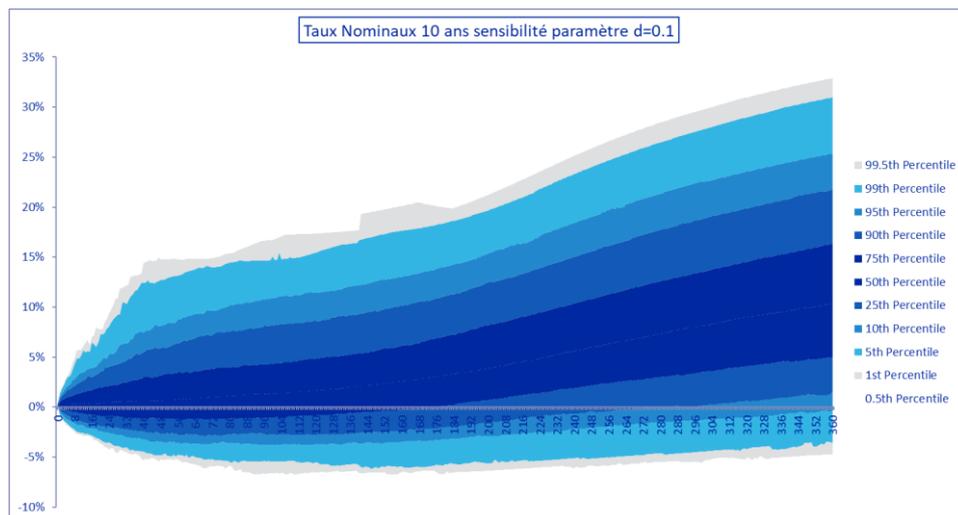


Figure 3.15 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètres d

Lorsque le paramètre d est à 0.1 la volatilité des taux durant toute la projection est uniformisée. L'analyse de la distribution de la fonction de Rebonato permettait de le prédire.

Élimination de la volatilité déterministe

En calibrant d'une certaine façon nos paramètres de Rebonato, nous pouvons éliminer la volatilité du modèle. Pour se faire les paramètres a , b et d sont réglés leurs minimums et le paramètre c à sa valeur maximale. Une volatilité déterministe nulle vient rendre nulle la volatilité stochastique. En effet, nous avons la volatilité déterministe $\sigma_k(t)$ qui est multipliée directement à la volatilité stochastique $\sqrt{V(t)}$ (rappel : $\dots + \sigma_k(t)\sqrt{V(t)}dW_k(t)$).

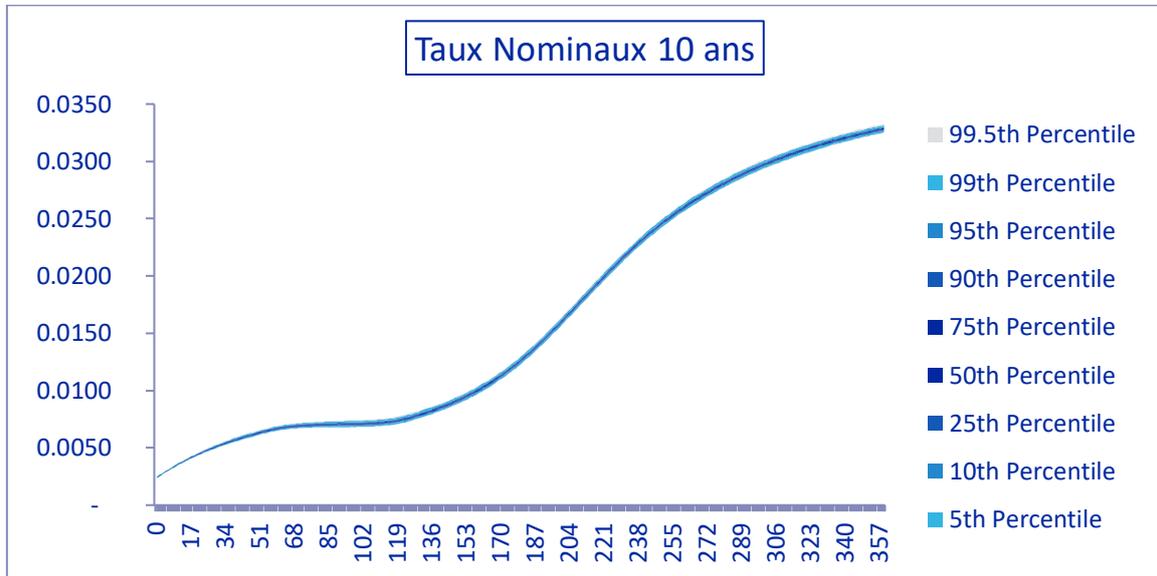


Figure 3.16 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité sans volatilité déterministe

3.4. Volatilité stochastique

Le modèle LMM+ se différencie également du modèle LMM par l'ajout d'une volatilité stochastique. Les modèles sans volatilité stochastique ne peuvent pas reproduire certaines caractéristiques de la volatilité implicite, telles que le « smile » de volatilité, ou le « skew » de volatilité, qui indiquent que la volatilité implicite a tendance à varier en accord avec le prix d'exercice et la date d'expiration du dérivé. La volatilité stochastique est souvent utilisée en finance quantitative, afin d'évaluer des produits dérivés, tels que les options. Le terme stochastique est utilisé car la volatilité du sous-jacent est traitée comme un processus aléatoire, dépendant des caractéristiques des produits dérivés tels que le prix du sous-jacent, la variance du processus de la volatilité, et la vitesse de convergence de la volatilité vers sa valeur limite.

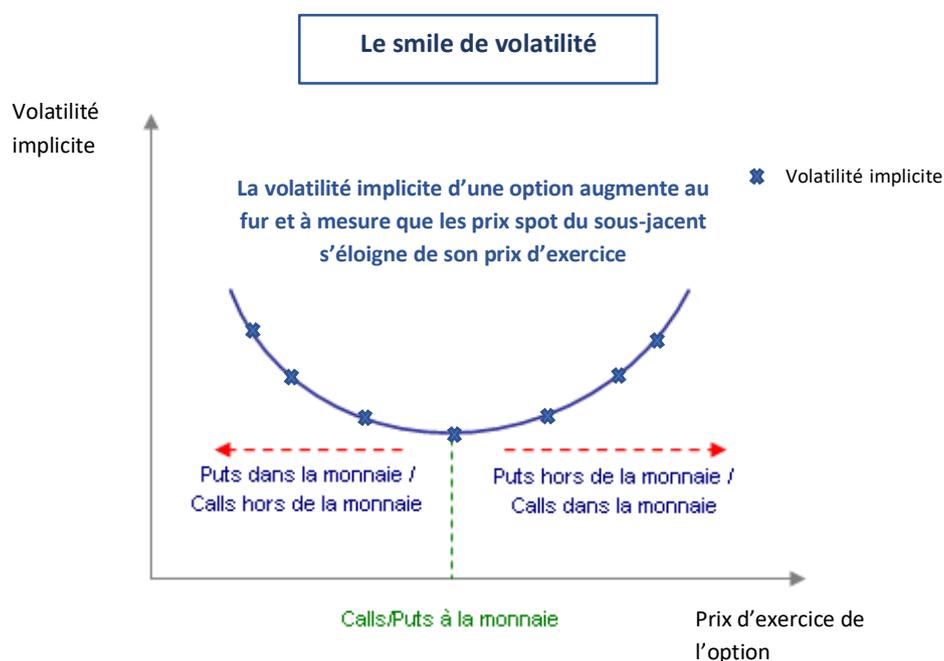


Figure 3.17 Smile de volatilité

Les modèles de volatilité stochastiques présentent une des approches pour résoudre l'une des lacunes du modèle Black-Scholes et des modèles à volatilité déterministe en général, qui ne prennent pas en compte le fait que la volatilité sous-jacente peut ne pas être constante, pendant le temps de vie du produit dérivé, et que celui-ci est affecté par le changement de valeur du sous-jacent. Effectivement, nous observons un effet de « smile » en fonction de la valeur du sous-jacent de l'option (courbe des volatilités implicites en forme de U). Ce terme désigne l'effet d'une augmentation de la volatilité implicite d'une option au fur et à mesure que son prix d'exercice est éloigné du prix du sous-jacent, représenté graphiquement sous forme d'une courbe mettant en relation les prix d'exercice d'une série d'options avec la même échéance et le même sous-jacent, et leur volatilité implicite respective. Le smile peut être expliqué par les primes de liquidité qui sont plus élevées pour les options loin de la monnaie.

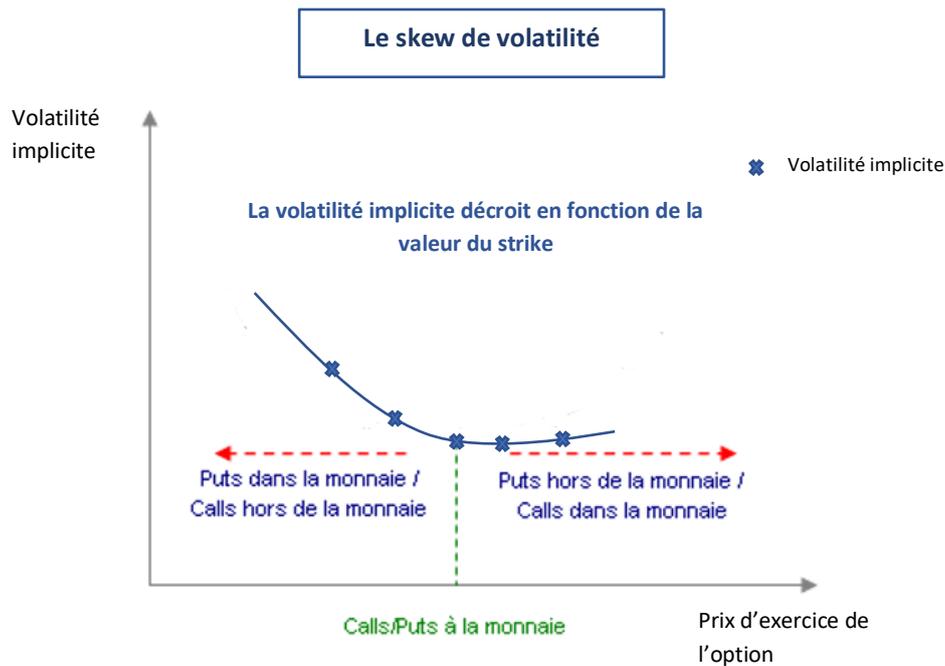


Figure 3.18 Skew de volatilité

On parle également souvent de skew de volatilité pour désigner une asymétrie dans la courbe, qui se caractérise par une tangente décroissante à la monnaie. Cette courbe signifie que la volatilité implicite des calls (resp. puts) dans la monnaie (resp. en dehors) est plus élevée que celles des calls (resp. puts) à la monnaie et en dehors (resp. en dedans). Une telle forme de courbe est souvent attribuée à l'idée selon laquelle les investisseurs craignent d'avantage un gros mouvement baissier qu'un mouvement haussier, ce qui donne une prime plus élevée aux puts en dehors et aux calls dans la monnaie, ie aux options ayant un prix d'exercice faible.

Ainsi, en supposant que la volatilité du prix du sous-jacent est un processus stochastique, plutôt qu'une constante, il devient possible de modéliser les produits dérivés avec plus de précision.

Le LMM utilise une volatilité déterministe et ne peut ajuster les données de swaption qu'à l'échéance et au tenor du swaption. Le LMM+ peut répliquer une grande partie du cube de la volatilité des swaptions. Cette caractéristique donne une description plus réaliste de la volatilité des taux d'intérêt, puisque dans la réalité, la volatilité du marché observée est stochastique plutôt que déterministe.

L'avantage du LMM+ est qu'il peut être calibré sur les volatilités implicites des swaptions, à la fois avec une matrice de volatilité à la monnaie, et en dehors de la monnaie. La matrice à la monnaie (ATM) est à la maille maturité x tenor (strike = 0), tandis que la matrice en dehors de la monnaie (AFTM) est à la maille strike x maturité (tenor = 10 ans). Nous avons deux tranches du cube de la volatilité implicite des swaptions (maturité x tenor x strike), avec une intersection commune (colonne noire) au niveau du strike zéro pour la matrice AFTM et tenor 10 ans pour la matrice ATM (toutes les maturités de la matrice AFTM qui ont un strike de 0 sont sur la surface de la matrice ATM colonne tenor 10 ans).

SWAPTION DATA - At the money

Tenor >		Market Swaption Data													
Maturity	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	
1	0.48%	0.55%	0.58%	0.60%	0.62%	0.62%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.67%	0.69%	0.70%	0.72%	
2	0.62%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.66%	0.67%	0.67%	
3	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.63%	0.64%	0.63%	
4	0.69%	0.69%	0.67%	0.66%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.62%	0.61%	
5	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.65%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	
7	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.65%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%	
10	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.58%	0.57%	0.56%	0.56%	
15	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%	0.58%	0.58%	0.57%	0.55%	0.52%	0.51%	0.50%	
20	0.58%	0.58%	0.57%	0.56%	0.56%	0.55%	0.55%	0.55%	0.54%	0.54%	0.51%	0.48%	0.47%	0.46%	
25	0.56%	0.55%	0.55%	0.54%	0.54%	0.53%	0.53%	0.52%	0.52%	0.51%	0.48%	0.45%	0.43%	0.41%	
30	0.54%	0.53%	0.53%	0.53%	0.52%	0.52%	0.51%	0.50%	0.50%	0.48%	0.45%	0.42%	0.40%	0.39%	

Figure 3.19 Matrice volatilité à la monnaie (ATM)

SWAPTION DATA - Away from the money

Strike >		Market Swaption Data									
Maturity	-0.025	-0.02	-0.015	-0.01	-0.005	0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025
1		0.76%		0.64%	0.61%	0.64%	0.72%	0.84%		1.08%	
2		0.69%		0.62%	0.61%	0.64%	0.69%	0.77%		0.95%	
3						0.63%					
4						0.63%					
5		0.62%		0.60%	0.61%	0.62%	0.65%	0.68%		0.77%	
7						0.61%					
10		0.59%		0.59%	0.59%	0.60%	0.62%	0.63%		0.69%	
15						0.57%					
20						0.54%					
25						0.51%					
30						0.48%					

Figure 3.20 Matrice volatilité en dehors de la monnaie (AFTM)

Le modèle peut ainsi répliquer les volatilités sur la matrice en dehors de la monnaie, ce qui n'était pas possible avec le modèle LMM.

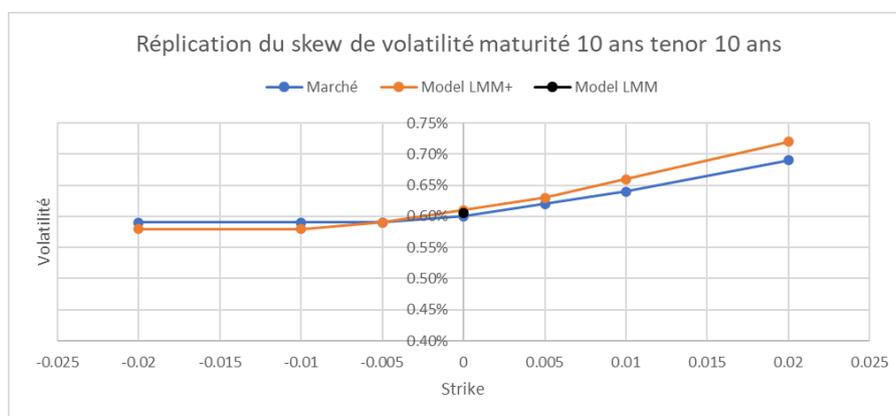


Figure 3.21 Réplication du skew de volatilité

Nous pouvons voir sur le graphique ci-dessus la perte d'information pour le modèle LMM sur les données de marché des volatilités implicites des swaptions en dehors de la monnaie. Le modèle aura une moins bonne répliation des données marchés.

Rappel :

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t)+DP} = \text{drift} + \sigma_k(t)\sqrt{V(t)}dW_k(t)$$

Volatilité stochastique : gère la volatilité au niveau des queues de distribution (hors de la monnaie) (et donc la taille des queues de distribution).
Modélisé par un processus CIR

$$dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V_t}dB_t$$

La partie stochastique du modèle LMM+ est modélisée par un modèle CIR où $V(t)$ est positif, et B_t est un mouvement brownien. Le paramètre θ donne la moyenne à long terme, k donne la vitesse à laquelle le processus va converger vers cet équilibre. Cependant, la partie brownienne vient constamment perturber cette convergence à l'équilibre, mais ce processus va essentiellement se concentrer autour de la valeur de θ au bout d'un certain temps. De ce fait, les périodes où les taux sont élevés seront forcément suivi par des périodes de taux bas.

La vitesse de convergence k peut s'expliquer avec la notion de demi-vie, qui peut être calculée à partir de $\ln(2)/k$. Par exemple, si le coefficient de réversion moyen est $k = 1.4$, alors la demi-vie du procédé est $\ln(2)/1.4 = 0,5$ ans, soit environ 6 mois. Supposons que le taux d'intérêt actuel est de 1 % et que le niveau d'équilibre est de 5 % alors le taux d'intérêt aura parcouru la moitié de la distance vers le niveau d'équilibre (environ 2%) en à peu près 6 mois.

Nous allons nous intéresser à l'impact réel de ces paramètres sur la distribution des scénarios.

Lors du calibrage trois paramètres jouent sur la volatilité stochastique :

- Mean Rev. Speed of Variance (k) correspondant à la vitesse à laquelle le processus stochastique converge vers son point d'équilibre ;
- Mean Rev. Level of Variance (θ) correspondant à la valeur de convergence du processus stochastique ;
- Volatility of Variance (σ) correspondant à la volatilité du processus de variance stochastique sous-jacent. Ce paramètre permet de capturer le smile de volatilité.

Afin d'étudier l'impact de chacun de ces paramètres sur la projection des taux 10 ans, nous reprenons la même méthode que pour la volatilité déterministe. Un calibrage est réalisé en amont de la génération des tables qui détermine les 8 paramètres du modèle LMM+ qui répliquent le mieux les données de marché. Ensuite, nous isolons un à un chaque paramètre de la volatilité stochastique afin d'observer leurs impacts. Pour ce faire, deux jeux de scénarios sont générés : un en fixant à sa valeur maximale le paramètre que nous souhaitons étudier et l'autre en le fixant à sa valeur minimale. Les autres paramètres sont fixés à leur valeur de sortie de la table initiale.

Pour la table initiale DP10, les paramètres en sortie de calibrage étaient les suivants :

Initial Variance	1.0000
Mean Rev. Speed of Variance	0.1225
Mean Rev. Level of Variance	0.1892
Volatility of Variance	0.4305
Correlation	0.1982

Figure 3.22 Paramètres volatilité stochastique en sortie de calibrage

Sensibilité des taux à la Mean Rev. Speed of Variance:

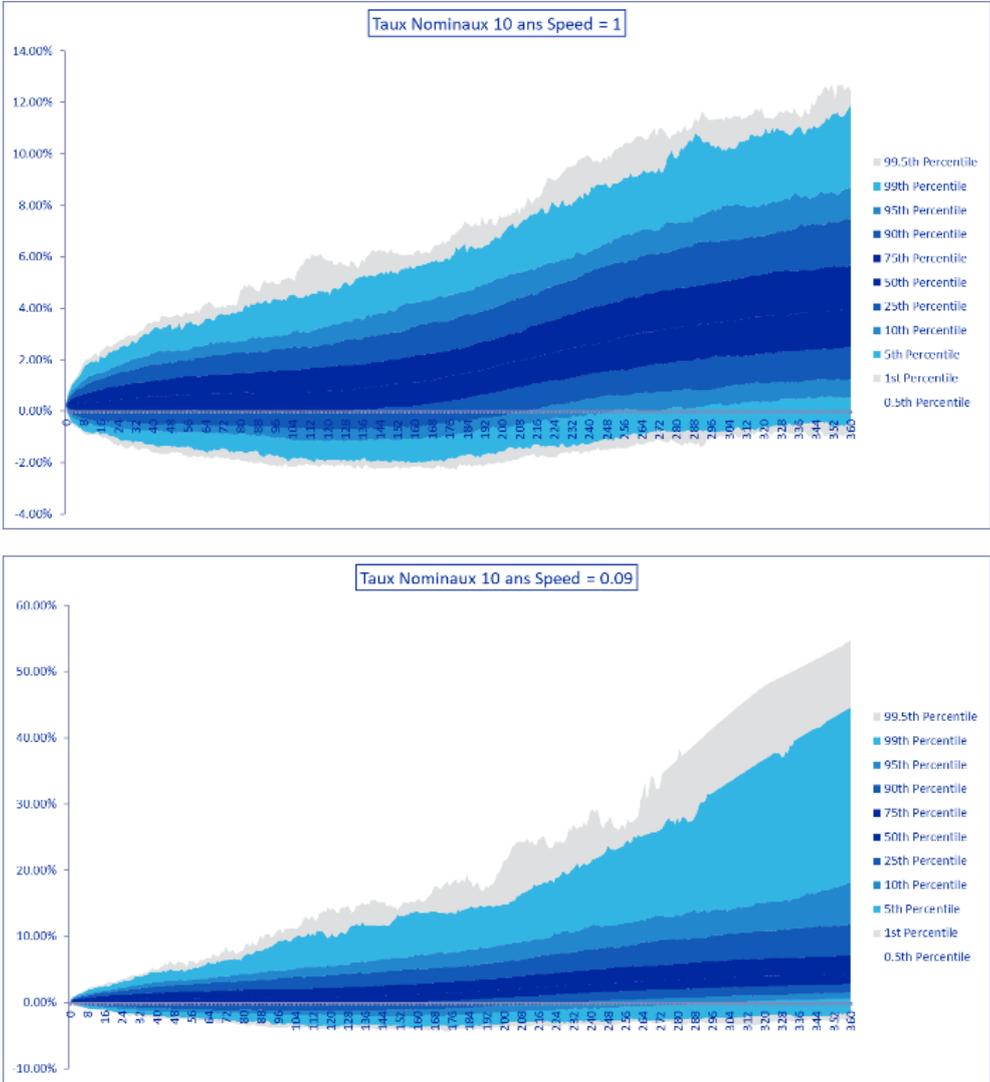


Figure 3.23 Nappe de distribution du taux 10 ans en fonction de la « speed of variance »

Lorsque la variable *Mean Rev. Speed of Variance* est à sa valeur maximale, la nappe de distribution des taux nominaux 10 ans est bien moins volatile que la nappe de distribution des taux nominaux 10 ans lorsque cette variable est à son niveau minimum. Cela s'explique par le fait que cette variable correspond à la vitesse à laquelle le processus va converger vers son niveau d'équilibre, qui est la valeur de la variable *Mean Rev. Level of Variance*. Or, la valeur de cette variable est plus faible que la valeur de la variance initiale ($0.1892 < 1$), plus la convergence est rapide, plus la volatilité baissera rapidement, et la distribution de nos taux sera plus centrée.

Sensibilité des taux à la Mean Rev. Level of Variance:

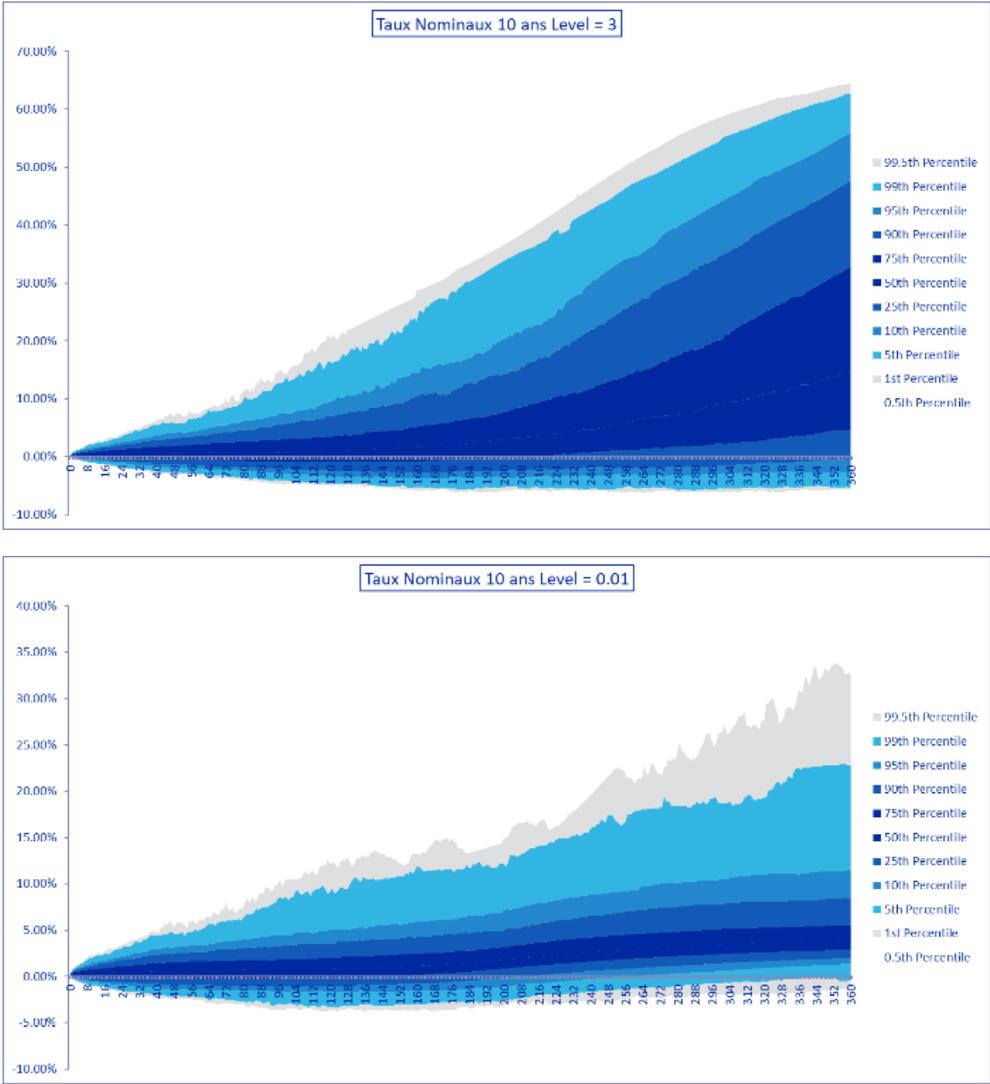


Figure 3.24 Nappe de distribution du taux 10 ans en fonction du « level of variance »

Sur les graphiques ci-dessus sont présentées les nappes de distribution des taux nominaux 10 ans pour les scénarios avec la variable *Mean Rev. Level of Variance* à sa valeur maximale et sa valeur minimale. Ainsi, plus cette variable est élevée plus la volatilité sera importante. Cela s'explique par le fait qu'elle corresponde à la moyenne long terme vers laquelle le processus va converger, ainsi plus elle est élevée moins la volatilité redescendra.

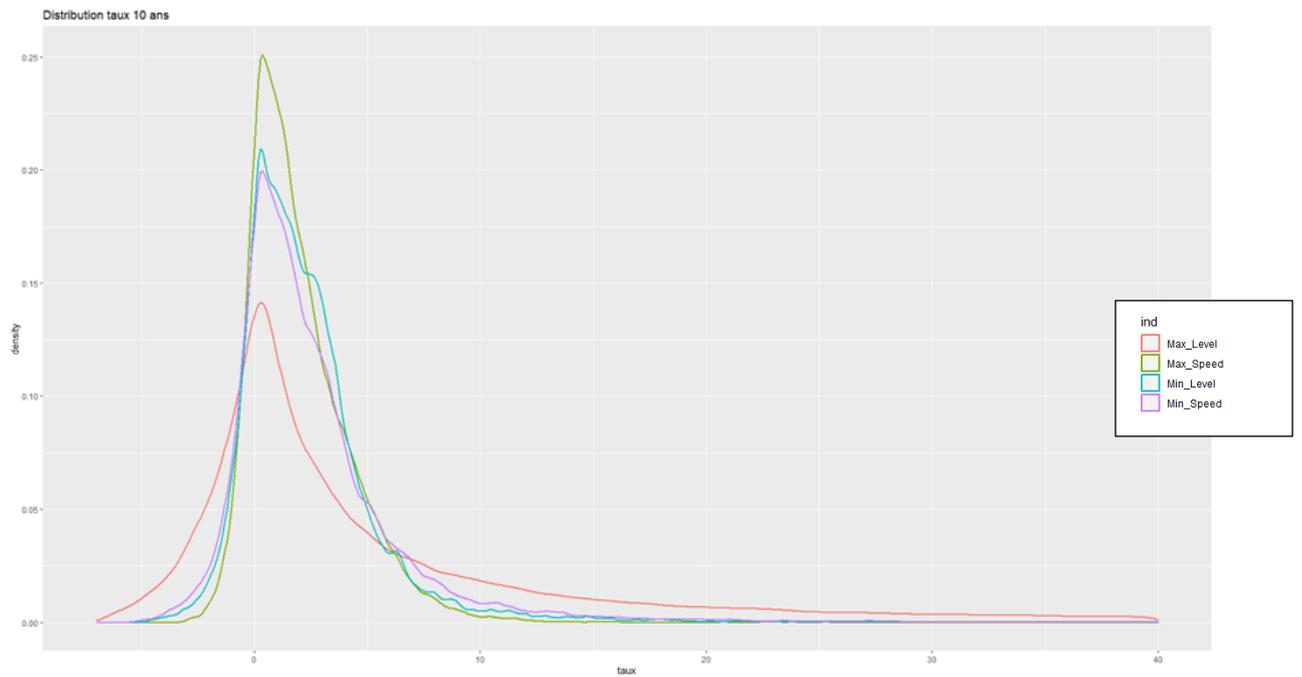


Figure 3.25 Courbe de distribution pour les sensibilités des paramètres de la volatilité stochastique

En affichant les courbes de distribution des taux 10 ans en fonction des différents paramètres, nous pouvons voir que plus le niveau de volatilité stochastique est élevé plus les queues de distribution sont importantes. La volatilité stochastique influe surtout sur la taille des queues de distribution, c'est-à-dire sur les scénarios extrêmes.

3.5. Impact du DP sur la distribution des tables

Comme vu dans les parties précédentes, ce modèle introduit un déplacement parameter (DP) qui a une importance capitale dans la génération des taux négatifs. Il peut être considéré comme un « taux plancher » pour la génération des scénarios, c'est-à-dire que si le DP vaut 5%, il n'y aura pas de taux en dessous -5%. Le déplacement parameter est fixé par défaut par Moody's à la valeur de 45% et permet à la distribution des taux forward 1 an d'avoir des valeurs négatives comprise entre 0% et -45%. En pratique, la distribution des taux nominaux 10 ans des tables initiales a montré que certains scénarios extrêmes atteignent une valeur de taux de -9%. De ce fait, toutes simulations avec un déplacement parameter plus bas que 9% remonteront artificiellement les taux les plus faible.

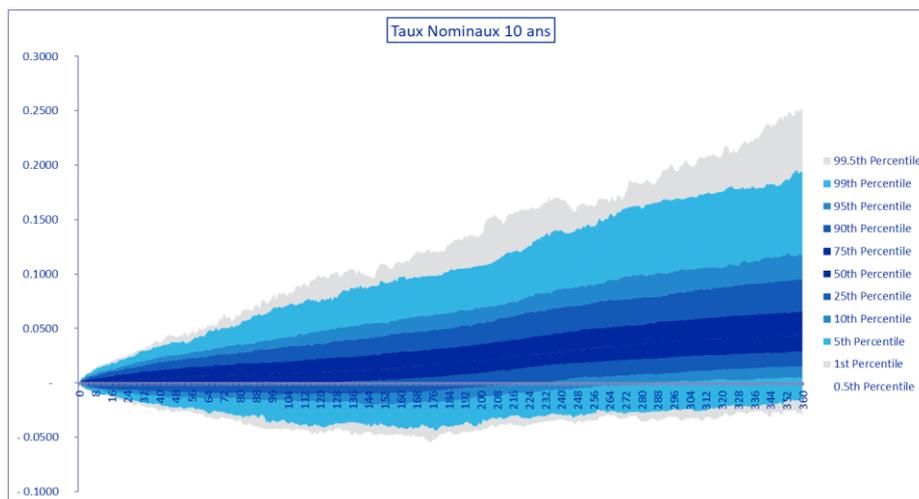


Figure 3.27 Nappe de distribution taux nominaux 10 ans au 31/12/21

Sur ce graphique est affichée la nappe de distribution des taux nominaux 10 ans au 31/12/2021. Le 0.5th percentile atteint son niveau le plus bas à environ -5%. C'est-à-dire que dans cette table de scénarios, il y a 5 scénarios qui descendent sous les -5% (car nous avons 1000 scénarios).

Le choix du bon paramètre de déplacement est important dans le LMM+ car il affectera la distribution des taux à terme. Un paramètre de déplacement trop petit conduira à des taux explosifs comme le LMM, et un paramètre de déplacement trop élevé conduira à une grande proportion de taux négatifs dont certains seront aberrants.

Afin d'observer l'impact du déplacement parameter, il est nécessaire d'étudier au préalable l'impact d'un changement de ce dernier sur la distribution des taux générés. A cette fin, plusieurs calibrages sont réalisés avec différentes valeurs de DP, qui sont ensuite rattachés à la configuration qui va générer les tables de scénarios. Dans un premier temps, les autres paramètres du modèle LMM+ sont laissés libres.

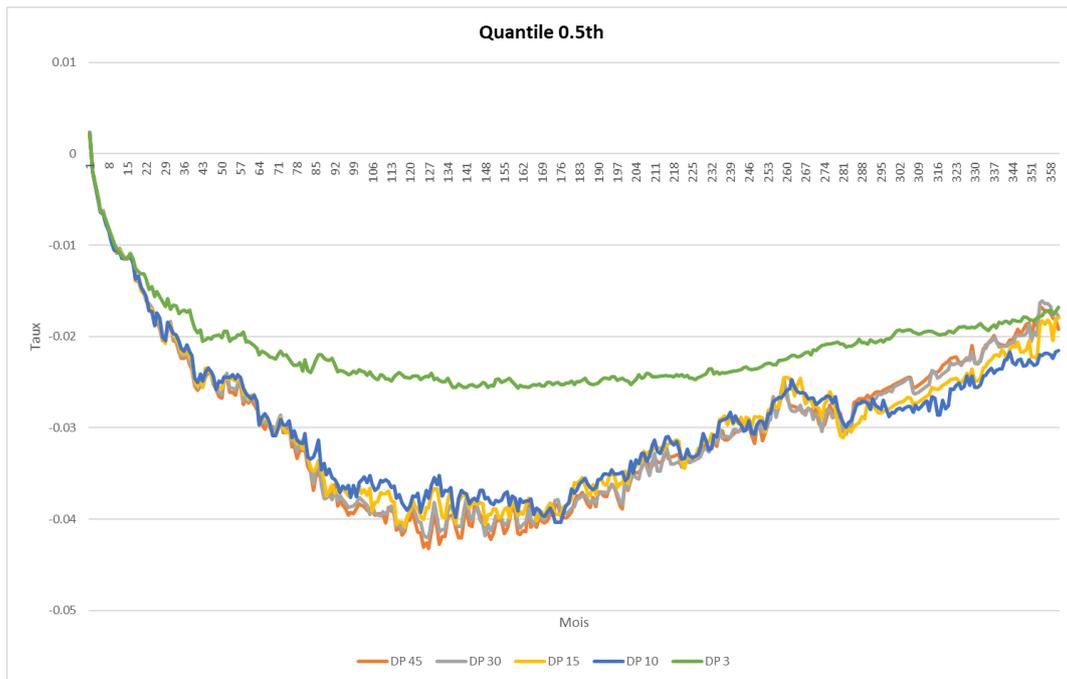


Figure 3.28 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres libres

Ce graphique représente les distributions du 0.5th percentile du taux nominal 10 ans pour tous les mois de projections. On constate qu'une augmentation de la valeur du DP modifie très légèrement la courbe des taux. Ce faible impact résulte du fait que le modèle compense ce changement de DP avec les autres paramètres à sa disposition, par exemple en augmentant le niveau de volatilités déterministes mais surtout en baissant la corrélation. Cependant, lorsque le DP devient trop petit, la courbe remonte très fortement. Le DP agit comme un « taux plancher », c'est-à-dire qu'il n'y aura pas de taux inférieur au DP. On peut le voir avec la courbe verte qui ne descend pas sous les -3%. Ainsi, une table générée avec un DP inférieur au taux le plus faible sur la table initiale fera nécessairement remonter la courbe des taux.

Une analyse de l'impact du changement de DP sur les paramètres du modèle de Rebonato a été réalisée.

Tableau 3.1 Impact d'un changement de DP sur les paramètres de la volatilité déterministe

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Calibrage	RMSE swaptions	7.58	7.57	7.54	7.51	8.06	9.53
	a	0.009	0.012	0.019	0.037	0.055	0.170
	b	0.001	0.002	0.002	0.005	0.008	0.033
	c	0.047	0.048	0.049	0.053	0.057	0.078
	d	0	0	0	0	0	0

En effet, en affichant les paramètres de la volatilité déterministe du modèle, nous voyons que le modèle compense la baisse du DP, en augmentant les paramètres a et b qui jouent sur le niveau de vol initial et sur sa valeur maximale. Ainsi, en augmentant sa volatilité déterministe, le modèle peut capter des taux plus bas qu'il ne pouvait plus capter à cause de la baisse du DP.

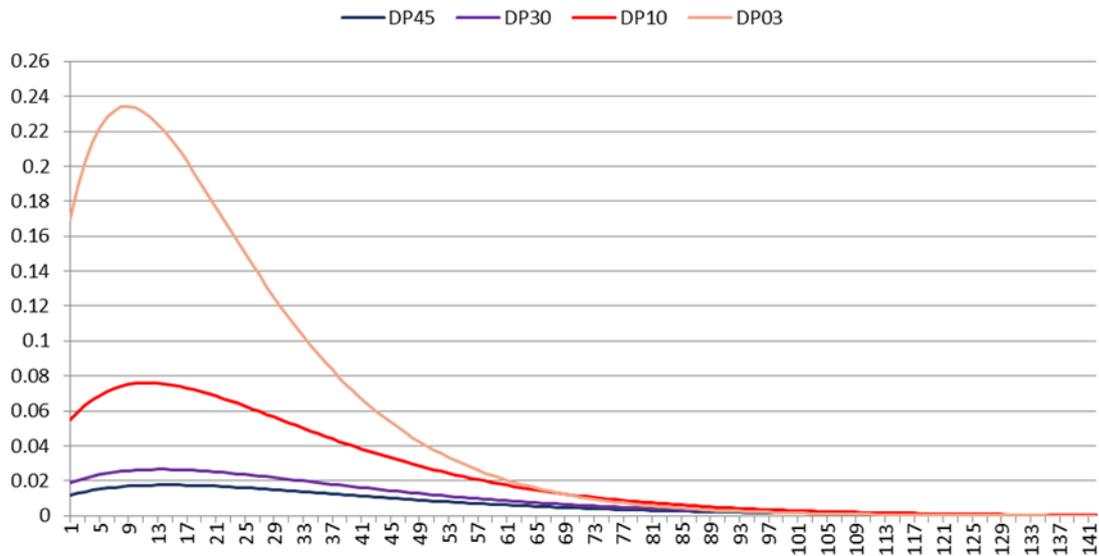


Figure 3.29 Volatilité déterministe pour chaque DP

L'abaissement du DP induit la remontée de la volatilité déterministe (Figure 3.29) et permet au modèle de venir récupérer un bon calibrage sur la matrice à la monnaie.

Tableau 3.2 Impact d'un changement de DP sur les paramètres de la volatilité stochastique

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Calibrage	Initial variance	1	1	1	1	1	1
	Mean Rev. Speed of Variance	0.099	0.100	0.103	0.113	0.122	0.157
	Mean Rev. Level of Variance	0.325	0.314	0.288	0.229	0.189	0.091
	Volatility of Variance	0.507	0.502	0.487	0.455	0.431	0.339
	Correlation	0.45	0.43	0.41	0.31	0.20	-0.44

La réelle compensation se fait sur la corrélation. Pour rappel la corrélation est le lien entre les taux et la volatilité des taux. Si cette corrélation est élevée, alors à taux bas la volatilité sera basse, mais si cette dernière est faible alors la volatilité sera élevée. Ainsi baisser la corrélation permet au modèle de capter un éventail de taux plus large. C'est pour cette raison que plus le DP devient faible plus la corrélation baisse.

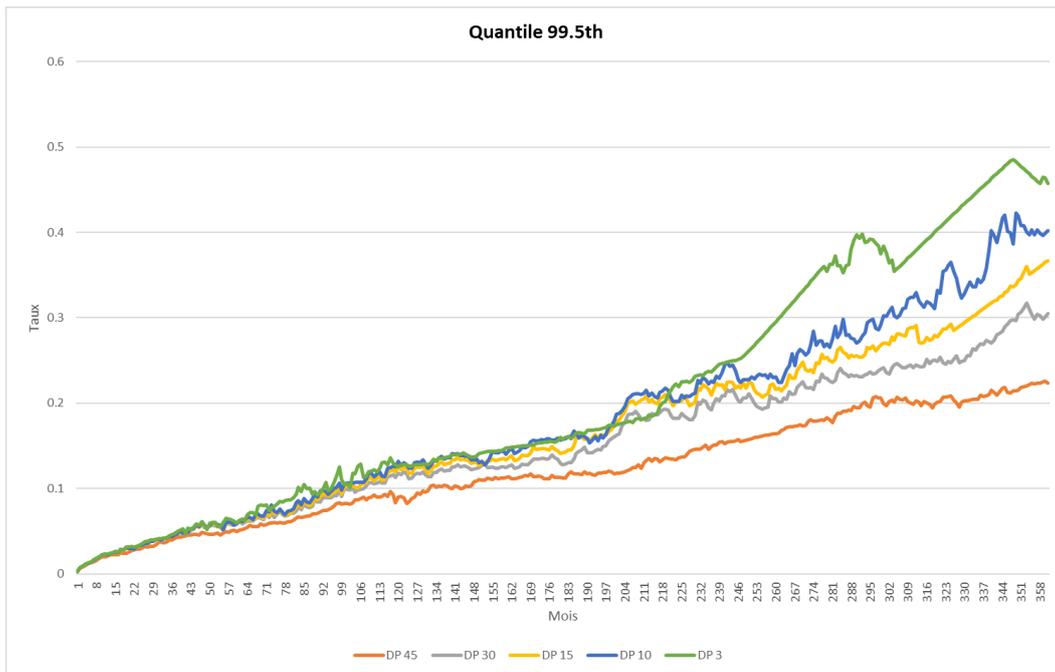


Figure 3.30 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres libres

Ce graphique représente les distributions du 99.5th percentile du taux nominal 10 ans pour tous les mois de projections. On remarque qu'en remontant le DP les taux les plus explosifs remontent légèrement. On se rapproche alors plus d'un modèle log-normal qui génère un peu plus de scénarios extrêmes avec des taux explosifs. De cette manière, le LMM+ compense l'un des problèmes du LMM qui était la génération de taux extrêmes.

A noter qu'un freeze à 50% est appliqué aux tables. Cela signifie que lorsque le taux forward 1 an dépasse 50% alors la partie stochastique est coupée pour tout le scénario et la projection des taux pour le reste de la durée de simulation se fait de manière déterministe. Sans freeze, les scénarios du DP03 seraient encore plus explosifs.

Illustration :

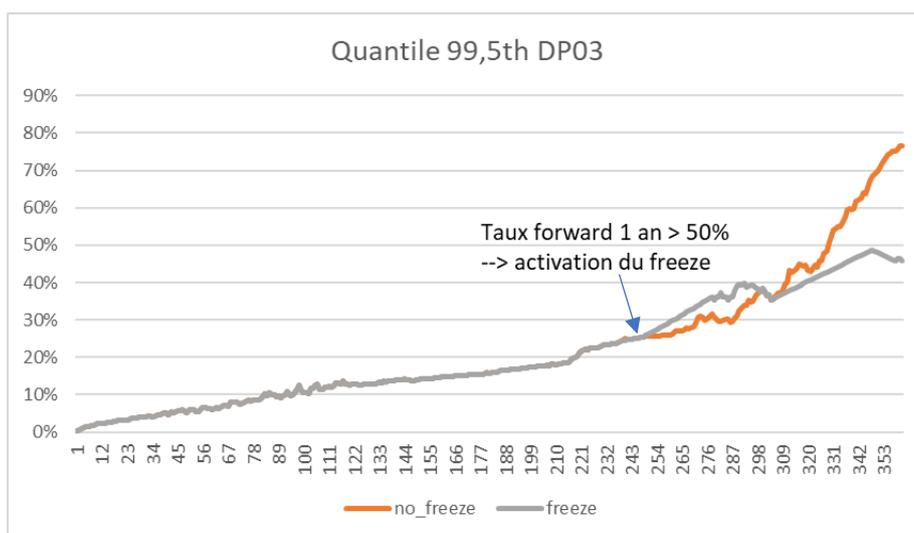


Figure 3.31 Quantile 99.5th DP03 avec freeze

Sans freeze, il y aurait 5 scénarios dont le taux 10 ans dépasserait les 80% (un scénario atteint même 1400%). Le freeze permet de contrôler ces explosions qui sont de plus en présentes lorsque le DP est

bas. Comme, nous l'avons vu précédemment, plus le DP est bas plus nous nous rapprochons d'une loi log-normale (c'est à dire d'un modèle LMM) qui a une queue de distribution plus épaisse à droite.

En modifiant le DP et en laissant les paramètres du modèle libres, nous ne pouvons pas voir réellement l'impact de celui-ci sur les taux. En effet, le modèle compense la baisse du DP en calibrant différemment les autres paramètres. Afin de voir réellement l'impact d'une baisse du DP sur les taux, nous allons calibrer le modèle en bloquant tous les autres paramètres à la valeur qu'ils ont en sortie du calibrage avec le DP actuel. Pour cela, la Seed Values qui est la valeur initiale de l'algorithme, la Lower Bound qui est la valeur minimale du paramètre et la Upper Bound qui correspond à la valeur maximale sont mises à la même valeur. Cela reprend le même principe que pour l'analyse de la volatilité déterministe et stochastique.

	Seed Values	Lower Bound	Upper Bound
a	0.0124	0.0124	0.0124
b	0.0016	0.0016	0.0016
c	0.0478	0.0478	0.0478
d	0.0000	NA	NA

Stochastic Volatility Component:

Initial Variance	1.0000	NA	NA
Mean Rev. Speed of Variance	0.1004	0.1004	0.1004
Mean Rev. Level of Variance	0.3140	0.3140	0.3140
Volatility of Variance	0.5021	0.5021	0.5021
Correlation	0.4302	0.4302	0.4302

Figure 3.33 Paramètre modèle

Une fois les paramètres bloqués, nous réalisons un calibrage en changeant uniquement le DP, ce sera le seul impact présent sur les scénarios.

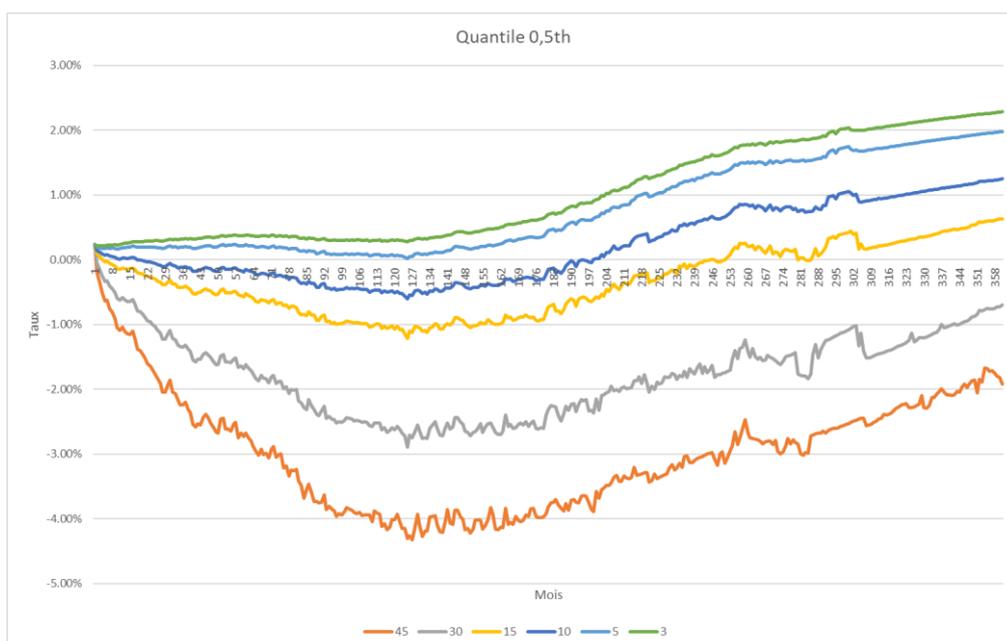


Figure 3.34 Quantile 0,5th taux 10 ans changement DP paramètres DP45

En affichant les quantiles 0.5th pour les différents DP et en ayant bloqué les autres paramètres, nous observons que les taux les plus bas sont réhaussés. Le modèle ne peut plus compenser la baisse du DP en modifiant les autres paramètres.

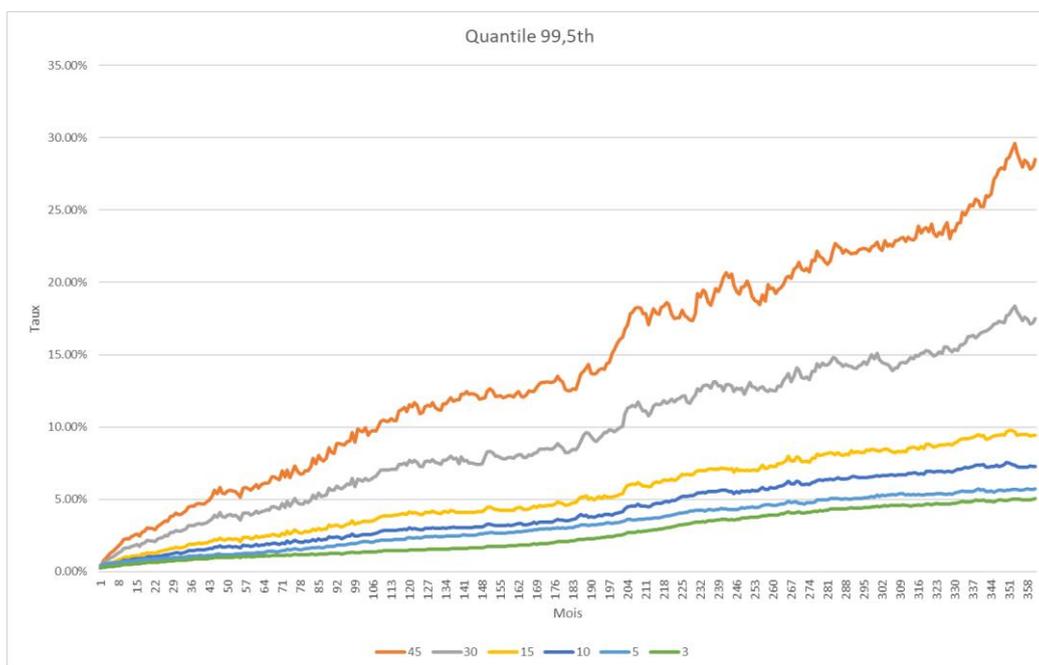


Figure 3.35 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres DP45

En regardant le 99.5th, nous voyons que le modèle ne compense plus en augmentant la volatilité. Plus on baisse le DP plus la distribution est centrée autour du taux sans risque. Le modèle n'ayant plus besoin de compenser des scénarios avec des taux très négatifs génère ainsi que très peu de taux très positifs.

4. Etude pour le choix du displacement parameter

4.1. Méthode

Pour trouver la valeur adéquate du displacement parameter, 1000 calibrages ont été lancés à la même date et avec les mêmes conditions économiques en définissant les valeurs initiales de tous les paramètres du modèle de manière aléatoire. La valeur du DP est également choisie de manière aléatoire. Cela nous permet de voir, en moyenne, quel DP vient minimiser la RMSE sans que le choix des valeurs initiales ait un impact sur l'interprétation des résultats. La RMSE est l'écart entre les matrices de volatilité de marché des swaptions (matrice à la monnaie et en dehors de la monnaie) et celles en sorties du modèle.

$$RMSE = \sqrt{RMSE_{ATM} + RMSE_{AFTM}}$$

Où

$$RMSE_{ATM} = \frac{\sum_i^{11} \sum_j^{14} (\sigma_{i,j}^{marché ATM} - \sigma_{i,j}^{modèle ATM})^2}{11 * 14}$$

$$RMSE_{AFTM} = \frac{\sum_i^{11} \sum_j^{11} (\sigma_{i,j}^{marché AFTM} - \sigma_{i,j}^{modèle AFTM})^2}{11 * 11}$$

		Volatilité swaption marché ATM													
		Tenor													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Maturité	1	0.48%	0.55%	0.58%	0.60%	0.62%	0.62%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.67%	0.69%	0.70%	0.72%
	2	0.62%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.66%	0.67%	0.67%
	3	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.63%	0.64%	0.63%
	4	0.69%	0.69%	0.67%	0.66%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.62%	0.62%	0.61%
	5	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.65%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%
	7	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.65%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%
	10	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.58%	0.57%	0.56%	0.56%
	15	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%	0.58%	0.58%	0.57%	0.55%	0.52%	0.51%	0.50%
	20	0.58%	0.58%	0.57%	0.56%	0.56%	0.55%	0.55%	0.54%	0.54%	0.54%	0.51%	0.48%	0.47%	0.46%
	25	0.56%	0.55%	0.55%	0.54%	0.54%	0.53%	0.53%	0.52%	0.52%	0.51%	0.48%	0.45%	0.43%	0.41%
30	0.54%	0.53%	0.53%	0.53%	0.52%	0.52%	0.51%	0.50%	0.50%	0.48%	0.45%	0.42%	0.40%	0.39%	

Figure 4.1 Matrice volatilité swaption marché ATM au 31/12/2022

		Volatilité swaption modèle ATM													
		Tenor													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Maturité	1	0.57%	0.59%	0.61%	0.62%	0.62%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.65%	0.67%	0.67%	0.66%	0.64%
	2	0.58%	0.60%	0.61%	0.62%	0.62%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.65%	0.66%	0.66%	0.65%	0.63%
	3	0.59%	0.60%	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.65%	0.65%	0.66%	0.66%	0.64%	0.62%
	4	0.59%	0.60%	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.63%	0.61%
	5	0.59%	0.61%	0.62%	0.62%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.65%	0.65%	0.64%	0.62%	0.60%
	7	0.60%	0.61%	0.62%	0.62%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.60%	0.57%
	10	0.60%	0.60%	0.61%	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.60%	0.60%	0.60%	0.59%	0.58%	0.56%	0.54%
	15	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.55%	0.55%	0.55%	0.55%	0.54%	0.53%	0.51%	0.48%
	20	0.53%	0.53%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.52%	0.50%	0.48%	0.46%
	25	0.53%	0.53%	0.53%	0.53%	0.52%	0.52%	0.52%	0.51%	0.51%	0.51%	0.49%	0.47%	0.44%	0.43%
30	0.49%	0.49%	0.49%	0.49%	0.48%	0.48%	0.48%	0.47%	0.47%	0.46%	0.44%	0.42%	0.40%	0.39%	

Figure 4.2 Matrice volatilité swaption marché ATM en sortie de calibrage au 31/12/2022

		Tenor													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Maturité	1	-0.09%	-0.04%	-0.03%	-0.02%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.02%	0.04%	0.08%
	2	0.04%	0.04%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%	0.00%	0.02%	0.04%
	3	0.09%	0.08%	0.06%	0.04%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	0.00%	0.01%
	4	0.10%	0.09%	0.06%	0.04%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	-0.01%	0.00%
	5	0.09%	0.07%	0.05%	0.04%	0.02%	0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.01%	0.00%
	7	0.08%	0.07%	0.05%	0.04%	0.02%	0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	-0.01%	0.01%
	10	0.05%	0.05%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.02%
	15	0.07%	0.07%	0.06%	0.06%	0.05%	0.05%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%	-0.01%	0.00%	0.02%
	20	0.05%	0.05%	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	0.00%
	25	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.02%
30	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	

Figure 4.3 Matrice d'écart matrice marché / matrice en sortie de calibrage pour les volatilités des swaptions ATM.

		Volatilité swaption marché AFTM											
		Strike											
		-0.025	-0.02	-0.015	-0.01	-0.005	0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025	
Maturité	1		0.76%		0.64%	0.61%	0.64%	0.72%	0.84%		1.08%		
	2		0.69%		0.62%	0.61%	0.64%	0.69%	0.77%		0.95%		
	3						0.63%						
	4						0.63%						
	5			0.62%		0.60%	0.61%	0.62%	0.65%	0.68%		0.77%	
	7						0.61%						
	10			0.59%		0.59%	0.59%	0.60%	0.62%	0.63%		0.69%	
	15							0.57%					
	20							0.54%					
	25							0.51%					
30							0.48%						

Figure 4.4 Matrice volatilité swaption marché AFTM au 31/12/2022

		Volatilité swaption modèle AFTM										
		Strike										
		-0.025	-0.02	-0.015	-0.01	-0.005	0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025
Maturité	1	0.0059	0.59%	0.60%	0.61%	0.63%	0.65%	0.68%	0.71%	0.74%	0.78%	0.81%
	2	0.0059	0.59%	0.60%	0.61%	0.63%	0.65%	0.68%	0.71%	0.74%	0.78%	0.81%
	3	0.0059	0.60%	0.60%	0.61%	0.63%	0.65%	0.68%	0.71%	0.74%	0.77%	0.81%
	4	0.0059	0.60%	0.60%	0.61%	0.63%	0.65%	0.68%	0.71%	0.74%	0.77%	0.81%
	5	0.0059	0.59%	0.60%	0.61%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.73%	0.77%	0.80%
	7	0.0058	0.58%	0.59%	0.60%	0.61%	0.63%	0.66%	0.68%	0.72%	0.75%	0.78%
	10	0.0055	0.55%	0.56%	0.57%	0.58%	0.60%	0.62%	0.65%	0.68%	0.71%	0.74%
	15	0.0051	0.51%	0.52%	0.52%	0.53%	0.55%	0.57%	0.59%	0.62%	0.65%	0.68%
	20	0.0051	0.51%	0.51%	0.51%	0.52%	0.54%	0.56%	0.58%	0.60%	0.63%	0.65%
	25	0.0048	0.48%	0.48%	0.49%	0.49%	0.51%	0.52%	0.54%	0.56%	0.59%	0.61%
	30	0.0044	0.44%	0.44%	0.44%	0.45%	0.46%	0.48%	0.49%	0.51%	0.53%	0.56%

Figure 4.5 Matrice volatilité swaption marché AFTM en sortie de calibrage au 31/12/2022

A noter qu'en sortie de modèle, une volatilité est calculée pour toutes les maturités et tous les strikes. Cependant, la matrice de marché étant incomplète, la RMSE ne peut être calculée que sur les données disponibles.

		Strike										
		-0.025	-0.02	-0.015	-0.01	-0.005	0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025
Maturité	1		0.17%		0.03%	-0.02%	-0.01%	0.04%	0.13%		0.30%	
	2		0.10%		0.01%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.06%		0.17%	
	3						-0.02%					
	4						-0.02%					
	5		0.03%		-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.02%	-0.02%		0.00%	
	7						-0.02%					
	10		0.04%		0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.02%		-0.02%	
	15						0.02%					
	20						0.00%					
	25						0.00%					
	30						0.02%					

Figure 4.6 Matrice d'écart matrice marché / matrice en sortie de calibrage pour les volatilités des swaptions ATM

Une RMSE est alors calculée pour la matrice à la monnaie (ATM) et en dehors de la monnaie (AFTM) qui est l'écart au carré de chaque cellule entre la matrice marchée et la matrice modèle. La RMSE totale est la racine carrée de la somme des RMSE. Plus la RMSE est faible plus le modèle est correctement calibré, c'est-à-dire qu'il reproduit plus fidèlement les volatilités de marché.

Sera également pris en compte par la suite pour le choix du DP :

- La qualité des tests de Market-Consistency et Martingale issus de la calibration avec un déplacement parameter fixe ;
- Le comportement et la proportion des taux explosifs, surtout en situation de stress sur le niveau des taux ou leur volatilité;
- L'impact sur les taux les plus bas ;
- L'impact sur les résultats ;
- Le taux de saturation des calibrages.

Pour le dernier point, la sur-paramétrisation de certains modèles peut conduire à des problématiques de saturation lors du processus de calibrage. La fonction d'écart quadratiques entre prix de marché et théoriques fait potentiellement apparaître plusieurs minimum locaux et la convergence du programme d'optimisation dépend de la bonne initialisation des paramètres ainsi que de leurs plages d'admissibilité (celles-ci sont données par Moody's). Cependant, il arrive que certains paramètres tapent dans les bornes lors du calibrage du modèle ce qui engendre des problématiques de market

consistency. Le modèle ne peut pas générer les taux de la manière souhaitée (par exemple vol déterministe initial minimisé par rapport à la valeur qu'elle aurait dû avoir afin d'être market consistency...)

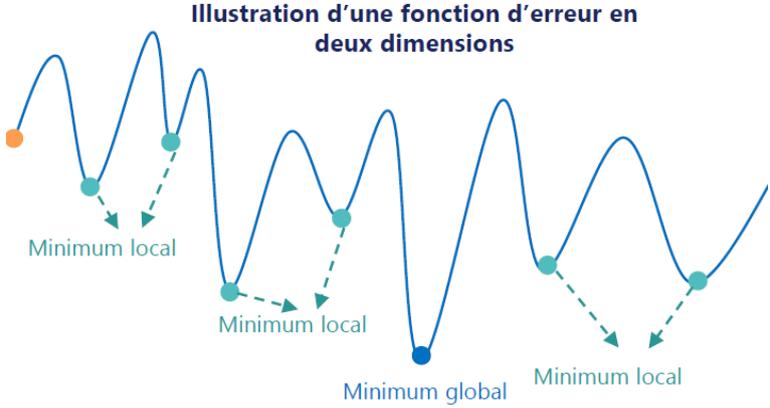


Figure 4.7 Illustration minimum locaux

La méthode mise en place est :

- 1- Lancement de 1000 calibrages à une même date en définissant les valeurs initiales des paramètres de manière aléatoire. Le DP est également choisi de manière aléatoire. Une RMSE est calculée pour chaque calibrage. Réaliser un grand nombre de calibrage et choisir les valeurs initiales de manières aléatoires permet à l'étude d'être objective sans qu'elle soit biaisé par les préréglages du modèle. En effet la valeur initiale des paramètres influe sur le calibrage et donc sur la RMSE.

Tableau 4.1 Génération paramètres des 1000 calibrages

	Seed Values 1	Seed Values 2	Seed Values 3	Seed Values 4	...	Seed Values N
a	0.241	0.295	0.347	0.369		0.140
b	0.135	0.062	0.101	0.100		0.094
c	0.087	0.032	0.085	0.063		0.051
d	0.000	0.000	0.000	0.000		0.000
Mean Rev. Speed of Variance	0.885	0.634	0.753	0.431		0.200
Mean Rev. Level of Variance	1.456	2.582	0.163	0.042		1.538
Volatility of Variance	0.476	0.308	0.413	0.376		0.191
Correlation	0.676	-0.050	0.523	0.244		0.026
Forward Rate Displacement	0.517	0.324	0.042	0.160		0.478

- 2- Observation de la RMSE afin de voir quel DP reproduit le plus fidèlement les données de marché

Pour ce faire, des statistiques ont été réalisées afin de mieux visualiser les résultats. Nous avons regroupé les DP par tranche (par exemple la tranche 0-5 comporte tous les DP allant de 0 à 5), et la moyenne des RMSE de chaque tranche a été calculée.

Nous avons réalisé ces statistiques à plusieurs dates d'arrêtée, c'est-à-dire avec les hypothèses économiques initiales qu'il y avait pour les calculs :

- Annuel 2021 (2021Y)
- Premier trimestre 2022 (2022Q1)
- Deuxième trimestre 2022 (2022Q2)

Des calculs sur les hypothèses annuelles 2021Y choquées ont également été réalisés:

- Choc de 300bps sur la courbe des taux
- Choc de 30% sur les matrices de volatilité des swaptions ATM et AFTM
- Combinaison des deux chocs précédents

Tableau 4.2 Hypothèses économiques

	2021Y	2022Q1	2022Q2	2021Y + 300bps	2021Y + choc vol	2021Y + 300bps + choc vol
CAC 40	7153	6660	5923	7153	7153	7153
EUROSTOXX 50	4298	3903	3455	4298	4298	4298
Taux swap 10 ans	0.30%	1.20%	2.16%	3.30%	0.30%	3.30%
Taux S2 10 ans	0.23%	1.16%	2.31%	3.23%	0.23%	3.23%
Pentes swap 10-2 & 20-10	60bps 24bps	66bps 4bps	79bps 10bps	60bps 24bps	60bps 24bps	60bps 24bps
Volatilité taux	59.42bps	69.61bps	74.84bps	59.42bps	89.42bps	89.42bps
Volatilité action	19.59bps	20.17bps	19.68bps	19.59bps	19.59bps	19.59bps
Dividende CAC	1.90%	2.62%	3.01%	1.90%	1.90%	1.90%
Dividende Eurostoxx	2.30%	2.07%	2.42%	2.30%	2.30%	2.30%
Inflation	2.14%	4.92%	4.50%	2.14%	2.14%	2.14%
Volatility Adjustment	0.03%	0.06%	0.25%	0.03%	0.03%	0.03%
UFR	3.60%	3.43%	3.43%	3.60%	3.60%	3.60%
Dampener	6.88%	1.40%	-5.34%	6.88%	6.88%	6.88%

Les résultats sont présentés dans les deux graphiques suivants.

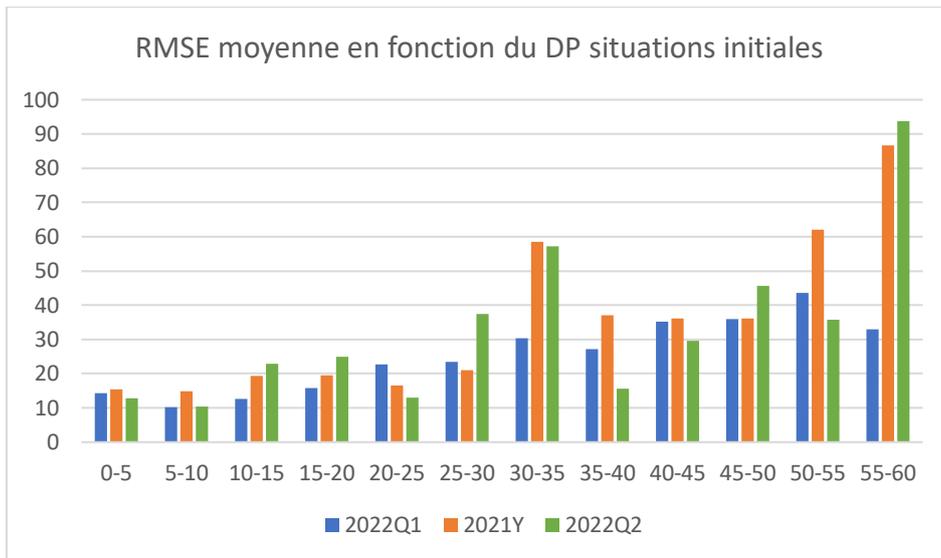


Figure 4.8 RMSE moyenne par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques

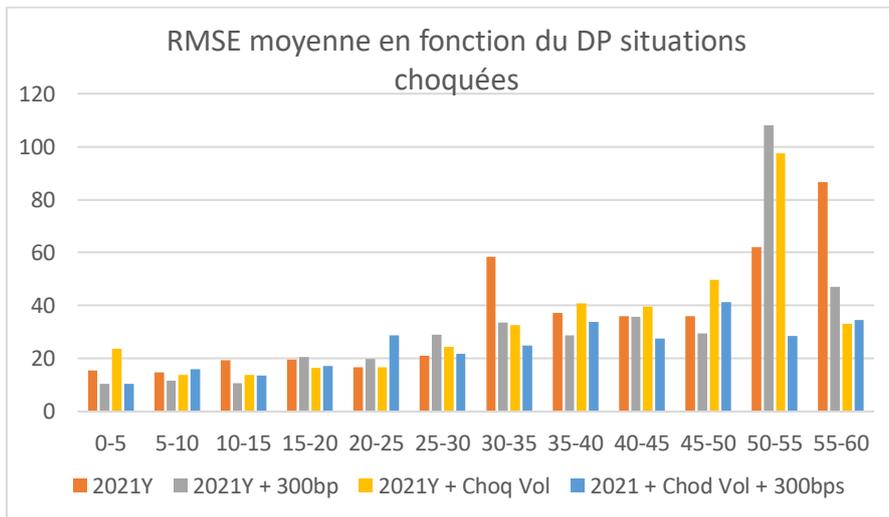


Figure 4.9 RMSE moyenne par tranche de DP pour plusieurs scénarios économiques stressés

A l'aide des graphiques ci-dessus, nous pouvons voir qu'en moyenne, ces calibrages obtiennent une RMSE plus faible pour les DP autour de 10 et ce quel que soit le scénario économique. À l'inverse, nous obtenons des RMSE très élevées pour les DP au-dessus de 50%.

D'autres statistiques ont également été établies afin de mieux analyser les résultats. A cette fin, a été calculé le taux de RMSE dites extrêmes (ie proportion de RMSE > 10). Nous avons également regardé le taux de saturation pour chaque tranche de DP, à savoir qu'un modèle est dit saturé lorsqu'au moins un de ses paramètres prend la valeur d'une de ses bornes. Cela signifie que le modèle sature et qu'il ne sera pas en mesure d'ajuster correctement la surface de volatilités implicites puisqu'un des paramètres aurait dû prendre une valeur plus élevée ou plus faible.

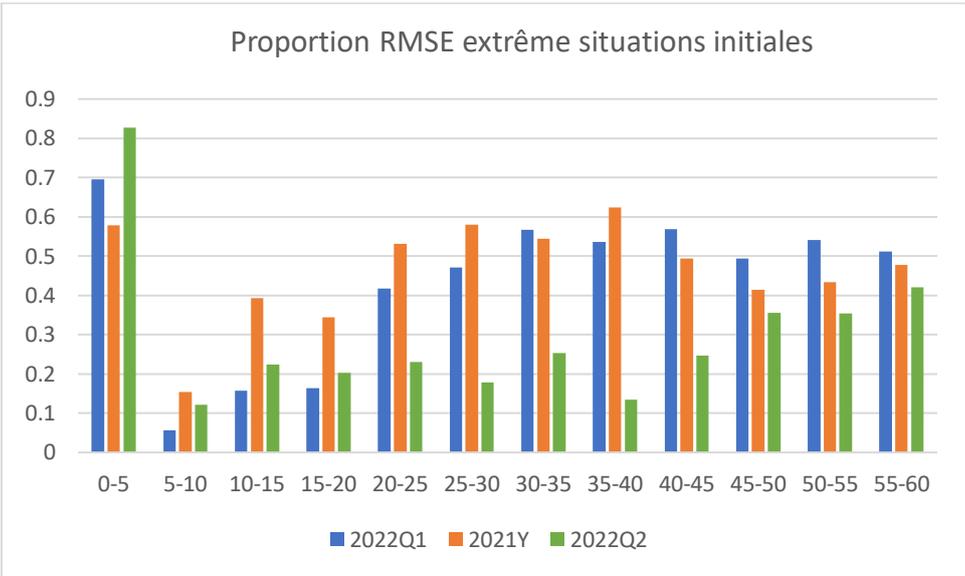


Figure 4.10 Proportion non extrême par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques

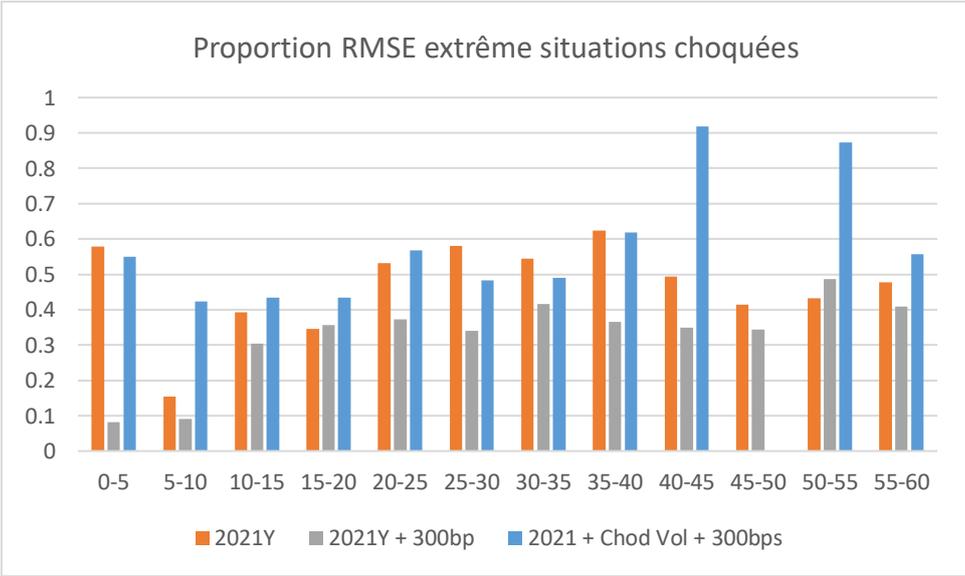


Figure 4.11 Proportion non extrême par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques stressés

Nous constatons également que la proportion de taux extrêmes est la plus faible pour les DP autour de 10% et ce peu importe le scénario économique.

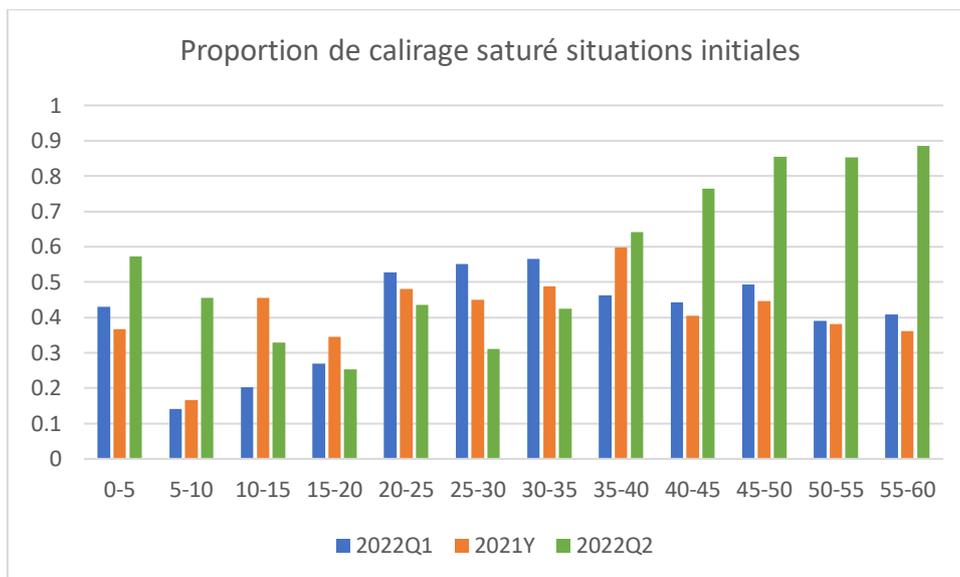


Figure 4.12 Proportion non saturé par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques

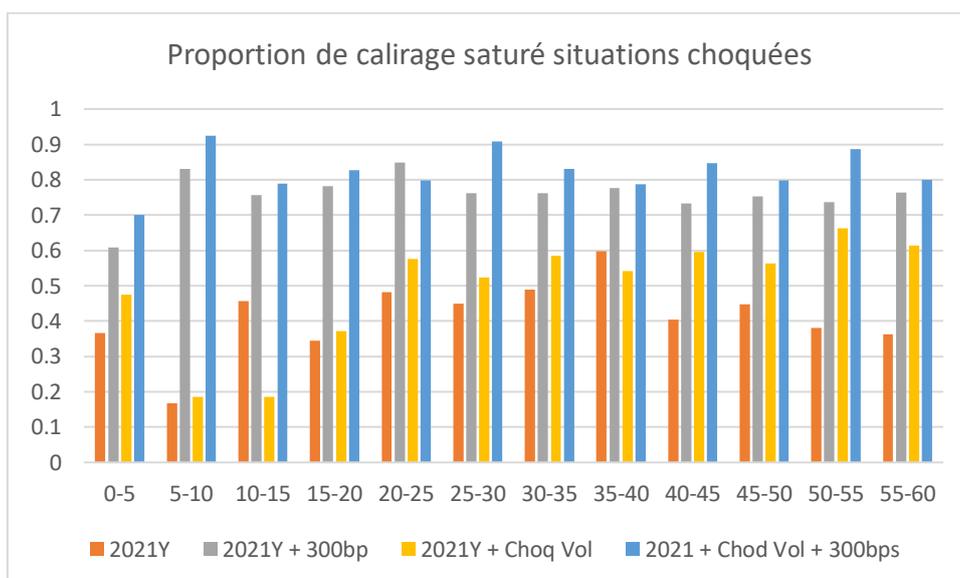


Figure 4.13 Proportion non saturé par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques stressés

De même, la proportion de taux saturé est la plus faible pour les DP autour de 10%.

Nous pouvons alors objectivement dire que le DP10 serait un choix judicieux et permettrait de mieux calibrer le modèle. Cependant, cette étude justifie la valeur du déplacement parameter seulement au niveau du calibrage. Dans la suite sera étudié l'impact d'un changement de déplacement parameter sur les tests et les scénarios générés, ainsi que sur les calculs réglementaires.

4.2. Les tests

Les assureurs doivent contrôler en permanence les erreurs dues à la génération des scénarios économiques. Ces erreurs peuvent venir du modèle qui n'est pas suffisamment précis, d'un mauvais paramétrage lors du calibrage ou encore de l'utilisation de discrétisation trop importante. La gouvernance concernant le GSE doit garantir que les erreurs restent suffisamment faibles et qu'elles ne dépassent pas un certain seuil. Ce seuil doit être défini de telle manière que s'il est dépassé, les erreurs soient considérées comme anormalement élevées et que des mesures de correction soient appliquées aux GSE. Afin d'objectiver les tests, il est préférable d'appliquer ces seuils sur le montant maximale de valorisation du BE ou sur la valeur de marché des actifs.

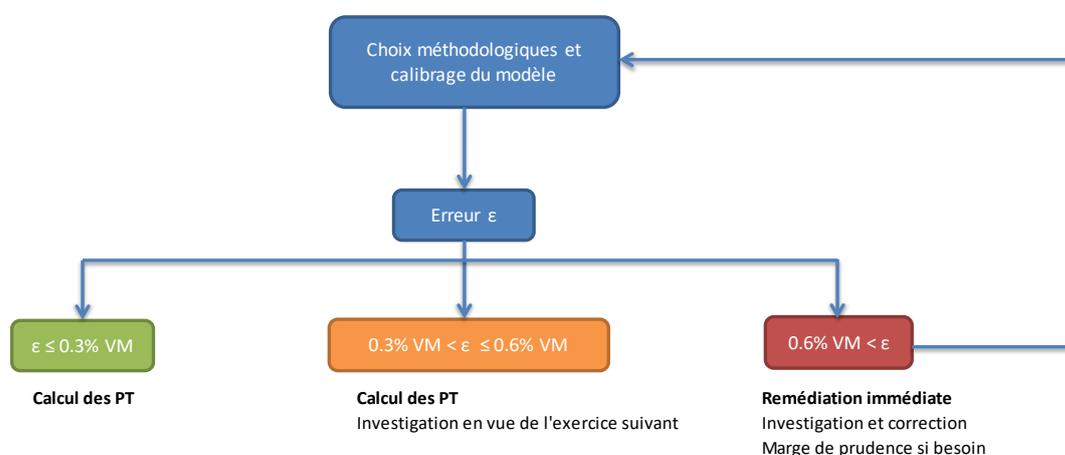


Figure 4.14 Interprétation des erreurs

Par exemple dans le graphique ci-dessus, des erreurs inférieures à 0.3% de la VM sont tolérées et les scénarios sont jugés de bonne qualité. Si l'erreur est entre 0.3% et 0.6% de la VM la source d'erreur doit être investiguée afin de l'identifier et de régler le problème pour le prochain exercice. Enfin si l'erreur dépasse 0.6% de la VM, l'erreur est considérée comme inacceptable, les scénarios ne sont pas utilisables et le problème doit être résolu dès l'exercice en cours. Il est possible cependant, afin que les tests aient plus de sens, de définir des seuils pour chaque classe d'actif et non pas un seuil global. En fonction du poids de chaque actif dans le portefeuille de l'assureur, une erreur très importante sur un actif peu présent dans le portefeuille de l'assureur peut être compensée par une erreur faible sur un actif très présent dans ce portefeuille. Une erreur totale maximale de 0,6 % peut ainsi se décomposer en un seuil de 0,2% sur les taux et de 2,2% sur les actions si le portefeuille de l'assureur est composé de 20 % d'actions et 80% d'obligations.

Pour les calculs du Q2, nous obtenons :

	Erreur moyenne		
CAC	●	0.01%	Ok
EUR	●	0.02%	Ok
HF	●	0.00%	Ok
P	●	0.00%	Ok
PE	●	0.00%	Ok
INFRA	●	0.00%	Ok
Obligations ZC	●	0.26%	Ok
Obligations indexées infla	●	0.00%	Ok
TOTAL	●	0.30%	
Passage global			Ok

Les tests peuvent être acceptés pour toutes les classes d'actif. La définition de ces tests de cohérence a été définie par l'équipe durant ce mémoire mais les résultats ne seront pas présentés.

Nous allons comparer les tests de cohérence avec le marché. Ils peuvent s'opérer de deux façons. Premièrement en comparant les prix (ou volatilités implicites) de marché soit aux prix théoriques des modèles (calculés à partir d'une formule fermée et des paramètres calibrés), soit aux prix évalués dans les simulations par une approche de type « Monte-Carlo ». Ces deux méthodes doivent conduire en théorie à des résultats équivalents.

4.2.1. Les martingales

Un processus stochastique est une martingale par rapport à un ensemble d'informations si son espérance en date t conditionnelle à l'information disponible en date $s < t$ est égale à la valeur du processus en date s , c'est-à-dire qu'un processus est une martingale si l'espérance conditionnelle de $A(t)$ par rapport à la filtration $F(s)$ est $A(s)$. Ce qui donne $\mathbb{E}[A_t | F_s] = A_s$.

4.2.1.1 Caractéristiques de l'univers risque-neutre

L'univers risque-neutre est un univers dans lequel le processus des prix actualisés des actifs ayant une source de risque (des actions, des obligations...) est une martingale sous une probabilité appelée « probabilité risque-neutre » qui est unique. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque). Le caractère martingale des prix actualisés implique que la meilleure information que l'on peut avoir à un temps t de l'évolution future du prix d'un sous-jacent est son prix à ce temps t . Il n'y a donc aucune opportunité d'arbitrage possible. La martingalité des prix actualisés implique également que l'espérance des prix futurs actualisés est égale aux prix observés en 0. L'univers risque-neutre a été introduit dans le but de faciliter la valorisation des produits dérivés. Il n'existe dans cet univers pas de primes de risque et le fait que les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque permet de calculer une valeur des options et garanties futures cohérente avec les prix d'options dérivées cotées sur le marché. L'objectif est une valorisation market-consistent. Notons que les scénarios risque-neutre ne sont interprétables qu'en moyenne pour l'assureur puisqu'ils ne reflètent pas les attentes de ces derniers en termes d'évolution.

Définition

Les tests de martingalité, réalisés au sein du GSE pendant la phase de calibrage du scénario lancé, vérifient la propriété de martingale des prix actualisés générés par le modèle. En d'autres termes, voir

si les prix projetés des indices financiers sont cohérents en espérance avec les prix des dits indices en $t = 0$.

Plus formellement, le test vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \text{Prix attendu} &= \text{Prix estimé} \\ \text{Prix attendu} &= E^Q[\text{Prix projetés}] \end{aligned}$$

Où

- E^Q : l'espérance sous la mesure de probabilité risque-neutre Q

$$\Leftrightarrow \text{Prix en 0 calculé à partir de la courbe initiale} = \frac{\sum_i [\text{Prix projeté du scénario } i \text{ actualisé}]}{\text{nombre scénarios}}$$

Test réalisé par Moody's : test statistique de rejet

Nous testons H_0 :

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Avec :

- $\bar{X}_n = E^Q \left[\frac{\text{Prix projetés}}{\text{Prix attendu}} \right]$;
- $m = 1$, car en moyenne les actifs projetés actualisés sont égaux au prix initial ;
- $n = 1000$ (Nombre de simulations) ;
- σ la volatilité du modèle.

Contre H_1 : le prix estimé ne suit pas la distribution normale ci-dessus.

La région de rejet est la région grisée sur le schéma ci-dessous. Elle correspond à une probabilité de $\alpha/2$ de part et d'autre de la courbe.

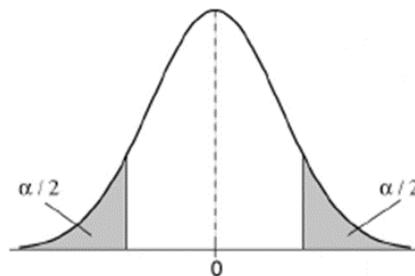


Figure 4.15 Zones de rejet

Pour chaque maturité, nous acceptons H_0 avec probabilité $1-\alpha$, si Y_n se trouve dans la région d'acceptation de niveau α . Dans le cas contraire, nous rejetons H_0 .

Tests martingales sur les obligations zéro-coupons

Pour s'assurer de la martingalité des prix d'obligations que nous projetons avec le modèle LMM+, nous vérifions que le prix d'une obligation ZC obtenu à partir de la courbe de taux initiale de l'ESG correspond à la moyenne des prix d'obligation ZC projetés par l'ESG, soit pour chaque maturité:

$$\text{Prix attendu} = E^Q[\text{Prix projetés}]$$

Soit $P(0, T)$ le prix issu de la courbe des taux initiale et $D_i(0, T)$ le déflateur de maturité T issu de la projection par le générateur pour l'itération i .

On souhaite vérifier l'égalité suivante :

$$P(0, T) = E^Q[1 \times D_i(0, T)] \quad \mathbf{(1)}$$

Qui équivaut à :

$$\frac{1}{(1+r(0,T))^T} = E^Q[1 \times D_i(0, T)] \quad \mathbf{(2)}$$

Avec :

- $r(0, T)$ le taux zero-coupon issu de la courbe des taux initiale

Ceci équivaut à tester si la grandeur $E^Q \left[D_i(0, T) * \frac{1}{P(0,T)} \right]$ est égale 1 et voir si les taux courts nominaux projetés sont cohérents en espérance avec la courbe des taux nominaux à $t = 0$.

D'autre part, pour chaque maturité, le taux zéro-coupons attendu est le taux zéro-coupons de la courbe initiale entrée en input de Moody's ESG.

Nous testons H_0 :

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Avec :

- $\bar{X}_n = E^Q D_i(0, T) * \frac{1}{P(0,T)}$;
- $m = 1$;
- $n = 1000$ (nombre de simulations) ;
- σ la volatilité modèle.

Contre H_1 : les taux zéro-coupon estimés ne suivent pas la distribution normale ci-dessus.

La région de rejet est la région grisée comme sur le schéma de la partie au-dessus ; elle correspond à une probabilité de $\alpha/2$ de part et d'autre de la courbe.

Nous présentons ci-dessous les résultats des tests martingales sur les obligations zéro-coupon des tables avec les différents DP pour des intervalles de confiance à 95% ([prix estimé +/- quantile de la normale centrée à 95 % * erreur standard]).

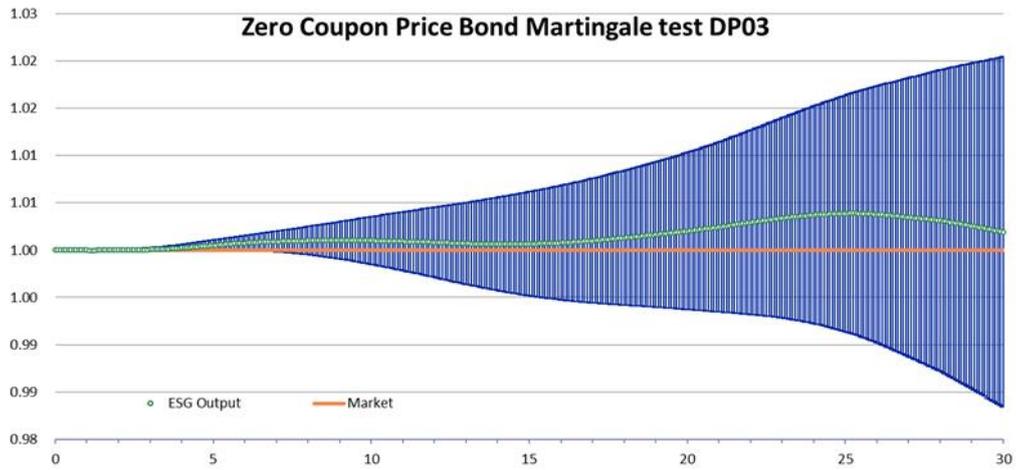


Figure 4.16 Test martingale option zéro-coupon DP03

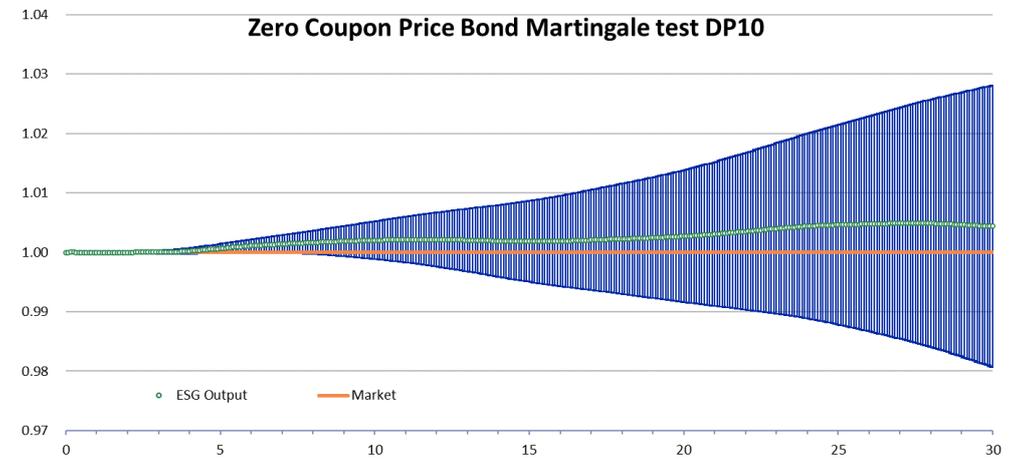


Figure 4.17 Test martingale option zéro-coupon DP10

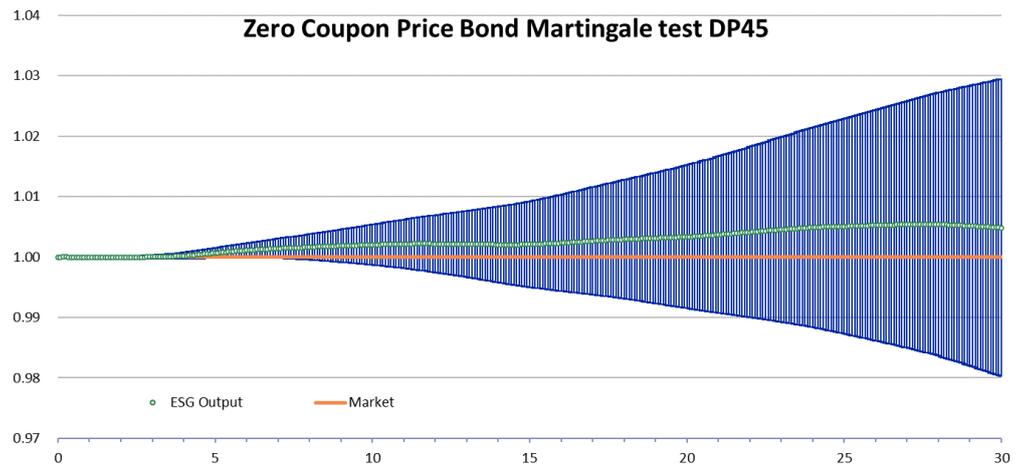


Figure 4.18 Test martingale option zéro-coupon DP45

On divise le prix moyen actualisé au taux sans risque des 1000 scénarios par le prix de départ. L'objectif est d'être le plus proche de 1, ce qui correspond à ce qu'on devrait avoir théoriquement. On constate que la moyenne des prix actualisés des obligations zéro-coupon est légèrement surestimée pour les DP 10 et 45 mais qu'elle est très bien projetée et reste largement dans l'intervalle de confiance à 95%. En effet, 99.7 % des valeurs sont dans les intervalles pour le DP10 et 98.2% pour le DP 45. Le DP03 se comporte encore mieux que les autres DP avec des prix moyens actualisés encore plus proche de 1

Un test global est effectué sur les obligations zéro-coupon afin de voir l'erreur moyenne de martingalité.

Tableau 4.3 Test martingalité obligation ZC

Volatilités		Vol Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Tests	Test martingalité obligation ZC	0.21%	0.23%	0.23%	0.24%	0.21%	0.13%

Quelle que soit la valeur du DP, les obligations ZC restent martingale. Il y a une légère amélioration du test de martingalité pour le DP10 et une grosse amélioration pour le DP03. Cette amélioration s'explique par une plus forte actualisation des prix des obligations ZC due à la baisse du DP.

4.2.2. Market consistency

Afin d'évaluer que les scénarios économiques vérifient les conditions de Market Consistency, il suffit de vérifier que la valorisation des instruments financiers via ces scénarios est cohérente avec leurs prix de marché ou la martingalité des prix des produits non dérivés générés par l'ESG assure déjà leur caractère Market-Consistent ($E(P(t)) = P(0)$ d'après les propriétés martingales).

Cela n'est cependant pas vérifié pour les produits dérivés. Il faut alors vérifier que la valorisation des instruments dérivés est cohérente avec leurs valeurs de marché.

Le test de rejet est le même que précédemment avec $\bar{X}_n = E^Q[\text{Prix projetés des options}]$, Pour chaque maturité, nous acceptons H_0 avec probabilité $1-\alpha$, si Y_n se trouve dans la région d'acceptation de niveau α . Dans le cas contraire, nous rejetons H_0 .

Les intervalles de confiance des prix estimés pour les tests de Market-Consistency sont des intervalles de confiance à 95% ([prix estimé +/- quantile de la normale centrée à 95 % * erreur standard]).

Les prix et intervalles de confiance obtenus à l'issue de ces tests sont ensuite convertis, à l'aide du modèle de Bachelier, en volatilité implicite. On affiche alors les volatilités implicites de marché et volatilités implicites estimées pour plusieurs tenors et plusieurs maturités.

Les volatilités implicites modèles, qui correspondent aux volatilités entrées en input du générateur, seront également affichées.

L'approche market-consistent demande que la valeur du passif soit égale à ce qu'un assureur serait prêt à payer pour racheter les contrats de la compagnie. Cette approche peut être mise en place pour certains types de contrats simples. Mais pour un panier de contrats plus complexes contenant des options et garanties, le passif est valorisé en utilisant une simulation stochastique car il n'existe pas de prix de marché observable pour ces passifs. Dans ce cas, un générateur de scénarios économiques utilisé avec un modèle de projection actif-passif permet de valoriser le passif. Le caractère market-consistent d'un générateur de scénarios économiques est caractérisé par la capacité à reproduire les prix de marché d'instruments qui reflètent au mieux le passif que l'on souhaite valoriser. Les tests de market-consistency permettent de valider cette capacité du générateur de scénarios à reproduire ces prix. Dans le cadre de l'étude, le générateur devra reproduire le prix d'instruments qui auront servi à son calibrage : les swaptions à différents maturité/tenor/strike.

Trois volatilités sont comparées. L'objectif étant que les volatilités simulées ne soient pas éloignées des prix de marché :

- Les volatilités de marché.
- Les volatilités théoriques que le modèle peut reproduire avec les n paramètres déterminés de manière à pouvoir répliquer au mieux les volatilités de marché.
- Les volatilités recalculées à partir des scénarios simulés.

Une erreur globale est également calculée pour chaque DP.

Tableau 4.4 Valeur moyenne des tests de market consistency pour la matrice ATM et AFTM

Volatilités		Vol Marché					
		60%	45%	30%	15%	10%	3%
Tests	Test MC swaptions ATM	0.019%	0.019%	0.019%	0.019%	0.019%	0.025%
	Test MC swaptions AWFTM	0.025%	0.026%	0.026%	0.026%	0.025%	0.046%

Hormis pour le DP03, les erreurs sont très stables quelle que soit la valeur du DP. Cependant, il est important de regarder plus en détails ces tests afin de vérifier que les points auxquels la NAV est la plus sensible sont bien répliqués.

En effet, la surface de volatilité de marché présente souvent des déformations et des structures qu'un modèle paramétrique ne peut pas reproduire. Le cube de volatilités implicites que l'on souhaite reproduire contient plus de 189 points (sur la surface maturite/tenor/strike). Le modèle LMM+, avec 8 paramètres ne pourra pas reproduire exactement la surface de volatilités de marché donnée en entrée. Or le passif de SOGECAP n'est pas sensible de la même façon à toutes les surfaces de volatilités, il est ainsi judicieux de mieux calibrer au niveau des parties les plus sensibles.

Une méthode permettant de déterminer à quelle partie de la surface de volatilités, le passif de la compagnie est le plus sensible a été mis en place il y a quelques années. Elle dépend des contrats qui figurent au passif et du niveau des options et garanties sous-jacentes au moment de l'étude. L'idée est de regarder à quel point du cube de volatilité la NAV est la plus sensible. Une fois ces zones sensibles identifiées, on pourra les calibrer avec plus d'attention en ajustant la matrice de poids en entrée du calibrage.

L'une des principales difficultés consiste à déterminer comment choquer la surface de volatilité de manière que le modèle puisse capturer cette surface choquée.

L'étude avait déjà été réalisée en amont du mémoire et plusieurs chocs de la surface de volatilité s'offraient à nous :

1. Appliquer un choc à la hausse à chaque point de la matrice (il y a donc autant de sensibilités que de points dans le cube).
2. Appliquer un choc à chaque ligne et à chaque colonne de la matrice.
3. Appliquer le choc en découpant la matrice en plusieurs sous-parties (par exemple en choquant des sous matrices de taille 5x5).

La première méthode est trop longue. Il faut générer 189 tables associées à chaque point choqué puis faire les calculs ALM jusqu'à la NAV pour chacune des tables. De plus, choquer un seul point ne permettrait pas au modèle de capturer cette variation car il lisserait sa valeur avec les points autour*. La deuxième méthode est réalisable d'un point de vue durée de calcul mais la surface est toujours trop difficile à capturer pour le modèle.

C'est la troisième méthode qui a été retenue en appliquant 14 chocs sur différentes zones de la matrice de volatilité et en regardant leur impact sur la NAV.

*En effet comme dit plusieurs fois lors de ce mémoire le LMM+ n'a que 8 paramètres et, en général, on ne peut pas s'attendre à ce qu'il obtienne un ajustement parfait à tous les points de données de marché. Le modèle réduit alors le nombre de points en réalisant une régression linéaire locale 3×3 pour lisser la surface de données de marché d'origine. Cette méthode permet d'éviter un point particulièrement bruyant et, en même temps, de maintenir une certaine dépendance vis-à-vis de tous les points de données du marché. Elle permet également d'accélérer considérablement le processus de calibrage, sans nécessairement réduire la qualité de l'ajustement au marché.

Exemple choc 1 :

On applique un choc à la hausse de +25% aux tenors inférieurs à 10 ans. (Cela correspond aux 7 premières colonnes de la matrice ATM).

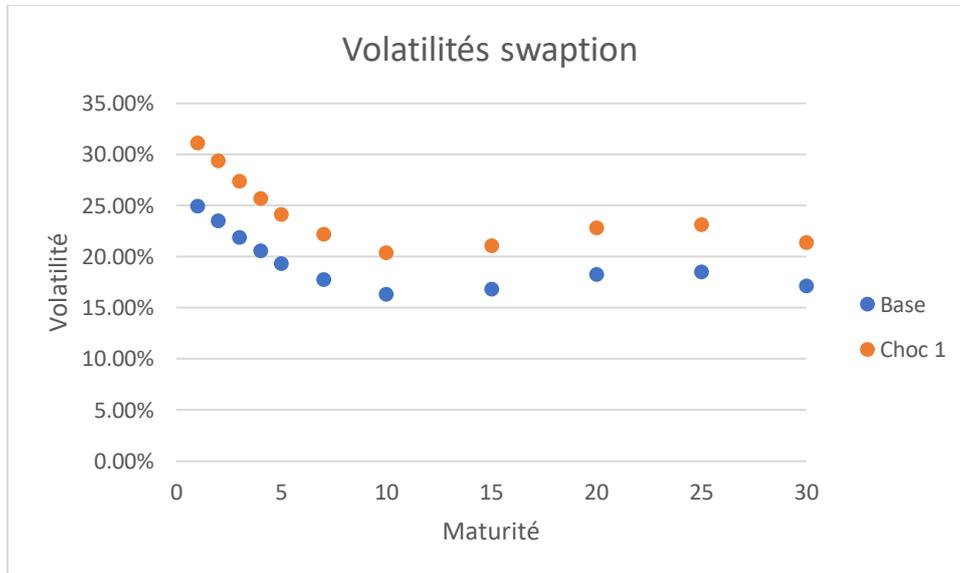


Figure 4.19 Volatilités implicites du tenor 8 ans pour toutes les maturités ATM

Ce choc provoque une perte de -21% en NAV.

En raisonnant de la même façon mais en choquant les autres parties de la matrice, nous arrivons aux résultats suivants.

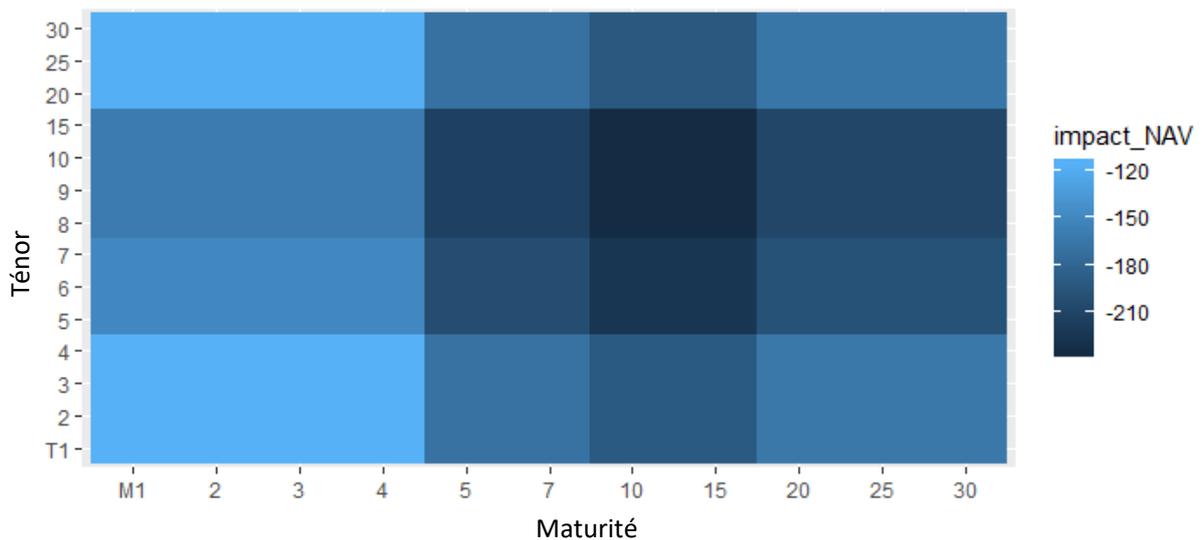


Figure 4.20 Heatmap des volatilités les plus impactantes sur la NAV

Il ressort que la NAV est particulièrement sensible aux maturités et aux tenors compris entre 8 et 15 ans. Il est important de vérifier que ces volatilités sont correctement calibrées lors des changements de displacement parameter.

Tableau 4.5 Ecart marché/modèle DP10 tenor x maturité les plus impactantes sur la NAV

		Ecart marché/modèle volatilité swaption modèle ATM DP10			
		Tenor			
		8	9	10	15
Maturité	7	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.03%
	10	0.01%	0.01%	0.00%	-0.01%
	15	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%

Tableau 4.6 Ecart marché/modèle DP45 tenor x maturité les plus impactantes sur la NAV

		Ecart marché/modèle volatilité swaption modèle ATM DP45			
		Tenor			
		8	9	10	15
Maturité	7	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.03%
	10	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%
	15	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%

Il s'avère que les zones auxquelles le passif de la compagnie est le plus sensible sont également celles que le modèle capture le mieux. Même avec une matrice de poids uniformément répartis, les écarts entre les volatilités de modèle et les volatilités de marché sont très faibles. Malgré tout en comparant les deux matrices d'écarts marché/modèle, on constate que le DP45 calibre légèrement mieux les volatilités auxquelles nous sommes le plus exposés (RMSE de 2.33 vs 3.25 pour le DP10 sur la zone étudiée). Pour régler ce problème, nous pouvons ajuster une matrice de poids qui permet de donner plus d'importance lors du calibrage à certains points de la matrice. Ainsi, nous pouvons demander par exemple au modèle de calibrer presque parfaitement la zone où nous sommes le plus exposés en mettant un poids nul à toutes les autres cellules de la matrice. Sur le graphique ci-dessous, nous pouvons voir que cela fonctionne presque parfaitement.

Tableau 4.7 Ecart marché/modèle DP10 tenor x maturité les plus impactantes sur la NAV après modification poids

		Ecart marché/modèle volatilité swaption modèle ATM DP10			
		Tenor			
		8	9	10	15
Maturité	7	0.00%	-0.01%	-0.01%	0.00%
	10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	15	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%

Comme nous pouvons le voir sur la matrice ci-dessous la contrepartie à cette solution est que les autres points de la matrice sont moins bien calibrés. Il faudra trouver un juste milieu entre améliorer le calibrage de la zone à laquelle nous sommes le plus exposés et ne pas trop dégrader le reste de la matrice.

Tableau 4.8 Ecart marché/modèle DP10 tenor x maturité après modification poids

		Ecart marché/modèle volatilité swaption modèle ATM DP10 avec poids														
		Tenor														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	
Maturité	1	-0.03%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.02%	0.02%	0.03%	0.02%	0.02%	0.04%	0.08%	0.12%	0.18%	
	2	0.08%	0.07%	0.06%	0.05%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.02%	0.06%	0.10%	0.14%	
	3	0.12%	0.10%	0.08%	0.06%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.03%	0.08%	0.10%	
	4	0.12%	0.10%	0.07%	0.05%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.03%	0.06%	0.09%	
	5	0.10%	0.08%	0.06%	0.04%	0.03%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.01%	0.03%	0.06%	0.09%	
	7	0.08%	0.06%	0.05%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.02%	0.06%	0.08%	
	10	0.03%	0.03%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%	0.05%	0.08%	
	15	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.03%	0.05%	
	20	-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.04%	-0.04%	-0.05%	-0.05%	-0.04%	-0.05%	-0.04%	-0.04%	-0.04%	-0.02%	0.00%	
	25	-0.05%	-0.06%	-0.06%	-0.07%	-0.06%	-0.07%	-0.06%	-0.07%	-0.06%	-0.06%	-0.06%	-0.06%	-0.04%	-0.04%	
30	-0.05%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.06%	-0.05%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.07%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.03%		

Vérifions que les volatilités implicites obtenues à partir des indices générés par le GSE sont cohérentes aux données observables sur le marché afin de respecter les conditions de market-consistency.

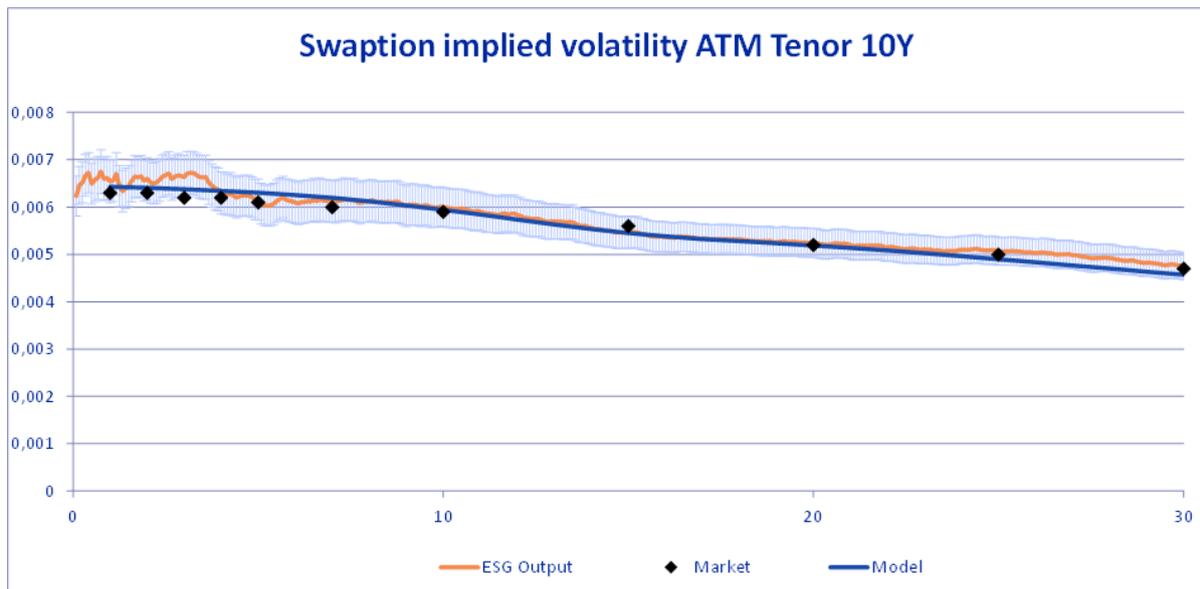


Figure 4.21 Test répliation volatilité swaption ATM Tenor 10 ans DP10

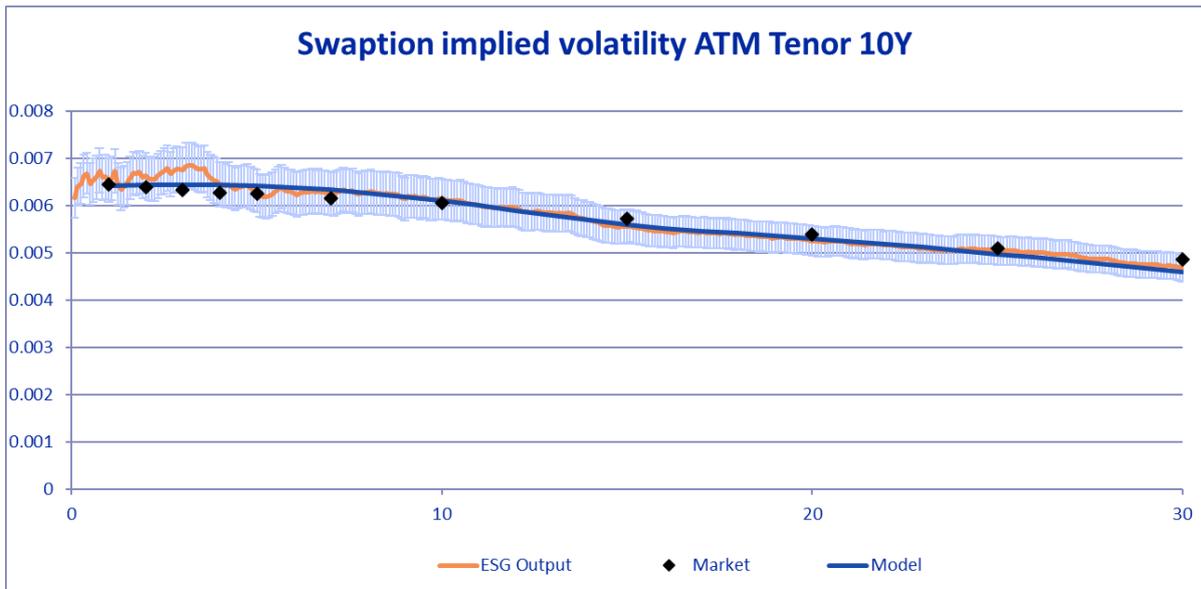


Figure 4.22 Test répliation volatilité swaption ATM Tenor 10 ans DP45

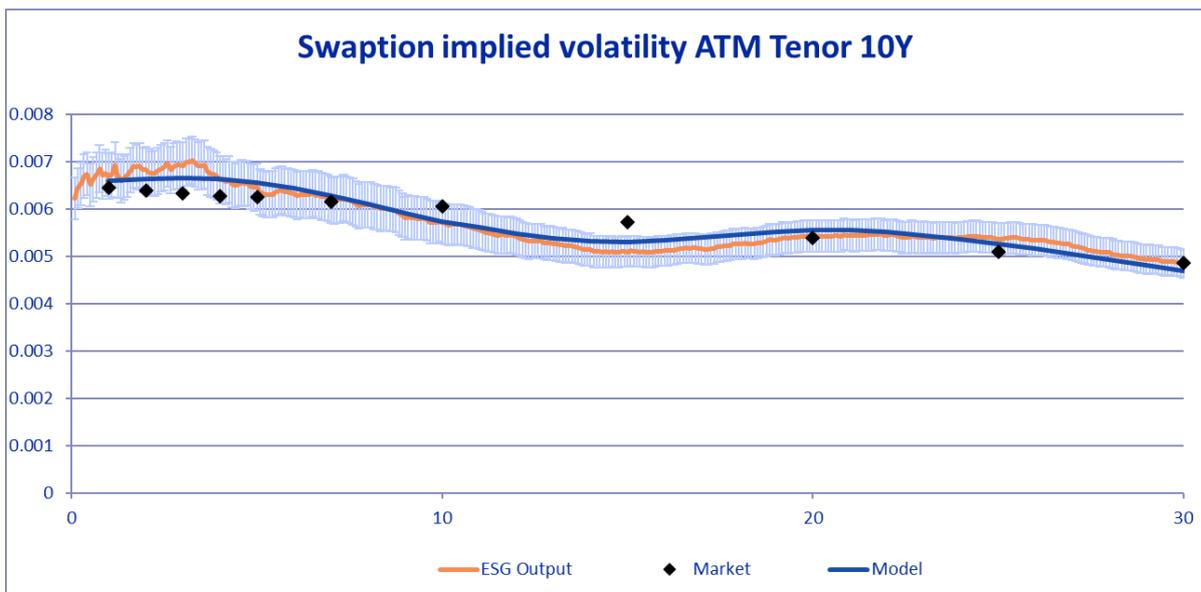


Figure 4.23 Test répliation volatilité swaption ATM Tenor 10 ans DP03

D'après les résultats du test, nous pouvons dire qu'avec un seuil de 95%, 100% des volatilités pour un ténor de 10 ans à la monnaie sont correctement calibrées pour le DP10, 98.1% pour le DP45 et seulement 81% pour le DP03.

Il est possible de réaliser ce même genre de test pour tous les ténors/maturité/strike aussi bien pour la matrice à la monnaie, que celle en dehors de la monnaie. Par exemple, pour les swaption en dehors de la monnaie. Exemple ci-dessous pour un strike de 0,005 pour le DP10 :

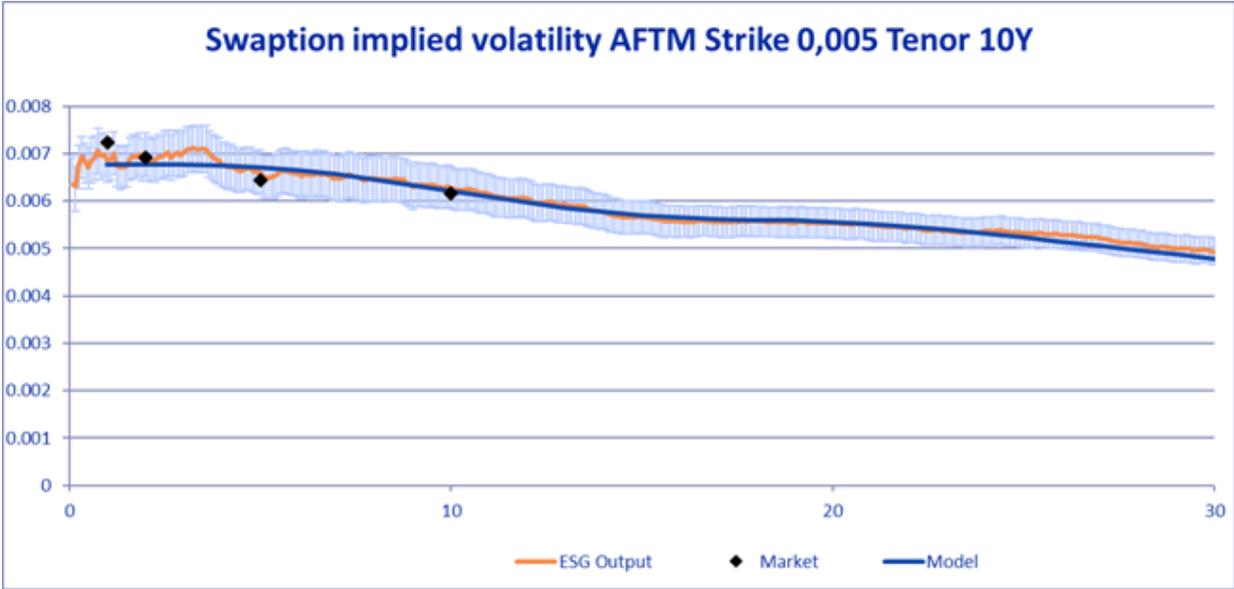


Figure 4.24 Test répliation volatilité swaption AFTM strike 0.005 Tenor 10 ans DP45

Nous devons également vérifier qu’en modifiant le DP le skew de volatilité est toujours bien répliqué pour tous les strikes.



Figure 4.25 Test répliation volatilité swaption ATM Maturité 10 ans Tenor 10 ans DP45

Hormis pour le DP03, le skew de volatilité des maturités 10 ans Tenor 10 ans est bien répliqué, avec légèrement moins d’erreur pour le DP45.

5. Impact sur les résultats

Conditions économiques au 31/12/2021 :

Tableau 5.1 Conditions économiques au 31/12/2021

CAC 40	7153	
EUROSTOXX 50	4298	
Taux swap 10 ans	0.30%	
Taux S2 10 ans	0.23%	
Pentes swap 10-2 & 20-10	60bps	24bps
Volatilité taux	59.42	
Volatilité action	19.52	
Dividende CAC	1.90%	
Dividende Eurostoxx	2.30%	
Volatility Adjustment	0.03%	
UFR	3.60%	
CRA	0.10%	
Dampener	6.88%	

5.1. Impact sur les résultats de solvabilité 2

Dans cette partie sera étudié l'impact d'un changement de déplacement parameter sur les marges futures (NAV) ainsi que sur le ratio de Solvabilité 2 de SOGECAP. Les calculs sont réalisés au 31/12/2021 avec les données économiques ci-dessus.

Tableau 5.2 Impact NAV S2 changement de DP

Volatilités		Volatilité Marché					
DP		60%	45%	30%	15%	10%	3%
NAV	euro + uc	345.90	341.48	342.31	348.44	364.79	494.74
	Ecart de convergence	0.15%	0.14%	0.15%	0.15%	0.16%	0.20%

Plusieurs NAV pour SOGECAP avec différents DP ont été calculés en utilisant les volatilités de marché des swaptions (récupéré par un fournisseur de données de marché) pour la calibration du modèle (Tableau 5.2). Ainsi le changement de DP en passant de 45 à 10, augmenterait la NAV de 23 millions d'euros. L'impact reste mesuré car comme vu dans les parties précédentes, le modèle compense le gain qu'on pourrait espérer obtenir avec la baisse du DP en calibrant différemment les autres paramètres, notamment la volatilité déterministe et la corrélation.

Tableau 5.3 Impact sur le ratio de solvabilité du changement de DP

SOGECAP	2021Y initial DP45		2021Y DP30		2021Y DP15		2021Y DP10		2021Y DP03	
	brut	net	brut	net	brut	net	brut	net	brut	net
Marges futures nettes	327		327		329		341		512	
Marges futures brutes	28		29		31		47		276	
Risk Margin	-1 104		-1 104		-1 108		-1 108		-1 015	
Impots	298		298		298		294		236	
ELEMENTS ELIGIBLES	9 833		9 833		9 835		9 853		10 056	
Fonds propres	7 039		7 039		7 040		7 039		7 035	
SCR	3 691		3 689		3 685		3 689		3 688	
RATIO DE COUVERTURE SCR	266.44%		266.58%		266.91%		267.05%		272.62%	
RATIO DE COUVERTURE MCR	501%		501%		502%		502%		516%	
Choc taux retenu	Baisse Taux		Baisse Taux		Baisse Taux		Baisse Taux		Baisse Taux	
Choc rachat retenu	Risque baisse rachat		Risque massif							
	brut	net	brut	net	brut	net	brut	net	brut	net
SCR marché	9 449	4 037	9 445	4 034	9 438	4 030	9 432	4 037	9 373	4 063
SCR contrepartie	367	201	367	201	367	201	367	201	367	201
SCR souscription vie	642	960	643	959	643	958	642	955	970	890
SCR souscription santé	158	158	158	158	158	158	158	158	161	161

En allant au-delà du scénario central, nous constatons que passer d'un DP45 à un DP10 augmente le ratio de 0.61 point (Tableau 5.3). L'impact est assez faible. Malgré tout, passer à un DP03 augmenterait le ratio de 6.18 points. Comme le DP a un rôle de « taux plancher », aucun taux ne passe sous les -3%. Un certain nombre de scénarios sont impactés, ce qui n'était pas le cas pour le DP10 puisqu'aucun scénario n'allait sous les -10%. Les variations du changement de DP se font sur les marges futures Brutes EURO + UC grâce à une diminution des taux extrêmes négatifs. A noter que la variation du SCR souscription entre le DP03 et les autres DP est due à changement de choc de rachat retenu. On passe d'un risque baisse rachat à un risque massif (le choc rachat retenu est le maximum entre le choc baisse rachat, hausse rachat et rachat massif).

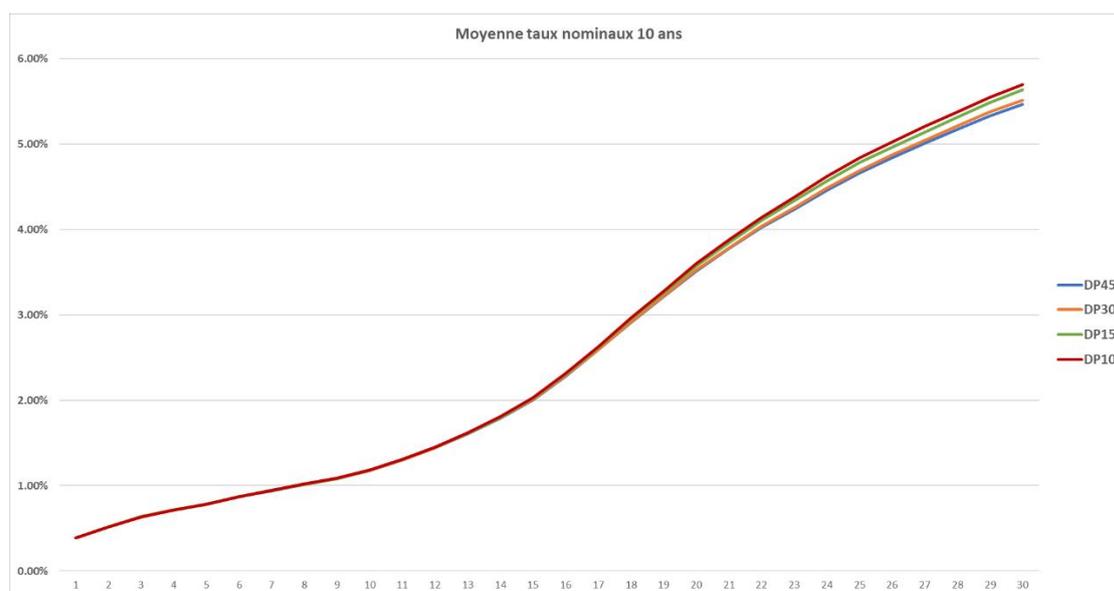


Figure 5.1 Moyenne des taux nominaux 10 ans en fonction du DP

En affichant la moyenne du taux 10 ans de toutes les projections nous remarquons que dans ce cas-là un changement de DP réhausse légèrement en moyenne les taux 10 ans ce qui peut en partie expliquer le gain en NAV. Comme nous verrons sur les impacts IFRS17, cette hausse sur la moyenne du taux 10 ans ne suffit pas à elle seule pour expliquer le gain en NAV.

5.2. Impact sur les résultats IFRS17

L'impact d'un changement de displacement parameter sur les marges futures (NAV) des portefeuilles IFRS 17 de SOGECAP, au 31/12/2021 pour la FTA (First Time Application) a été étudié. La FTA est le premier calcul officiel IFRS 17 et permet de calculer la CSM à transition et l'impact fonds propres au 1^{er} janvier 2023. Contrairement à Solvabilité 2, IFRS17 ne comptabilise pas tous les bénéfices attendus en capitaux propres. A chaque date d'inventaire, si le profit attendu sur le nouveau contrat est négatif, la perte est comptabilisée directement en chiffre d'affaires. Dans le cas contraire, c'est là que la CSM intervient, elle est progressivement reprise et comptabilisée au fur et à mesure de la durée du contrat en résultat. L'impact fonds propres correspond à la différence entre les marges futures stochastiques nettes de RA (qui est un montant couvrant l'incertitude, liée aux risques non financiers) (NAV – RA) et la CSM à la transition. En cas de Loss component, cette dernière est directement comptée en impact fonds propres. Ainsi, plus la CSM de transition sera élevée, moins les capitaux propres IFRS 17 le seront. Ce vase communicant entre résultat et fonds propres est crucial puisqu'un assureur ne peut envisager une réduction trop importante de fonds propres, mais d'autre part, la CSM compose le principal vecteur de résultat des prochaines communications financières. Les conséquences d'une mauvaise estimation de la CSM de transition sont doubles puisque dans un sens, augmenter la quantité de fonds propres disponibles pour l'assureur l'aide à afficher de bons résultats pour les années passées, mais de l'autre augmenter la CSM représente en partie une augmentation des performances futures et envoie un signal positif aux investisseurs.

Sous IFRS 17, ce premier calcul est capital car tous les calculs suivants, en raison de la récursivité de la CSM dépendront de celui-ci. La détermination du bilan de transition représente l'un des enjeux majeurs de l'entrée en vigueur de la norme, il est ainsi très important que chaque hypothèse soit parfaitement définie.

Tableau 5.4 Impact changement DP sous IFRS17

Sensi		IFRS17			
		DP45	DP10	DP05	DP03
Calibrage	a	0.013	0.051	0.089	0.117
	b	0.001	0.007	0.015	0.029
	c	0.049	0.056	0.064	0.076
	Mean Rev. Speed of Variance	0.147	0.136	0.124	0.120
	Mean Rev. Level of Variance	0.369	0.277	0.205	0.169
	Volatility of Variance	0.550	0.545	0.450	0.403
Tests	Correlation	0.224	-0.068	-0.350	-0.673
	Test martingalité obligation ZC	0.07%	0.13%	0.17%	0.18%
	Test MC swaptions ATM	0.024%	0.022%	0.022%	0.022%
NAV IFRS17	Test MC swaptions AWFTM	0.017%	0.014%	0.014%	0.014%
	NAV IFRS Epargne	7595	7558	7591	7644
	NAV IFRS Retraite	69	64.0	65	69
	NAV IFRS Perp	2.1	1.6	2.3	3.2
	Total	7666	7623	7658	7717

La méthode de génération des taux n'étant pas la même sous IFRS17 que sous Solvabilité 2 (prime d'illiquidité vs volatility adjustment, extrapolation avec smith wilson vs points lissés...) les valeurs de calibrage et des tests sont légèrement différentes, mais les conclusions restent les mêmes. C'est-à-dire que le modèle compense une baisse de DP en augmentant la volatilité déterministe et en baissant la corrélation et la *volatility of variance*. Cependant, en regardant la NAV IFRS17, le passage d'un DP45 à un DP10 entraînerait une baisse de 46 millions d'euros. Malgré tout, passer à un DP03 augmenterait la NAV de 51 millions d'euros par rapport au DP45 et de 94 millions d'euros par rapport au DP10. Le DP se comportant comme un « taux plancher », il n'y a aucun taux inférieur -3%, bloquant artificiellement les taux très négatifs.

Afin de comprendre pourquoi la NAV baisse en passant à un DP10, il faut regarder les calculs plus en détails. A première vue, la moyenne du taux 10ans des scénarios pour un DP45 et un DP10 est plus élevée pour le DP10 comme pour Solvabilité 2. De plus, la variable « résultat net » qui définit la valeur de la NAV est plus élevée pour un DP10. Cette variable correspond au résultat net moyen des 1000 scénarios actualisés par le déflateur moyen. Cependant, cela ne correspond pas réellement au résultat net actualisé. Pour avoir le résultat net actualisé il faut multiplier chaque résultat net de chaque scénario par le déflateur associé. Il faut ainsi effectuer un calcul sans réaliser de moyenne afin d'avoir la simulation de chaque scénario.

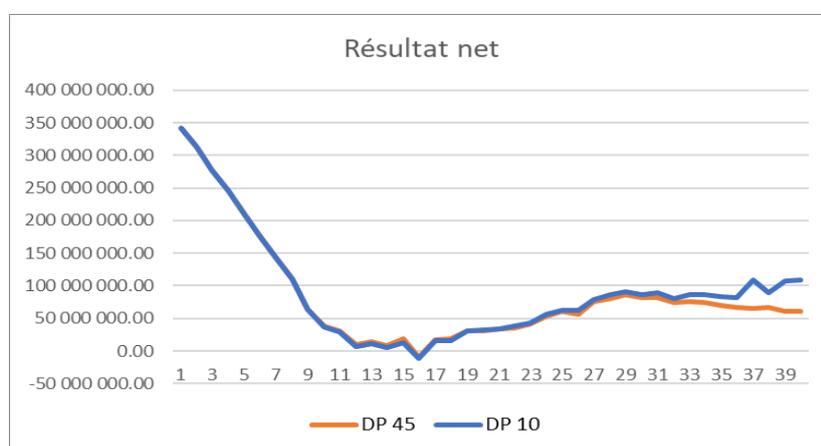


Figure 5.2 Résultat net en fonction du DP

En calculant les résultats nets actualisés pour chaque itération puis en faisant la moyenne, nous constatons que la moyenne finale de tous les résultats est légèrement plus faible pour le DP10 que pour le DP45. Cela est dû au fait que le DP10 a des facteurs d'actualisations plus importants que le DP45. Cela entraîne une baisse du résultat net et implique ainsi une NAV plus faible.

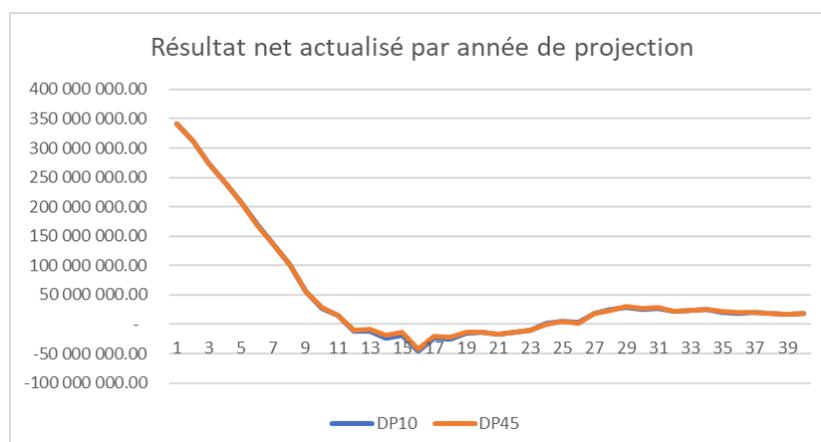


Figure 5.3 Résultat net actualisé en fonction du DP

L'impact sur la NAV nette de RA, la CSM ainsi que l'impact fonds propres sont étudiés.

Tableau 5.5 Résultats IFRS 17 en fonction du DP

M€	DP45	DP10	DP05	DP03
NAV totale net	7 666	7 623	7 658	7 717
RA	1 855	1 832	1 834	1 848
NAV - RA	5 812	5 791	5 824	5 869
CSM Transition	5 633	5 610	5 641	5 662
Impact FP Brut au 01/01/2022	179	182	183	207
en net	134	136	137	155

Avec un DP10, la CSM, qui représente la part des profits futurs de l'assureur, baisse de 23 millions d'euros et augmente de 8 millions d'euros (resp 29 millions) avec à un DP05 (resp DP03). Ce mouvement est cohérent avec le mouvement observé auparavant sur la NAV et cela pour les mêmes raisons. Cependant la baisse des marges futures nettes de RA est moins forte que la baisse de la CSM. Cela se traduit par un impact fonds propres positifs. Ainsi passer à un DP10 engendrerait plus de résultats passés et moins de résultats futurs. La FTA étant déjà figée le changement de DP interviendrait au plus tôt pour le calcul annuel 2022.

Conclusion

Ce mémoire a présenté les travaux réalisés sur le modèle de projection de taux LMM+ d'un assureur vie épargne, dans le cadre des calculs réglementaires sous Solvabilité 2 et IFRS 17. Il s'est focalisé plus particulièrement sur le Displacement Parameter (également appelé shift dans la littérature financière), qui est un paramètre primordial du modèle de projection de taux.

Après quelques rappels du contexte réglementaire actuel, le mémoire expose l'ensemble du générateur de scénarios économiques, et en particulier le modèle de projection de taux LMM+. Ce modèle est l'évolution du modèle LMM. Cette évolution permet l'ajout du displacement parameter qui permet de générer des taux négatifs et l'ajout d'une volatilité stochastique qui permet de capter au mieux ce qui se passe réellement sur les marchés.

Le mémoire montre ensuite l'importance du calibrage dans le modèle de taux. Le Displacement Parameter étant un paramètre impactant fortement le modèle de taux. En effet, il n'est pas calibré automatiquement à chaque simulation comme le sont les autres paramètres du modèle LMM+, il faut donc entrer un niveau adapté. Pour cela, une étude permettant d'objectiver un niveau adéquat de Displacement Parameter a été réalisée. Cette étude suit le principe des méthodes de Monte-Carlo. Elle consiste à réaliser un très grand nombre de calibrages, avec plusieurs niveaux de Displacement Parameter choisis de manière aléatoire, et d'observer le niveau qui est en moyenne le plus approprié. C'est-à-dire le niveau qui reproduit en général le mieux les données marchés pour les tirages étudiés afin d'avoir le niveau le plus pertinent et robuste possible, pour tous les calculs du modèle de taux. En pratique différents indicateurs ont été observés, le but étant d'avoir le plus petit écart entre les volatilités marchés données en entrée et les volatilités modélisées en sortie de calibrage, d'éviter les taux trop aberrants pour le modèle ALM, et d'avoir une solution adaptée dans différents contextes économiques. L'étude a mis en avant l'utilisation d'un niveau de Displacement Parameter de 10% dans un contexte de taux bas ou modérés.

Après avoir établi un niveau approprié dans le cadre général au niveau du calibrage, une étude plus complète sur les tests statistiques des scénarios générés par le modèle, a été effectuée au 31/12/2021, confirmant le niveau adéquat du Displacement Parameter à 10%. Les impacts sur les tests restent mesurés, et mettent en évidence certains mécanismes du calibrage au sein du LMM+, qui permettent grâce à des compensations sur d'autres paramètres, de presque toujours avoir des calibrages de bonne qualité en gardant la même amplitude entre les scénarios positifs et négatifs. Des chiffrages d'impacts ont également été réalisés dans le cadre de Solvabilité 2 et de IFRS17, afin de constater la conséquence d'un tel changement dans le générateur. Les impacts restent également mesurés, confirmant le bon fonctionnement du modèle LMM+ et de ses mécanismes de calibrage, limitant les impacts de changement dans le modèle sur les calculs réglementaires. A noter cependant que si le Displacement Parameter devient trop faible, il sert alors de « taux plancher », ce qui dégrade les tests en remontant artificiellement les taux les plus bas. Il est important de ne pas trop baisser le Displacement Parameter même si cela peut paraître intéressant pour certaines compagnies qui souhaiteraient remonter artificiellement leurs marges futures stochastiques.

Ce mémoire a permis de préconiser le changement du niveau de Displacement Parameter au sein de l'entité Sogécap, dans un contexte de taux bas ou modérés. Cependant, le contexte économique actuel étant en forte variation courant 2022, il sera opportun de compléter l'étude dans le futur avec un panel plus large de sensibilités. Ce mémoire a permis de définir une méthode d'étude qui pourra être facilement répliquée dans différentes entités, et dans différents contextes.

Bibliographie

- Thèse sur la volatilité stochastique par Alex Soukprasong SY
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006151/document>
- Mémoire d'actuariat modele de taux d'interet pour les assurances vie
<https://www.institutdesactuaires.com/docs/mem/8159397a097a143a986705731a06d561.pdf>
- Moody's Analytics LMM+ Derivation, Implementation and MC Calibration Methodology
- Moody's Analytics Calibration Tools Methodology Guide
- Moody's Analytics Swaption Calibration Tool User Guide
- Volatilité stochastique : étude d'un modèle ergodique par Julien Guyon
http://cermics.enpc.fr/~guyon/CLparis_volsto.pdf
- Devineau L, Tankov P, Grbac Z, Vedani J, Modèles financiers pour la construction du bilan économique
- Document d'Orientation, Institut des actuaires
https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=2018162907_document-d-orientation-gse-institut-des-actuaires-nov-2018-002.pdf&fg=1
- Armel et Planchet, Comment définir la qualité d'un générateur de scenarios économiques destiné à évaluer le BE épargne euro
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01767208/document>

Table des figures

Figure 1.1 Les piliers de solvabilité 2.....	26
Figure 1.2 Bilan solvabilité 2.....	26
Figure 1.3 Segmentation des portefeuilles à 3 niveaux	31
Figure 1.4 SCR IFRS17	34
Figure 1.5 SCR S2.....	34
Figure 1.6 Calcul de la CSM sous le modèle FVA.....	37
Figure 1.7 Bilan IFRS17	38
Figure 2.1 Illustration swaption.....	40
Figure 2.2 Fonctionnement global GSE	42
Figure 2.3 Alimentation GSE.....	49
Figure 3.1 Matrice volatilité swaption ATM	51
Figure 3.2 Matrice volatilité swaption AFTM	51
Figure 3.3 Projection taux forward	53
Figure 3.4 Projection volatilité taux forward	53
Figure 3.5 Illustration volatilité déterministe.....	54
Figure 3.6 Distribution des taux en fonction du DP	56
Figure 3.7 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre a.....	58
Figure 3.8 Nappe de distribution taux nominaux initiale 10 ans	58
Figure 3.9 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètre a	59
Figure 3.10 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre b	59
Figure 3.11 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètre b.....	60
Figure 3.12 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre c.....	60
Figure 3.13 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètres c.....	61
Figure 3.14 Sensibilité de la distribution de Rebonato au paramètre d	62
Figure 3.15 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité paramètres d	62
Figure 3.16 Nappe de distribution taux nominaux 10ans sensibilité sans volatilité déterministe	63
Figure 3.17 Smile de volatilité	64
Figure 3.18 Skew de volatilité	65
Figure 3.19 Matrice volatilité à la monnaie (ATM).....	66
Figure 3.20 Matrice volatilité en dehors de la monnaie (AFTM).....	66
Figure 3.21 Réplication du skew de volatilité.....	66
Figure 3.22 Paramètres volatilité stochastique en sortie de calibrage	68
Figure 3.23 Nappe de distribution du taux 10 ans en fonction de la « spread of variance »	68
Figure 3.24 Nappe de distribution du taux 10 ans en fonction du « level of variance ».....	69
Figure 3.25 Courbe de distribution pour les sensibilités des paramètres de la volatilité stochastique	70
Figure 3.27 Nappe de distribution taux nominaux 10 ans au 31/12/21	71
Figure 3.28 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres libres	72
Figure 3.29 Volatilité déterministe pour chaque DP.....	73
Figure 3.30 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres libres	74
Figure 3.31 Quantile 99.5th DP03 avec freeze	74
Figure 3.33 Paramètre modèle.....	75
Figure 3.34 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres DP45.....	75
Figure 3.35 Quantile 0.5th taux 10 ans changement DP paramètres DP45.....	76
Figure 4.1 Matrice volatilité swaption marché ATM au 31/12/2022	77

Figure 4.2 Matrice volatilité swaption marché ATM en sortie de calibrage au 31/12/2022	77
Figure 4.3 Matrice d'écart matrice marché / matrice en sortie de calibrage pour les volatilités des swaptions ATM.....	77
Figure 4.4 Matrice volatilité swaption marché AFTM au 31/12/2022	77
Figure 4.5 Matrice volatilité swaption marché AFTM en sortie de calibrage au 31/12/2022	78
Figure 4.6 Matrice d'écart matrice marché / matrice en sortie de calibrage pour les volatilités des swaptions ATM.....	78
Figure 4.7 Illustration minimum locaux.....	79
Figure 4.8 RMSE moyenne par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques	81
Figure 4.9 RMSE moyenne par tranche de DP pour plusieurs scénarios économiques stressés.....	81
Figure 4.10 Proportion non extreme par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques.....	82
Figure 4.11 Proportion non extreme par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques stressés	82
Figure 4.12 Proportion non saturé par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques	83
Figure 4.13 Proportion non saturé par tranche de DP et pour plusieurs scénarios économiques stressés .	83
Figure 4.14 Interprétation des erreurs.....	84
Figure 4.15 Zones de rejet.....	86
Figure 4.16 Test martingale option zéro-coupon DP03	88
Figure 4.17 Test martingale option zéro-coupon DP10	88
Figure 4.18 Test martingale option zéro-coupon DP45	88
Figure 4.19 Volatilités implicites du tenor 8 ans pour toutes les maturités ATM.....	92
Figure 4.20 Heatmap des volatilités les plus impactantes sur la NAV.....	92
Figure 4.21 Test répliation volatilité swaption ATM Tenor 10 ans DP10	94
Figure 4.22 Test répliation volatilité swaption ATM Tenor 10 ans DP45	95
Figure 4.23 Test répliation volatilité swaption ATM Tenor 10 ans DP03	95
Figure 4.24 Test répliation volatilité swaption AFTM strike 0.005 Tenor 10 ans DP45.....	96
Figure 4.25 Test répliation volatilité swaption ATM Maturité 10 ans Tenor 10 ans DP45.....	96
Figure 5.1 Moyenne des taux nominaux 10 ans en fonction du DP.....	98
Figure 5.2 Résultat net en fonction du DP	100
Figure 5.3 Résultat net actualisé en fonction du DP	101

Tableau 3.1 Impact d'un changement de DP sur les paramètres de la volatilité déterministe	72
Tableau 3.2 Impact d'un changement de DP sur les paramètres de la volatilité stochastique	73
Tableau 4.1 Génération paramètres des 1000 calibrages	79
Tableau 4.2 Hypothèses économiques	80
Tableau 4.3 Test martingalité obligation ZC	89
Tableau 4.4 Valeur moyenne des tests de market consistency pour la matrice ATM et AFTM	90
Tableau 4.5 Ecart marché/modèle DP10 tenor x maturité les plus impactantes sur la NAV	93
Tableau 4.6 Ecart marché/modèle DP45 tenor x maturité les plus impactantes sur la NAV	93
Tableau 4.7 Ecart marché/modèle DP10 tenor x maturité les plus impactantes sur la NAV après modification poids	93
Tableau 4.8 Ecart marché/modèle DP10 tenor x maturité après modification poids	94
Tableau 5.1 Conditions économiques au 31/12/2021	97
Tableau 5.2 Impact NAV S2 changement de DP	97
Tableau 5.3 Impact sur le ratio de solvabilité du changement de DP	98
Tableau 5.4 Impact changement DP sous IFRS17	100
Tableau 5.5 Résultats IFRS 17 en fonction du DP	101