



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 07 Septembre 2023

Par : DIGBEU PAUL EMMANUEL

Titre : Une méthodologie de rolling obligataire en contexte de hausse des taux

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut

des Actuaire :

Faris ROUCHATI

Cédric CHAVOT

Mame-Fatou DIOP

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA :

Rainer BUCKDAHN

Entreprise :

MALAKOFF HUMANIS

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Tristan RAISON

Signature :

Invité :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

Mots Clefs : *Rolling*, SCR marché, duration, gap de duration, fonds propre, allocation

Dans un contexte économique actuellement marqué par des taux d'intérêts mouvants, les organismes d'assurance, particulièrement ceux d'assurances-vie, sont confrontés à une forte volatilité au niveau de leur fond propre. En effet, cette volatilité est due en partie aux déséquilibres entre la durée de l'actif et celle du passif.

Ces derniers sont alors à la recherche de méthodes permettant d'égaliser la durée de l'actif et du passif. Ainsi, le gap de durée représentant l'écart entre la durée du passif et celle de l'actif, apparaît comme une métrique de pilotage idoine afin de réduire l'exposition des fonds propres aux variations de taux.

Généralement, les assureurs-vie cherchent des allocations optimales permettant de satisfaire cet objectif, quitte à déformer l'allocation antérieure. Dans le cadre de ce mémoire, l'allocation antérieure sera maintenue stable et un *Rolling* sera effectué sur la poche obligataire au vu des opportunités d'investissements actuelles afin de réaliser notre objectif.

En parallèle, une étude sera menée afin de voir l'impact de cette approche sur les indicateurs de la gestion actif/passif ainsi que le coût en SCR marché.

Abstract

Keywords : *Rolling*, SCR market, duration, duration gap, equity, allocation

In an economic context currently characterized by fluctuating interest rates, insurance companies, particularly life insurers, are facing significant volatility in their equity. Indeed, this volatility is partly due to imbalances between the duration of assets and liabilities.

They are therefore searching for methods to equalize the duration of assets and liabilities. Thus, the duration gap, representing the difference between liability duration and asset duration, emerges as an appropriate control metric to reduce the equity exposure to interest rate fluctuations.

Generally, life insurers seek optimal allocations to fulfill this objective, even if it means adjusting the previous allocation. In the context of this thesis, the previous allocation will remain stable, and a "rolling" will be performed on the bond portfolio considering current investment opportunities in order to achieve our goal.

In parallel, a study will be conducted to assess the impact of this approach on asset/liability management indicators as well as the market Solvency Capital Requirement (SCR) cost.

Note de Synthèse

Contexte et problématique

Ce mémoire s'inscrit dans un environnement économique instable. En effet, après deux décennies marquées par la baisse des taux et au lendemain de la crise sanitaire "covid 19", l'Europe connaîtra dans le deuxième semestre de 2022 une inflation élevée induisant une montée fulgurante des taux d'intérêts, ayant ainsi un impact sur les fonds propres des compagnies disposant majoritairement de contrat vie. Dès lors, la compagnie doit porter une attention particulière à la réduction de l'impact de la variation de taux sur les fonds propres tout en tirant profit du contexte de taux actuel.

L'objectif de ce mémoire vise à réduire la sensibilité des taux sur les fonds propres tout en augmentant le taux de rendement comptable par l'application d'un *rolling* obligataire sans variation de l'allocation antérieure, aussi voir l'impact de cette nouvelle stratégie sur les indicateurs de la gestion actif/passif.

Dans un premier temps, il sera question de la présentation de l'entité ainsi que du contexte économique actuel. Par la suite, une description méthodologique de la mise en place de la stratégie du *rolling* obligataire par le biais des opérations de ventes et d'achats sera faite avant d'effectuer une comparaison entre les différents modèles utilisés pour la vente. Ensuite, il s'agira de l'intégration de la base post *rolling* dans le modèle ALM afin d'obtenir les indicateurs de la gestion actif/passif. Enfin, une étude de sensibilités sur les paramètres et le scénario adverse sera élaborée.

La stratégie de rolling obligataire

La stratégie de *rolling obligataire*, également connu sous les termes de *rotation obligataire* ou *recyclage obligataire*, est une stratégie qui consiste à vendre des obligations générant un faible taux de rendement comptable, pour ensuite acheter de nouvelles obligations offrant un rendement plus élevé et de meilleure qualité en termes de notation et donc un faible risque de défaut. La stratégie du *rolling obligataire* implique deux opérations distinctes.

D'abord, une opération de **vente** est effectuée afin de liquider des obligations offrant un faible taux de rendement comptable. Cette étape permet de libérer des ressources financières en se désengageant des actifs moins performants.

Ensuite, vient l'opération d'**achat**, qui consiste à acquérir de nouvelles obligations présentant de meilleurs potentiels en termes de rendement et de qualité de notation. Cette étape vise à réinvestir les fonds provenant des ventes dans des actifs plus attractifs. Ainsi, notre stratégie consistera à cibler des obligations donnant un meilleur taux de rendement.

Le modèle de vente¹

1. Au vu du paradoxe entre les solutions mathématiques et financiers. Des métriques telles que le taux de rendement

Dans le cadre de la vente, deux méthodes ont été considérées, à savoir :

- La méthode dite ϵ -contrainte
- La méthode dite de pondération

Le modèle d'achat

Le modèle d'achat a été mis en place en faisant une combinaison des deux méthodes précédentes.

Comparaison des méthodes de ventes

Le modèle a été calibré pour un taux de vente de 3,5%, un intervalle de taux de coupon [0,2%] et un intervalle de durée de [0,10]. Un calibrage a été effectué pour avoir un écart entre la cible et la valeur nette comptable de 3.5 M€.

Modèle dite de pondération

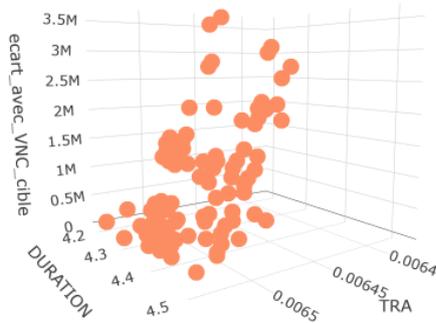


FIGURE 1 – TRA, Ecart et duration

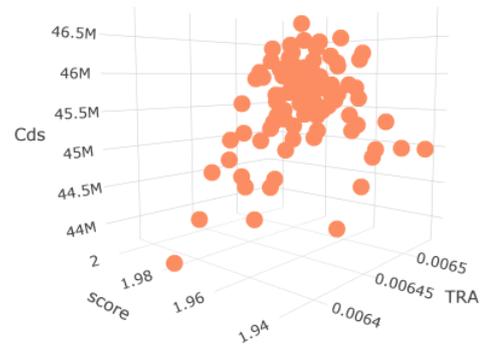


FIGURE 2 – TRA, Cds et score

La méthode dite ϵ -contrainte

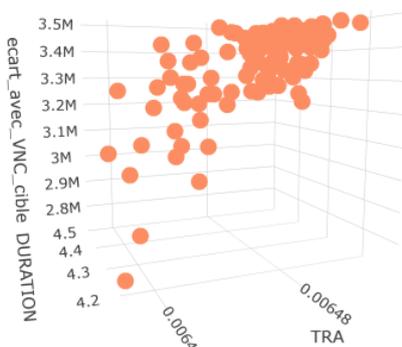


FIGURE 3 – TRA, Ecart et duration

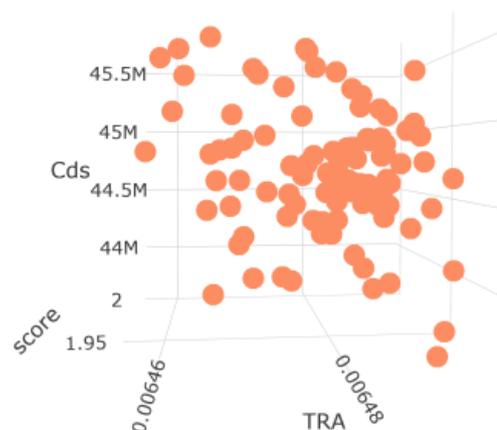


FIGURE 4 – TRA, Cds et score

La méthode dite ϵ -contrainte est plus sensible que la méthode de pondération comme le présentent les figures (13 et 15). La méthode pondération offre un grand voisinage de portefeuilles potentiellement vendables. Ainsi, la méthode dite de pondération sera utilisée pour effectuer la projection.

Résultat rolling obligataire

TRA	0,65%
Ecart avec la cible	0,08 M€
Score	2,00
Duration	4,36
Cds	46,22 M€
RC utilisée	40,3%
MIN VNC	0,80 M€
MAX VNC	30,51 M€

TABLE 1 – Les métriques de la solution choisie

	Répartition en VNC	Répartition en VM
A	45,90%	43,52%
AA	0,65%	0,61%
BBB	38,05%	38,64%
HY	0,74%	0,83%
France	14,65%	16,40%
Total général	100,00%	100,00%

TABLE 2 – Caractéristiques des obligations vendues

Le portefeuille vendable choisi à une composition de plus de 80% d'obligations d'entreprises, ce qui montre qu'une partie du risque avec un faible taux rendement comptable a été vendu.

Après la vente de ce portefeuille obligataire, on investira tout le montant de la vente dans l'achat de nouvelles obligations pour fermer le gap duration avec une précision $\rho = 10^{-2}$.

Le portefeuille acheté se présente de la manière suivante :

TRA	3,9%
Score	1,36
Duration	21,68

TABLE 3 – Métriques de la solution

Obligations/Maturités	20	30	Total général
A	0%	7,50%	7,50%
AA	8,31%	0%	8,31%
BBB	14,19%	0%	14,19%
France	45,46%	24,54%	70%
Total général	67,96%	32,04%	100%

TABLE 4 – Répartition des obligations

Le portefeuille dispose d'un taux de rendement actuariel de 3,9%, d'une duration de 21,68. Il présente une composition majoritaire en obligations gouvernementales française, ce qui montre solidité financière du portefeuille d'achat.

Son coût en SCR est donné par :

SCR marché sans rolling	SCR marché avec rolling	ecart en SCR marché
785,7 M€	788,1 M€	0,3%

Le faible écart entre les SCR de marché indique que le rolling n'est pas coûteux.

Après l'application du *rolling*, nous utilisons le modèle ALM afin d'effectuer des projections et par la suite, nous analysons les sorties² du modèle ALM en scénario central.

— Taux de rendement comptable

Le taux de rendement comptable obligataire du portefeuille après *rolling* est largement supérieur à celui sans *rolling* jusqu'à 2036 à cause du rendement très élevé des nouvelles obligations dans le portefeuille. Le rapprochement entre les taux avant et après *rolling* est lié en parti à la vente des obligations à court terme et aux réinvestissements des tombées en nominaux sur les OAT 10 ans voir le graphique ci-dessous.

actuariel moyen, la duration moyen, score de notation et Cds ont été définis pour trouver une solution financièrement stable.

2. Le taux de rendement comptable obligataire avec application du rolling est supérieur à celui sans rolling à cause l'apport de nouvelles obligations à haut rendement.

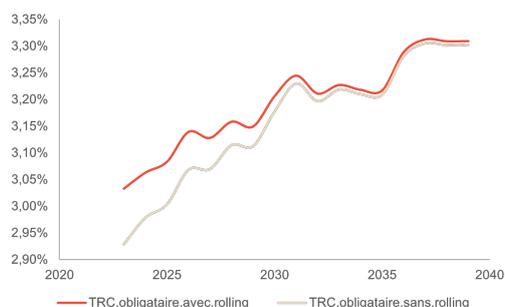


FIGURE 5 – Taux de rendement comptable obligataire

— Marge financière

L'application d'un rolling avec un taux de vente de 3,5%, un intervalle de durée de [0,10] et coupon de [0,2%], génère une marge financière inférieure à celle sans application du rolling. Cela peut être en partie dû à la vente court et moyen voir [0,5] et un achat d'obligations de long terme.

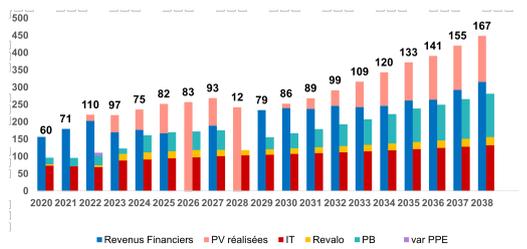


FIGURE 6 – Marge financière avec rolling

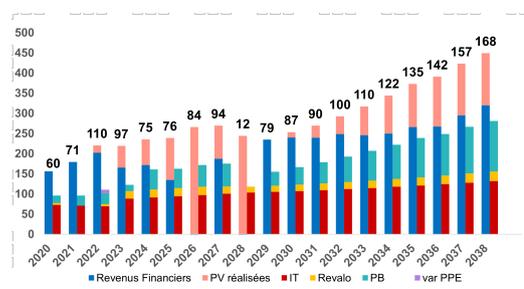


FIGURE 7 – Marge financière sans rolling

Analyse de sensibilités contraintes

Face aux résultats précédents et suite aux exigences de groupe Malakoff Humanis, le taux de vente a été revu à hausse et l'intervalle de durée fut changé³.

Pour cette sensibilité, le portefeuille vendu à une composition de plus de 80% d'obligations d'entreprises, ce qui signifie que la vente absorbe une partie du risque de l'entité.

TRA	0,72%
Ecart avec la cible	66 111,00
Score	1,72
Duration	9,40
Cds	67,32
RC utilisée	98%
MIN VNC	0,70 M€
MAX VNC	40,20 M€

TABLE 5 – Les métriques de la solution choisie

	Répartition en VNC	Répartition en VM
A	30,17%	30,97%
AA	0,47%	0,50%
BBB	23,34%	26,09%
Belgium	3,21%	2,54%
France	27,21%	26,82%
Spain	15,60%	13,08%
Total général	100,00%	100,00%

TABLE 6 – Caractéristiques des obligations vendues

Après la vente de ce portefeuille obligataire, on investira tout le montant de la vente dans l'achat de nouvelles obligations pour fermer le gap durée avec une précision $\rho = 10^{-2}$.

Le portefeuille acheté se présente de la manière suivante :

3. taux de vente = 5% et intervalle de durée [3, 20]

TRA	3,9%
Score	1,35
Duration	19,79

TABLE 7 – Métriques de la solution

Obligations/Maturités	5	20	30	Total général
A	0%	0%	7,50%	7,50%
AA	0%	7,49%	0%	7,49%
BBB	0%	15,01%	0%	15,01%
France	0%	68,35%	0%	68,35%
Germany	1,65%	0%	0%	1,65%
Total général	1,65%	90,85%	7,50%	100%

TABLE 8 – Répartition des obligations

La composition du portefeuille présente des caractéristiques similaires aux portefeuilles d'achats précédents. Ce portefeuille dispose d'un taux de 3,9% et d'une durée de 19,79. Les obligations achetées ont pour maturité respective (5 ans, 20 ans et 30 ans).

Son coût en SCR est donné par

SCR marché sans rolling	SCR marché avec rolling	écart en SCR marché
785,4 M€	786,1 M€	0,05%

Après l'application du *rolling*, nous utilisons le modèle ALM afin d'effectuer des projections et par la suite, nous analysons les sorties⁴ du modèle ALM en scénario central.

— Taux de rendement comptable obligataire

Le taux de rendement comptable obligataire du portefeuille après *rolling* est supérieur à celui sans *rolling* sur toute la durée de projection. Ceci est en partie dû à l'achat des nouvelles obligations possédant de grand rendement et des ventes à moyen et long terme.

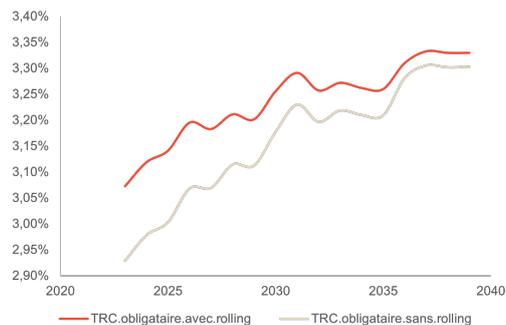


FIGURE 8 – Taux de rendement comptable obligataire

— Marge financière

4. Le taux de rendement comptable obligataire avec application du rolling est supérieur à celui sans rolling à cause l'apport de nouvelles obligations à haut rendement.

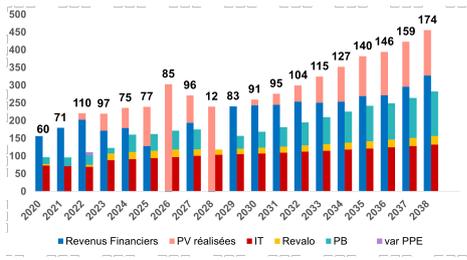


FIGURE 9 – marge financière avec rolling

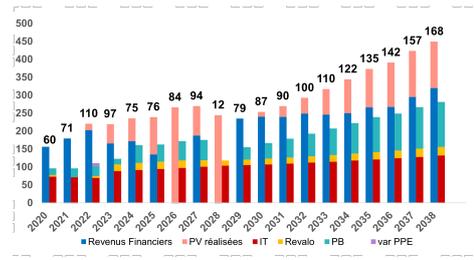


FIGURE 10 – marge financière sans rolling

La marge financière avec application du *rolling* est supérieure à celle sans sur toute la durée de projection, à cause de l'achat d'obligations de moyen et long terme et la vente sur un horizon de moyen terme.

Analyse de sensibilités scénario

Pour tester la solidité de la stratégie du *rolling*, le scénario pessimiste du modèle ALM du groupe Malakoff Humanis a été testé. La marge financière de ce scénario est donnée par :

Marge financière

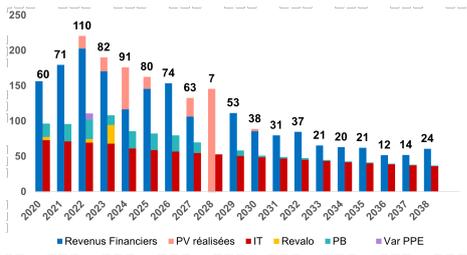


FIGURE 11 – marge financière avec rolling en scénario adverse

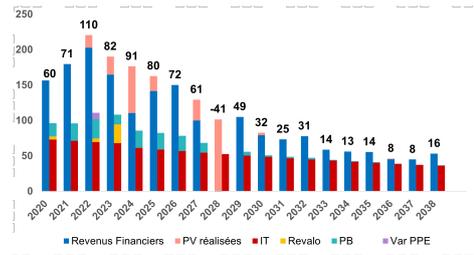


FIGURE 12 – marge financière sans rolling en scénario adverse

En observant les marges financières, on constate que l'utilisation du *rolling* est plus que bénéfique, car elle reste positive toute la durée de projection, contrairement à la marge financière sans qui présente une valeur négative en 2028. De plus, on constate la supériorité des marges financières avec *rolling* par rapport à celle sans.

Executive summary

Context and Problem Statement

This thesis is situated within an unstable economic environment. Indeed, following two decades marked by declining rates and in the aftermath of the "COVID-19" health crisis, Europe will experience high inflation in the second half of 2022, leading to a sharp rise in interest rates. This will consequently impact the equity of companies predominantly offering life insurance contracts. Therefore, the company must pay special attention to mitigating the impact of rate fluctuations on equity, all while capitalizing on the current rate context.

The objective of this thesis is to decrease interest rate sensitivity on equity while increasing the accounting yield through the implementation of a bond "rolling" strategy, with no changes to the previous allocation. Additionally, it aims to assess the impact of this new strategy on asset/liability management indicators.

Initially, there will be a presentation of the entity along with the current economic context. Subsequently, a methodological description of implementing the bond rolling strategy through sale and purchase operations will be provided, followed by a comparison of different models used for selling. Then, the integration of the post-rolling foundation into the ALM model will be discussed to derive the asset/liability management indicators. Lastly, a sensitivity analysis on parameters and an adverse scenario will be conducted

The bond rolling strategy

The bond rolling strategy, also known as bond rotation or bond recycling, involves selling bonds with low accounting yield and subsequently purchasing new bonds that offer higher and better quality yields in terms of credit rating, thereby reducing the risk of default. The bond rolling strategy involves two distinct operations.

First, a **selling** operation is carried out to liquidate bonds offering a low accounting yield. This step allows for the release of financial resources by disengaging from underperforming assets.

Next, the **purchase** operation follows, which involves acquiring new bonds with better potential in terms of yield and credit rating. This step aims to reinvest the funds from the sales into more attractive assets. Hence, our strategy will focus on targeting bonds that offer a better yield.

The selling model⁵

In the context of sales, two methods were considered, namely :

5. Given the paradox between mathematical and financial solutions, metrics such as average actuarial yield, average duration, credit rating score, and CDS have been defined to find a financially stable solution.

- The so-called ϵ -constraint method
- The so-called weighting method

The Purchase Model

The purchase model was established by combining the two previous methods.

Comparison of Sales Methods

The model was calibrated for a sales rate of 3.5%, an interval of coupon rate [0.2%], and a duration interval of [0.10]. A calibration was performed to achieve a deviation of 3.5 million euros between the target and the net accounting value.

weighting method

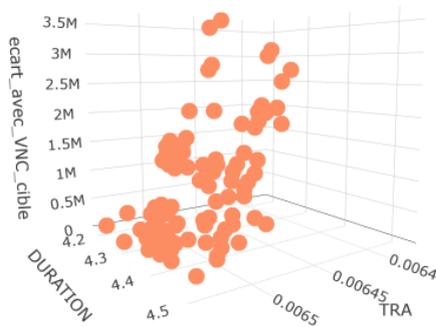


FIGURE 13 – Yield, gap and duration

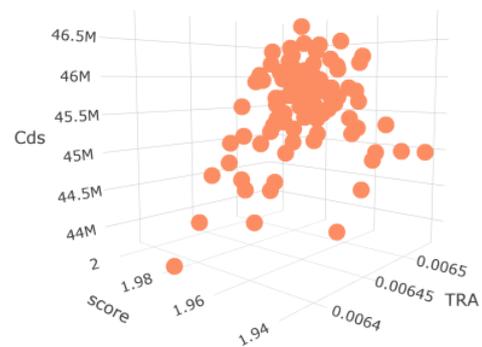


FIGURE 14 – Yield, Cds and rating

the ϵ -constraint method

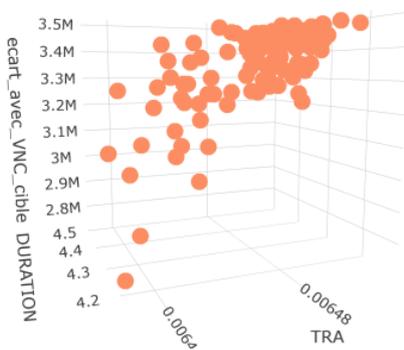


FIGURE 15 – Yield, gap and duration

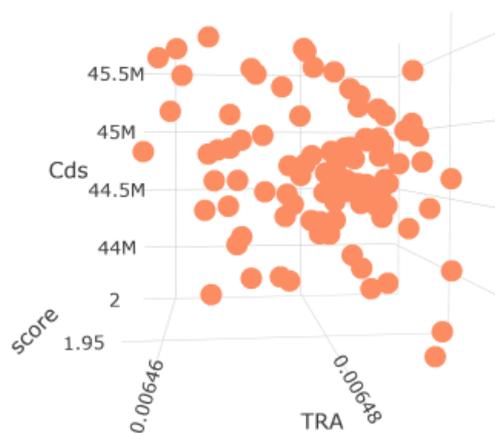


FIGURE 16 – Yield, Cds and rating

The ϵ -constraint method is more sensitive than the weighting method, as shown in figures (13 and 15). The weighting method provides a wide range of potentially tradable portfolios. Therefore, the weighting method will be used to perform the projection.

Bond Rolling Result

TRA	0,65%
Deviation from target	0,08 M€
Score	2,00
Duration	4,36
CDS	46,22 M€
Utilized CR	40,3%
MIN VNC	0,80 M€
MAX VNC	30,51 M€

TABLE 9 – Selected solution metrics

	VNC Distribution	VM Distribution
A	45,90%	43,52%
AA	0,65%	0,61%
BBB	38,05%	38,64%
HY	0,74%	0,83%
France	14,65%	16,40%
Overall total	100,00%	100,00%

TABLE 10 – Characteristics of sold bonds

TRA	3,9%
Score	1,36
Duration	21,68

TABLE 11 – Solution metrics

Bonds/Maturity	20	30	Overall total
A	0%	7,50%	7,50%
AA	8,31%	0%	8,31%
BBB	14,19%	0%	14,19%
France	45,46%	24,54%	70%
Overall total	67,96%	32,04%	100%

TABLE 12 – Obligations distribution

The selected marketable portfolio comprises over 80% of corporate bonds, indicating that a portion of the risk associated with low accounting yield has been divested.

After the sale of this bond portfolio, the entire proceeds from the sale will be invested in purchasing new bonds to close the duration gap with a precision of $\rho = 10^{-2}$. The purchased portfolio is structured as follows :

The portfolio has an actuarial yield of 3.9% and a duration of 21.68. It primarily consists of French government bonds, demonstrating the financial strength of the purchasing portfolio.

Its Solvency Capital Requirement (SCR) cost is provided by. :

SCR market without rolling	SCR market with rolling	Difference in SCR market
785,7 M€	788,1 M€	0,3%

The small difference between market SCR values indicates that the rolling is not costly. After applying the rolling, we use the ALM model to perform projections and subsequently analyze the outputs⁶ of the ALM model in the central scenario.

— Accounting Yield

6. The accounting bond yield rate with the application of rolling is higher than without rolling due to the addition of new high-yield bonds.

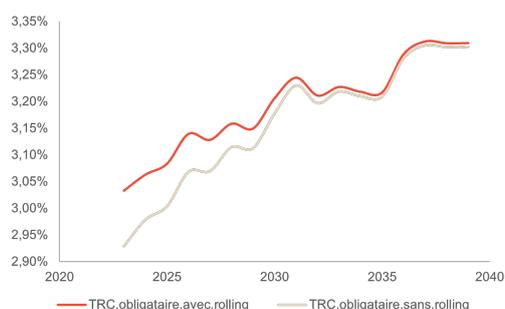


FIGURE 17 – Accounting Yield of Bonds

The accounting bond yield of the portfolio after *rolling* is significantly higher than that without *rolling* until 2036 due to the high yield of the new bonds in the portfolio. The convergence between the yields before and after *rolling* is partly attributed to the sale of short-term bonds and the reinvestment of principal payments into 10-year OATs, as shown in the graph below.

Financial Margin

Applying rolling with a sales rate of 3.5%, a duration interval of [0,10], and a coupon of [0.2%] generates a financial margin lower than that without applying rolling. This could be partly due to the short and medium-term sales within [0,5] and a purchase of long-term bonds.

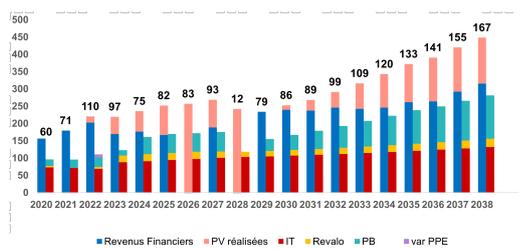


FIGURE 18 – Financial Margin with rolling

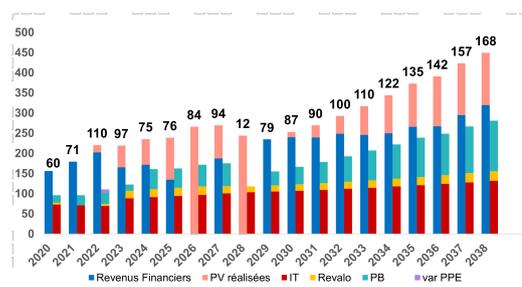


FIGURE 19 – Financial Margin without rolling

Constrained Sensitivity Analysis

Given the previous results and following the requirements of the Malakoff Humanis group, the sales rate has been revised upwards, and the duration interval was changed ⁷.

For this sensitivity analysis, the portfolio sold consists of over 80% corporate bonds, indicating that the sale absorbs a portion of the entity's risk.

TRA	0.72%
Deviation from target	66,111.00
Score	1.72
Duration	9.40
CDS	67.32
Utilized CR	98%
MIN VNC	0.70 M€
MAX VNC	40.20 M€

TABLE 13 – Selected solution metrics

	VNC Distribution	VM Distribution
A	30,17%	30,97%
AA	0,47%	0,50%
BBB	23,34%	26,09%
Belgium	3,21%	2,54%
France	27,21%	26,82%
Spain	15,60%	13,08%
Total général	100,00%	100,00%

TABLE 14 – Characteristics of bonds sold

7. sales rate = 5% and duration interval [3, 20]

After selling this bond portfolio, we'll invest the entire amount of the sale in the purchase of new bonds to close the duration gap with a precision of $\rho = 10^{-2}$. purchased portfolio looks as follows :

TRA	3,9%
Score	1,35
Duration	19,79

TABLE 15 – Solution metrics

Obligations/Maturity	5	20	30	Overall total
A	0%	0%	7,50%	7,50%
AA	0%	7,49%	0%	7,49%
BBB	0%	15,01%	0%	15,01%
France	0%	68,35%	0%	68,35%
Germany	1,65%	0%	0%	1,65%
Total général	1,65%	90,85%	7,50%	100%

TABLE 16 – Bond breakdown

The composition of the portfolio is similar to that of previous purchase portfolios. The portfolio has a yield of 3.9 % and a duration of 19.79. The bonds purchased have respective maturities of 5 years, 20 years and 30 years.

Its Solvency Capital Requirement (SCR) cost is provided by. :

SCR market without rolling	SCR market with rolling	Difference in SCR market
785,4 M€	786,1 M€	0,05%

Following the application of rolling, we use the ALM model to carry out projections, and then analyze the outputs of the ALM model in the central scenario.

— Accounting Bond Yield

The accounting bond yield of the portfolio after *rolling* is higher than that without *rolling* throughout the projection period. This is partly attributed to the purchase of new bonds with high yields and sales of medium and long-term bonds.

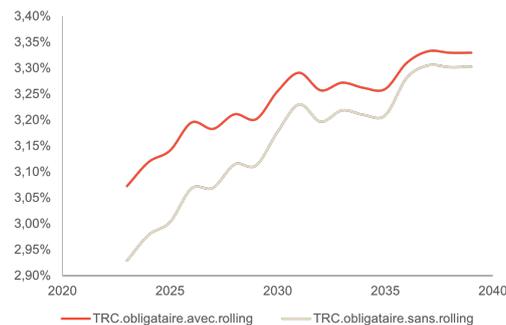


FIGURE 20 – Accounting Bond Yield

— Financial Margin

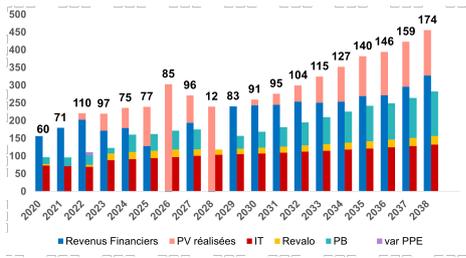


FIGURE 21 – Financial Margin with rolling

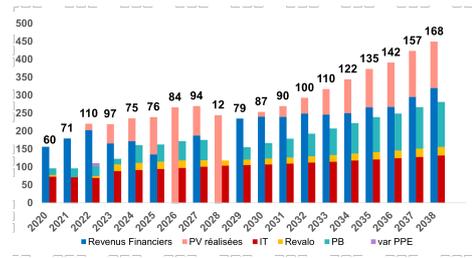


FIGURE 22 – Financial Margin without rolling

The financial margin with the rolling strategy applied is higher than that without rolling throughout the projection period. This is attributed to the acquisition of medium and long-term bonds and the divestment over a medium-term horizon.

Scenario sensitivity analysis

To test the soundness of the *rolling* strategy, the pessimistic scenario of the Malakoff Humanis Group’s ALM model was tested. The financial margin for this scenario is given by :

Financial margin

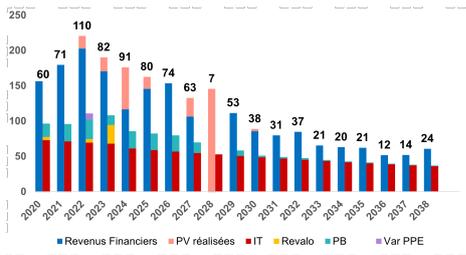


FIGURE 23 – financial margin with rolling in adverse scenario

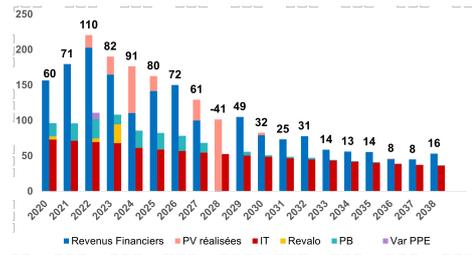


FIGURE 24 – Financial Margin Without Rolling in Adverse Scenario

By observing the financial margins, it is evident that the use of *rolling* is highly beneficial, as it remains positive throughout the projection period, unlike the margin without it, which turns negative in 2028. Additionally, the superiority of the financial margins with *rolling* compared to those without it is evident.

Remerciements

Je souhaiterais sincèrement remercier toutes ces personnes qui ont contribué à la réalisation de mon alternance et à sa bonne tenue, mais aussi celles qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce rapport. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Hedi LAKHDAR, responsable du pôle ALM et Solvabilité 2 pour la confiance qu'il m'a accordé et l'intérêt des missions qu'ils m'ont confiées tout au long de cette année d'alternance.

Je voudrais aussi remercier Tristan RAISON, mon tuteur d'alternance pour son encadrement, sa confiance et aussi pour tous ses conseils.

Je voudrais accorder une mention spéciale de remerciement à Naoufal El Bekri et Elise Durand. Dans ce même élan, je profite pour remercier chaleureusement l'ensemble de l'équipe ALM et Solvabilité 2, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, pour leur aide à mon intégration rapide dans leur équipe et aussi pour leur bonne ambiance.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe pédagogique de l'EURIA pour l'enseignement de qualité dispensé tout au long de ces deux ans de formation.

Enfin, je remercie ma famille, Marie Ange Effi et mes amis pour les conseils et la relecture de ce mémoire.

Abréviations

ALM : *Asset and liability management*

VNC : Valeur nette comptable

VM : Valeur de marché

VE : Valeur économique

TRA : Taux de rendement actuariel

TRC : Taux de rendement comptable

BE : *Best estimate*

PMVL : Plus ou moins-value latente

S2 : Solvabilité II

SCR : *Solvency Capital Requirement*

RC : Réserve de capitalisation

OAT : Obligation assimilable à bon de trésor

RM : *Risk margin*

PT : Provision technique

BCE : Banque centrale européenne

LTEI : *Long Term Equity Investment*

PVR : Plus-value réalisée

Md€ : Milliard d'euros

M€ : Million d'euros

NR : Non noté

HY : *High yield*

Table des matières

1	CONTEXTE ECONOMIQUE ET PROBLÉMATIQUE	3
1.1	Contexte économique et cadre du sujet	4
1.1.1	Présentation de l'entité assurantielle	4
1.2	Impacts de l'environnement de taux sur le bilan	10
1.2.1	Les acteurs clés et indicateurs	10
1.2.2	Environnement de baisse des taux	11
1.2.3	Environnement de hausse des taux	12
1.2.4	Impact de l'environnement des taux sur l'entité	13
1.3	Contexte actuel du marché obligataire	14
1.3.1	Baisse du marché des obligations secondaires	14
1.3.2	Potentialité du marché primaire des obligations	14
2	MODÉLISATION DU ROLLING OBLIGATAIRE	15
2.1	Principe du rolling obligataire	16
2.1.1	Les caractéristiques des obligations	17
2.1.2	Les contraintes du <i>rolling</i>	20
2.1.3	Métriques comparatives	22
2.2	Modèle de vente	25
2.2.1	Présentation et objectif	25
2.2.2	Le modèle utilisé	29
2.3	Modèle d'achat	33
2.3.1	Présentation et objectif	33
2.3.2	Les modèles utilisés	36
3	Application et étude de cas	41
3.1	Présentation des données	42
3.1.1	Données pour la vente	42
3.1.2	Données pour l'achat	43
3.2	Description du modèle ALM	44
3.2.1	Le vieillissement	45
3.3	Indicateur financier	46
3.3.1	Le Solde ou écart de trésorerie	46
3.3.2	Le taux de rendement comptable	47
3.3.3	La marge financière	47
3.3.4	Le Coût en SCR marché	47
3.4	Analyse de résultat	50
3.4.1	Comparaison des méthodes de vente	50
3.4.2	Application du rolling	51
3.5	Étude de sensibilité	56
3.5.1	sensibilités contraintes	56

3.5.2	Sensibilités scénario	59
4	Les limites et ouvertures de l'étude proposée	61
4.1	Au niveau du modèle de vente	62
4.1.1	Sensibilité de l'algorithme et problème de données	62
4.1.2	Multiobjectivité	62
4.2	Au niveau du modèle d'achat	62
4.2.1	Multiobjectivité	62
4.2.2	Autres variables à optimiser	62
4.3	Plus loin	63
A	Annexe	67
A.1	Équivalence entre TRC et TRA dans le cadre des obligations fixes	67
A.1.1	Obligation zéros coupon	67
A.1.2	Obligation classique	68
	Bibliographie	75

Introduction

Dans un environnement économique en constante évolution, la gestion de risque et la recherche de rendement constituent l'une des préoccupations majeures des assureurs. Alors que les taux d'intérêts connaissent une hausse, les assureurs se trouvent confrontés à de nouveaux défis comme l'instabilité des fonds propres pour optimiser leurs portefeuilles. Historiquement, la méthode utilisée pour réaliser leur objectif consistait à faire de l'allocation d'actifs. Toutefois, face aux potentialités du marché obligataire dans ce contexte de remontée des taux, une stratégie innovante connue sous le nom de *rolling* obligataire émerge.

Cette stratégie consiste à accroître le taux de rendement comptable obligataire, en tenant compte de l'arbitrage sur le marché obligataire, et fermer le gap de duration réduisant ainsi l'impact des taux sur les fonds propres. L'approche courante est utilisée en maintenant l'allocation d'actifs initiale inchangée.

Le présent mémoire a pour objectif d'explorer la stratégie du *rolling* obligataire en conservant l'allocation initiale stable. Pour y parvenir, cette étude suit des étapes méthodologiques. Ces étapes se déroulent selon le plan suivant.

La première partie de cette étude consiste d'abord à présenter l'entité soumise à notre étude ainsi que le contexte macroéconomique. Ensuite, la situation de la compagnie d'un point de vue actif et passif, le contexte de taux actuel et, pour terminer, les enjeux et la problématique soulevée par ce mémoire y sont abordés.

La deuxième partie sera consacrée à la description de la stratégie de *rolling* envisagée. Le principe de la stratégie et une explication détaillée sur chaque opération. L'opération de vente visant à vendre des obligations qui génèrent un faible taux rendement comptable et l'opération d'achat pour la sélection puis l'achat des obligations à haut rendement permettant la fermeture du gap de duration.

La troisième partie porte sur les différents résultats obtenus lors de l'application du *rolling*, à savoir la composition du portefeuille de vente et d'achat ainsi que les indicateurs de gestion d'actif/passif après projection par le modèle ALM de la base post-*rolling*.

En dernière partie, les limites et solutions sur les deux opérations du *rolling* ainsi qu'une ouverture plus générale sur l'étude proposée.

CONTEXTE ÉCONOMIQUE ET PROBLÉMATIQUE

Sommaire

1.1	Contexte économique et cadre du sujet	4
1.1.1	Présentation de l'entité assurantielle	4
1.2	Impacts de l'environnement de taux sur le bilan	10
1.2.1	Les acteurs clés et indicateurs	10
1.2.2	Environnement de baisse des taux	11
1.2.3	Environnement de hausse des taux	12
1.2.4	Impact de l'environnement des taux sur l'entité	13
1.3	Contexte actuel du marché obligataire	14
1.3.1	Baisse du marché des obligations secondaires	14
1.3.2	Potentialité du marché primaire des obligations	14

1.1 Contexte économique et cadre du sujet

1.1.1 Présentation de l'entité assurantielle

L'étude se fera sur une entité du groupe Malakoff Humanis commercialisant majoritairement les produits d'épargne, retraite et de prévoyance. Une description exhaustive de certains éléments pertinents pour notre étude sera donnée tant au niveau de l'actif que du passif.

On commencera par introduire le passif de notre entité.

Présentation du passif

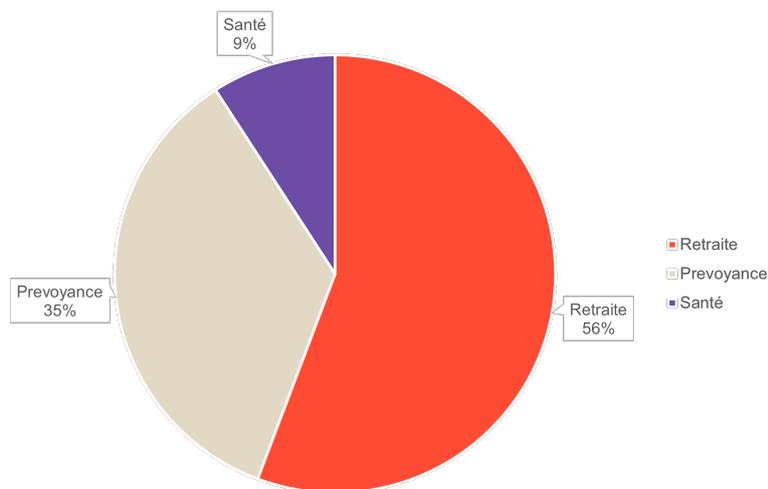


FIGURE 1.1 – Présentation de l'entité

L'entité assurantielle soumise à notre étude a trois principales garanties, à savoir :

Santé : Elle représente 9% des provisions du portefeuille de l'entité assurantielle. Elle dispose d'une durée moyenne d'un an, ce qui signifie que les risques assurés sont très courts. Les principaux risques couverts au niveau de la santé sont : les frais médicaux, l'hospitalisation, l'optique, le dentaire, etc.

Bien avant d'aborder la deuxième grande garantie du portefeuille, une notion du calcul du taux technique sera présentée vu que ce dernier est utilisé pour calculer les provisions mathématiques de certains contrats de prévoyance. Le lien entre le taux technique et le taux moyen d'emprunt d'État (TME) sera présenté.

Le taux technique correspond au rendement financier minimum pour lequel s'engage un assureur pour un contrat d'assurance et qui est anticipé dans la mise en place du calcul des provisions mathématiques et cotisations par l'actualisation des flux financiers futurs. Toutefois, la réglementation fixe un taux technique maximum que les organismes d'assurance sont dans l'obligation de respecter. Ainsi, le calcul du taux maximum diffère selon l'opération d'assurance¹.

Opération vie hors branche 26 : maximum de 60% du TME moyen des 6 derniers mois

Opération non-vie : maximum de 75% du TME moyen des 24 derniers mois (jusqu'à novembre 2010, 75% du TME moyen des 6 derniers mois)

1. <https://www.spac-actuaiers.fr/lexique/taux-technique/>

La prévoyance : Elle constitue la deuxième plus grande garantie en termes de provisions dans le portefeuille. Elle se compose d'une partie vie et d'une autre non-vie réparties par les sous risques suivants :

Sous risques	BE sinistre	Duration (en année)
Décès et Décès accidentel	182,4 M€	1,9
Rente Éducation et Rente de conjoint	406,9 M€	12,9
Arrêt de travail	1717,6 M€	7,4
Emprunteur : risque décès et arrêt de travail	126,3 M€	4,7
Dépendance Partielle ou Total	0,0 M€	0

TABLE 1.1 – Présentation du BE et de la duration par sous risque

Comme le présente le tableau, l'arrêt de travail est la garantie la plus coûteuse en terme BE. Par contre, la rente d'éducation et la rente de conjoint disposent d'une duration plus élevée en raison de la durée des contrats. La dépendance est l'un des sous risques qui possède une duration inférieure à un en raison de l'âge moyen des assurés qui est 75,63.

	Rente conjoint	Rente éducation	Invalidité	Incapacité	Dépendance
Age moyen des bénéficiaires(an)	73,67	20,07	54,92	46,95	75,63

TABLE 1.2 – Âge moyen des bénéficiaires par sous risque

Épargne retraite : L'épargne retraite représente le plus grand produit dont dispose l'entité assurantielle. Elle comprend deux grandes familles de contrats, à savoir : la retraite par capitalisation (dont le fonctionnement est basé sur l'accumulation par les travailleurs d'un stock de capital qui sera servi pour financer leurs pensions lorsqu'ils deviendront inactifs) et la retraite par répartition (représentant un système de financement par les cotisations basées sur les revenus professionnels des travailleurs servant de montants de pensions des retraités). Au sein du régime de capitalisation, on distingue la rente viagère différée (**RVD**) comme le contrat le plus contraignant du point de vue des provisions mathématiques et duration. Elle rémunère à un taux technique moyen de 3%.

Étant donné que l'épargne retraite constitue la plus grande garantie du portefeuille et dispose des contrats ayant des durations très élevées. Nous ferons un focus sur cette garantie.

Focus epargne retraite

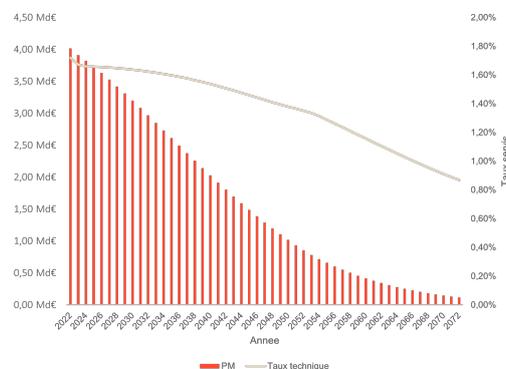


FIGURE 1.2 – Écoulement des provisions et des taux servis sans prise en compte des affaires nouvelles et des cotisations du stock

Comme le présente la figure 1.2, nous avons l'écoulement des provisions diminuant progressivement avec le temps. Cette diminution des provisions et du taux technique (relativement haut) est due à l'arrivée en maturité ou à la sortie de plusieurs contrats d'assurance.

Redistribution

La redistribution représente la manière dont les bénéfices ou les gains sont divisés entre les assurés et les bénéficiaires dans un contrat d'assurance. La revalorisation, qui consiste en l'ajustement périodique des valeurs des prestations et la participation, constituent les deux principaux mécanismes de redistribution au sein de notre entité.

Ayant donné une description synthétique de notre passif, nous allons maintenant à notre actif en débutant par la présentation des placements et en faisant un focus sur l'obligataire.

Présentation du portefeuille d'actifs

²Le portefeuille d'actifs de notre entité assurantielle est diversifié comme le présente la maille agrégée³ de nos placements ci-dessous :

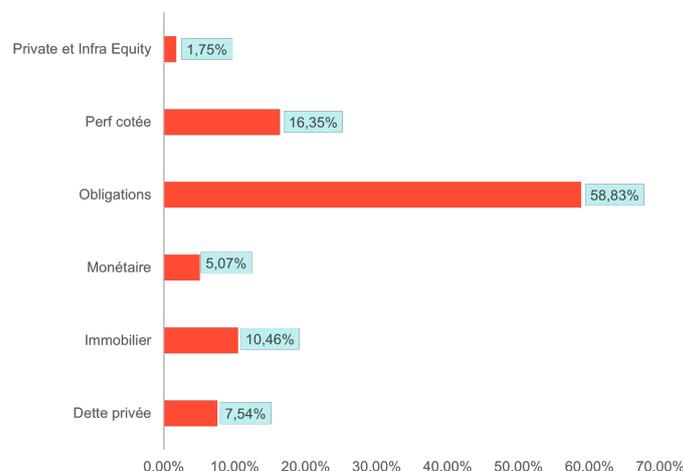


FIGURE 1.3 – Allocation l'actif au 31/12/2022 en VNC

En termes de placements, l'entité assurantielle a une grande répartition en obligataire, car elle offre une sécurité et des revenus réguliers qui servent généralement à payer les différentes prestations (décès, rente, etc.). Néanmoins, elle représente un risque de défaut sous-jacent qui est en partie lié à la notation financière de chaque obligation.

Au 31/12/2022, les valeurs comptables nettes et les valeurs de marché sont les suivantes :

	VNC	PVML	VM
Dette privée	551 M€	-7,00%	512 M€
Immobilier	764 M€	43,27%	1094 M€
Monétaire	370 M€	-0,02%	370 M€
Obligations	4228 M€	-2,89%	4105 M€
Perf cotée	1194 M€	25,14%	1494 M€
Private et Infra Equity	128 M€	60,46%	205 M€
Total général	7234 M€	7,56%	7781 M€

TABLE 1.3 – Composition initiale en VM, PMVL et VNC

Le portefeuille génère actuellement une plus-value latente globale de 7,56% de sa valeur nette comptable. Cependant, il est important de noter que cette performance positive est tempérée par des moins-values sur la dette privée et l'obligataire qui s'élèvent respectivement à -7% et -2,89%. Ces moins-values sont en partie dues à la récente augmentation des taux d'intérêts, ce qui a entraîné une baisse de la valeur de marché de certains actifs dans le portefeuille. Toutefois, les classes d'actifs à haut risque comme l'immobilier, la performance cotée et les actions réalisées auparavant ont profité d'une tendance haussière sur ces marchés.

Portefeuille obligataire

En raison de la capacité d'emprunt solide et du faible risque de défaut, le portefeuille obligataire est majoritairement composé d'obligations gouvernementales, soit 77% contre 33% pour les obligations

3. maille agrégée : la maille est utilisée dans le cadre de projection

d'entreprises qui offrent un plus grand rendement en dépit du risque de défaut plus élevé (voir figure 1.4).

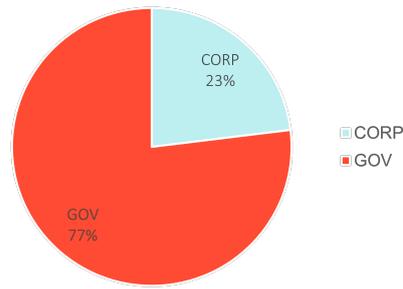


FIGURE 1.4 – Répartition obligataire

Le portefeuille obligataire gouvernemental est intégralement composé d'obligations émises par des pays de la zone européenne notés entre AAA et BBB. Ces pays incluent l'Autriche, la Belgique, l'Allemagne, l'Espagne, le Luxembourg, l'Irlande, l'Italie, le Portugal, la Slovaquie et la France, qui représentent plus de 60% du portefeuille gouvernemental comme l'indique la figure 1.5.

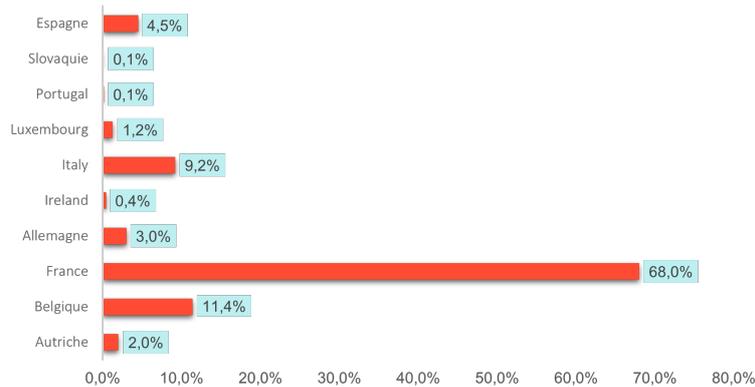


FIGURE 1.5 – Répartition obligataire gouvernementale en VNC

Le portefeuille obligataire corporatif quant à lui se compose d'obligations notées de AAA à BBB, ainsi que des obligations non notées (NR) et à haut rendement (HY) (voir figure 1.6) qui offrent des taux très élevés. Cette diversité dans le portefeuille permet d'inclure des émissions à la fois bien notées et à rendements plus élevés, tout en tenant compte des obligations non notées qui génèrent des rendements significatifs.

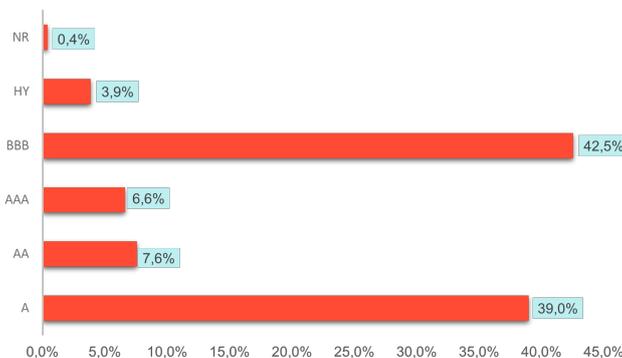


FIGURE 1.6 – Répartition obligataire corporative en VNC

Politique obligataire

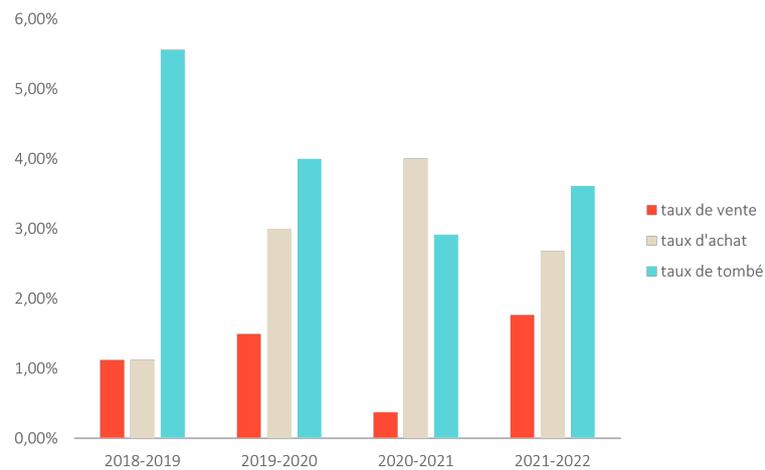


FIGURE 1.7 – Politique obligataire

Comme la figure 1.7 présente, l'entité assurantielle ne vend pas énormément d'obligations comme on peut l'observer sur le taux de vente (la maximum des ventes est de 1,8%), elle les garde généralement jusqu'à leur maturité. Elle effectue très peu d'achats au vu de la distribution des taux d'achats, son pic d'achat s'est effectué entre 2020-2021 avec un taux de plus de 3,5%.

1.2 Impacts de l'environnement de taux sur le bilan

Dans cette section, on présentera brièvement l'impact de l'environnement des taux d'intérêts sur le secteur de l'assurance-vie.

Afin de mieux comprendre le contexte de taux environnant, il est important de définir acteurs et indicateurs qui s'y rapportent.

1.2.1 Les acteurs clés et indicateurs

La banque centrale européenne (BCE)

La Banque centrale européenne (BCE) assume la responsabilité de la monnaie européenne, l'euro. Dans ce rôle, elle exerce une régulation tant sur les taux d'intérêts que sur la quantité de monnaie en circulation. Son objectif principal est de maintenir la stabilité des prix en visant un taux d'inflation de 2%. Pour atteindre ses objectifs, la BCE dispose de différents outils, notamment le taux directeur.

Les taux directeurs établis par la BCE jouent un rôle crucial en influençant directement le taux auquel les banques commerciales prêtent aux particuliers. En conséquence, ils constituent un levier essentiel pour contrôler l'inflation. Son mécanisme de contrôle se fait de la manière suivante :

- En cas d'inflation faible, la BCE peut décider de baisser ses taux directeurs afin de faciliter les emprunts à moindre coût pour les particuliers et les entreprises. Cette mesure vise à stimuler l'économie, favoriser la croissance.
- En cas d'inflation significative, la BCE peut décider d'élever son taux directeur. Cette mesure vise à freiner les emprunts des particuliers et des entreprises, limitant ainsi l'activité économique tout en tenant à maîtriser l'inflation.

⁴ Contrairement aux autres banques centrales, la BCE dispose de trois taux directeurs distincts, à savoir :

- Le taux de refinancement qui représente le taux d'intérêt auquel les banques commerciales empruntent des liquidités. Il est l'outil principal utilisé pour contrôler l'inflation, car il a un impact direct sur les taux proposés par les banques commerciales.
- Le taux de prêt marginal qui représente quant à lui le taux d'intérêt auquel les banques commerciales paient lorsqu'elles empruntent des liquidités de manière quotidienne.
- Le taux de rémunération des dépôts qui fait office de référence au taux d'intérêt auquel les réserves obligatoires des banques commerciales de la zone euro sont réglées.

L'Obligation Assimilable du Trésor (OAT)

Les OAT plus connues sous le nom d'Obligations Assimilables du Trésor, sont des titres émis par le Trésor à moyen et long terme, avec des échéances allant de 2 à 50 ans. Par exemple, le taux associé à l'OAT 10 ans représente le taux fixe auquel l'État français emprunte pour une durée de 10 ans.

La Banque de France publie quotidiennement le taux de l'OAT 10 ans⁵. Ce taux est utilisé comme référence pour les emprunts interbancaires à long terme. En conséquence, il a un impact direct sur les

4. <https://abc-economie.banque-france.fr/les-taux-directeurs>

5. <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/taux-indicatifs-des-bons-du-tresor-et-oat>

taux appliqués aux ménages.

De plus, le taux de l'OAT 10 ans est fortement suivi dans le secteur de l'assurance-vie. Les compagnies d'assurance-vie en France allouent une grande partie de leurs investissements aux obligations émises par l'État français, principalement en raison de la solide notation de crédit de la France, évaluée à **AA** par les agences de notation.

Les compagnies d'assurance-vie accordent une importance majeure aux (OAT) 10 ans, car ils constituent un solide indicateur pour eux.

1.2.2 Environnement de baisse des taux

Origine des taux bas

Durant ces deux dernières décennies, les taux d'intérêt ont affiché une tendance à la baisse, un phénomène qui s'est amplifié après la crise financière de 2008.

La période de baisse des taux constatée est principalement due aux résultats d'une politique monétaire très accommodante. Après les crises financières de 2008-2009 et la crise souveraine, la BCE a mis en œuvre plusieurs mesures permettant de réduire progressivement ses taux directeurs entre 2009 et 2016.

Depuis 2014, la BCE a également mis en place une politique de détente ou souplesse monétaire appelée "quantitative easing". Cette stratégie implique l'achat massif d'actifs, principalement des titres de dette publique, dans le but de faire baisser les taux d'intérêts. L'objectif essentiel de cette mesure est de stimuler la croissance économique et de favoriser l'augmentation de l'inflation.

Les divers indicateurs qui attestent de la diminution des taux

Ces divers éléments ont conduit à une baisse continue des taux d'intérêts comme le montre la Figure 1.8 qui reprend l'historique des taux entre 2008 et 2022

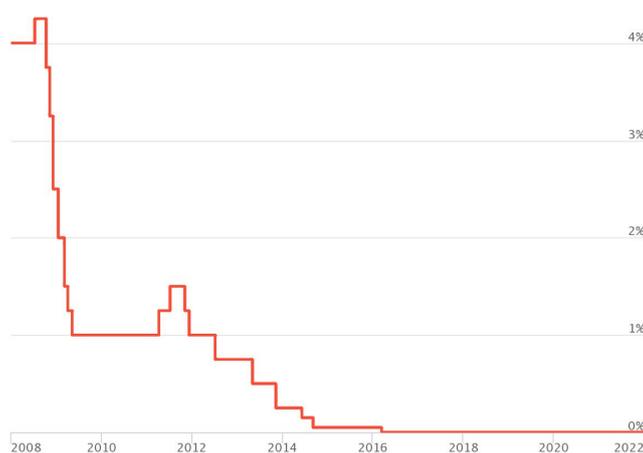


FIGURE 1.8 – Taux historiques de refinancement de la BCE

On remarque une diminution progressive du taux de refinancement de la BCE⁶, passant de 4% à 0% entre 2008 et 2022.

Depuis 2008, les taux des obligations assimilables du Trésor (OAT) 10 ans ont connu une tendance à la baisse. À partir de juin 2019, ces taux ont franchi un seuil historique en devenant négatifs pour la première fois (voir figure 1.9).

6. <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/taux-interbancaires>

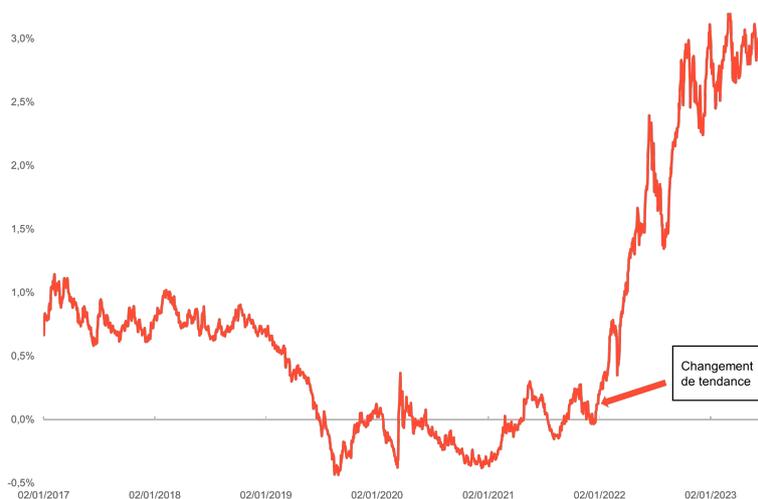


FIGURE 1.9 – Historique des taux OAT 10 ans jusqu'au 02/01/2023

Impacts des taux bas sur le bilan d'une assurance-vie

Il faut noter que l'impact des taux sur le bilan est lié aux rapports de sensibilités de taux entre l'actif et le passif.

Les obligations verront leurs valeurs de marché augmenter en raison de la relation inverse avec les taux d'intérêt. De plus, nous constaterons une augmentation des provisions, car elle permettra de prendre en compte la faible rentabilité des investissements. Dans le cas où le passif est plus sensible aux taux d'intérêt que l'actif, nous observerons une baisse des fonds propres, due en partie à une forte augmentation des provisions, et vice versa..

1.2.3 Environnement de hausse des taux

Origine de la hausse soudaine des taux

L'augmentation des taux d'intérêt est généralement une conséquence de l'inflation. En avril 2022, les taux d'intérêt en France étaient de l'ordre de 4,5%, tandis que dans la zone euro, ils pouvaient atteindre jusqu'à 7,5%.

Face à cette situation, la Réserve fédérale américaine (FED) et la Banque d'Angleterre (BoE), représentante de la BCE aux États-Unis et en Angleterre, ont relevé leurs taux directeurs. En mai 2022, la BCE a annoncé une "forte probabilité" de hausse des taux pour le mois de juillet.

Les divers indicateurs qui attestent de la hausse des taux

La hausse inattendue des taux d'intérêts a influencé les rendements des obligations assimilables du Trésor (OAT) 10 ans comme on peut le voir sur la figure 1.9.

À partir de 2022, les taux des OAT 10 ans ont subi une hausse soudaine. Cette hausse était plus accrue après le mois de juillet.

Impacts de la hausse des taux sur le bilan de l'assurance-vie

Comme mentionné précédemment, la relation inverse entre les taux d'intérêts et le prix de marché entraîne la baisse des obligations. Les provisions étant aussi basées sur des hypothèses liées aux taux d'intérêts sont revues à la baisse dans ce contexte spécifique de taux, voir (1.1). Dans le cas où le passif est plus sensible que l'actif, la provision a une diminution plus prononcée que l'actif provoquant une diminution des fonds propres et inversement.

$$PM = RM + BE \quad \text{avec} \quad RM = CoC \times \sum_{t=0}^{T-1} \frac{SCR_t}{(1+r_{t+1})^{t+1}} \quad \text{et} \quad BE = \sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1+r_t)^t} \quad (1.1)$$

r_t est la courbe de taux.

Dans le cas où le passif est plus sensible à l'actif

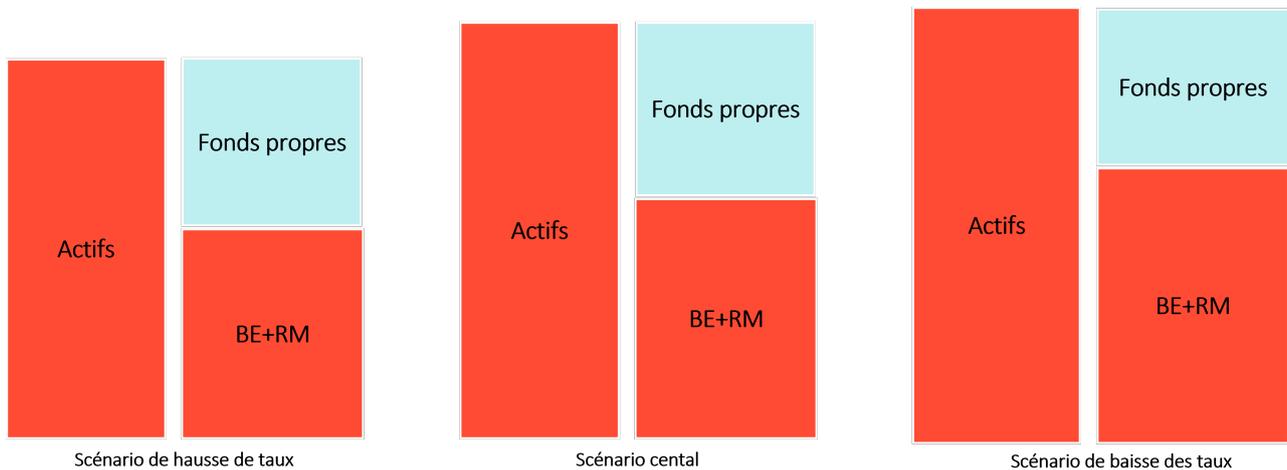


FIGURE 1.10 – Impact de la hausse et de la baisse des taux sur le bilan de l'entité assurantielle

1.2.4 Impact de l'environnement des taux sur l'entité

Les différentes variations de la courbe de taux ont eu un impact sur notre entité d'assurance-vie. Nous avons deux périodes distinctes. Une période de baisse du ratio de solvabilité entre 2018 et 2020 où nous avons une chute de 141% à 106 %, ce qui est en partie due à l'environnement de taux bas très marqué en 2020. Ensuite une période de hausse entre 2020 et 2022 allant jusqu'à 166% qui est en partie causée par une remontée progressive de la courbe des taux.

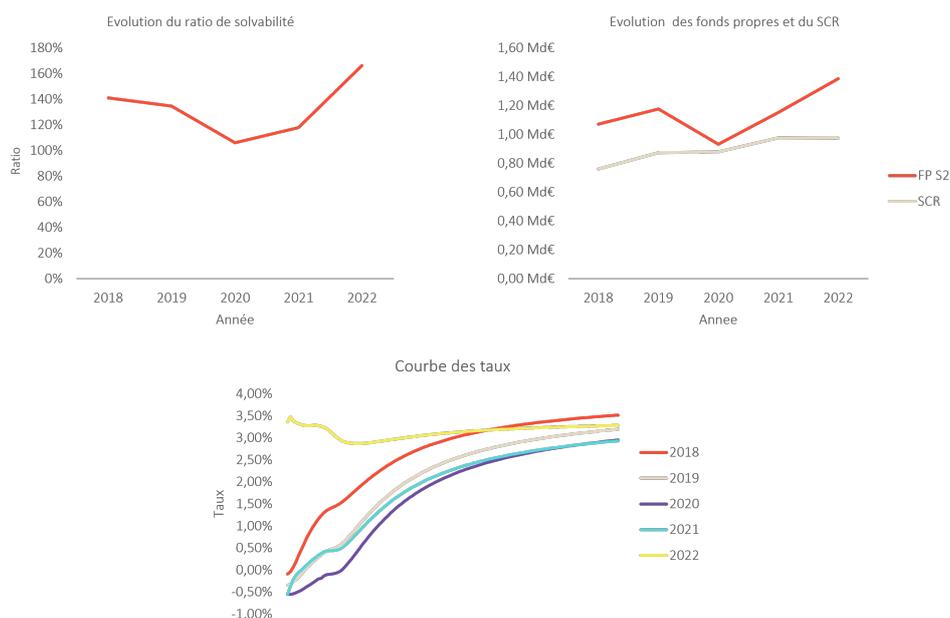


FIGURE 1.11 – Impact de l'environnement des taux sur l'entité assurantielle

1.3 Contexte actuel du marché obligataire

Pendant la crise sanitaire de la Covid-19, la Banque Centrale Européenne (BCE) a adopté une politique monétaire souple visant à maintenir les taux directeurs à des niveaux relativement bas. Cependant, en raison de la situation économique instable, l'importante inflation a rendu nécessaire une normalisation de la politique monétaire de la BCE. Cette normalisation implique une augmentation des taux directeurs qui aura un impact sur les différents marchés financiers, plus précisément sur le marché obligataire. Cette inflation entraînera une baisse sur le marché secondaire des obligations, mais ouvrira également des opportunités d'investissements sur le marché primaire

1.3.1 Baisse du marché des obligations secondaires

En période d'inflation induisant la hausse des taux, le marché secondaire des obligations est fortement affecté. En effet, les obligations émises précédemment voient leurs cotations diminuer sur le marché, entraînant potentiellement une moins-value latente, en raison de leur relation inverse avec les taux d'intérêts. Étant donné le contexte des taux actuels, il y a un certain arbitrage qui peut se créer entre ces obligations et celles du marché primaire.

1.3.2 Potentialité du marché primaire des obligations

Dans le marché primaire, où les nouveaux titres sont échangés, les émetteurs se voient contraints d'augmenter les taux de rendements de leurs obligations en réponse à la hausse des taux, afin d'attirer les investisseurs.

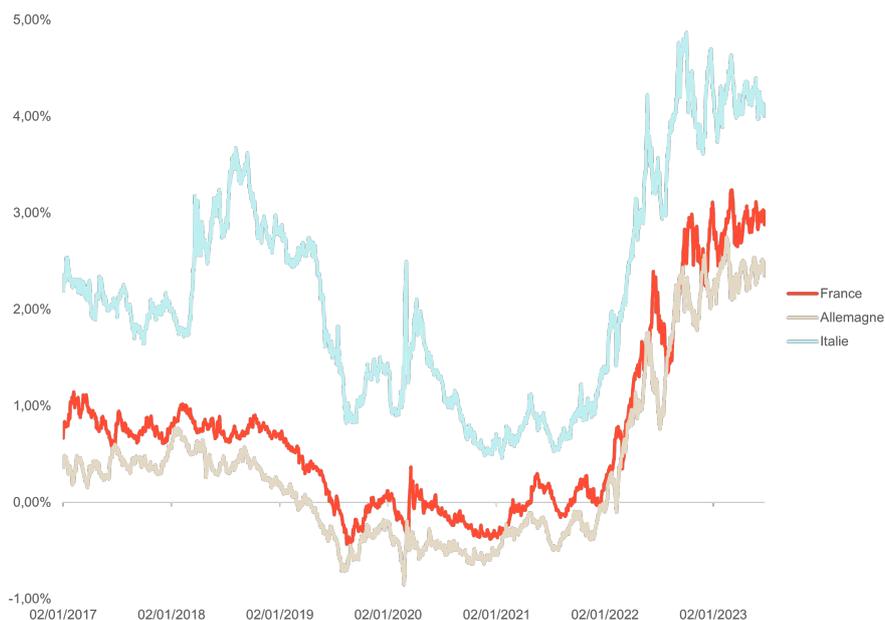


FIGURE 1.12 – Évolution des OAT 10 ans France, Allemagne et Italie

Selon la figure 1.12, le taux des obligations gouvernementales anciennement bas après la crise covid-19 a commencé à augmenter à partir de juillet 2022. Ce qui peut se constater sur le graphique où les taux de la France, Allemagne et Italie sont au-dessus de 2% à partir octobre 2022.

Conclusion

Dans ce contexte, l'objectif de ce mémoire est d'effectuer un rolling obligataire qui permettra de réduire l'impact de la variation des taux sur les fonds propres en pilotant le gap de durée. Parallèlement, une étude sera menée pour analyser si cette nouvelle stratégie permet d'aligner les flux de trésoreries entrants et sortants.

MODÉLISATION DU ROLLING OBLIGATAIRE

Sommaire

2.1	Principe du rolling obligataire	16
2.1.1	Les caractéristiques des obligations	17
2.1.2	Les contraintes du <i>rolling</i>	20
2.1.3	Métriques comparatives	22
2.2	Modèle de vente	25
2.2.1	Présentation et objectif	25
2.2.2	Le modèle utilisé	29
2.3	Modèle d'achat	33
2.3.1	Présentation et objectif	33
2.3.2	Les modèles utilisés	36

L'objectif de ce chapitre est de fournir une présentation détaillée de la stratégie du *rolling obligataire*, également connue sous le nom de *rotation obligataire* qui nous permettra de résoudre notre problématique qui est de fermer le gap de duration. La fermeture du gap de duration consiste à égaliser la duration de l'actif (DA) à celle du passif (DP). Cette recherche d'égalisation entre les durations se fera en optimisant la classe d'actif obligataire à taux fixe au vu de sa prépondérance dans le portefeuille d'actifs.

NB

Du fait que la duration du passif est nette des fonds propres, cela entraîne un effet de volume plus accentué sur les actifs par rapport aux passifs. En conséquence, les entreprises utilisent une méthode appelée "gap pondéré" (ou *weighted duration gap (WDG)*), qui sera désignée par le terme "gap de duration".

Une représentation schématique du problème dans la figure suivante :

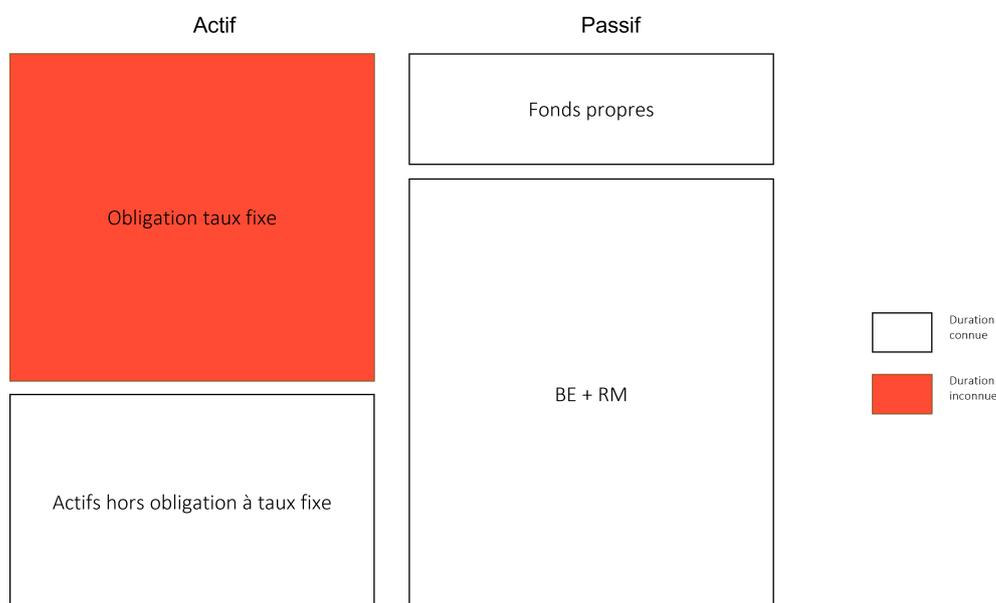


FIGURE 2.1 – Bilan simplifié S2 sous contrainte du rolling

La formulation mathématique du problème est donnée par :

$$DG = \frac{VM_{actif}}{VE_{passif}} DP - DA \xrightarrow{\text{optimisation}} DG \approx 0$$

Ce chapitre est subdivisé en trois sections distinctes, à savoir :

1. le principe du *rolling* obligataire
2. la présentation du modèle de vente
3. la présentation du modèle d'achat

2.1 Principe du rolling obligataire

Le *rolling obligataire*, également connu sous les termes de *rotation obligataire* ou *recyclage obligataire*, est une stratégie qui consiste à vendre des obligations générant un faible taux de rendement comptable, pour ensuite acheter de nouvelles obligations offrant un rendement plus élevé et de meilleure qualité en termes de notation et donc un faible risque de défaut. La stratégie du *rolling obligataire* implique deux opérations distinctes.

D'abord, une opération de **vente** est effectuée afin de liquider des obligations offrant un faible taux de rendement comptable. Cette étape permet de libérer des ressources financières en se désengageant des actifs moins performants.

Ensuite, vient l'opération d'**achat**, qui consiste à acquérir de nouvelles obligations présentant de meilleurs potentiels en termes de rendement et de qualité de notation. Cette étape vise à réinvestir les fonds provenant des ventes dans des actifs plus attractifs. Ainsi, notre stratégie consistera à cibler des obligations donnant un meilleur taux de rendement.

Pour mettre en œuvre ces deux méthodes, il est primordial de bien comprendre les différentes caractéristiques de la classe d'actif obligataire, ainsi que les contraintes associées à la stratégie du *rolling obligataire*. De plus, il est important d'identifier des métriques appropriées qui seront utilisées pour évaluer et comparer les résultats obtenus. De manière schématique, le *rolling* se perçoit de la manière suivante :

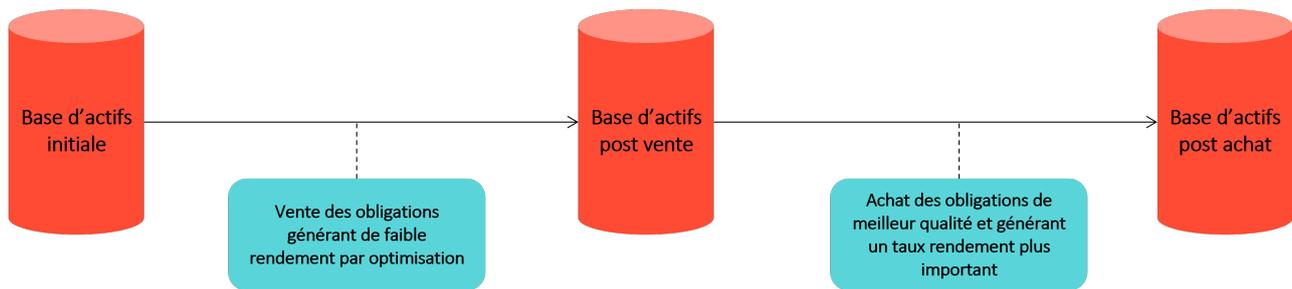


FIGURE 2.2 – Présentation synthétique du principe du rolling obligataire

2.1.1 Les caractéristiques des obligations

Dans cette section, on présentera des éléments permettant de modéliser les obligations.

Le coupon

Le coupon¹ d'une obligation correspond à l'intérêt que l'obligation verse à son détenteur.

$$\text{coupon}(t) = \text{nominal} \times \text{taux de coupon}(t)$$

La valeur de marché

La valeur de marché d'un actif représente le prix auquel il peut être acheté ou vendu sur le marché. En pratique, nous considérons la valeur de marché comme étant la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs en utilisant les taux de marché appropriés. De manière générale, la valeur de marché (VM) est exprimée par l'équation suivante :

$$\text{VM}(t) = \sum_{i=1+t}^M \frac{\text{Flux}_i}{(1+r_i)^i}$$

Avec r_i : taux de marché, et M : la maturité

$$\text{Flux}_i = \begin{cases} \text{coupon}_i & \text{si } i < M \\ \text{coupon}_i + \text{nominal} & \text{si } i = M \end{cases}$$

1. Le coupon peut rester fixe ou varier selon la nature de l'obligation. Par exemple, les obligations à taux variables et les obligations indexées.

La valeur nette comptable

La valeur nette comptable (VNC) représente la valeur de l'actif à l'instant t . À l'instant initial, elle correspond au prix d'achat. Cependant, elle évolue par la suite pour correspondre à la somme des flux actualisés au taux de rendement actuariel (TRA).

$$\text{VNC}(t) = \sum_{i=1+t}^M \frac{\text{Flux}_i}{(1 + \text{TRA})^i}$$

$$\text{Prix d'achat} = \sum_{i=1+\text{DateAchat}}^M \frac{\text{Flux}_i}{(1 + \text{TRA})^i}$$

La surcote-décote

La surcote-décote (SD) représente la différence entre valeur nette comptable de l'actif et le prix d'achat.

$$\text{VNC}(t) = \text{Prix d'achat} \pm \text{SD}(t)$$

$$\text{SD}(t) = \sum_{i=1+t}^M \frac{\text{Flux}_i}{(1 + \text{TRA})^i} - \sum_{i=1+\text{DateAchat}}^M \frac{\text{Flux}_i}{(1 + \text{TRA})^i}$$

Yield to maturity

Le taux de rendement ou *Yield to maturity*² (YTM) est le taux qui permet d'égaliser le prix de l'obligation et la somme des flux actualisés.

$$\text{VM}(t) = \sum_{i=1+t}^M \frac{\text{Flux}_i}{(1 + \text{YTM})^i} \quad \forall t \geq 0$$

La duration sur la VM

La duration d'un actif est une mesure de sensibilité par rapport aux taux d'intérêt. Elle est interprétée par une variation en pourcentage du prix de cet actif induite par la variation du taux de rendement (YTM). Il existe deux types de duration à savoir la duration modifiée ou sensibilité et la duration de Macaulay .

La sensibilité est donnée par la formule suivante :

$$D_{\text{modified}} = \frac{1}{\text{VM}} \times \frac{d\text{VM}}{d\text{YTM}}$$

De manière pratique, elle permet d'approcher la variation de la valeur ΔVM par une variation infinitésimale du taux de rendement.

$$D_{\text{modified}} \approx \frac{\Delta\text{VM}}{\text{VM}} \times \frac{1}{\Delta\text{YTM}}$$

2. Le *Yield to maturity* ou taux de rendement diffère du TRA car contrairement à ce dernier, il varie.

La duration de Macaulay est donnée par :

$$D_{Macaulay} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i \times \text{Flux}_i}{(1+YTM)^i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\text{Flux}_i}{(1+YTM)^i}}$$

La duration de Macaulay et la duration modifiée sont liées par la formule ci-dessous :

$$D_{modified} = \frac{D_{Macaulay}}{(1 + YTM)}$$

Le coupon couru

Le coupon couru (CC) représente la part des intérêts qui ont été accumulés depuis le dernier paiement du coupon, mais qui n'ont pas encore été versés.

$$CC = \frac{\text{nombre de jours}}{\text{période}} \times \text{taux de coupon}$$

Le spread

Le spread représente la différence entre le taux de rendement d'une obligation et celui d'un emprunt non risqué sur une même durée. Il mesure de manière plus précise le surplus de rendement que les investisseurs exigent pour détenir une obligation par rapport à un investissement sans risque.

La maturité résiduelle

La maturité résiduelle à un instant t fait référence à l'écart de durée entre l'instant t et la date de remboursement du nominal. Elle se calcule d'année en année.

Les plus ou moins-values latentes

Les plus ou moins-values latentes d'un actif obligataire correspondent à la différence entre sa valeur de marché et sa valeur nette comptable.

$$PMVL = VM - VNC$$

Réserve de capitalisation

La réserve de capitalisation ou (RC) est une réserve prévue pour faire face à la dépréciation des valeurs incluses dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leurs revenus. Cette réserve est constituée lorsque des sorties (vente ou conversion) sont effectuées avant l'échéance des valeurs mobilières amortissables réglementées qui sont :

- Les obligations à taux fixe
- les Titres de Créances Négociables (TCN)

Les caractéristiques des obligations définies, nous procéderons à la définition des contraintes du *rolling*, qui nécessite l'utilisation de certaines de ces caractéristiques définies.

2.1.2 Les contraintes du *rolling*

Le *rolling* obligataire suscite diverses contraintes qui varient en fonction de l'opération réalisée. Ainsi, nous introduirons les contraintes en fonction de chaque opération. Conformément à la séquence du *rolling*, nous allons commencer par définir les contraintes liées à l'opération de vente et par la suite, nous aborderons celles liées à l'opération d'achat.

Opération de vente

L'opération de vente se résume en deux contraintes. Les contraintes de sélection de la base vendable qui vont permettre de définir les lignes d'actifs éligibles au processus de vente, tandis que les contraintes d'optimisation, comme l'indique le nom, interviennent au niveau du programme d'optimisation.

— les contraintes de sélection

Le problème de vente soumis à notre étude est un problème NP-complet semblable aux problèmes du voyageur du commerce et celui du sac à dos qui sont tous deux des problèmes d'optimisation combinatoire. Ainsi, pour disposer d'un ensemble réduit de solutions, nous utilisons deux métriques obligataires pour effectuer la sélection de la base dite "vendable". Les métriques obligataires sont les suivantes :

- Le taux de coupon, car il constitue un indicateur pour déterminer le rendement d'une obligation dans un portefeuille. En pratique, on définit un taux de coupon minimal acceptable, si une obligation a un taux inférieur au taux de coupon minimal acceptable, cette obligation est potentiellement vendable. Nous pouvons observer la répartition des classes de taux de coupon fixe en VNC ci-dessous :

Classe de taux de coupon	VNC	Répartition en VNC
[0,1%[1540 M€	36%
[1%,2%[893 M€	21%
[2%,3%[392 M€	9%
[3%,4%[208 M€	5%
[4% ;5%[664 M€	16%
[5% ;6%[492 M€	12%
[6% ;7%[46 M€	1%
>=8%	13 M€	0%
Total général	4247 M€	100%

TABLE 2.1 – Répartition de la classe des taux de coupons en VNC

Du point de vue taux de coupon, on sera plus favorable à vendre des obligations entre 0% et 2% vu la tendance actuelle des indicateurs comme le livret A et l'OAT 10 ans. En effet, le livret A étant indexé par l'inflation à augmenter jusqu'atteindre 2% le 31/12/2022 cible de la BCE et promet encore une augmentation. De plus, l'OAT 10 ans ainsi que certaines obligations ayant une prépondérance dans le portefeuille obligataire fixe se voient toutes dépasser les 2% au 31/12/2022. Ainsi, nous décidons de nous aligner sur le taux du livret A actuel pour la sélection par taux de coupon.

- La duration, car elle permet de mesurer la perte ou le gain en cas de variation des taux d'intérêts. Ci-dessous, nous pouvons visualiser la répartition par classe de duration en VNC.

Classe de durée	VNC	Répartition en VNC
[0,5[992 M€	23%
[5,10[1413 M€	33%
[10,20[1718 M€	40%
[20,30[124 M€	3%
Total général	4247 M€	100%

TABLE 2.2 – Répartition de la classe de durée en VNC

En observant le tableau 2.2, on pourra éventuellement décider de ne pas vendre des obligations dont la durée se situe dans l'intervalle $[0, 5[$ au risque d'avoir un impact négatif sur l'adossement à court terme voir cinq ans. Par contre, la vente dans l'intervalle $[5, 30[$ pourrait être envisagée pour avoir un adossement positif sur les cinq premières années au moins.

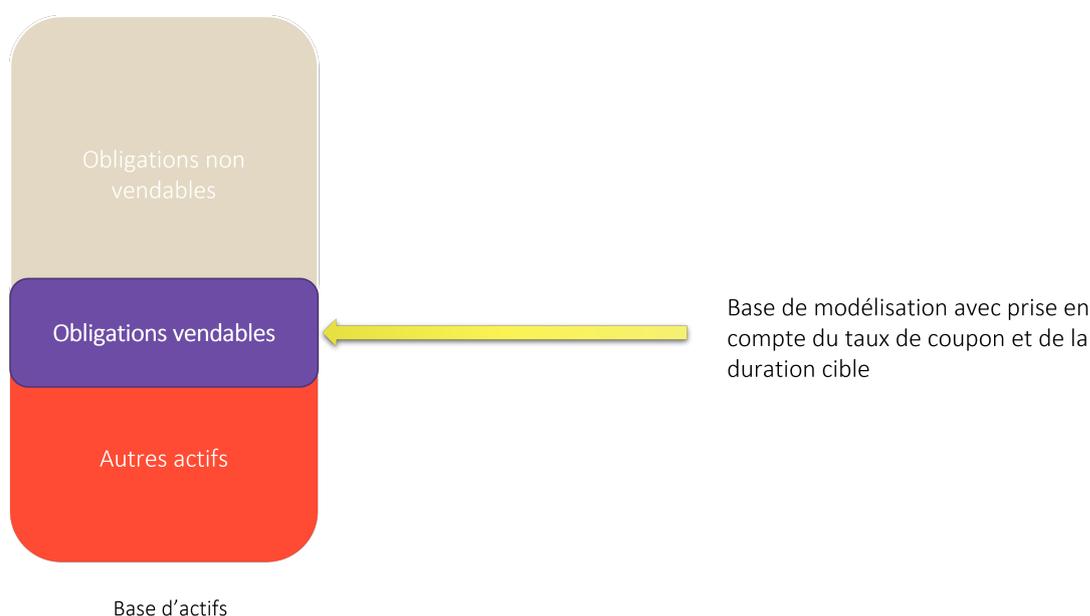


FIGURE 2.3 – Base d'obligations vendables sélectionnées

— Contraintes d'optimisation

Les contraintes d'optimisation jouent un rôle très important dans la modélisation, car elles permettent de choisir les obligations du portefeuille qui seront vendues. Elles incluent le montant cible que nous désirons vendre, ce qui peut élargir ou rétrécir notre panier d'obligations vendables. Toutefois, cette vente pourrait générer un coût pour la compagnie, car celle-ci est exposée à des moins-values latentes qui sont en partie dues à la hausse des taux. Ainsi, la réserve de capitalisation sera éventuellement utilisée afin d'absorber les coûts dus à la perte en valeur des obligations lors de l'opération de vente.

Opération d'achat

Similairement à la vente, les contraintes d'achats se divisent en deux catégories : les contraintes de constitution de la base achetable et les contraintes d'optimisation. Vu le caractère NP-complet du problème d'achat, les contraintes de constitution sont principalement des hypothèses essentielles pour sélectionner une base d'achat adaptée et simplifier certains calculs. En revanche, les contraintes secondaires entrent dans le processus de modélisation de l'achat et permettent de choisir de manière

adéquate les obligations qui permettront de fermer notre gap de duration.

— Contraintes de constitution

Les hypothèses concernant l'opération d'achat sont les suivantes :

- L'achat des obligations se fera exclusivement sur le marché primaire afin de réduire l'ensemble des obligations achetables et réduire la complexité de la constitution de la base d'achat. En période de hausse des taux, ils présentent de meilleurs rendements sur les investissements obligataires.
- Les obligations sont achetées au pair pour une simplification de la construction de la base d'achats ainsi :

$$VM = VNC = \text{Prix d'achat}$$

- Les obligations AAA, AA, A et BBB sont considérées comme achetables pour respecter la qualité d'obligations du portefeuille de l'entité assurantielle. Nous présentons ci-dessous la répartition du rating en VNC initiale.

Rating	VNC	Répartition en VNC
A	561 M€	13%
AA	2724 M€	64%
AAA	321 M€	8%
BBB	642 M€	15%
Total général	4247 M€	100%

TABLE 2.3 – Répartition du Rating du portefeuille initiale en VNC

- Les principales obligations achetables seront les gouvernementales et les corporatives. Toutefois, les corporatives seront divisées en financier et en non financier³ pour diversifier notre portefeuille d'achat.

— Contraintes d'optimisations

Dans le cadre de l'opération d'achat, les contraintes secondaires jouent un rôle fondamental dans le processus de modélisation, elles visent à identifier le portefeuille optimal en termes de rendement. Deux sous contraintes essentielles doivent être prises en compte :

- La sous contrainte budgétaire : L'achat des nouvelles obligations doit être effectué en respectant strictement le montant disponible issu de **la vente des obligations** afin de garder l'allocation obligataire constante,
- La contrainte de répartition : Une répartition adéquate en terme d'obligations gouvernementales et d'entreprises, en termes de ratings associés afin de garantir la diversification du portefeuille d'achat,

Les contraintes étant définies, nous allons maintenant définir les indicateurs financiers qui nous permettront de définir la qualité d'un portefeuille de vente.

2.1.3 Métriques comparatives

Face aux paradoxes entre les solutions mathématiques et financières, nous définissons des métriques qui vont nous permettre de nous affranchir du problème purement mathématique. Les métriques utilisées dans le but d'effectuer le challenge financier sont au nombre de cinq, à savoir :

3. le secteur non financier regroupe une multitude de secteurs tels que : l'agriculture, l'industrie, l'énergie et la pharmaceutique, etc...

- le taux de rendement actuariel moyen
- la duration
- le score de notation
- le coût de couverture du *credit default swap* plus connu sur l'acronyme (CDS)

Pour donner une formulation plus exacte des métriques comparatives, nous allons introduire les notations suivantes :

- N : taille de la base d'actif
- i : la i -ème ligne d'actif obligataire fixe
- VNC_i : les valeurs nettes comptables de l'obligation fixe i
- VM_i : les valeurs de marché de l'obligation fixe i
- TRA_i : le taux de rendement actuariel de l'obligation fixe i
- D_i : la duration de l'obligation fixe i
- VM_{total} : le total de la valeur de marché des obligations fixes
- VNC_{total} : le total de la valeur nette comptable des obligations fixes
- R_i : la notation en termes d'échelons de crédit de l'obligation i
- CDS_i : le cds de l'obligation fixe i

TRA_m

Le taux de rendement actuariel moyen TRA_m est utilisé comme mesure du rendement comptable généré par un portefeuille. Ce taux se calcule en effectuant un barycentre du TRA_i de chaque ligne d'actif vendu. En d'autres termes, TRA_m est déterminé en faisant la moyenne pondérée des TRA_i par la VNC_i de chaque ligne d'actifs du portefeuille.

$$TRA_m = \frac{1}{VNC_{total}} \sum_{k=1}^N TRA_k \times VNC_k$$

Du point de vue du TRA_m , le meilleur portefeuille dans notre objectif de vente est celui qui présente le taux de rendement actuariel moyen le plus faible.

D_m

La duration moyenne pondérée D_m est une mesure de sensibilité face aux variations des taux d'intérêts. Elle se calcule en faisant le barycentre des durations D_i de chaque ligne d'actifs vendues. En d'autres termes, la duration moyenne pondérée est déterminée en faisant la moyenne pondérée des durations D_i par la valeur de marché de chaque actif VM_i du portefeuille.

$$D_m = \frac{1}{VM_{total}} \sum_{k=1}^N D_k \times VM_k$$

La duration prend en compte la valeur de marché pour capter les fluctuations des taux d'intérêts en vigueur sur le marché.

En termes de duration, le meilleur portefeuille est celui qui possède la duration la plus faible.

Score de notation

Le score de notation, qu'on appellera par la suite score, est une mesure de la qualité du portefeuille en termes de notation financière. Il se calcule en effectuant un barycentre de l'échelon de crédit de

chaque ligne de vente R_i . En d'autres termes, le score est déterminé en faisant une moyenne pondérée de l'échelon de crédit R_i et de VNC_i de chaque actif vendu dans le portefeuille.

$$\text{Score} = \frac{1}{VNC_{\text{total}}} \sum_{k=1}^N R_k \times VNC_k$$

Du point de vue du score de notation, le meilleur portefeuille dans notre objectif de vente est celui qui présente le score le plus élevé. ⁴En outre, celui qui a le risque de défaut le plus important.

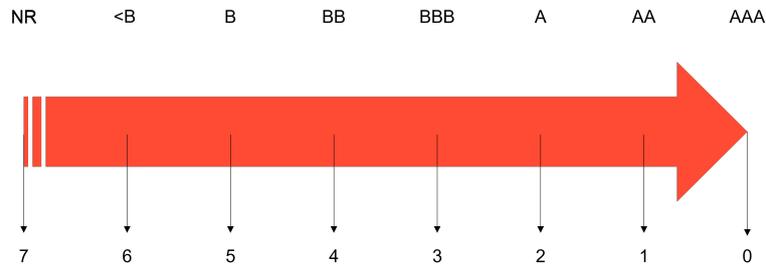


FIGURE 2.4 – Grille de la notation par rating

Sachant que Malakoff Humanis est de notation A^+ , son score de notation se situe entre $[1, 2[$. A noter que l'entité assurantielle soumise à notre étude a une notation de 1,37.

CDS

Le *credit default swap* ou le CDS représente une prime contre le risque de défaut d'une obligation. Il sera utilisé comme métrique pour quantifier la prime que vaut chaque potentiel portefeuille de vente. Tout comme les autres métriques, qui se calcule en faisant un barycentre de CDS_i de chaque ligne de vente. En d'autres termes, le CDS est déterminé en faisant la moyenne pondérée du CDS_i par la VM_i de chaque actif vendu dans le portefeuille

$$\text{CDS} = \frac{1}{VM_{\text{total}}} \sum_{k=1}^N CDS_k \times VM_k$$

Du point de vue CDS, le meilleur portefeuille dans notre objectif de vente est celui qui a la plus grande prime de défaut, car il indiquera le portefeuille de vente le plus exposé aux risques de crédit.

Les contraintes et les métriques ayant été définies globalement, nous aborderons les différents modèles, à savoir l'achat et la vente.

4. NR : pas noté

2.2 Modèle de vente

Dans cette section, nous présenterons le modèle de vente utilisé pour notre opération de recyclage obligatoire.

2.2.1 Présentation et objectif

Dans le cadre de notre étude, la vente des obligations est pratiquée dans le but de retirer un ensemble d'obligations fournissant un faible taux de rendement comptable pour un montant fixé.

Pour résoudre notre problème, nous avons mis en place une modélisation.

Dans la suite du document, nous établirons une équivalence entre le taux de rendement comptable et le taux de rendement actuariel. Les résultats de cette étude seront présentés dans l'annexe.

Afin de faciliter la compréhension des modèles mathématiques, nous allons introduire les notations suivantes, en complément des notations déjà définies dans la partie des métriques comparatives ci-dessous.

- $x_i = \begin{cases} 0 & \text{l'obligation } i \text{ est non vendue} \\ 1 & \text{l'obligation } i \text{ est vendue} \end{cases}$
- TC_i : représentant le taux de coupon de l'obligation i
- RC_{init} : La réserve de capitalisation initiale
- α : la proportion cible globale du portefeuille de vente en pourcentage
- $[TC_{min_{fixé}}, TC_{max_{fixé}}[$: représente l'intervalle dans lequel chaque obligation vendable doit se situer en termes de taux de coupon
- $[D_{min_{fixé}}, D_{max_{fixé}}[$: correspond à l'intervalle dans laquelle chaque obligation vendable doit se situer en termes de duration

Objectif

Le but de notre vente est formulé comme suit :

$$\min \sum_{i=1}^N TRA_i \times VNC_i \times x_i$$

$$\begin{cases} TC_{min_{fixé}} \leq TC_i \times x_i \leq TC_{max_{fixé}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ D_{min_{fixé}} \leq D_i \times x_i \leq D_{max_{fixé}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ RC_{min}(\alpha) \leq \frac{\sum_{i=1}^N PMVL_i \times x_i}{RC_{init}} \leq RC_{max}(\alpha) \\ \sum_{i=1}^N VNC_i \times x_i = VNC_{Cible} \\ x \in \{0, 1\}^N \end{cases}$$

Dans la nouvelle formulation, notre objectif est de minimiser à la fois le taux de rendement comptable des ventes⁵ et l'écart entre la valeur nette comptable vendue et la cible de montant de vente à atteindre. La nouvelle formulation suivante est donnée par :

5. $VNC_{Cible} = \alpha \times VNC_{Total}$

$$\min \left(\sum_{i=1}^N \text{TRA}_i \times \text{VNC}_i \times x_i, \sum_{i=1}^N \text{VNC}_i \times x_i - \alpha \times \text{VNC}_{Total} \right)$$

$$\begin{cases} \text{TC}_{\min_{\text{fixé}}} \leq \text{TC}_i \times x_i \leq \text{TC}_{\max_{\text{fixé}}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ \text{D}_{\min_{\text{fixé}}} \leq \text{D}_i \times x_i \leq \text{D}_{\max_{\text{fixé}}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ \text{RC}_{\min}(\alpha) \leq \frac{\sum_{i=1}^N \text{PMVL}_i \times x_i}{\text{RC}_{\text{init}}} \leq \text{RC}_{\max}(\alpha) \\ x \in \{0, 1\}^N \end{cases}$$

Pour résoudre notre problème à deux objectifs, nous avons opté pour une approche de modélisation mono-objectif qui prend en considération les deux objectifs. Nous allons explorer deux approches, à savoir :

Méthode dite ϵ -contrainte

La méthode dite ϵ -contrainte permet de convertir un problème à plusieurs objectifs en un problème à objectif unique en transformant les autres objectifs en contraintes. Dans notre cas, puisque la cible d'écart de vente est définie, cette fonction objective devient une contrainte qui peut être ajustée en fonction de la sensibilité désirée concernant l'écart de vente.

Le modèle est décrit de la manière suivante :

$$\min \sum_{i=1}^N \text{TRA}_i \times \text{VNC}_i \times x_i$$

$$\begin{cases} \text{TC}_{\min_{\text{fixé}}} \leq \text{TC}_i \times x_i \leq \text{TC}_{\max_{\text{fixé}}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ \text{D}_{\min_{\text{fixé}}} \leq \text{D}_i \times x_i \leq \text{D}_{\max_{\text{fixé}}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ \text{RC}_{\min}(\alpha) \leq \frac{\sum_{i=1}^N \text{PMVL}_i \times x_i}{\text{RC}_{\text{init}}} \leq \text{RC}_{\max}(\alpha) \\ \left| \sum_{i=1}^N \text{VNC}_i \times x_i - \alpha \times \text{VNC}_{Total} \right| \leq \epsilon & \text{avec } \epsilon > 0 \end{cases}$$

Méthode dite de pondération

La méthode dite de pondération, tout comme la méthode dite ϵ -contrainte définie précédemment, permet de convertir un problème multiobjectif en un problème mono-objectif. Le nouvel objectif est obtenu en réalisant le produit scalaire des fonctions objectives, comme illustré ci-dessous.

$$\min \beta_1 \sum_{i=1}^N \text{TRA}_i \times \text{VNC}_i \times x_i + \beta_2 \left| \sum_{i=1}^N \text{VNC}_i \times x_i - \alpha \times \text{VNC}_{Total} \right|$$

$$\begin{cases} \text{TC}_{\min_{\text{fixé}}} \leq \text{TC}_i \times x_i \leq \text{TC}_{\max_{\text{fixé}}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ \text{D}_{\min_{\text{fixé}}} \leq \text{D}_i \times x_i \leq \text{D}_{\max_{\text{fixé}}} & \text{si } x_i = 1 & \text{avec } i = 1, \dots, N \\ \text{RC}_{\min}(\alpha) \leq \frac{\sum_{i=1}^N \text{PMVL}_i \times x_i}{\text{RC}_{\text{init}}} \leq \text{RC}_{\max}(\alpha) \\ x \in \{0, 1\}^N \end{cases}$$

Les paramètres β_1 et β_2 positifs sont calibrés afin que les deux fonctions objectives puissent avoir la même importance et une sensibilité voulue.

NB : Après calibration des paramètres des deux méthodes, nous avons décidé d'utiliser la méthode dite de pondération pour effectuer notre vente à cause de la forte sensibilité de la méthode dite ϵ -contrainte.

Avant de passer à l'implémentation des méthodes de ventes définies, nous allons établir une modélisation de la réserve minimale et maximale de la réserve de capitalisation. Cette modélisation permettra de comprendre le lien entre le taux de vente et la réserve de capitalisation nécessaire pour effectuer nos implémentations.

Modélisation de la réserve de capitalisation

La réserve de capitalisation joue un rôle crucial dans le sens où elle permet à l'assureur d'absorber la perte liée à l'opération de vente. Dans le cadre de notre vente, nous avons décidé de définir un intervalle d'absorption de perte pour chaque montant de vente. Pour définir cet intervalle par montant de vente, nous avons constitué plusieurs échantillons de réserve de capitalisation sur lesquels, une approche de **Monte Carlo** sera effectuée afin de capter la moyenne des réserves de capitalisations minimales et maximales. Afin de mieux comprendre la modélisation, nous allons définir quelques notions qui seront importantes pour la compréhension.

- Une "vente" est un panier d'obligations obtenu en parcourant la base ligne à ligne et en gardant les obligations qui respectent les contraintes
- Un "échantillon" est un ensemble de vente

Au vu de l'échantillonnage effectué sur la base, la constitution d'un échantillon de vente est une variable aléatoire car la base est rééchantillonnée à chaque parcours.

Soit un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P)

On définit les variables aléatoires suivantes :

- $RC_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N PMVL_i \times x_i}{RC_{init}}$ la variable aléatoire⁶ qui modélise le taux de réserve de capitalisation puisée dans le cas de la vente
- $RC_\alpha(i)$ la variable aléatoire modélisant la i -ème vente avec $i \in 1 \dots L$
- $RC_{min,\alpha}$ la variable aléatoire qui modélise le minimum des réserves de capitalisation
- $RC_{min,\alpha}(k)$ la variable aléatoire du k -ème échantillon de réserve de capitalisation minimale avec $k \in 1 \dots M$
- $RC_{max,\alpha}$ la variable aléatoire qui modélise le maximum des réserves de capitalisation
- $RC_{max,\alpha}(k)$ la variable aléatoire du k -ème échantillon de réserve de capitalisation maximale avec $k \in 1 \dots M$

Les suites de variables aléatoires $(RC_\alpha(i))_{i \in 1 \dots L}$, $(RC_{min,\alpha}(k))_{k \in 1 \dots M}$ et $(RC_{max,\alpha}(k))_{k \in 1 \dots M}$ sont respectivement indépendantes et identiquement distribuées.

On définit par :

$$RC_{min,\alpha}(k) = \min(RC_\alpha(1) \dots RC_\alpha(L)) \quad \text{et} \quad RC_{max,\alpha}(k) = \max(RC_\alpha(1) \dots RC_\alpha(L))$$

En considérant que :

$$RC_{min}(\alpha) \approx E(RC_{min,\alpha}) \quad \text{et} \quad RC_{max}(\alpha) \approx E(RC_{max,\alpha})$$

Et par utilisation de la loi forte des grands nombres

Loi forte des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires intégrables, mutuellement indépendantes, identiquement distribuées. Soit m leur espérance commune. On note :

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Alors la suite (S_n) tend vers m presque sûrement.

6. À chaque vente ou parcours de la base, on effectue un rééchantillonnage, ce qui induit le côté aléatoire

On a :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \text{RC}_{\min,\alpha}(k) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} E(\text{RC}_{\min,\alpha}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \text{RC}_{\max,\alpha}(k) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} E(\text{RC}_{\max,\alpha})$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \text{RC}_{\min,\alpha}(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \text{RC}_{\min}(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \text{RC}_{\max,\alpha}(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \text{RC}_{\max}(\alpha)$$

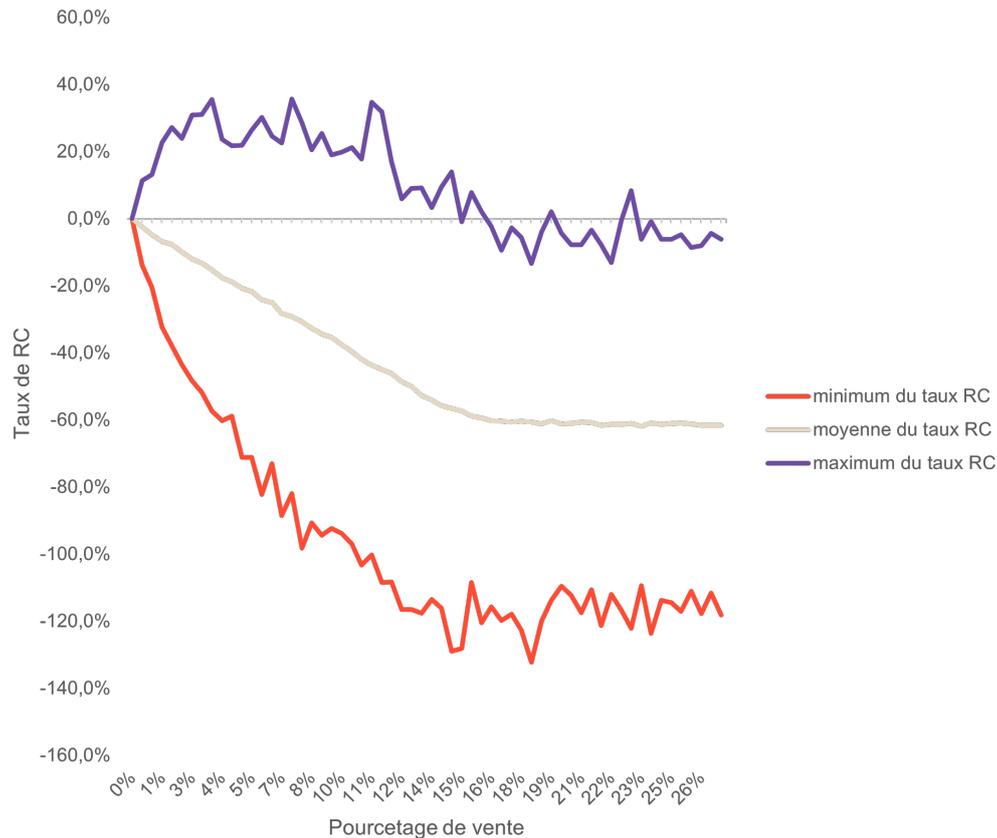


FIGURE 2.5 – Taux de réserve de capitalisation en fonction du niveau de vente avec un intervalle de coupon [0,2%] et un intervalle de durée [0,10]

On constate que les taux de vente et de réserves de capitalisation (RC) évoluent en sens contraire. En effet, le montant de vente augmente d'autant plus que les taux de réserves de capitalisations augmentent car la majorité des obligations vendables sont en moins-values. Les différentes fluctuations sur les figures sont en partie dues à la présence de quelques obligations ayant de grandes valeurs nettes comptables et des plus ou moins-values positives.

2.2.2 Le modèle utilisé

Dans le cadre de notre vente, nous sommes soumis à une optimisation combinatoire. En d'autres termes, nous sommes à la recherche des différents portefeuilles qui permettront de résoudre notre objectif de vente. Pour ce faire, nous avons décidé d'utiliser l'algorithme "branch and bound" car il permet de parcourir toutes les éventualités de la base, il a une structure d'arbre binaire.

Algorithme de branch and bound

La méthode de "branch and bound" ou (séparation et évaluation) est une méthode itérative qui permet de faire un inventaire de l'arbre des solutions possibles. Comme son nom l'indique, la méthode possède deux grandes phases, à savoir :

- la séparation qui consiste à subdiviser l'ensemble des solutions en sous-ensembles,
- l'évaluation permettant de faire l'évaluation des solutions d'un sous-ensemble tout en faisant la majoration de la valeur de la meilleure solution de ce sous-ensemble

La méthode "branch and bound" fait partie des méthodes de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) particulier des problème linéaire binaire (PLB). On introduit donc notre programme linéaire binaire de manière suivante :

$$Z^* = \min Z = cy$$

$$\begin{cases} Ay = b \\ y \geq 0, y_j \in \{0, 1\} j = 1, \dots, n \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}), b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{Z}), rg(A) = m < n$.

Comme mentionné précédemment, la méthode "branch and bound" (B&B) est une méthode itérative consistant en chaque étape à effectuer les subdivisions

$$S = \mathcal{D} \cap \{0, 1\}^n, \text{ où } \mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = b, y \geq 0\}$$

de l'ensemble des solutions réalisables en un nombre fini p de sous-ensembles ou nœuds $S^{(i)}$ en veillant à ce que $S = \bigcup_{i=1}^p S^{(i)}$. On étudie ensuite les p problèmes $P^{(i)}$ plus restreints :

$$Z^{*i} = \min [Z = cy : y \in S^{(i)}].$$

Il est recommandé de choisir une subdivision qui constitue une partition de $S : S^{(i)} \cap S^{(j)} = \emptyset \forall i \neq j$. Cette méthode "branch and bound" est constituée de 3 éléments principaux :

- une procédure de séparation
- une procédure d'évaluation
- une procédure de cheminement

Procédure de séparation

Définition

Un nœud $S^{(t)}$ est dit terminal si :

- soit $S^{(t)} = \emptyset$;
- soit le programme $(P^{(t)})$

$$Z^{*t} = \min [Z = cy : y \in S^{(t)}]$$

peut être résolu, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver une solution optimale. La séparation consiste, pour tout nœud $S^{(i)}$ non terminal, à le décomposer en un nombre fini l de nœuds $S^{(ik)}, k = 1, \dots, l$ avec

$$S^{(i)} = \bigcup_{k=1}^l S^{(ik)}$$

et $S^{(ik_1)} \cap S^{(ik_2)} = \emptyset, \forall k_1 \neq k_2$.

Ce principe de décomposition peut être basé sur :

- le signe ou la valeur prise par une fonction
- la présence ou non de certains éléments
- l'ordre relatif de certains éléments
- les valeurs possibles d'une ou de plusieurs variables discrètes.

Procédure d'évaluation

Définition et Propriétés

Une fonction d'évaluation est une fonction v qui attribue à chaque nœud $S^{(i)}$ une valeur v_i qui satisfait :

- La règle de minoration : v_i est la borne inférieure de

$$Z^{*i} = \min [Z = cy : y \in S^{(i)}]$$

on a alors : $v_i \leq Z^{*i}$;

- la règle de coïncidence : pour un nœud terminal $S^{(t)}$, on a :

$$v_t = Z^{*t} = \min [Z = cy : y \in S^{(t)}].$$

NB : Dans le cas de la résolution d'un problème de maximisation, la règle de minoration est substituée par la règle de majoration : v_i est la borne supérieure de :

$$Z^{*i} = \max [Z = cy : y \in S^{(i)}].$$

On a la propriété suivante :

Si, $S^{ik}, k = 1, \dots, l$ sont les sous-ensembles, obtenus par la séparation de $S^{(i)}$, alors :

$$v_i \leq v_{ik}, \forall k$$

Détermination d'une fonction d'évaluation

Pour trouver la borne inférieure v_i de Z^{*i} , la technique la plus fréquente est la relaxation du problème $P^{(i)}$. Cette relaxation consistera à élargir l'ensemble $S^{(i)}$ en un ensemble $D^{(i)}$ tel que $S^{(i)} \subset D^{(i)}$ et à résoudre le problème relaxé ($RP^{(i)}$) :

$$Z_R^{*i} = \min [Z = cy : y \in D^{(i)}]$$

de sorte que $v_i = Z_R^{*i}$.

Manifestement, il faut définir $D^{(i)}$ de manière à ce qu'il soit possible et assez simple à résoudre le problème relaxé. On peut effectuer une relaxation linéaire, c'est-à-dire en faisant la relation des contraintes d'intégrité. Dans ce cas, $D^{(i)}$ est un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n tel que : $S^{(i)} = D^{(i)} \cap \{0, 1\}^n$.

Utilisation de la fonction d'évaluation

Les solutions réalisables du programme linéaire binaire (PLB) peut être :

- soit des solutions réalisables évidentes,

- soit des solutions réalisables déterminées par l'application d'une heuristique
- soit des solutions réalisables générées en cours de procédure lors de la résolution de certains problèmes relaxés.

Notons \hat{y} la meilleure parmi les solutions réalisables et $\hat{Z} = Z(\hat{y})$: on sait que $Z^* \leq \hat{Z}$.

À chaque étape, \hat{x} et \hat{Z} sont actualisés si une meilleure solution réalisable a été trouvée lors de l'évaluation.

Soit $S^{(i)}$ un nœud, s'il apparaît que $\hat{Z} \leq v_i$, on a nécessairement $\hat{Z} \leq Z^{*i}$. On peut donc affirmer qu'il n'y a dans $S^{(i)}$ aucune autre solution meilleure que \hat{x} . Dans ce cas, le nœud $S^{(i)}$ est dit sondé ou connu.

Plus généralement :

Le nœud $S^{(i)}$ est dit sondé (ou connu) si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- i) [Condition d'impossibilité] Le problème relaxé $(RP^{(i)})$ est impossible
- ii) [Condition d'optimalité] La solution optimale de $RP^{(i)}$ appartient à $S^{(i)}$; on a donc $v_i = Z^{*i}$.
- iii) [Condition de dominance] Il existe une solution réalisable \hat{x} de (PLB) telle que $Z(\hat{y}) = \hat{Z} \leq v_i$.

Procédure de cheminement

Le processus de séparation permet d'obtenir une arborescence de sous problèmes. Vu que le coût de l'examen de la totalité des solutions est élevé. Pour réaliser une énumération implicite et efficace, il convient de définir la façon de cheminer dans l'arborescence. On distingue deux grandes façons de procéder :

1. la règle permettant de déterminer le nœud suivant à examiner est fixé à priori, c'est-à-dire sans tenir compte en particulier de la valeur de la fonction d'évaluation, si ce n'est pour sonder un nœud de l'arborescence.

Exemple : la **procédure en profondeur** ou **procédure par séparation et évaluation séquentielle**

Cette règle consiste :

- Lorsqu'un nœud analysé n'est pas sondé, à sélectionner un seul des sous-ensembles de sa subdivision et toujours le même. Il s'agit de celui dont à priori qui devrait contenir la meilleure solution. Généralement, on situe systématiquement ce nœud suivant comme celui le plus à gauche dans la subdivision.
- Par contre, dans la mesure où un nœud est sondé grâce à un des tests de sondage, on remonte dans l'arborescence jusqu'au premier nœud que l'on rencontre dont les sous-nœuds n'ont pas encore été visités. Parmi ceux-ci, le nœud le plus à gauche est sélectionné.

La procédure se termine lorsqu'il n'est plus possible de sélectionner un tel nœud.

Remarque : Pour concrétiser une telle procédure en profondeur d'abord, il convient de préciser quel nœud sélectionner lorsqu'on descend dans l'arborescence.

Lorsque les nœuds d'un même niveau de l'arborescence sont examinés avant le niveau suivant, la procédure est dite en largeur.

2. une règle adaptative évoquant que la sélection du nœud est liée aux informations recueillies lors de l'analyse des nœuds précédents et tout particulièrement des valeurs de la fonction d'évaluation.

Exemple : la **procédure de la meilleure évaluation** ou **procédure de la séparation et évaluation progressive**.

Lors de la séparation d'un nœud, tous ses descendants sont analysés et leurs fonctions d'évaluation sont calculées. Cette analyse permet de sonder certains des nœuds créés, à cette étape ou aux étapes précédentes. Tous les nœuds n'ayant pas été créés depuis le début de la procédure et qui n'ont été ni séparés ni sondés sont appelés nœuds pendants ou actifs.

Considérons \mathcal{A} cette liste de nœuds actifs à une étape de la procédure. Le nœud sélectionné est alors le nœud qui a la plus petite valeur de la fonction d'évaluation, soit $v^* = v_{i^*} = \min_{i \in \mathcal{A}} v_i$. C'est ce nœud qui est séparé et dont les descendants directs sont examinés, une analyse en largeur est effectuée, mais limitée aux sous-nœuds du nœud i^* .

La procédure se termine quand tous les nœuds sont sondés, donc il n'y a plus de nœuds actifs.

Exemple de la vente en utilisant l'algorithme de branch and bound

Portefeuille	TRA	VNC	Duration	Rating	Echelon de credit
Obligation 1	1%	100 M€	2	A	2
Obligation 2	1%	100 M€	10	A	2
Obligation 3	1%	100 M€	5	BB	4

TABLE 2.4 – Exemple de portefeuille de vente

On cherche à vendre 2/3 du portefeuille (200 M€ en VNC) qui génère le taux de rendement compatible le plus faible.

Modélisation

$$\text{soit } x_i = \begin{cases} 0 & \text{si l'obligation } i \text{ est non vendue} \\ 1 & \text{si l'obligation } i \text{ est vendue} \end{cases} \quad \text{avec } i=1,2 \text{ et } 3$$

le problème se formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^3 \text{TRA}_i \times \text{VNC}_i \times x_i \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \text{VNC}_i \times x_i = 200 \text{ M€} \\ x \in \{0, 1\}^3 \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant "branch and bound", on obtient une arborescence de solutions (voir figure 2.6), il n'y a que trois portefeuilles éligibles à la vente. À savoir : (Obligation 1 et Obligation 2, Obligation 1 et Obligation 3, Obligation 2 et Obligation 3). Ainsi, pour effectuer la vente, nous serons amenés à définir d'autres caractéristiques (la duration et le score de notation) que doit disposer notre portefeuille de vente.

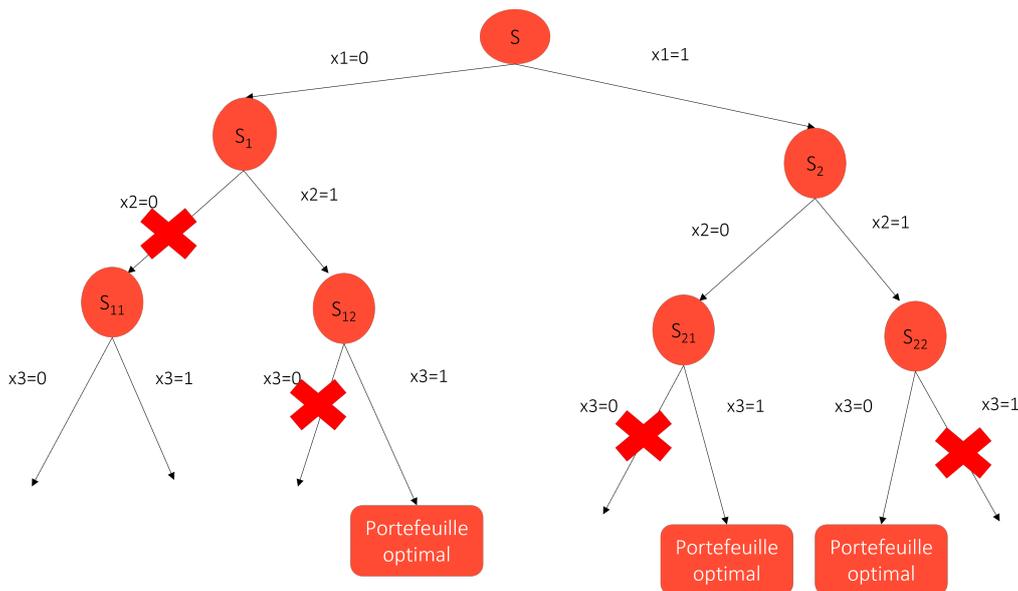


FIGURE 2.6 – Exemple d'arborescence de branch and bound

2.3 Modèle d'achat

Après avoir effectué la vente des portefeuilles générant un faible taux de rendement comptable dans le cadre de notre étude, nous allons procéder à l'achat des obligations dans l'objectif de fermer notre gap de duration. Un intérêt sera porté à la recherche d'un portefeuille d'achat diversifié avec une bonne notation financière.

2.3.1 Présentation et objectif

L'achat constitue la dernière étape du *rolling* obligataire. Dans l'opération d'achat, le montant constaté pendant la vente est réinvesti dans un portefeuille qui permettra de fermer le gap de duration tout en offrant un meilleur taux de rendement comptable et une bonne notation financière. Mis à part les contraintes de base majeures telles que la fermeture du gap, l'amélioration du taux de rendement comptable et la qualité du portefeuille d'achat, il y a eu l'ajout des contraintes de diversifications en termes de secteur, de type, de rating et de maturité.

Afin de faciliter la compréhension des modèles mathématiques, nous allons introduire les notations suivantes, en complément des notations déjà définies dans la partie des métriques comparatives

β	Correspondance
Dette	Dette privée
Immo	Immobilier
Mon	Monétaire
ObligF	Obligataire Fixe
ObligV	Obligataire Variable
ObligI	Obligataire indexé
Perf	Perf côtée
PrI	Private et Infra Equity

TABLE 2.5 – Tableau de correspondance des différentes classes d'actifs

- $z_i = \begin{cases} 0 & \text{la proportion de l'obligation } i \text{ si elle n'est pas achetée} \\]0, 1[& \text{la proportion de l'obligation } i \text{ si elle est achetée} \end{cases}$
- M_α : montant obtenu après optimisation de la vente,
- R_i : la notation en termes d'échelon de crédit de l'obligation i de la base d'achat,
- T_i : représente le type de l'obligation i dans le portefeuille d'achat, il prend deux modalités qui sont gov,corp représentant respectivement l'obligation gouvernementale et corporative,
- S_i : représente le secteur de l'obligation corporative i dans la base d'achat, il prend deux modalités, à savoir : {F,NF} qui représente respectivement le secteur financier et non financier,
- $Note_i$ le rating de l'obligation i du portefeuille d'achat,
- M_α : montant obtenu après optimisation de la vente,
- Rm_β représente la répartition en VM de la classe d'actif β , avec β pouvant prendre les valeurs du tableau 2.5,
- DA_β : représentant la duration de la classe d'actif β ,
- $Di(A)$: duration de l'obligation i de la base d'achat,
- $TRAi(A)$: le taux de rendement comptable de l'obligation i de la base d'achat,
- $VM_{\text{postvente}}$: la valeur de marché de la base post vente des obligations à taux fixe,
- $VNC_{\text{postvente}}$: la valeur nette comptable de la base post vente des obligations à taux fixe,
- VNC_{oblig} la valeur nette comptable de tout le portefeuille obligataire,
- $TRA_{\text{postvente}}$: le taux de rendement actuariel du portefeuille post vente,
- $D_{\text{postvente}}$: la duration post vente des obligations à taux fixe

- T : le nombre d'obligations de la base d'achats,
- TRC_p : le taux de rendement comptable du portefeuille obligataire,
- $\text{TRC}_{\text{postvente}}$: le taux de rendement comptable du portefeuille obligataire post vente,

Détermination des fonctions objectives

fermeture du gap

$$\text{DG} = \frac{\text{VM}_{\text{actif}}}{\text{VE}_{\text{passif}}} \text{DP} - \text{DA} \xrightarrow{\text{optimisation}} \text{DG} \approx 0$$

On a :

$$\text{DA} = \sum_{\beta} \text{Rm}_{\beta} \text{DA}_{\beta}$$

$$\text{DA} = \sum_{\beta \setminus \{\text{obligF}\}} \text{Rm}_{\beta} \text{DA}_{\beta} + \text{Rm}_{\text{obligF}} \text{DA}_{\text{obligF}}$$

où

$$\text{DA}_{\text{oblig}} = \frac{1}{\text{VM}_{\text{Total oblig fixe}}} \left(\text{VM}_{\text{postvente}} \times \text{D}_{\text{postvente}} + \text{M}_{\alpha} \times \sum_{i=1}^T z_i \times \text{D}_i(\text{A}) \right)$$

Ainsi, il en ressort l'expression suivante :

$$\text{DG}(z) = \frac{\text{VM}_{\text{actif}}}{\text{VE}_{\text{passif}}} \text{DP} - \sum_{\beta \in \text{Tab}} \text{Rm}_{\beta} \text{DA}_{\beta} - \frac{\text{Rm}_{\text{obligF}}}{\text{VM}_{\text{Total oblig fixe}}} \left(\text{VM}_{\text{postvente}} \times \text{D}_{\text{postvente}} + \text{M}_{\alpha} \times \sum_{i=1}^T z_i \times \text{D}_i(\text{A}) \right)$$

Dans un panier d'obligations achetables, on achètera des obligations de durée $\text{D}_i(\text{A})$ qui permettront de réduire le gap de durée.

Taux de rendement comptable obligataire du portefeuille

$$\text{TRC}_p(z) = \text{TRC}_{\text{postvente}} + \frac{\text{M}_{\alpha}}{\text{VNC}_{\text{oblig}}} \sum_{i=1}^T z_i \times \text{TRA}_i(\text{A})$$

Dans ce même objectif de fermeture du gap de durée, la sélection d'obligations avec de taux de rendement comptable élevé sera effectuée afin de maximiser TRC_p sans toutefois répartir le montant intégral de la vente dans l'achat des différentes obligations sélectionnées.

Objectif

L'objectif principal de notre achat est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & (\min \text{DG}(z), \min - \text{TRC}_p(z)) \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^T z_i = 1 \\ z \in]0, 1[^T \end{cases} \end{aligned}$$

Au vu de la description du problème mathématique, en fonction de la base de données d'achat d'obligations, les solutions sélectionnées pourraient être désavantageuses pour le portefeuille. Nous donnerons une illustration dans un exemple.

Exemple : Le modèle défini précédemment aura tendance à choisir des obligations qui donnent un plus grand rendement qui sera généralement associé à une très faible notation financière. Ceci pourrait générer un bon rendement comptable, mais en contrepartie générer un risque de concentration élevé.

Afin de remédier à ce problème, nous avons décidé d'introduire d'autres contraintes étroitement liées à la répartition du portefeuille. Ainsi, il y aura une contrainte sur la répartition du type d'obligations (gouvernementale et entreprise), une contrainte liée aux secteurs du type entreprise (financier et non financier), une contrainte relative à l'échelon de crédit par secteur et pour finir une contrainte par maturité (voir le tableau 2.6).

gouvernementale $\geq 70\%$	AA $> 50\%$	
	AAA	
	A	
	BBB	
entreprise $\leq 30\%$	Financier = 50%	A $> 50\%$
		AAA, BBB, A
	Non Financier = 50 %	A $> 40\%$
		AAA, BBB, A

TABLE 2.6 – Contraintes liées aux portefeuilles pour le processus d'achat

Ainsi, une nouvelle formulation du problème est donnée de la manière suivante :

$$\min(DG(z), -TRC_p(z))$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^T z_i = 1 \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{gov}} \geq 70\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{gov}} \times \mathbb{1}_{\text{Note}_i=\text{AA}} \geq 35\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{corp}} \times \mathbb{1}_{S_i=\text{F}} \times \mathbb{1}_{\text{Note}_i=\text{A}} > 7.5\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{corp}} \times \mathbb{1}_{S_i=\text{NF}} \times \mathbb{1}_{\text{Note}_i=\text{A}} > 6\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times R_i < \text{notation de l'entité assurantielle} \\ z \in]0, 1[^T \end{cases}$$

Dans le but de résoudre le nouveau problème de modélisation, nous avons exploré une approche permettant d'avoir la main sur l'horizon du gap de duration à atteindre. Cette méthode est un mixte entre la méthode de pondération et la ϵ -contrainte. Elle se formule de la façon suivante :

$$\max(TRC_p(z) - (\sum_{i=1}^T z_i - 1))$$

$$\begin{cases} |DG(z)| < \rho \quad \text{avec} \quad \rho > 0 \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{gov}} \geq 70\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{gov}} \times \mathbb{1}_{\text{Note}_i=\text{AA}} \geq 35\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{corp}} \times \mathbb{1}_{S_i=\text{F}} \times \mathbb{1}_{\text{Note}_i=\text{A}} > 7.5\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times \mathbb{1}_{T_i=\text{corp}} \times \mathbb{1}_{S_i=\text{NF}} \times \mathbb{1}_{\text{Note}_i=\text{A}} > 6\% \\ \sum_{i=1}^T z_i \times R_i < \text{notation de l'entité assurantielle} \\ z \in]0, 1[^T \end{cases}$$

Pour $\rho > 0$ fixé assez petit, cette dernière approche de modélisation pourra nous donner un portefeuille permettant de maximiser le taux de rendement comptable obligataire tout en tenant compte des contraintes de répartition initiale de l'entité assurantielle.

Il faut noter que cette formulation du problème est fonction de la base d'achat, il se pourrait qu'on puisse atteindre notre optimum sans avoir à investir tout le montant de vente. Dans la mesure où cela se produit, le reste du montant alloué sera mis sur une OAT 10 ans.

2.3.2 Les modèles utilisés

Dans le cadre du programme d'achat d'obligations, nous faisons face à un problème de programmation linéaire. Les méthodes primale et duale seront utilisées afin de résoudre notre objectif d'achat. Dans la suite, nous ferons un focus sur les méthodes primale et duale

Méthode primale

La compréhension de cette méthode nécessite une description simplifiée de certains axiomes mathématiques.

Programme linéaire : Un programme linéaire dans \mathbb{R}^n est un problème qui consiste à déterminer le minimum ou maximum ainsi que les éléments qui les réalisent d'une application linéaire $Z(y)$ sachant que y vérifie un système mixte d'équations et/ou d'inéquations linéaires dans \mathbb{R}^n .

Un programme linéaire se formule de la manière suivante⁷ :

$$\min Z(y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq b_i, & i = 1, \dots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq b_i, & i = m_1 + 1, \dots, m_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i, & i = m_2 + 1, \dots, m \\ y_j \in \mathbb{R}, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Dans le but de résoudre le programme linéaire, nous devons le mettre sous une forme adaptée au calcul matricielle de manière un peu plus simple.

Forme standard : Un programme est dit être sous forme standard lorsque toutes les vraies contraintes sont des égalités et les variables sont non négatives. En d'autres termes, le programme linéaire se présente de la manière suivante :

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j y_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i, & i = 1, \dots, m \\ y_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Si on pose $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c = (c_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, on a la notation matricielle

$$\min Z = cy$$

$$\begin{cases} Ay = b \\ y \in \mathbb{R}^n, y \geq 0 \end{cases}$$

NB : Tout programme linéaire peut être reformulé sous forme standard.

Base réalisable : Une base B de (PL) est dite réalisable, si la solution $y(B)$ associée à B , est telle que $y(B) \geq 0$ c'est-à-dire $B^{-1}b \geq 0$. On dit alors que $y(B)$ est une solution de base réalisable de (PL) .

7. Le programme de maximisation se définit de manière similaire

Algorithme primale du simplexe L'algorithme du simplexe se fait en deux phases : la phase 1 et la phase 2.

Phase 1 ou phase d'initialisation

Dans la première étape, l'objectif est de trouver une solution de base réalisable, initiale pour le problème. Toutefois, si cette tentative échoue, cela indique que l'ensemble des solutions réalisables du problème représenté par le polyèdre \mathcal{D} est vide.

Phase 2

Dans la deuxième phase, l'objectif est de calculer, à partir de la solution réalisable obtenue dans la première phase, une nouvelle solution de base réalisable qui améliore la valeur de la fonction objective. D'un point de vue géométrique, chaque itération va consister à passer d'un sommet du polyèdre \mathcal{D} à un autre sommet de \mathcal{D} ; ce nouveau sommet est adjacent au premier en ce sens qu'ils sont les extrémités d'une arête de \mathcal{D} .

Nous allons donner, dans cette partie, la phase 2 de l'algorithme du simplexe.

L'algorithme du simplexe

Pour effectuer la phase 2 de l'algorithme du simplexe (*PL*), on effectue d'abord une relaxation du programme en le mettant sous forme standard. Par la suite, on procède comme suit :

Dans une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe appliqué au problème (*PL*), on procède comme suit.

Début

Supposons que nous disposons d'une base de départ B . Soient I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base.

NB : Cette méthodologie est donnée dans le cas d'un programme visant à déterminer le minimum.

1. On commence par calculer $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$.
2. On teste \hat{c} .
 - (a) Si $\hat{c} \geq 0$ alors, on arrête : "La base B est optimale."
 - (b) S'il existe $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$, on arrête : "Le problème est non borné (la valeur optimale est infinie)."
 - (c) Autrement, on effectue un changement de base.
3. Changement de base
 - (a) Test d'entrée : Soit $k \in J$ tel que

$$\hat{c}_k = \min [\hat{c}_j : j \in J, \hat{c}_j < 0].$$

La variable correspondante x_k rentre dans la base, on l'appelle variable rentrante.

- (b) Test de sortie : Soit l tel que

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : i \in I, \hat{a}_{ik} > 0 \right].$$

La variable x_l sort de la base, on l'appelle variable sortante.

- (c) On considère la nouvelle base réalisable encore notée B dont les ensembles des indices de variables de base et hors base sont respectivement

$$I := I - l + k \text{ et } J := J - k + l$$

Aller à 1).

Fin

Convergence de l'algorithme du simplexe : Dans la mesure où à chaque base réalisable rencontrée dans la résolution du programme linéaire, la solution de base est associée et non dégénérée, l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations par l'une des deux situations suivantes :

- obtention d'une solution de base réalisable optimale du programme linéaire
- absence de solution optimale à distance

Après ce passage en revue de la méthode primale simplexe, nous présenterons la méthode duale simple qui peut faire office de méthode de calcul de résolution de programme linéaire.

Méthode duale

La méthode duale est une méthode tout comme la méthode de simplexe qui permet de résoudre les programmes linéaires. Ainsi, dans la suite, il sera question de présenter de manière un peu plus détaillée l'algorithme du dual simplexe. Toutefois, en n'oubliant pas de présenter le lien entre le primale et le dual simplexe.

duale d'un programme : Soit un programme linéaire sous la forme ci-dessous

$$\min \quad Z(y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_j \leq b_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i, \quad i = m_2 + 1, \dots, m \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_1 \\ y_j \leq 0, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2 \\ y_j \in \mathbb{R}, \quad j = n_2 + 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

On appelle programme duale de (P) le programme linéaire (D) ci-dessous

$$\max \quad W(z) = \sum_{i=1}^m b_i z_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \\ z_i \leq 0 \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2 \\ z_i \text{ libre} \quad j = m_2 + 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n_1 \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i \geq c_j \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2 \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i = c_j \quad i = n_2 + 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Cette définition mathématique est basée sur des règles qui sont les suivantes :

- le dual d'un problème de minimisation est un problème de maximisation et inversement

- les vraies contraintes du primale sont associées au variable duale. Dans la mesure où la contrainte est une vraie inégalité, la variable duale est soumise à une condition de non-négativité. Dans le cas contraire, la variable duale est soumise à une condition de non-positivité.
- pour une contrainte d'égalité, la variable duale est libre.
- Toutes les variables du programme primale sont associées à des contraintes au niveau du programme duale :
- si la variable primal est positive, la contrainte duale est une "vraie inégalité".
- si la variable primal est négative, la contrainte duale est une "fausse inégalité".
- la variable primal est libre, la contrainte duale est une égalité.
- les coefficients de la fonction-objectif du primale deviennent les seconds membres des contraintes duales et les seconds membres des vraies contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction objective du duale.
- la matrice des vraies contraintes du duale est la transposée de la matrice des vraies contraintes du primale.

Lien entre duale et primale : Soient y^* et z^* solutions réalisables respectives du problème primale (P) et duale (D) vérifiant $cy^* = z^*b$. Alors, y^* et z^* sont des solutions optimales de (P) et (D) respectivement.

Algorithme duale simplexe : Considérons le programme duale suivant :

$$Z^* = \min Z = cz$$

$$\begin{cases} Az = b \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}); c \in M_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

On suppose que $\text{rg}(A) = m < n$.

Tout comme le programme primale, le programme duale comporte aussi deux phases.

Phase 1 ou d'initialisation

Lorsqu'on détermine une première base duale réalisable. Si cette procédure échoue, cela signifie que cette base n'existe pas. C'est-à-dire que le polyèdre de la solution réalisable du duale est vide et donc programme linéaire est impossible non borné $Z^* = -\infty$.

Phase 2 ou itération

Supposons que nous disposons d'une base de départ B réalisable. Soient I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base.

Début

NB : Cette méthodologie est donnée dans le cas d'un programme visant à déterminer le minimum.

1. On commence par calculer $\hat{A} = B^{-1}A$, $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$ et $\hat{b} = B^{-1}b$.
2. Tester $\hat{b} = B^{-1}b$
 - (a) Si $\hat{b} \geq 0$, stop : (la solution courante est optimale)
 - (b) Si $\exists i \in I$ tel que $\hat{b}_i < 0$ et $\hat{a}_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J$, stop : (le problème (PL) est impossible)
 - (c) Autrement, on effectue un changement de base.
3. Changement de base

(a) Test de sortie : Soit $l \in I$ telle que

$$\hat{b}_l = \min_i \left[\hat{b}_i : i \in I, \hat{b}_i < 0 \right].$$

La variable correspondante x_l sort de la base

(b) Test d'entrée : Soit $k \in J$ telle que

$$\left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{a}_{lk}} \right| = \min \left[\left| \frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}} \right| : j \in J, \hat{a}_{lj} < 0 \right].$$

(c) La variable x_k rentre dans la base.

(d) On pose $I := I - l + k$ et $J := J - k + l$; aller à 1).

Fin

Convergence de l'algorithme simplexe : L'algorithme duale Simplexe converge lorsque, à chaque itération, les coefficients \hat{c}_j , sont strictement positifs pour tout index j appartenant à l'ensemble J . Il est possible que la fonction objective ne varie pas au cours d'une itération, et cela peut entraîner un phénomène de non convergence dans le processus. Afin de prévenir ce problème de stationnarité et garantir une convergence finie pour l'algorithme du Simplexe duale, il est impératif d'appliquer les règles de Bland.

Conclusion

Après une présentation du *rolling* obligataire, nous allons passer à son intégration dans le cycle ALM de notre entité assurantielle. Cette intégration nous permettra de voir l'impact d'une telle stratégie sur la pérennité de la compagnie.

Application et étude de cas

Sommaire

3.1	Présentation des données	42
3.1.1	Données pour la vente	42
3.1.2	Données pour l'achat	43
3.2	Description du modèle ALM	44
3.2.1	Le vieillissement	45
3.3	Indicateur financier	46
3.3.1	Le Solde ou écart de trésorerie	46
3.3.2	Le taux de rendement comptable	47
3.3.3	La marge financière	47
3.3.4	Le Coût en SCR marché	47
3.4	Analyse de résultat	50
3.4.1	Comparaison des méthodes de vente	50
3.4.2	Application du rolling	51
3.5	Étude de sensibilité	56
3.5.1	sensibilités contraintes	56
3.5.2	Sensibilités scénario	59

Ce chapitre sera consacré à l'application de la stratégie expliquée dans le chapitre précédent dans la gestion actif-passif de l'entité assurantielle. Ce chapitre sera structuré en 4 parties distinctes qui sont les suivantes :

1. La présentation des données
2. Une description succincte du modèle ALM afin de présenter le vieillissement du portefeuille d'actifs
3. L'analyse des résultats
4. Une étude de sensibilité

3.1 Présentation des données

Dans le cadre de l'étude menée, la qualité des données a constitué un point crucial. Nous avons collecté des données entrant directement dans la modélisation des deux étapes (vente ou achat) du rolling obligataire. Nous allons donc faire une présentation des données de chaque étape de notre stratégie en expliquant la manière dont elles ont été utilisées.

3.1.1 Données pour la vente

Dans le but de choisir notre portefeuille de vente, nous avons eu recours à des données afin de pouvoir déterminer notre solution financièrement correcte.

L'échelon numérique de crédit : L'échelon de crédit numérique a été une donnée précieuse dans l'étape de vente. Grâce à ces données, nous avons pu quantifier le score numérique de notation de l'entité assurantielle (voir annexe).

Crédit default swap : La pluralité en termes de maturité du portefeuille obligataire fixe a rendu la recherche des crédits default swap très complexe d'autant plus que les plus fréquents sur le marché sont ceux de 1 an, 3 ans, 5 ans et 10 ans. Suite à cette contrainte, nous avons formé des classes de maturités résiduelles, segmenté le portefeuille par secteur type et rating afin de faire la correspondance avec les CDS recueillis. Cette segmentation est présentée dans le tableau ci-dessous :

Secteur	Rating
Financier	AAA
Financier	AA
Financier	A
Financier	BBB
Financier	NR
Non financier	AAA
Non financier	AA
Non financier	A
Non financier	BBB
Non financier	NR
Gouvernementale	AAA
Gouvernementale	AA
Gouvernementale	A
Gouvernementale	BBB

TABLE 3.1 – Type et rating pour la définition des émetteurs référents

3.1.2 Données pour l'achat

Pour effectuer l'achat des obligations pour la fermeture du gap de duration, nous avons eu recours aux données de l'entité assurantielle ainsi que *Bloomberg*¹.

Les données de l'entité assurantielle : Les données de l'entité assurantielle contiennent le montant des fonds propres, les durations des passifs des différentes garanties ainsi que la duration de classes d'actifs du portefeuille.

Les données recueillies sur bloomberg : Les taux d'émissions de chaque obligation de notre portefeuille d'achat ont été extrait le 31/12/2022 sur Bloomberg. Nous avons constitué un portefeuille diversifié avec les mêmes ratings, les mêmes types et les mêmes secteurs que la base des obligations à taux fixe de l'entité assurantielle avec les maturités au vu de leur énorme volume sur le marché².

Nous allons passer en revue le modèle ALM qui sera utilisé dans le but de projeter notre base post achat générant ainsi les indicateurs financiers projetés.

1. Bloomberg est une plateforme intégrée qui rassemble et diffuse les données de prix, les données comptables et financières des entreprises.

2. La maturité des obligations achetés est de (5 ans, 10 ans, 20 ans, 30 ans).

3.2 Description du modèle ALM

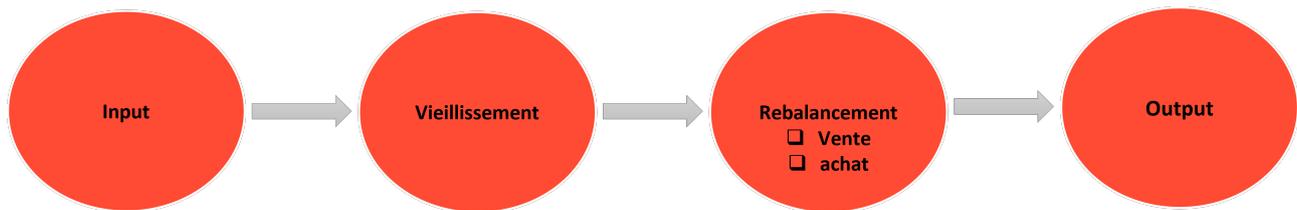


FIGURE 3.1 – Présentation du modèle ALM

Le modèle ALM développé par le groupe Malakoff Humanis vise à fournir une perspective claire de sa situation future ainsi que celle de chacune de ses entités. En considérant une base d'actifs, un scénario économique intégrant les hypothèses sur les actifs (courbes de taux, indices de performances futurs), les passifs (comme les provisions concernant le rachat, les nouvelles adhésions d'assurés ou prestations) et un stock initial de passifs dans le but de converger vers une allocation cible.

Le fonctionnement du modèle repose sur une gestion d'actifs selon la méthode « FIFO » (premier entré, premier sorti). Cette approche implique une manipulation et une projection des données ligne par ligne dans la base d'actifs, ce qui permet d'assurer un suivi rigoureux des performances individuelles ainsi que du portefeuille global. En effet, en se basant sur l'enregistrement chronologique des transactions, il devient aisé de calculer les gains et les pertes réalisés pour chacune d'elles donc d'évaluer la pertinence des décisions d'investissements prises. Les résultats obtenus par le modèle se composent d'une base d'actifs vieillie dans le même format qu'à l'importation, un ensemble complet d'indicateurs financiers tel que le taux de rendement comptable (TRC, la marge financière, la durée et les plus-values latentes). Ces métriques financières seront essentielles pour évaluer la gestion des actifs, ce qui pourra éclairer sur les décisions d'investissement futur.

Au fil du temps, l'évolution de l'actif et du passif est conditionnée par différentes hypothèses qui prennent en compte les interactions actif/passif. Ainsi, un ajustement minutieux est opéré pour recalculer les provisions au passif selon des critères tels que les intérêts techniques (qui varient en fonction des taux économiques) et la PB (qui dépend elle-même du TRC généré par l'actif). Le modèle utilisé se compose de deux grandes parties

o Le vieillissement de la base d'actifs

Dans le cadre de notre démarche prospective, nous procéderons à une projection de la base d'actifs sur une période d'un an, en prenant en considération un scénario économique spécifique. Cette projection impliquera une réévaluation des valeurs nettes comptables, des valeurs de marché, des revenus financiers et des flux nominaux des actifs entrants.

o Le rebalancement

Le processus de rebalancement comprend deux étapes essentielles (la vente et l'achat). Dans la première étape de vente, notre objectif est de réaligner notre portefeuille sur l'allocation cible souhaitée, tout en réalisant la plus-value prédéterminée conformément à notre politique financière. Au cours de cette étape, nous cherchons à ajuster la composition de notre portefeuille en effectuant des ventes ciblées. La deuxième étape consiste à réinvestir le solde résultant des différentes transactions, incluant les flux d'actifs, le solde technique et le montant vendu. L'objectif de cette étape de rachat est de rééquilibrer notre portefeuille en réinvestissant les fonds disponibles conformément à nos stratégies et objectifs prédéfinis.

Comme mentionné précédemment, nous allons seulement présenter la partie du vieillissement de la base d'actifs

3.2.1 Le vieillissement

Cette étape du processus vise à projeter la base d'actifs à un horizon futur T , ce qui conduit à l'obtention d'une base d'actifs "vieillie". Tout comme dans le cadre de l'allocation, les actifs seront regroupés en différentes classes qui seront modélisées de manière similaire. Toutefois, il est important de noter que l'univers d'allocation diffère de l'univers de modélisation. Il n'existe aucune raison de supposer que deux actifs modélisés de la même manière seront équivalents dans l'univers d'allocation. L'univers de modélisation se divise en trois grandes classes, qui seront détaillées dans la suite.

La classe obligataire

Dans le cadre de la modélisation obligataire, nous projetterons six variables clés. Ces variables sont : la valeur nette comptable, la valeur de marché, la surcote-décote, la durée, le coupon et la maturité résiduelle. Ces variables citées, nous permettront de projeter les différents types d'obligations dans notre portefeuille d'actifs.

Les obligations à taux fixe : Les obligations à taux fixe ou obligations assimilables du trésor fixe fournissent un versement périodique appelé coupon jusqu'à leur maturité où elles remboursent à la fois le coupon et le nominal. Le montant du coupon calculé en début de période reste constant jusqu'à la maturité.

Les obligations à taux variable : Il s'agit des obligations qui versent un coupon dont le taux est réévalué périodiquement. Le taux de coupon contient un spread et un indice de référence qui varie au fil du temps.

Les obligations indexées sur l'inflation : Les obligations indexées sur l'inflation sont des obligations dont le coupon et le nominal sont réévalués périodiquement pour prendre en compte l'inflation cumulée depuis la création du titre.

Les actifs de types indiciels

Les actifs de types indiciels sont constitués des actions classiques ainsi que des actifs ne versant pas de coupon comme les fonds. Ces actifs n'ont généralement pas de maturité définie, le calcul de valeur de marché se fait par le biais des scénarios économiques. Les principaux éléments assurant leur modélisation sont :

La valeur de marché : La valeur de marché de ces actifs est modélisée en fonction des scénarios indiciels.

$$VM(t + 1) = VM(t) \times indice_{t+1}$$

La provision pour dépréciation durable (PDD) : Elle constitue une réserve si la valeur de marché est inférieure à sa valeur nette comptable. La constitution d'une PDD se fait si l'actif baisse de plus de 20% (30 % en période de forte volatilité des marchés) pendant au moins six mois.

La valeur nette comptable : La valeur nette comptable a tendance à rester fixe, mais lors d'une importante perte en termes de plus-value latente, un mécanisme est mis en place par le biais de la provision pour dépréciation durable.

Les actifs de type redistribuant

Les actifs considérés comme redistribuant sont des actifs qui servent un revenu financier de manière similaire à un coupon et dont leur valeur marché peut être décorrélée de leurs revenus. Ils peuvent se voir comme une combinaison d'actifs obligataires et indiciaires. Les principaux actifs considérés comme redistribuant sont :

- Dette privée,
- Private equity,
- Immobilier

Les actifs de type redistribuant comprennent les principaux éléments de modélisation des actifs indiciaires et possèdent en plus des modélisations des coupons, loyers ou dividendes calibrés en tenant en compte des scénarios économiques.

3.3 Indicateur financier

Dans le but de voir l'apport de la stratégie du rolling obligataire, nous nous sommes portés vers certaines métriques financières de la gestion actif/passif, à savoir :

3.3.1 Le Solde ou écart de trésorerie

L'étude des flux de trésorerie constitue l'une des étapes préliminaires à toute étude d'interaction actif-passif. Elle s'apparente souvent à une étude de cash flows matching ou alignement des flux entre l'actif et le passif. Les différents flux pris en compte sont les suivants :

À l'actif, les flux générant les revenus courants et les remboursements, tels que :

- les revenus courants certains ou plus particulièrement les coupons obligataires à taux fixes,
- les revenus courants variables dans lesquelles, il y a les coupons obligataires variables, indexés et convertibles
- les revenus courants incertains (dividendes et loyers)
- les remboursements à maturités des différents titres obligataires

Au passif, il contient les engagements d'assurance, basés sur les hypothèses :

- liées directement aux garanties des contrats d'assurance comme : le type de produit, le type de garanties, le taux garantis et la date d'échéance,
- liées aux comportements des assurés comme : les rachats structurels et dynamiques, arbitrages structurels et dynamiques, la longévité, la mortalité, etc.

Les chroniques de cash-flows de l'actif et du passif permettent ainsi une analyse totale des flux de trésorerie et permettent de faire la vérification de l'adéquation des cash-flows entre les deux chroniques. La différence entre les chroniques de flux d'actifs et de passifs donne une chronique de flux nets

$$CF_{\text{net}}(t) = CF_{\text{actif}}(t) - CF_{\text{passif}}(t)$$

Selon le signe du flux net, trois cas sont définis :

- Surplus de trésorerie, $CF_{\text{net}}(t) > 0$
- Équilibre de trésorerie, $CF_{\text{net}}(t) = 0$
- Manque de trésorerie, $CF_{\text{net}}(t) < 0$

3.3.2 Le taux de rendement comptable

Le taux de rendement comptable représente le quotient de la somme des plus-values réalisées à laquelle est ajoutée les revenus financiers (coupon, loyer, dividendes ...) et des variations de surcote ainsi que les coupons courus sur la demi-base comptable. En d'autre terme,

$$\text{TRC}(t) = \frac{\text{PVR}(t) + \text{Revenus financiers}(t) + \delta\text{SD}(t) + \delta\text{CC}(t)}{\text{Demi Base Comptable}}$$

où

$$\text{Demi base Comptable} = \frac{\text{VNC}(t-1) + \text{VNC}(t)}{2}$$

3.3.3 La marge financière

La marge financière se distingue comme un indicateur particulièrement exhaustif, du fait de sa prise en considération des interactions entre l'actif et le passif. Elle est en partie pilotable, ce qui signifie qu'il faudrait des informations sur l'horizon de projection. La formule est donnée par :

$$\text{marge financière} = \text{Revenus financiers} - \text{Intérêts} - \text{Participations aux bénéfices} - \text{Revalorisation}$$

3.3.4 Le Coût en SCR marché

Le SCR marché est une mesure qui permet de quantifier les risques liés aux fluctuations de marchés. il se calcule en faisant l'aggrégation de tous les risques marchés, à savoir : le taux d'intérêt, l'action, l'immobilier, le spread, devise et la concentration. Le calcul d'un SCR se fait de la manière suivante :

$$\text{SCR}_{\text{risque}} = \text{NAV}_{\text{central}} - \text{NAV}_{\text{choque}}$$

avec $\text{NAV} = \text{MV} - \text{BEL}$ où MV représente la valeur de marché des actifs et BEL correspondant au *best estimate liability*. On donnera une méthodologie de calcul de SCR marché en présentant la méthodologie de chaque risque de marché.

SCR taux d'intérêt

Le SCR taux mesure la sensibilité du bilan face aux changements touchant le niveau des taux d'intérêts. Le calcul du SCR taux implique l'application de chocs à la hausse et à la baisse sur les taux par maturité, comme défini dans les Actes Délégué .

Ainsi, les obligations, les OPCVM obligataires, les swaps et les options seront soumis à un choc de taux, tout comme les flux intervenant dans le calcul du best estimate. En effet, une modification de la courbe des taux d'intérêts a généralement un impact global à la fois sur l'actif et le passif.

SCR action

Le SCR action correspond à la mesure de la sensibilité des éléments du bilan face à un changement touchant le niveau ou la volatilité de la valeur de marché des actions. Il se rapporte spécifiquement au risque lié à la perte en capital résultant d'une baisse de la valeur de marché des actions détenues.

Les Actes Délégués ont établi différentes valeurs de chocs, spécifiques à chaque type d'actif, à savoir :

- Un choc de 39% est appliqué aux actions de "type 1", qui englobe les actions cotées sur des marchés réglementés dans des pays membres de l'Espace Économique Européen (EEE) ou de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE).
- Un choc de 49% est appliqué aux actions de "type 2", qui comprend les actions cotées en bourse dans des pays qui ne font pas partie de l'Espace Économique Européen (EEE) ou de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE)

- Un choc de 22% est appliqué aux participations stratégiques, qu'elles soient classées comme "type 1" ou "type 2"

Ces chocs sont soumis à un ajustement symétrique, également appelé "Dampener", qui est publié mensuellement par l'EIOPA.

SCR immobilier

Le SCR immobilier permet de mesurer la sensibilité des éléments du bilan suite à une variation du marché des actifs immobiliers. Les Actes Délégués recommandent l'application d'un choc de 25% sur la valeur des titres immobiliers. Les principaux supports

SCR spread

Le SCR de spreads permet de mesurer le changement du niveau ou de la volatilité des spreads de crédit par rapport à la courbe des taux d'intérêt sans risque sur le bilan.

Le SCR spread se calcule de la manière suivante :

$$SCR_{spread} = SCR_{Obligations} + SCR_{securisation} + SCR_{crédit}$$

avec :

- $SCR_{Obligations}$ représente l'exigence en capital pour le risque de spreads sur les actifs obligataires et les prêts
- $SCR_{securisation}$ représente l'exigence en capital pour le risque de spreads pour les titres issus de la titrisation
- $SCR_{crédit}$ représente l'exigence en capital pour le risque de spreads pour les crédits

Les obligations et les prêts qui bénéficient d'une évaluation de crédit effectuée par un Organisme Externe d'Évaluation du Crédit (OEEC) sont affectés d'un facteur de risque $stress_i$. Ce facteur de risque $stress_i$ est déterminé en fonction de la durée de l'actif et de son niveau de qualité de crédit, représenté généralement par un rating.

SCR devise

Le risque de change ou devise vise à quantifier le besoin en capital correspondant à la perte que génère l'effet de change sur la valeur des actifs. Les modules concernés sont les suivants :

- Tous les titres ayant un libellé en devise étrangère
- Les produits de change (options, futures, swaps, forwards)
- Les produits structurés qui sont indexés sur le change

Le SCR de devise représente la somme des besoins en capitaux individuels associés à chaque devise, ce SCR est calculé en faisant le produit de la valeur absolue de l'exposition nette à la devise et de son stress de change associé.

SCR concentration

Le risque de concentration est destiné à quantifier le besoin en capital correspondant à un manque de diversification ou à une surexposition³ au risque défaut de l'émetteur. Ce risque concerne les titres appartenant aux risques actions, spread et immobilier.

La concentration se fait non pas au niveau de l'émetteur mais au niveau du groupe auquel l'émetteur

3. La surexposition à une entité se définit par un seuil (CT_i) et le facteur pénalisant de la surexposition (g_i) sont fonction du rating moyen des exposition.

est rattaché⁴. La détermination du coût de concentration du groupe se fait préalablement par le calcul de l'exposition nette⁵ de ce groupe et sa qualité de crédit moyenne. Le coût individuel de l'exposition d'un émetteur (Con_i) est donné par :

$$Con_i = XS_i \times g_i$$

avec :

- XS représente le niveau de surexposition de l'entité

Toutefois certains titre inclus se voient affecter un facteur g_i de 0, ce sont les suivants :

- Obligations émises en euro par des États membres de l'UE
- Obligations émises par la BCE
- Obligations émises par les banques multilatérales de développement
- Obligations émises par organisations internationales

Le SCR de concentration est déterminé en considérant une absence de corrélation entre les différents émetteurs. Ce SCR se formule de la manière suivante :

$$SCR_{conc} = \sqrt{\sum (con_i)^2}$$

Les divers sous-modules du risque de marché sont ensuite consolidés en utilisant la matrice de corrélation indiquée ci-dessous :

Corrélation	Taux d'intérêt	Actions	Immobiliers	Spreads	Devise	Concentration
Taux d'intérêt	1	A	A	A	A	0
Actions	A	1	0,75	0,75	0,25	0
Immobiliers	A	0,75	1	0,5	0,25	0
spreads	A	0,75	0,5	1	0,25	0
Devise	A	0,25	0,25	0,25	1	0
Concentration	0	0	0	0	0	1

Le paramètre A est égal à 0 lorsqu'il s'agit du SCR taux d'intérêt résultant d'un choc à la hausse SCR up. Dans le cas contraire, ce paramètre prend la valeur de 0,5.

Le SCR marché se calcule alors en faisant une agrégation de tous les risques tout en tenant compte de la corrélation entre eux.

4. Nous assimilons les groupes par la société mère du groupe.

5. exposition nette représente la somme des expositions individuelles du groupe.

Cette section sera consacrée à la présentation des résultats du *rolling obligataire* ainsi que leur impact sur certains indicateurs de la gestion d'actif/passif. Parallèlement, une analyse de sensibilité en contrainte et en scénario sera menée.

3.4 Analyse de résultat

Dans le cadre de l'opération de vente, les 100 premières solutions ont été extraites du modèle et le calcul des métriques s'est fait sur chaque portefeuille potentiellement vendable.

3.4.1 Comparaison des méthodes de vente

Modèle dite de pondération⁶

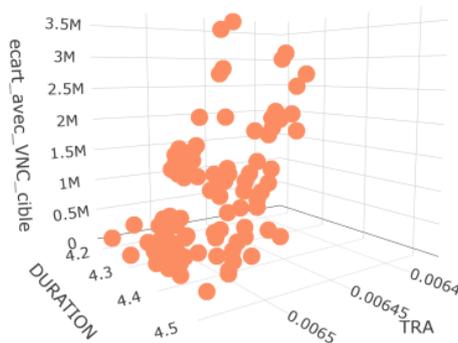


FIGURE 3.2 – TRA, Ecart et duration

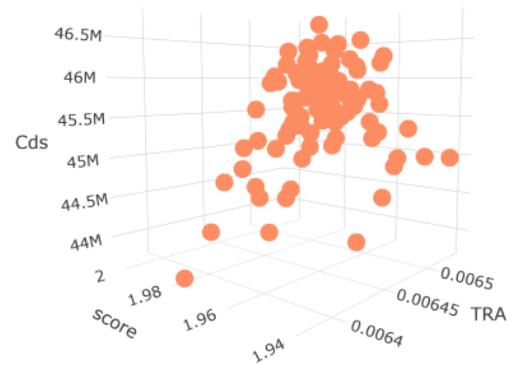


FIGURE 3.3 – TRA, Cds et score

Opération de ventes pour un taux de vente de 3,5%, taux coupon fixé entre [0,2%] et une duration entre [0,10] avec $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0.01$

La méthode dite ϵ -contrainte

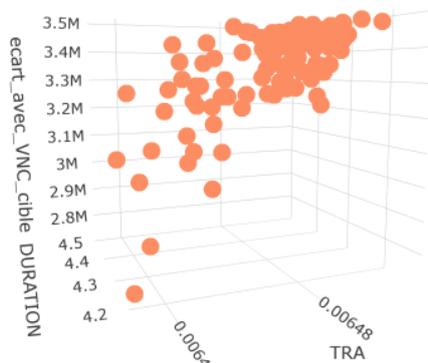


FIGURE 3.5 – TRA, Ecart et duration

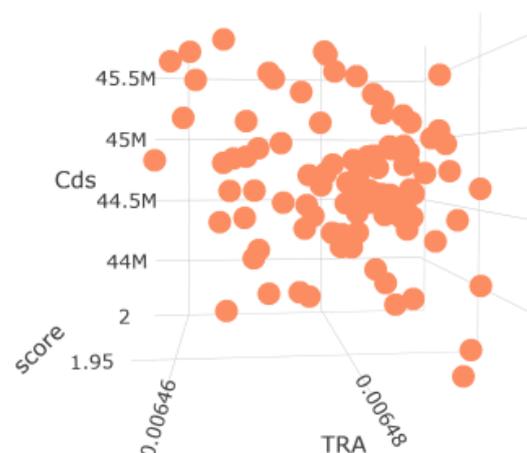


FIGURE 3.6 – TRA, Cds et score

Opération de ventes pour un taux de vente de 3,5%, taux coupon fixé entre [0,2%] et une duration entre [0,10] avec un ϵ valant 3.5 M

6. les paramètres de pondérations β_1 et β_2 sont obtenus en faisant une optimisation

A iso-écart entre la VNC cible et la VNC obtenue. La méthode dite de pondération et ϵ -contrainte ont été implémenté. Sur le prisme TRA, Ecart et duration (voir figure 3.2 et 3.5), on constate de manière générale que la TRA évolue dans le même sens que l'écart, c'est à dire plus l'écart augmente et plus le TRA augmente. La méthode dite de pondération offre plus de possibilité de choix d'obligations que la méthode dite ϵ -contrainte comme on peut le constater sur l'axe des écarts entre la VNC cible et la VNC obligataire obtenu où les axes sont respectivement 0 à 3.5M pour la méthode dite de pondération et 2.8M à 3.5M pour la méthode dite ϵ -contrainte. Sur le prisme du TRA, Cds et score, on constate que le Cds et le score évolue dans le même sens. De manière plus détaillé, nous présentons les différentes interactions dans le tableau ci-dessous.

	ecart avec la vnc cible	Duration	Score	Cds	TRA
Ecart avec la vnc cible	x	?	?	?	-
Duration	?	x	?	?	?
Score	?	?	x	+	+
Cds	?	?	+	x	+
TRA	-	?	+	+	x

?	pas d'interaction
+	évolution dans le même sens
-	évolution dans le sens contraire

TABLE 3.2 – Interactions des différentes métrique

Après l'utilisation des deux méthodes, le choix de la méthode pour l'application du rolling s'est porté sur la méthode dite de pondération car elle offre plus de possibilités de choix de portefeuilles obligataires. Dans la section suivante, nous allons passer à l'application du rolling.

3.4.2 Application du rolling

TRA	0,65%
Ecart avec la cible	2 8,21 M€
Score	1,99
Duration	4,27
Cds	45,152 M€
Rc utilisée	41%
MIN VNC	0,80 M€
MAX VNC	20,17 M€

TABLE 3.3 – Les métriques de la solution choisie

	Répartition en VNC	Répartition en VM
A	44,80%	42,60%
AA	0,66%	0,62%
BBB	38,82%	39,27%
HY	0,76%	0,84%
France	14,95%	16,66%
Total général	100,00%	100,00%

TABLE 3.4 – Caractéristiques des obligations vendues

Le portefeuille vendable choisi est composé d'obligations d'entreprises avec les notations (A, AA et BBB) et d'obligations de l'État français. La composition en obligation d'entreprises est plus de 80%, ce qui signifie que cette vente diminue le risque de ce portefeuille. Le score de notation est bien supérieur (voir tableau 3.3) à celui du portefeuille obligataire de l'entité assurantielle qui est de 1,37. De plus, les obligations les plus vendues sont les obligations à court terme soit une maturité comprise entre $[0,5[$ comme nous pouvons le voir dans le tableau (3.5).

	Répartition en VNC	Répartition en VM
[0,5[63,73%	67,12%
[5,10[36,27%	32,88%
Total général	100,00%	100,00%

TABLE 3.5 – Répartition en classe de maturité vendue

Après la vente de ce portefeuille obligataire, on investira tout le montant de la vente dans l'achat de nouvelles obligations pour fermer le gap duration avec une précision $\rho = 10^{-2}$.

Le portefeuille acheté se présente de la manière suivante :

TRA	3,9%
Score	1,36
Duration	21,98

TABLE 3.6 – Métriques de la solution

Obligations/Maturités	20	30	Total général
A	0%	6,50%	6,50%
AA	8,31%	0%	8,31%
BBB	14,19%	0%	14,19%
France	45,46%	25,54%	71%
Total général	67,96%	32,04%	100%

TABLE 3.7 – Répartition des obligations

La composition du portefeuille concorde avec les caractéristiques définies lors de la modélisation de l'achat. Ce portefeuille dispose d'un taux de rendement 3,9%, d'une duration de 21,98 ainsi qu'un score de notation de 1,36. Une fois le *rolling* effectué, nous utilisons le modèle ALM afin d'effectuer des projections et par la suite, nous analysons les sorties du modèle ALM.

NB : l'allocation est maintenue stable sur toute la durée de projection

Les Durations

La duration obligataire et la duration d'actif évoluent dans le même sens (voir les figures 3.8 et 3.9). De plus, la duration obligataire (actif) avec rolling est au dessus de celle sans rolling car nous investissons dans les obligations de grandes durations pour fermer le gap. le rapprochement des deux durations à long terme est dû à la politique de réinvestissement sur l'OAT 10 ans.

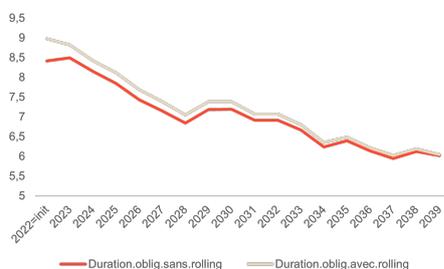


FIGURE 3.8 – Duration obligataire

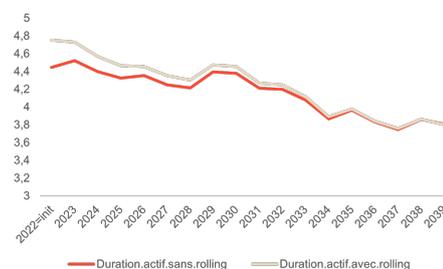


FIGURE 3.9 – Duration actif

Le taux de rendement comptable obligataire

Le taux de rendement obligataire du portefeuille après l'application du *rolling* est supérieur à celui sans application sur tout l'horizon de projection, ce qui est en partie dû à l'ajout des obligations

ayant un meilleur rendement. Cette supériorité est plus prononcée entre 2023 et 2032. Par contre, sur le reste de la durée de projection, les deux taux de rendement sont relativement à cause de la politique de réinvestissement sur les OAT 10 ans.

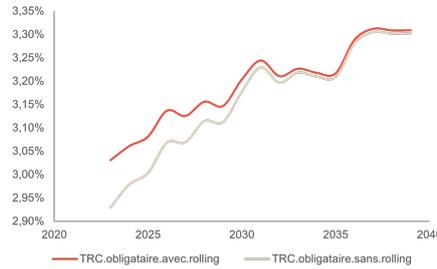


FIGURE 3.10 – Taux de rendement comptable obligataire

Le taux de rendement comptable

En observant le graphique ci-dessous 3.11, le taux de rendement comptable avec rolling est supérieur au taux de rendement comptable sans rolling sur un horizon de cinq ans. Cette différence est moins prononcée en début de projection, mais plus accrue dans l'intervalle [2024,2026].

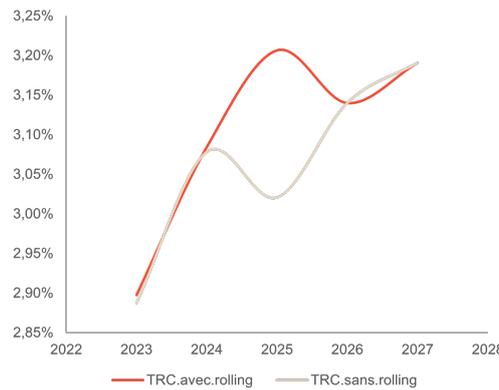


FIGURE 3.11 – Taux de rendement comptable

Solde de trésorerie



FIGURE 3.12 – Solde de trésorerie avec rolling

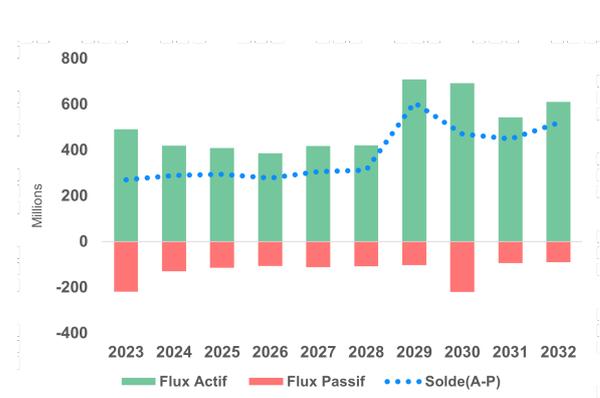


FIGURE 3.13 – Solde de trésorerie sans rolling

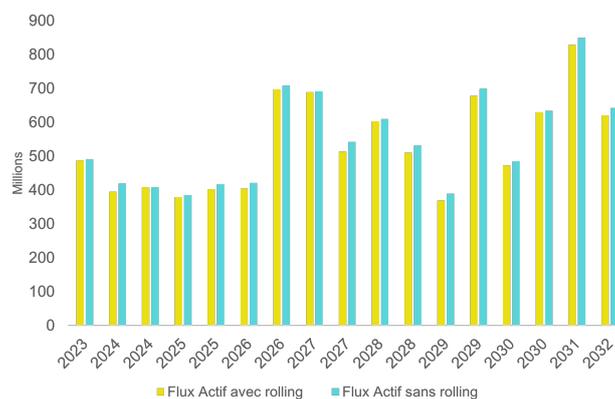


FIGURE 3.14 – Flux actif

L'observation des trois différents graphiques, nous indique que la stratégie n'a pas d'impact significatif sur la durée de projection. De plus, nous constatons que le flux d'actifs avec rolling est inférieur ou égal à celui sans rolling. Cela peut s'expliquer par la vente des obligations entre [0,10] impliquant beaucoup de pertes de tombées en nominales sur les 10 premières années.

Marge financière

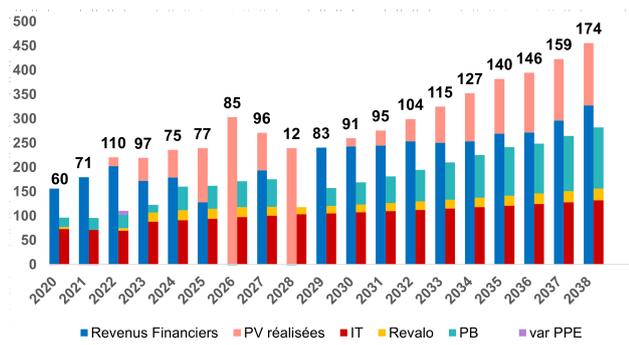


FIGURE 3.15 – marge financière avec rolling

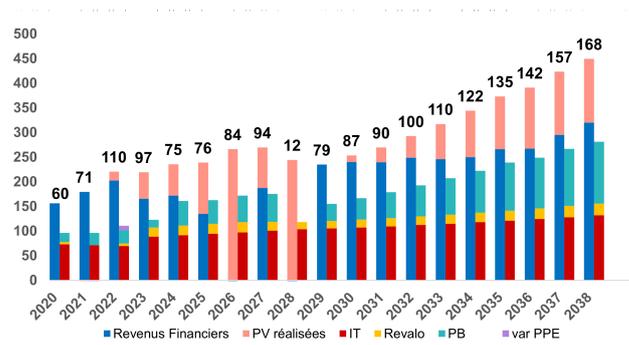


FIGURE 3.16 – marge financière sans rolling

La marge financière est positive sur toute la durée de projection avec ou sans application du *rolling*. Toutefois, nous distinguons une légère différence entre les marges financières en faveur de la situation sans rolling. Ceci peut être dû aux maturités des obligations vendues et achetées.

SCR marché

SCR marché sans rolling	SCR marché avec rolling	écart en SCR marché
785,7 M€	788,1 M€	0,3%

On constate que l'écart entre le SCR marché sans *rolling* et le SCR marché avec *rolling* est relativement bas.

Synthèse

Au vu des résultats précédents, il est clair que la méthode dite ϵ -contrainte est plus sensible que la méthode dite de pondération. En effet, la méthode ϵ -contrainte n'offre pas un intervalle plus large d'écart entre la valeur nette comptable cible et la valeur nette comptable, contrairement à la méthode de pondération qui présente un intervalle plus large. Aussi, le *rolling* appliqué permet d'augmenter le taux de rendement comptable obligataire du portefeuille sur la durée de projection, mais permet une

augmentation du taux de rendement comptable du portefeuille sur un certain horizon de projection. De plus, la vente de plusieurs obligations dans l'intervalle de duration $[0, 5[$ pourrait expliquer la supériorité des flux actifs sans *rolling* sur les flux actifs avec *rolling* en début d'année. Dans la suite, on pourra envisager d'augmenter le montant de vente et prendre un intervalle de duration 3 ans pour avoir une situation pérenne sur les trois ans comme le recommande l'entité assurantielle.

3.5 Étude de sensibilité

Au vu des résultats constatés, nous allons effectuer une étude sur la variation de certains coefficients et scénarios afin de voir leur impact. Cependant, nous continuerons avec la méthode dite de pondération, car elle offre un large ensemble de solutions différentiables.

3.5.1 sensibilités contraintes

La contrainte au niveau du taux de coupon sera maintenue, contrairement à celle de la durée du taux de vente au niveau de l'opération de vente.

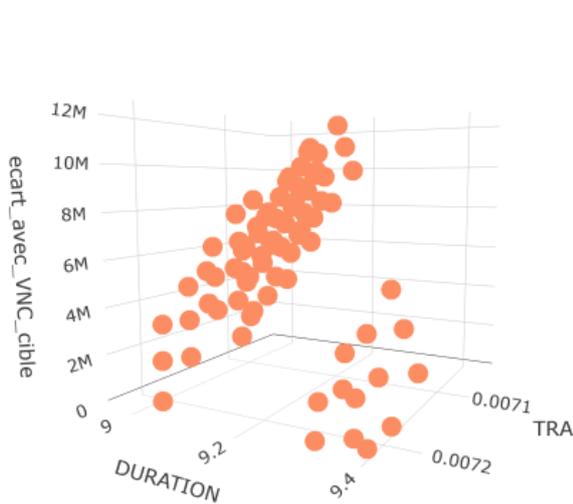


FIGURE 3.17 – TRA, Ecart et duration

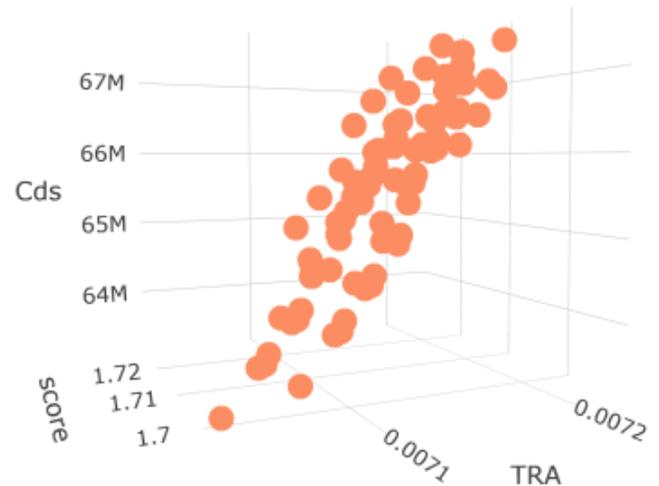


FIGURE 3.18 – TRA, Cds et score

Opération de ventes pour un taux de vente de 0,05%, taux coupon fixé entre [0,2%] et une duration entre [3,20] avec $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0.01$

En observant la figure (3.17), on constate que le TRA augmente avec le taux de vente. En d'autres termes, plus l'écart est élevé, plus le TRA est faible. Sur la figure suivante (3.18), on constate que plus le montant de Cds est élevé, plus le TRA est élevé. le score et le Cds évoluent dans le même sens.

Après une sélection du portefeuille vendable en pratiquant un arbitrage sur les métriques, nous allons effectuer le *rolling* obligataire en débutant par la vente. Le portefeuille de vente obtenu est le suivant :

TRA	0,72%
Ecart avec la cible	66 111,00
Score	1,72
Duration	9,40
Cds	67,32
RC utilisée	98%
MIN VNC	0,70 M€
MAX VNC	40,20 M€

TABLE 3.8 – Les métriques de la solution choisie

	Répartition en VNC	Répartition en VM
A	30,17%	30,97%
AA	0,47%	0,50%
BBB	23,34%	26,09%
Belgium	3,21%	2,54%
France	27,21%	26,82%
Spain	15,60%	13,08%
Total général	100,00%	100,00%

TABLE 3.9 – Caractéristiques des obligations vendues

Le portefeuille vendu présente un TRA de 0.72% ainsi qu'une durée de 9,40. Aussi, il utilise la quasi-totalité de la réserve de capitalisation, soit 98%. Sa composition est de 53,98% en obligation d'entreprises montre que nous retirons une partie du risque de notre portefeuille. Ci-dessous, nous observons la répartition de la VNC en classe de maturité vendue.

	Somme de VNC_YC	Somme de VM_YC
[3,5[24,29%	27,24%
[5,10[30,52%	31,26%
[10,20[45,19%	41,50%
Total général	100%	100%

TABLE 3.10 – Répartition en classe de maturité vendue

Après la vente de ce portefeuille obligataire, on investira tout le montant de la vente dans l'achat de nouvelles obligations pour fermer le gap duration avec une précision $\rho = 10^{-2}$.

Le portefeuille acheté pour la fermeture du gap de durée se présente de la manière suivante :

TRA	3,9%
Score	1,35
Duration	19,79

TABLE 3.11 – Métriques de la solution

Obligations/Maturités	5	20	30	Total général
A	0%	0%	7,50%	7,50%
AA	0%	7,49%	0%	7,49%
BBB	0%	15,01%	0%	15,01%
France	0%	68,35%	0%	68,35%
Germany	1,65%	0%	0%	1,65%
Total général	1,65%	90,85%	7,50%	100%

TABLE 3.12 – Répartition des obligations

La composition du portefeuille présente des caractéristiques similaires aux portefeuilles d'achats précédents. Ce portefeuille dispose d'un taux de 3,9% et d'une durée de 19,79. Les obligations achetées ont pour maturité respective (5 ans, 20 ans et 30 ans).

Après l'application du *rolling*, nous utilisons le modèle ALM afin d'effectuer des projections et par la suite, nous analysons les sorties du modèle ALM en scénario central.

Les Durations

La durée obligataire avec l'application du *rolling* est supérieure à celle sans l'application du *rolling* car l'achat de nouvelles obligations à durées élevées a contribué à augmenter la durée des obligations avec *rolling* comme nous pouvons le voir sur les graphiques ci-dessous.

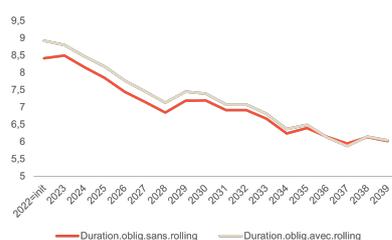


FIGURE 3.20 – Duration obligataire

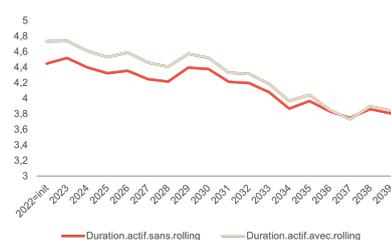


FIGURE 3.21 – Duration actif

Le taux de rendement comptable obligataire

Le taux de rendement comptable obligataire du portefeuille après *rolling* est supérieur à celui sans *rolling* sur toute la durée de projection (voir la figure 3.22). Ceci est en partie dû à l'achat des nouvelles obligations possédant de grand rendement et des ventes à moyen et long terme.

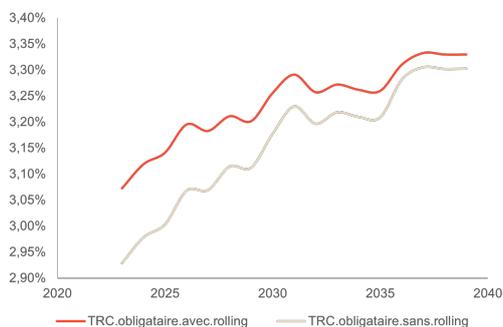


FIGURE 3.22 – Taux de rendement comptable obligataire

Taux de rendement comptable

En observant le graphiques ci-dessous (3.23), le taux rendement comptable du portefeuille après application du *rolling* est très proche de celui application sans *rolling* sur l'intervalle [2023,2028]. Cela peut s'expliquer par l'incertitude des rendements financiers hors la classe d'actifs obligataire fixe.

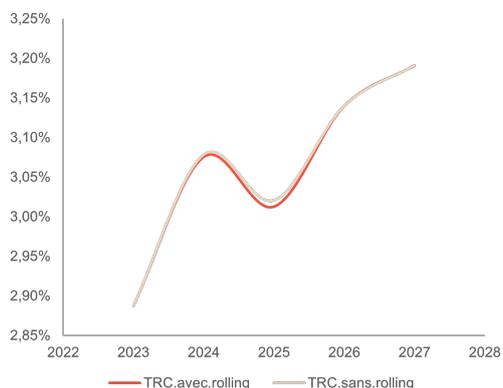


FIGURE 3.23 – Taux de rendement comptable

Solde de trésorerie

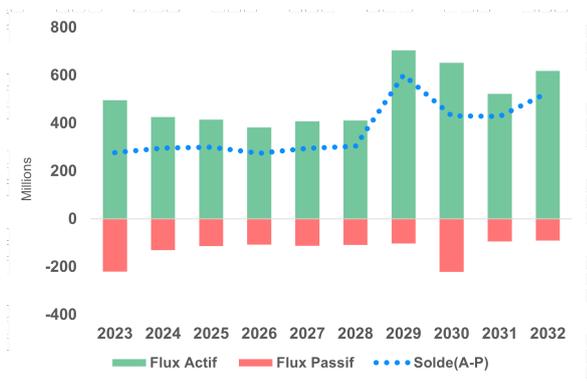


FIGURE 3.24 – Solde de trésorerie avec rolling

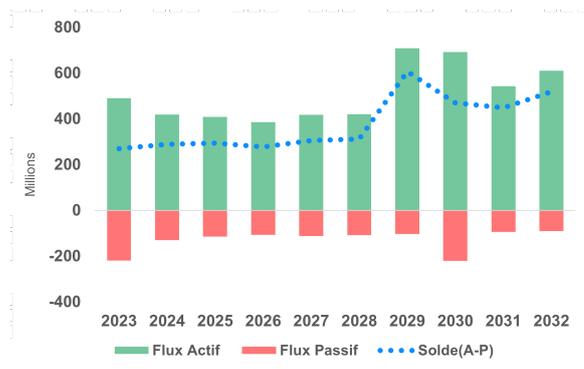


FIGURE 3.25 – Solde de trésorerie sans rolling

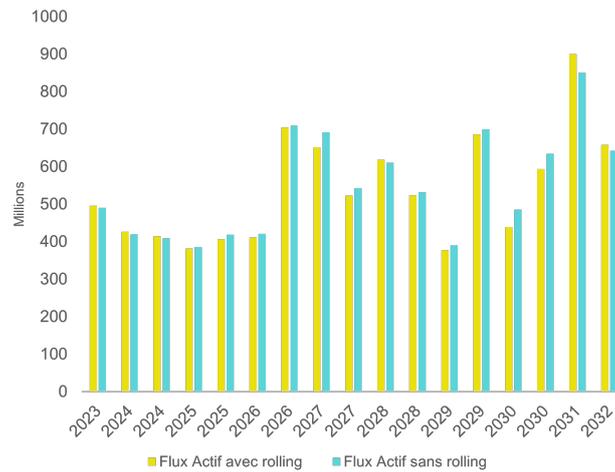


FIGURE 3.26 – Flux actif

En observant les trois graphique ci-dessus, l’application de la stratégie de *rolling* sur la classe de duration entre [3,20] induit un solde de trésorerie élevé à court terme. Ce solde est supérieur sur toute la durée de projection. En observant le graphique 3.26, on constate que le flux actif avec *rolling* est supérieur à celui sans *rolling* à court terme car la vente entre [3,20] induit une augmentation quasi-certaine sur les trois premières années.

Marge financière

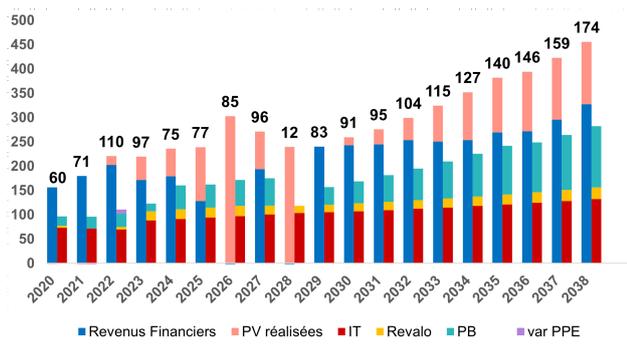


FIGURE 3.27 – avec rolling

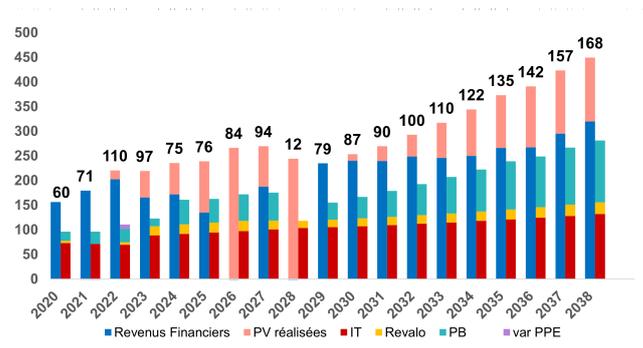


FIGURE 3.28 – Sans rolling

La marge financière avec application du *rolling* est supérieure à celle sans sur toute la durée de projection car à cause de l’achat d’obligations de moyen et très long terme.

SCR marché

SCR marché sans rolling	SCR marché avec rolling	écart en SCR marché
785,4 M€	786,1 M€	0,05%

On constate que l’écart entre le SCR marché sans *rolling* et le SCR marché avec *rolling* est relativement bas.

3.5.2 Sensibilités scénario

Cette sous-section sera consacrée à mesurer l’impact de la stratégie du *rolling obligataire* sur un autre scénario économique⁷.

7. Le scénario adverse : C’est un scénario économique pessimiste envisagé par la direction des investissements du groupe Malakoff Humanis

L'étude des indicateurs du scénario adverse se fera sur la base post-achat précédente. Nous mettrons plus l'accent sur le taux de rendement comptable, la marge financière.

Le Taux de rendement comptable

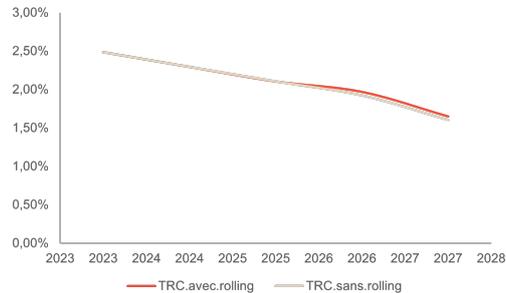


FIGURE 3.29 – Taux de rendement comptable en scénario adverse

Entre 2023 et 2026 comme nous pouvons le voir sur le graphique ci-dessus, les deux taux de rendements comptables sont identiques, mais après 2026 le taux de rendement comptable après *rolling* est supérieur. Ses allures sont en partie dues aux différentes évolutions des actifs sur le scénario adverse.

Marge financière

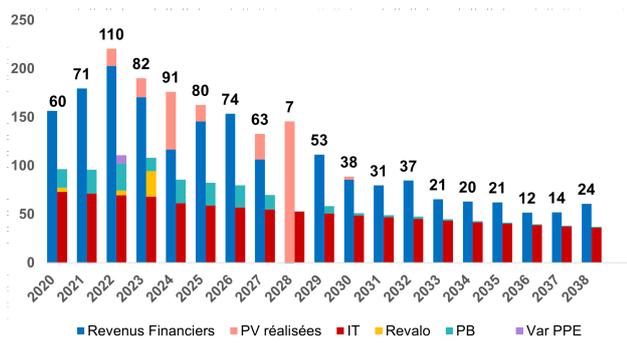


FIGURE 3.30 – marge financière avec rolling en scénario adverse

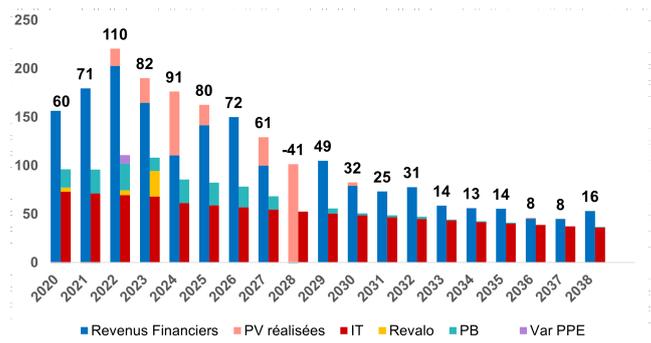


FIGURE 3.31 – marge financière sans rolling en scénario adverse

En observant les marges financières, on constate que l'utilisation du *rolling* est plus que bénéfique, car elle reste positive toute la durée de projection, contrairement à la marge financière sans qui présente une valeur négative en 2028. De plus, on constate la supériorité des marges financières avec *rolling* par rapport à celle sans.

Les limites et ouvertures de l'étude proposée

Sommaire

4.1	Au niveau du modèle de vente	62
4.1.1	Sensibilité de l'algorithme et problème de données	62
4.1.2	Multiobjectivité	62
4.2	Au niveau du modèle d'achat	62
4.2.1	Multiobjectivité	62
4.2.2	Autres variables à optimiser	62
4.3	Plus loin	63

Au cours de notre étude sur la mise en place de notre stratégie (*Rolling obligataire*), il y a eu beaucoup de difficultés au niveau des différentes opérations (vente/achat) allant du manque de données à l'approche utilisée. Certaines ont pu être résolues par le biais d'hypothèses simplificatrices ou par l'utilisation de proxy. Cependant, il en reste quelques-unes qui n'ont pas pu être élucidées. Ainsi, ce chapitre va exposer quelques limites de la démarche utilisée dans ce mémoire ainsi que des perspectives d'améliorations pouvant être développées.

4.1 Au niveau du modèle de vente

4.1.1 Sensibilité de l'algorithme et problème de données

Dans le processus de vente, de certaines bases vendables, il y avait énormément de difficultés pour avoir une solution financièrement correcte au vu de la proximité de tous les indicateurs. Ce phénomène était en partie dû à la présence d'une ligne possédant un faible montant en VNC. Afin d'avoir une base de solutions distinctes, il est recommandé de faire une agrégation des lignes ou de définir un seuil d'obligations vendable. Toutefois, il est risqué de faire une agrégation des données financières au risque de perte d'informations non négligeables.

4.1.2 Multiobjectivité

Le modèle de vente devrait être de base être un modèle binaire multiobjective permettant de donner une solution exhaustive. Au vu de la mise en œuvre complexe, nous nous sommes focalisés sur le point le plus important qui est de sélectionner un portefeuille générant un faible taux de rendement de comptable. Afin de prendre en compte d'autres caractéristiques telles que (une solution possédante un score de notation élevé, une solution possédant Cds élevé etc. . .). Nous avons défini des métriques qui nous permettront de faire un arbitrage dans le choix du portefeuille optimal du point de vue financier. Toutefois, il aurait été judicieux de mettre en place un algorithme multiobjectif afin d'avoir un programme qui correspond à nos objectifs momentanés.

4.2 Au niveau du modèle d'achat

4.2.1 Multiobjectivité

Face à la relation entre le rendement et le risque, notre formulation première de la modélisation de l'achat pourrait nous donner des résultats non convenables, car elle choisira avec certitude une obligation ayant la pire notation (générant le grand rendement) et disposant d'une durée pouvant fermer le gap de durée, ce qui pourrait augmenter l'exposition du portefeuille au risque de crédit. Pour résoudre ce problème, un modèle respectant la répartition obligataire du portefeuille a été mis en place. Cependant, le modèle pourrait être plus optimal en ajoutant d'autres objectifs aux deux objectifs de bases qui sont de fermer le gap et maximiser le TRA. Un axe concernant la minimisation du SCR concentration pourrait être pris afin de faire une sélection en terme rating. On pourrait aussi ajouter l'axe du crédit swap default qui pourrait être une bonne métrique pour choisir un portefeuille générant moins de risque.

4.2.2 Autres variables à optimiser

Le modèle achat défini permet de déterminer le montant à investir dans les obligations achetées. Mis à part l'axe de la répartition du montant dans l'achat, l'optimisation de la maturité pourrait être aussi intéressante afin de sélectionner de meilleure qualité. L'optimisation du taux de coupon aussi pourrait également être un axe dans la mesure où la cible de taux de rendement était connue.

4.3 Plus loin

En plus des éléments apportés pour corriger les limites l'opération de vente et d'achat, les éléments suivants pourraient être envisagés pour améliorer la stratégie, à savoir :

- La vente sur le marché secondaire
- L'achat des produits dérivés de taux pour avoir un portefeuille d'achat plus sécurisé.
- La déformation de l'allocation après la première année de projection
- L'investissement sur les échéances échelonnées de manière régulière sur une période donnée afin de maintenir une certaine liquidité à court terme tout en conservant des obligations à long terme pour générer un rendement potentiellement élevé

Conclusion

Dans un contexte de hausse des taux favorisant les investissements obligataires, ce mémoire avait pour objectif de fermer le gap de duration tout en augmentant le taux de rendement comptable obligataire. Lors de l'application de cette méthode, nous avons eu d'agréables surprises car en plus d'avoir un coût en SCR réduit, il a contribué à l'amélioration des indicateurs de la gestion actif/passif.

Pour réaliser cet objectif, il a été nécessaire de mettre en place un algorithme paramétrable permettant d'effectuer un rolling obligataire, pour l'intégrer par la suite, dans le modèle ALM de l'entité assurantielle.

Ainsi, dans un premier temps, ce mémoire a permis de mettre en place une documentation sur l'application du rolling obligataire avec maintien de l'allocation initiale. Un test concluant a été réalisé sur l'algorithme de vente afin de montrer la solidité du rolling obligataire. Son application a permis de retirer d'une part un portefeuille générant un faible taux de rendement comptable avec une composition risqué et intégrer un portefeuille de meilleure qualité du point de vue de rendement et score de notation financière.

Grâce à l'utilisation du modèle ALM, il a été possible de réaliser la projection de la base après application du rolling donnant ainsi accès aux indicateurs de la politique de gestion actif/passif de l'entité assurantielle.

Toutefois, le choix de paramètres adéquats a induit de meilleurs résultats sur l'ensemble des indicateurs financiers pour les deux différents scénarios.

Pour aller plus loin et poursuivre les études initiées au sein de ce mémoire, il pourrait tout d'abord être utile de développer le modèle de rolling en optimisant tous les paramètres liés à la fois à la vente et l'achat pour avoir des indicateurs satisfaisants. Cela permettrait d'améliorer le modèle ALM du groupe Malakoff Humanis en leur donnant accès à une stratégie utilisable dans un contexte de hausse des taux.

Ce mémoire a été l'occasion de comprendre la complexité des sujets liés aux pilotages du gap de duration dans un organisme d'assurance composé majoritairement de contrats d'assurance-vie. En effet, le pilotage du gap de duration nécessite à la fois des compétences et connaissances actuarielles ainsi que les stratégies financières applicables dans un contexte économique précis. Enfin, l'utilisation du modèle ALM du groupe Malakoff Humanis s'est présentée comme une opportunité pour travailler sur ce sujet.

Annexe

A.1 Équivalence entre TRC et TRA dans le cadre des obligations fixes

Dans l'opération consistant à vendre nos obligations, nous avons supposé que le taux de rendement comptable obligataire et le taux de rendement actuariel comptable sont équivalents. Dans cette partie, donnerons des aspects mathématiques et numériques de cette comparaison.

A.1.1 Obligation zéros coupon

$$\text{Prix d'achat} = \frac{N}{(1 + \text{TRA})^M} \quad \text{et} \quad \text{VNC}(t) = \frac{N}{(1 + \text{TRA})^{M-t}}$$

$$\forall t > 0, \text{TRC}_{\text{obligataire}}(t) = \frac{\text{Coupon}(t) + \Delta\text{SD}(t) + \Delta\text{CC}(t)}{\frac{\text{VNC}(t) + \text{VNC}(t-1)}{2}}$$

Comme

$$\text{SD}(t) = \frac{N}{(1 + \text{TRA})^{M-t}} - \text{Prix d'achat}$$

Alors

$$\Delta\text{SD}(t) = \frac{N}{(1 + \text{TRA})^{M-t}} - \frac{N}{(1 + \text{TRA})^{M-t+1}} = \frac{N \times \text{TRA}}{(1 + \text{TRA})^{(M-t)+1}}$$

De plus

$$\frac{\text{VNC}(t) + \text{VNC}(t-1)}{2} = \frac{\frac{N}{(1+\text{TRA})^{M-t}} + \frac{N}{(1+\text{TRA})^{M-t+1}}}{2} = \frac{N \times (2 + \text{TRA})}{2 \times (1 + \text{TRA})^{(M-t)+1}}$$

Sachant que

$$\forall t > 0, \text{Coupon}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\text{CC}(t) = 0$$

On a :

$$\forall t > 0 \quad \text{TRC}(t) = \frac{\Delta\text{SD}(t)}{\frac{\text{VNC}(t) + \text{VNC}(t-1)}{2}}$$

Par conséquent,

$$\forall t > 0, \text{TRC}(t) = \frac{2 \times \text{TRA}}{2 + \text{TRA}}$$

En observant la relation, on remarque que le TRC d'une obligation zéros coupon ne dépend du temps.

Après simulation, on obtient le graphique suivant :

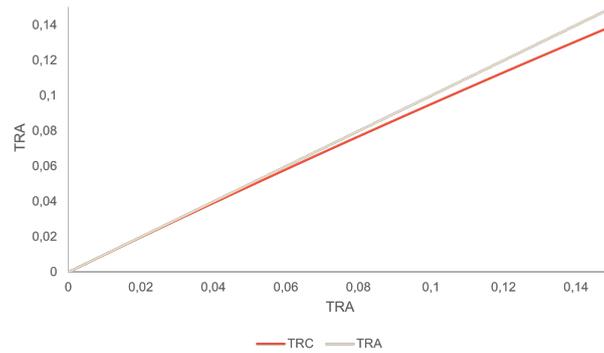


FIGURE A.1 – TRC en scénario adverse

Entre 0 et 14%, la différence entre le taux de rendement comptable et le taux de rendement actuariel est inférieure ou égale à 10^{-2} . Entre 0 et 5%, cette différence est inférieure ou égale à 10^{-3}

A.1.2 Obligation classique

$$\text{Prix d'achat} = \sum_{i=1}^M \frac{t_{\text{coupon}} \times N}{(1 + \text{TRA})^i} + \frac{N}{(1 + \text{TRA})^M} \quad \text{et} \quad \text{VNC}(t) = \sum_{i=1}^{M-t} \frac{t_{\text{coupon}} \times N}{(1 + \text{TRA})^i} + \frac{N}{(1 + \text{TRA})^{M-t}}$$

$$\forall t > 0, \text{TRC}_{\text{obligataire}}(t) = \frac{\text{Coupon}(t) + \Delta\text{SD}(t) + \Delta\text{CC}(t)}{\frac{\text{VNC}(t) + \text{VNC}(t-1)}{2}}$$

Comme

$$\text{SD}(t) = \text{VNC}(t) - \text{Prix d'achat}$$

Alors

$$\Delta\text{SD}(t) = \text{VNC}(t) - \text{VNC}(t-1) \quad \text{et} \quad \Delta\text{CC}(t) = 0 \quad \text{car l'obligation est à taux fixe}$$

Au vu de la complexité à déterminer, une formule détaillée. Nous avons décidé de faire des simulations afin de montrer l'équivalence entre TRA et TRC.

Caractéristique de l'obligation												
taux de coupon		1,0%										
Nominal		100,0										
TRA		2,0%										
Maturité		10										
Année		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Coupon		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Remboursement											100,0	
Flux		1	1	1	1	1	1	1	1	1	101	
Deflateur (taux actuariel)		98%	96%	94%	92%	91%	89%	87%	85%	84%	82%	
Prix d'achat		91,02										
Décote		8,98										
Calcul de la variation de décote "Méthode d'amortissement actuariel"												
Calcul intermédiaire		91,0	91,8	92,7	93,5	94,4	95,3	96,2	97,1	98,1	99,0	100,0
Écoulement de la décote		0,0	0,8	1,7	2,5	3,4	4,3	5,2	6,1	7,0	8,0	9,0
Variation de décote		0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	
VNC début de période		91,0	91,8	92,7	93,5	94,4	95,3	96,2	97,1	98,1	99,0	
VNC fin de période		91,8	92,7	93,5	94,4	95,3	96,2	97,1	98,1	99,0	100,0	
Revenus annuel		1,82	1,84	1,85	1,87	1,89	1,91	1,92	1,94	1,96	1,98	
TRC		2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	

FIGURE A.2 – Maquette de simulations

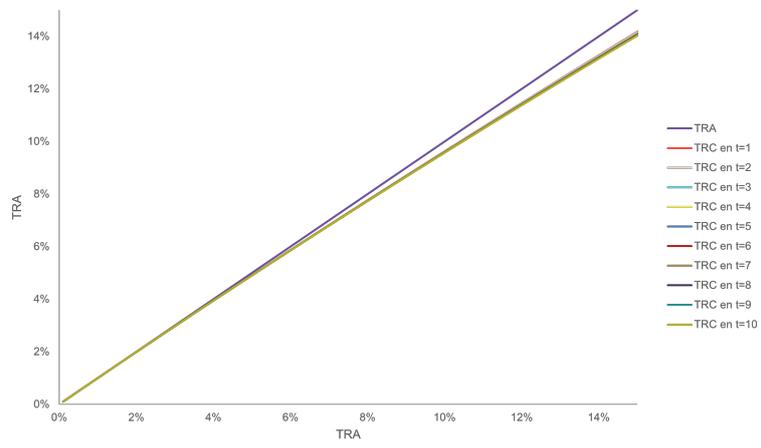


FIGURE A.3 – Simulations TRA vs TRC

On a une précision de 10^{-2} jusqu'à 14%.

Table des figures

1	TRA, Ecart et duration	vi
2	TRA, Cds et score	vi
3	TRA, Ecart et duration	vi
4	TRA, Cds et score	vi
5	Taux de rendement comptable obligataire	viii
6	Marge financière avec rolling	viii
7	Marge financière sans rolling	viii
8	Taux de rendement comptable obligataire	ix
9	marge financière avec rolling	x
10	marge financière sans rolling	x
11	marge financière avec rolling en scénario adverse	x
12	marge financière sans rolling en scénario adverse	x
13	Yield, gap and duration	xii
14	Yield, Cds and rating	xii
15	Yield, gap and duration	xii
16	Yield, Cds and rating	xii
17	Accounting Yield of Bonds	xiv
18	Financial Margin with rolling	xiv
19	Financial Margin without rolling	xiv
20	Accounting Bond Yield	xv
21	Financial Margin with rolling	xvi
22	Financial Margin without rolling	xvi
23	financial margin with rolling in adverse scenario	xvi
24	Financial Margin Without Rolling in Adverse Scenario	xvi
1.1	Présentation de l'entité	4
1.2	Écoulement des provisions et des taux servis sans prise en compte des affaires nouvelles et des cotisations du stock	5
1.3	Allocation l'actif au 31/12/2022 en VNC	7
1.4	Répartition obligataire	8
1.5	Répartition obligataire gouvernementale en VNC	8
1.6	Répartition obligataire corporative en VNC	8
1.7	Politique obligataire	9
1.8	Taux historiques de refinancement de la BCE	11
1.9	Historique des taux OAT 10 ans jusqu'au 02/01/2023	12
1.10	Impact de la hausse et de la baisse des taux sur le bilan de l'entité assurantielle	13
1.11	Impact de l'environnement des taux sur l'entité assurantielle	13
1.12	Évolution des OAT 10 ans France, Allemagne et Italie	14
2.1	Bilan simplifié S2 sous contrainte du rolling	16
2.2	Présentation synthétique du principe du rolling obligataire	17

2.3	Base d'obligations vendables sélectionnées	21
2.4	Grille de la notation par rating	24
2.5	Taux de réserve de capitalisation en fonction du niveau de vente avec un intervalle de coupon [0,2%] et un intervalle de durée [0,10]	28
2.6	Exemple d'aborescence de branch and bound	32
3.1	Présentation du modèle ALM	44
3.2	TRA, Ecart et durée	50
3.3	TRA, Cds et score	50
3.4	Opération de ventes pour un taux de vente de 3,5%, taux coupon fixé entre [0,2%] et une durée entre [0,10] avec $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0.01$	50
3.5	TRA, Ecart et durée	50
3.6	TRA, Cds et score	50
3.7	Opération de ventes pour un taux de vente de 3,5%, taux coupon fixé entre [0,2%] et une durée entre [0,10] avec un ϵ valant 3.5 M	50
3.8	Durée obligataire	52
3.9	Durée actif	52
3.10	Taux de rendement comptable obligataire	53
3.11	Taux de rendement comptable	53
3.12	Solde de trésorerie avec rolling	53
3.13	Solde de trésorerie sans rolling	53
3.14	Flux actif	54
3.15	marge financière avec rolling	54
3.16	marge financière sans rolling	54
3.17	TRA, Ecart et durée	56
3.18	TRA, Cds et score	56
3.19	Opération de ventes pour un taux de vente de 0,05%, taux coupon fixé entre [0,2%] et une durée entre [3,20] avec $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0.01$	56
3.20	Durée obligataire	57
3.21	Durée actif	57
3.22	Taux de rendement comptable obligataire	58
3.23	Taux de rendement comptable	58
3.24	Solde de trésorerie avec rolling	58
3.25	Solde de trésorerie sans rolling	58
3.26	Flux actif	59
3.27	avec rolling	59
3.28	Sans rolling	59
3.29	Taux de rendement comptable en scénario adverse	60
3.30	marge financière avec rolling en scénario adverse	60
3.31	marge financière sans rolling en scénario adverse	60
A.1	TRC en scénario adverse	68
A.2	Maquette de simulations	68
A.3	Simulations TRA vs TRC	69

Liste des tableaux

1	Les métriques de la solution choisie	vii
2	Caractéristiques des obligations vendues	vii
3	Métriques de la solution	vii
4	Répartition des obligations	vii
5	Les métriques de la solution choisie	viii
6	Caractéristiques des obligations vendues	viii
7	Métriques de la solution	ix
8	Répartition des obligations	ix
9	Selected solution metrics	xiii
10	Characteristics of sold bonds	xiii
11	Solution metrics	xiii
12	Obligations distribution	xiii
13	Selected solution metrics	xiv
14	Characteristics of bonds sold	xiv
15	Solution metrics	xv
16	Bond breakdown	xv
1.1	Présentation du BE et de la duration par sous risque	5
1.2	Âge moyen des bénéficiaires par sous risque	5
1.3	Composition initiale en VM, PMVL et VNC	7
2.1	Répartition de la classe des taux de coupons en VNC	20
2.2	Répartition de la classe de duration en VNC	21
2.3	Répartition du Rating du portefeuille initiale en VNC	22
2.4	Exemple de portefeuille de vente	32
2.5	Tableau de correspondance des différentes classes d'actifs	33
2.6	Contraintes liées aux portefeuilles pour le processus d'achat	35
3.1	Type et rating pour la définition des émetteurs référents	42
3.2	Intéactions des différentes métrique	51
3.3	Les métriques de la solution choisie	51
3.4	Caractéristiques des obligations vendues	51
3.5	Répartition en classe de maturité vendue	52
3.6	Métriques de la solution	52
3.7	Répartition des obligations	52
3.8	Les métriques de la solution choisie	56
3.9	Caractéristiques des obligations vendues	56
3.10	Répartition en classe de maturité vendue	57
3.11	Métriques de la solution	57
3.12	Répartition des obligations	57

Bibliographie

- [Alexandra,] ALEXANDRA, J. integration de l'orsa dans le suivi continu de la solvabilité pour une compagnie d'assurance vie.
- [Alexia,] ALEXIA, J. Titre : Taux bas, remontée des taux : quel avenir pour les fonds euros ?
- [Droitdesassurances,] DROITDESASSURANCES. Code des assurances.
- [Fouilhoux, 2015] FOUILHOUX, P. (2015). Optimisation combinatoire : Programmation linéaire et algorithmes. *Université Pierre et Marie Curie*.
- [Hao et al., 1999] HAO, J.-K., GALINIER, P. et HABIB, M. (1999). Métaheuristiques pour l'optimisation combinatoire et l'affectation sous contraintes. *Revue d'intelligence artificielle*, 13(2):283–324.
- [Korte et al., 2010] KORTE, B., VYGEN, J., FONLUPT, J. et SKODA, A. (2010). *Optimisation combinatoire*.
- [Sylvain,] SYLVAIN, K. L'impact de la réserve de capitalisation sur les comptes des sociétés d'assurance vie et de capitalisation.
- [Thérond, 2008] THÉRON, P. (2008). Provisions techniques relatives aux actifs, financiers des assureurs. *Resource Actuarielles*.