

**Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

le 13/03/2023

Par : **Alexandre JARJOU**

Titre: **Modélisation des cycles de marché et appétence au
risque dynamique**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : AXA GIE 

Nom :

Signature :

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuares*

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
*(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :

Remerciements

D'emblée, mes vifs remerciements vont à mon tuteur de stage François TCHANGAI pour l'encadrement de mon stage. Son accompagnement et ses conseils d'une qualité hors pair m'ont permis de monter en compétence non seulement sur le plan technique mais également sur le plan de la communication dans la rédaction de l'analyse et la présentation des résultats.

J'adresse également un grand merci également à l'équipe Actuariat du GRM P&C qui m'a fait partager son expérience et a corroboré mon choix de poursuivre dans l'Actuariat.

Par ailleurs, je tiens à remercier Mr PICARD pour ses références de qualité qui m'ont beaucoup aidé dans le cadre de mon étude.

Résumé

La dynamique des prix assurantiels est un point-clé dans la capacité d'un assureur à accepter ou non de nouveaux contrats. La capter puis l'anticiper est un atout essentiel afin de lui garantir une rentabilité durable. C'est pourquoi une base de données contenant l'historique de l'indice des prix du marché assurantiel est l'objet de l'étude qui suit.

D'emblée, on va s'intéresser à la cyclicité de ces prix sur le marché assurantiel américain de l'IARD (plus gros marché mondial). L'exploration de ces données a donc pour objectif de caractériser ces cycles de marché et d'en saisir les moteurs afin de modéliser la dynamique des prix par des méthodes statistiques.

Puis, cette dynamique sera utilisée dans le cadre de l'appétence au risque en élaborant un algorithme permettant d'optimiser la stratégie de souscription d'une compagnie d'assurance afin de maximiser son résultat de souscription et minimiser les exigences en capital.

Ainsi, l'objectif de ce mémoire est donc pour un assureur non seulement de montrer la sensibilité de son appétence au risque à la dynamique des prix mais aussi de lui fournir des éléments de compréhension sur la manière idéale de moduler son exposition au risque selon les conditions des prix du marché.

Mots-clés : Assurance IARD / Ligne d'affaire (*Line of business* ou *LoB*) / Cycle de marché / Série temporelle / Régression linéaire / Appétence au risque / Résultat de souscription / Exigences en capital (*SCR*) / Stratégie de souscription / Optimisation / NSGA-II

Abstract

The dynamics of insurance prices is a key point in an insurer's ability to accept or not new contracts. Capturing it and then anticipating it is an essential asset in order to guarantee sustainable profitability. This is why a database containing the history of the insurance market price index is the subject of the following study.

First, we will look at the cyclicity of these prices in the American P&C insurance market (the largest market in the world). The objective of exploring these data is to characterize these market cycles and to understand their drivers in order to model price dynamics using statistical methods.

Then, these dynamics will be used in the context of risk appetite by developing an algorithm to optimize the underwriting strategy of an insurance company in order to maximize its underwriting result and minimize its required capital.

Thus, the objective of this thesis is not only to show the sensitivity of an insurer's risk appetite to price dynamics but also to provide him with elements of understanding on the ideal way to modulate his risk exposure according to market price conditions.

Table des matières

Note de synthèse	9
Executive summary	21
Introduction.....	32
I. Caractérisation des cycles de marché	36
1.1 Marché américain de l'assurance	36
1.1.1 Les cycles des prix du marché américain.....	36
1.1.2 Les moteurs de la cyclicité des prix.....	39
1.2 Caractéristiques de la base de données.....	42
1.2.1 Observation des cycles.....	42
1.2.2 Statistiques descriptives	43
II. Modélisation des cycles de marché	46
2.1 La modélisation des cycles de marché dans la littérature	46
2.1.1 Modélisation par la régression linéaire.....	46
2.1.2 Modélisation par les séries temporelles	50
2.1.3 Modélisation par la régression à transition lisse	52
2.2 Modélisations réalisées	54
2.2.1 Modélisation univariée	54
2.2.1.1 Séries temporelles	54
2.2.1.1.1 Outils	55
2.2.1.1.2 Application	61
2.2.1.2 Régression linéaire	67
2.2.1.2.1 Outils	67
2.2.1.2.2 Application et résultats	70
2.2.1.3 Synthèse de la modélisation univariée.....	77
2.2.2 Modélisation multivariée	78
2.2.2.1 Modèles à Vecteur Auto-Régressif (VAR).....	78
2.2.2.1.1 Modèle VAR simple.....	78
2.2.2.1.2 Modèle « Vector Error Correction » (VECM)	81
2.2.2.1.3 Modèle STR (<i>Smooth Transition Regression</i>)	83
2.2.2.1.4 Synthèse de la modélisation VAR	83
2.2.2.2 Autres régressions.....	83
2.1.2.2.1 Régression en composantes principales (PCR)	84
2.1.2.2.2 Régression linéaire avec la ligne d'affaire moyenne.....	89
2.2.3 Synthèse de la modélisation des cycles de marché	90
2.3 Sondages et sentiments de marché.....	91
III. Appétence au risque.....	93

3.1	Indicateur de risque	93
3.2	Définition du problème.....	98
3.3	Algorithmes génétiques	101
3.4	Convergence de l'algorithme	104
3.4.1	Etude des fonctions objectif	104
3.4.2	Etude des solutions	106
3.4.2.1	Comparaison des exécutions.....	106
3.4.2.2	Tester la significativité des résultats.....	108
3.4.2.3	Stabilisation des résultats	113
IV.	Stratégie de souscription	116
4.1	Comparaison entre une appétence fixe et une appétence dynamique au risque	116
4.2	Indicateurs de pilotage de l'exposition	118
4.3	Modèle d'optimisation avec modulation dynamique de la limite du SCR.....	123
4.4	Synthèse de la stratégie de souscription	127
V.	Limites et perspectives d'évolution.....	129
5.1	Analyse des cycles de marché	129
5.2	Appétence au risque.....	130
	Conclusion	132
	Bibliographie.....	134
	Annexes.....	135
A.	Détails de la régression à transition lisse (STR)	135
B.	Test de stationnarité d'une série temporelle	139
C.	Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation pour un processus $MA(q)$	140
D.	Méthode de Newton-Raphson	141
E.	Méthode des moindres carrés	143
F.	Spécifications du modèle $VAR(p)$	146
G.	Validation du modèle $VAR(p)$	148
H.	Méthode de calibration des paramètres d'un modèle VECM	152
I.	Principe de l'ACP	154
J.	Modélisation multivariée des autres $LoBs$ par la régression sur la moyenne des $LoBs$	155
K.	Valeurs critiques du test de Kolmogorov-Smirnov	157

Table des figures

Figure I.1: Evolution des variations des prix moyens des LoBs dans l'IARD depuis 1999	37
Figure I.2: Evolution des prix moyens des LoBs dans l'IARD depuis 1999	38
Figure I.3: Evolution des sondages depuis 2017	38
Figure I.4: Théorie de la contrainte de capacité	40
Figure I.13: 4 principaux facteurs impactant les cycles de marché	42
Figure I.14: Evolution des variations des prix par LoB depuis 1999	42
Figure I.15: Evolution des prix des LoBs dans l'IARD depuis 1999	43
Figure I.16: Evolution de la moyenne des prix depuis 1999	44
Figure I.17: Comportement des prix moyens des LoBs	45
Figure I.18: Graphique des corrélations des LoBs	45
Figure II.1: Evolution des NPW, GDP et TPS dans l'IARD Américain entre 1967 et 2009	47
Figure II.2: Observations des différences de prix (durcissement des prix à gauche et assouplissement des prix à droite)	48
Figure II.3: 4 simulations de prédiction parmi les 10000 réalisées	48
Figure II.4: Evolution du Loss Ratio brut dans la branche IARD aux Etats-Unis entre 1967 et 2009	49
Figure II.5: Ratios combinés de l'assurance IARD aux États-Unis et rendements du Trésor à 5 ans : 1953-2009	50
Figure II.6: Modèles AR(2) pour le ratio combiné avec les 2 équations	51
Figure II.7: Tableau de décision pour le choix du modèle ARMA	59
Figure II.8: Autocorrélogrammes pour les différentes LoBs	62
Figure II.9: Tests de différents modèles discriminés par l'AIC	63
Figure II.10: Tests de significativité statistique des modèles calibrés	64
Figure II.11: Graphe des QQ-Plot Normale pour 2 LoBs en particulier	65
Figure II.12: Résultats des tests de normalité et centralité	65
Figure II.13: Autocorrélogrammes pour les résidus des différentes LoBs	66
Figure II.14: Prédiction des prix pour les différentes LoBs	66
Figure II.15: Comportement des prix moyens des LoBs	68
Figure II.16: Séparation des prix moyens des LoBs selon la période du cycle	69
Figure II.17: Comportement des prix moyens des LoBs	69
Figure II.18: Comportement des prix selon les périodes de durcissement (hard market) ou d'assouplissement des prix (soft market)	71
Figure II.19: Résultats des régressions pour la méthode de séparation selon la période du cycle	71
Figure II.20: Résultats d'autres régressions pour la méthode de séparation selon période du cycle	71
Figure II.21: Comportement des prix aux alentours du seuil 115	72
Figure II.22: Résultats des régressions pour la méthode de séparation par le seuil	73
Figure II.23: Homoscédasticité des résidus	74
Figure II.24: Prédiction des prix moyens des LoBs	76
Figure II.25: Prédiction des prix de la LoB Commercial Auto	76
Figure II.26: Backtesting et prédiction des prix moyens des LoBs	77
Figure II.27: <i>Backtesting et prédiction des prix de la LoB Commercial Auto</i>	77
Figure II.28: Test de stabilité structurelle du modèle VAR	80
Figure II.29: Prédiction des prix des LoBs individuelles par le modèle VAR simple	81
Figure II.30: Résultats du test de cointégration de Johansen	82
Figure II.31: Prédiction des prix des LoBs individuelles par le modèle VECM	83
Figure II.32: Principe de l'ACP	84

Figure II.33: Prix de 3 LoBs	85
Figure II.34: Pourcentage des variances expliquées par chaque composante principale	86
Figure II.35: Résidus et score pour la PCR sur la LoB Workers Compensation.....	87
Figure II.36: Prédiction des prix des LoBs individuelles modélisées par la PCR.....	88
Figure II.37: Comparaison des prédictions de prix pour la LoB Commercial Auto (univariée et multivariée)	89
Figure II.38: Prédiction des prix pour la LoB Commercial Auto	90
Figure II.39: Comparatif des méthodes de modélisation des cycles de marché.....	90
Figure II.40: Sondage sur la demande pour la LoB Commercial Auto	91
Figure II.41: Sondage sur l'offre pour la LoB Umbrella.....	92
Figure III.1: Bilan comptable d'une compagnie d'assurance sous Solvabilité 2	94
Figure III.2: Exemple de survenance d'un risque « actions »	94
Figure III.3: Modules de risques dans le calcul du SCR.....	97
Figure III.4: Présence d'optima locaux ne garantissant pas la convergence vers l'optimum global par la descente de gradient	100
Figure III.5: Concept de domination de Pareto	102
Figure III.6: Procédure itérative de l'algorithme NSGA-II.....	103
Figure III.7: Etape de sélection de l'algorithme NSGA-II	103
Figure III.8: Front de Pareto selon le nombre de générations (itérations)	105
Figure III.9: Simulations du Front de Pareto après 1000 itérations	107
Figure III.10: Variations d'exposition pour une position du Front de Pareto selon le nombre d'itérations.....	108
Figure III.11: Graphique des corrélations des trajectoires des solutions issues des simulations selon le nombre d'itérations.....	108
Figure III.12: Tests d'adéquation à une loi uniforme (densité et QQ-Plot).....	111
Figure III.13: Distances entre fonction de répartition empirique (escalier) et théorique (courbe)	112
Figure III.14: Groupe de solutions sur le Front de Pareto maximisant le ratio RS/SCR	114
Figure III.15: Variations d'exposition optimales depuis 1999.....	115
Figure IV.1: Appétence au risque fixe	117
Figure IV.2: Appétence au risque dynamique	118
Figure IV.3: Corrélation positive entre variations d'exposition et taux de variation des prix attestée par une régression linéaire de la 1 ^{ère} sur la 2 ^{ème}	119
Figure IV.4: Régression linéaire de la variation d'exposition en fonction de la différence de RS	120
Figure IV.5: Résultats de la régression des variations d'exposition sur la vitesse et l'accélération des prix en bi-objectif	120
Figure IV.6: Résultats de la régression des variations d'exposition sur la vitesse et l'accélération des prix en mono objectif.....	121
Figure IV.7: Scénario des variations d'exposition au-delà de 2022	123
Figure IV.8: Groupe de solutions sur le Front de Pareto maximisant le ratio RS/SCR dans un problème sans contrainte de SCR.....	124
Figure IV.9: Comparaison entre 2 méthodes d'optimisation sur le ratio de solvabilité (avec contrainte de SCR à gauche et sans contrainte de SCR à droite)	124
Figure IV.10: Corrélation positive entre variations d'exposition et les taux de variation des prix dans un problème sans contrainte de SCR.....	125
Figure IV.11: Comparaison entre 2 méthodes d'optimisation sur le ratio de solvabilité (sans contrainte de SCR à gauche et avec contrainte dynamique de SCR à droite).....	126
Figure IV.12: Corrélation positive entre les variations d'exposition et les taux de variation des prix dans un problème avec contrainte variable de SCR	126

Note de synthèse

Introduction générale

L'étude s'inscrit dans un contexte de transition entre deux régimes, opérée en 2021. Le 1^{er} régime correspondait à des taux d'intérêt à des plus bas historiques, une inflation plancher, et une volatilité à des plus bas historiques (malgré quelques pics épisodiques). Le 2^{ème} se caractérise par des taux d'intérêt en hausse, une inflation à des niveaux élevés jamais connus depuis 40 ans, des marchés financiers beaucoup plus volatils sur toutes les classes d'actifs. Cette évolution amène à s'interroger sur les conséquences de ce changement de régime sur les assureurs.

Habités à un contexte de taux bas durant la décennie 2010-2020, les résultats financiers des assureurs étaient mis sous pression, poussant ces derniers à se concentrer davantage sur leurs résultats techniques. Ces revenus techniques dépendent entre autres du niveau de sinistralité et de prix des polices d'assurance.

En effet, ces prix d'assurance fluctuent selon la conjoncture macro-économique avec des périodes haussières et baissières. Les périodes haussières sont généralement liées à des événements mondiaux de grande ampleur : la crise de la responsabilité civile des années 1980, les attentats du World Trade Center le 11 septembre 2001, l'ouragan Katrina en 2005 et la pandémie de Covid-19 en 2020. Les périodes baissières sont marquées par des périodes de forte concurrence entre les assureurs et la décroissance (faible demande en assurance). La réglementation joue également un rôle dans les 2 situations (hausse et baisse des prix).

Une liste non exhaustive de facteurs liés à ces fluctuations des prix se dresse : les événements de catastrophe, la capacité de capital disponible, les revenus d'investissement, l'inflation, le cycle des réserves et le résultat de souscription.

Ces fluctuations permanentes liées à la disponibilité de couverture créent un véritable cycle de marché des prix dans l'assurance. Dans ce cadre, on s'intéresse aux prix d'assurance IARD du marché américain. Le choix de ce pays n'est pas laissé au hasard puisqu'il est le plus représentatif du marché de l'assurance IARD avec 56,4% des parts de marché mondiaux en 2021 et 9,1% du PIB américain consacré à l'assurance en 2021.

L'assureur est amené à devoir gérer ces cycles de marché afin d'ajuster sa stratégie de souscription.

L'année 2021 inscrit une rupture de régime macroéconomique où les banques centrales décident de remonter les taux d'intérêt pour contrer la percée de l'inflation aggravée par la crise énergétique du conflit russo-ukrainien et la pandémie du Covid-19. La décennie 2010-2021 aux prix historiquement bas s'est poursuivie jusqu'à 2019, année de remontée des prix.

Face à cette situation, il est plus que jamais nécessaire pour les assureurs d'optimiser leur stratégie de souscription en recentrant leurs capitaux sur les segments d'affaire les plus profitables.

L'appétence au risque est au cœur de la stratégie d'une compagnie. Il s'agit de définir le niveau de risque qu'une compagnie d'assurance accepte de prendre pour conduire son activité. Elle s'appuie généralement sur des limites opérationnelles, au-delà desquelles l'assureur considère la poursuite de la stratégie comme étant trop risquée.

La prise en compte de ces cycles de marché est donc le ciment de la stratégie de souscription pour un assureur car il doit constamment adapter son appétence au risque dans un souci de croissance rentable. Le contexte macroéconomique chamboule perpétuellement la dynamique des prix, il est donc impératif de saisir les moteurs de cette cyclicité des prix afin d'anticiper la dynamique future.

L'enjeu de l'étude est donc de caractériser la dynamique cyclique des prix d'assurance par différentes méthodes statistiques afin de comprendre comment un assureur peut parvenir à moduler son appétence au risque dans le cadre de la stratégie de souscription.

Ainsi, cette étude permettra d'établir un jeu décisionnel sur la stratégie de souscription à partir de cette dynamique. Le but est de montrer que la cyclicité des prix s'impose comme le pivot de cette stratégie au travers de l'appétence au risque de l'assureur.

Mécanismes des cycles de marché

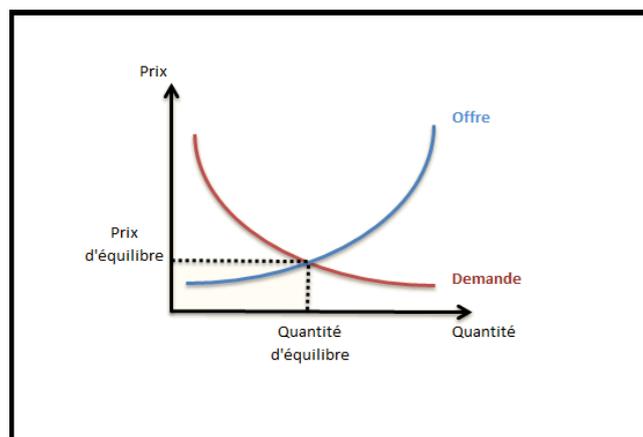
Avant de proposer une modélisation des cycles de marché, il est nécessaire de définir les mécanismes des cycles de marché.

Dans le but de satisfaire ses objectifs techniques, l'entreprise est amenée à prendre des décisions dans le cadre de sa stratégie d'appétence au risque, qui se mesure comme le degré de risque qu'une compagnie d'assurance est prête à accepter en vue d'atteindre ses objectifs fixés. Cette stratégie peut l'amener à se recentrer sur les segments ou lignes d'affaire les plus rentables et les moins risquées.

Des indicateurs tels que le Ratio Combiné ou le capital de solvabilité requis (SCR) peuvent être utilisés pour mesurer respectivement la rentabilité et le risque d'une ligne d'affaire. Cependant, utilisés de manière isolée, ces indicateurs n'offrent qu'une image statique de la rentabilité. Autrement dit, leurs limites apparaissent promptement lorsqu'il s'agit de considérer la dynamique des prix et de quantifier le poids optimal pour chacune de ces lignes d'assurance. En effet, la rentabilité d'une ligne d'affaire d'une entreprise dépend fortement des conditions des prix du marché qui peuvent fluctuer dans le temps. C'est la raison pour laquelle l'idée est revisitée en prenant en compte conjointement non seulement ces indicateurs mais également la dynamique des prix.

Ainsi, se dresse une liste non exhaustive de facteurs impactant cette dynamique (listés dans l'introduction générale). Parmi ceux listés, d'une part, on a la fréquence mais aussi la sévérité des sinistres avec les catastrophes augmentant les prix de la réassurance et le coût de l'assurance par ricochet. Et d'autre part, l'inflation sinistre, la capacité de capital offerte par le marché (appétit des assureurs, capitaux alternatifs tels que les titres assurantiels) et le revenu d'investissement avec les placements des primes viennent s'ajouter à l'étendue de cet impact. Ces facteurs génèrent un cycle de la capacité que possède une compagnie à accepter ou non de nouveaux risques. Selon la théorie de contrainte de capacité, plus le surplus de capacité est élevé, plus la concurrence entre assureurs s'installe et donc les prix baissent. Cette situation mène à des pertes de profit plus abondantes et moins de surplus obligeant les assureurs à relever leurs prix. Cette symbiose entre les aléas propres à l'assurance et la conjoncture économique explique donc la présence d'un cycle des prix du marché assurantiel constamment alimenté par la compétition entre assureurs.

Dans l'assurance IARD, il existe des cycles de souscription différents par pays et ligne d'affaire caractérisés par des périodes baissières des prix dites assouplissements des prix et haussières des prix dites de durcissement des prix. Les facteurs internes et environnementaux du marché assurantiel créent une loi de l'offre et de la demande générant ces cycles. Un bras de fer systématique se produit entre les assureurs et les assurés selon la capacité disponible de contrats d'assurance qui va de pair avec le pouvoir de négociation de l'assuré (faible en période de durcissement des prix et fort en période d'assouplissement des prix).



Modélisation des cycles de marché

Si on a pu établir divers moteurs des cycles de marché, il apparaît cependant difficile d'utiliser les premiers isolément pour modéliser les derniers puisque les cycles de marché dépendent également de la situation globale du marché. On opte donc pour des méthodes statistiques afin de les modéliser et capter leur dynamique. Pour y parvenir, on va exploiter les propriétés mathématiques des prix issus d'une base de données. Ensuite, on se focalisera sur cette modélisation via le sentiment de marché.

Caractéristiques de la base de données

Il nous est fourni une base de données publique issue du site web *The Council of Insurance Agents & Brokers* d'une profondeur de plus de 20 ans (la plus grande) retraçant l'historique des prix d'assurance trimestriels sur le marché américain pour chaque ligne d'affaire (ou *LoB*) ainsi que la moyenne des prix pour ces lignes. Cette base de données contient également des sondages pratiqués sur des assureurs depuis la mi-année 2017. Ces sondages les questionnent quant à leur ressenti sur les variations de l'offre et de la demande d'assurance les derniers trimestres.

L'analyse des statistiques descriptives nous a permis de mettre en évidence des propriétés mathématiques particulières comme la non-stationnarité de la plupart des prix des *LoBs* ou encore une forte corrélation entre ces dernières. De plus, l'analyse des comportements des prix nous révèlent une tendance à la stabilité. Ces analyses nous seront fort utiles pour la pertinence du choix et la vérification des hypothèses sous-jacentes des méthodes.

Méthodes existantes

Plusieurs articles abordent usuellement la question de la modélisation selon deux grandes approches : les modèles de régressions et les séries temporelles.

Un 1^{er} article propose une régression des variations de prix en fonction de ces prix mêmes. Les limites de ce modèle résident principalement dans l'insuffisance de l'exploitation des données qui ne se focalise que sur la différence des prix.

Un 2nd article propose quant à lui, une modélisation du *Ratio Combiné* par un processus autorégressif du second ordre (*AR(2)*). Mais des études annexes ont souligné la non-stationnarité de cet indicateur de performance, sujet à des ruptures structurelles non modélisables par les séries temporelles. Il convient donc de s'assurer de cette condition sine qua non pour la modélisation.

Un 3^{ème} article introduit le concept de cycle de marché modélisé par un modèle à changement de régime : la régression à transition lisse (modèle *Smooth Transition Regression* ou *STR*). C'est un modèle plus réaliste qui considère que le marché de l'assurance se comporte différemment dans les phases de durcissement et d'assouplissement des prix du cycle.

Méthodes implémentées

Notre étude s'est attachée à analyser le cycle des prix du marché assurantiel selon 2 grandes parties :

- la modélisation univariée avec une *LoB* individuelle
- la modélisation multivariée avec la prise en compte de la trajectoire conjointe des prix de chaque *LoB*.

Dans chacune de ces parties et à la lumière des analyses issues des statistiques descriptives, on a opté pour 2 méthodes :

- les séries temporelles qui sont des séries de données ordonnées dans le temps utilisant les valeurs du passé pour prédire ce qui suit
- les régressions linéaires qui sont des modèles statistiques qui permettent de prédire une variable cible qui est une fonction linéaire d'une ou plusieurs variables explicatives

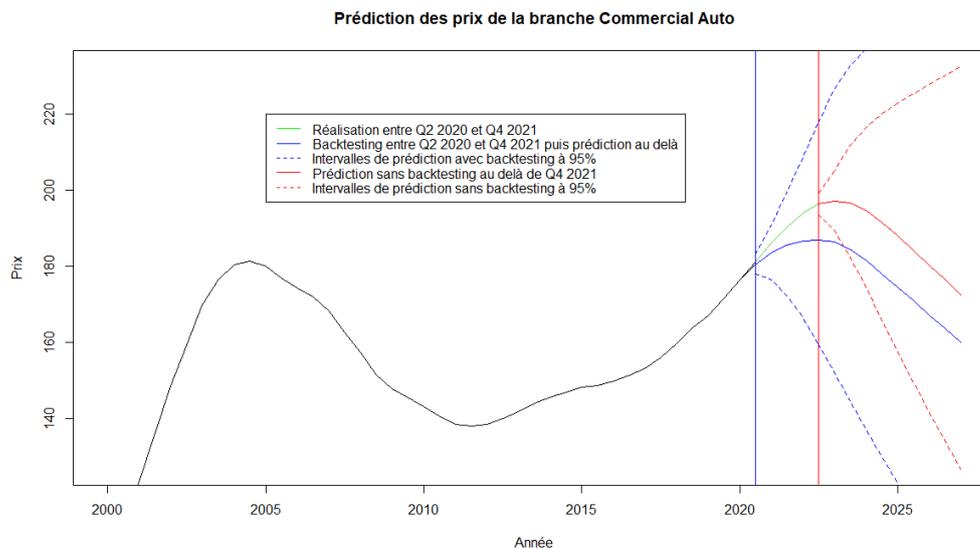
La principale différence entre ces 2 méthodes est que les séries temporelles tiennent compte du comportement passé pour prédire le comportement futur de la variable tandis que les régressions linéaires vont plus s'attarder sur l'influence de variables (exogènes ou endogènes à la variable réponse) appelées variables prédictives pour expliquer cette variable réponse.

Approche univariée

Dans la modélisation des prix par des séries temporelles univariées, il était question de déterminer le meilleur type de processus à utiliser (autorégressif, moyenne mobile ou une combinaison des 2) avec le décalage temporel (*lag*) et les coefficients optimaux.

Cependant, cette méthode ne va pas assez loin dans l'analyse du cycle. En effet, elle ne base que sur les valeurs passées des prix afin de prédire leur futur. La régression linéaire octroie une vision plus élargie de la modélisation en utilisant des variables tels que la différence d'ordre 1 (vitesse) et d'ordre 2 (accélération) des prix. Par souci de commodité, les prix non différenciés sont nommés prix *niveaux*.

Par la méthode des moindres carrés, plusieurs modèles de régression ont été testés. La régression de l'accélération des prix sur la vitesse des prix et les prix *niveaux* s'est avérée être la plus performante au regard de la significativité des coefficients et du score.



Néanmoins, l'approche univariée pour une *LoB* se révèle d'une insuffisance notoire au regard de son environnement en taisant les potentielles influences des autres *LoBs*. L'approche multivariée vient répondre à ce problème.

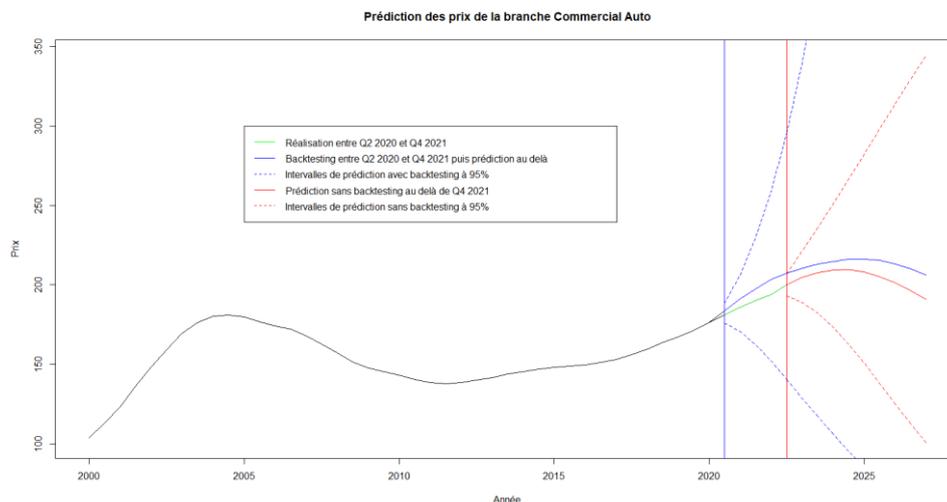
Approche multivariée

Dans la modélisation multivariée, on utilise les modèles VAR, un vecteur qui contient l'évolution du prix de chaque *LoB* (séries temporelles multivariées). On travaille avec des séries différenciées et on trouve le lag optimal du modèle qui minimise un des critères de déviance au choix. Une méthode alternative consiste à rester sur des séries non stationnaires et travailler avec un modèle à correctif d'erreur : le modèle VECM.

Si le modèle utilisé permet de prendre en considération la trajectoire conjointe des prix des *LoBs*, la robustesse de la modélisation demeure discutable. En effet, la pertinence du choix du lag au vu des nombreux critères d'information reste un obstacle au calibrage.

On se penche alors sur la régression du prix d'une *LoB* sur les composantes principales des autres *LoBs*, alternative permettant d'enrayer le problème de multicolinéarité auquel doit faire face la régression linéaire classique. Bien que l'analyse en composantes principales permette de réduire la dimensionalité du problème, son principal problème réside dans sa sensibilité aux valeurs aberrantes créant un phénomène de surapprentissage.

Au vu de la corrélation positive des *LoBs* révélée par les statistiques descriptives, on décide alors de régresser la vitesse des prix d'une *LoB* sur celle de la moyenne des *LoBs*. Les prédictions nous ont semblé les plus réalistes compte tenu de la dynamique des prix antérieurs.



Cette projection court terme de la dynamique des prix pourra être utilisée pour anticiper les changements de la dynamique de l'appétence au risque.

Sentiment de marché

Néanmoins si ce modèle de projection des variations de prix basé sur les observations du cycle du marché peut être utilisé, l'expertise qualitative via le sentiment de marché des assureurs reste importante pour anticiper ses variations futures. Cependant, la faible profondeur des données concernant ce sentiment de marché ne nous permet pas d'avoir une modélisation fiable. En effet, les données ne remontent qu'à 2017 avec une période de durcissement des prix jusque de nos jours. Mais il ne nous empêche pas de mettre en perspective le sentiment des assureurs sur l'évolution de la demande et de la capacité d'offre avec l'évolution des prix.

Appétence au risque dynamique

Problème posé et moyens pour le résoudre

Dans cette partie, on veut déterminer ce qu'aurait été la stratégie de souscription optimale si on avait eu une connaissance a priori de la dynamique des prix sur la période 1999-2021.

On se place dans le cadre d'un assureur fictif qui propose des prix d'assurance alignés sur ceux du marché et qui a été capable d'anticiper tous les mouvements de prix du marché sur cette

période. Son objectif est de savoir comment faire varier son exposition au risque pour maximiser sur le long terme son résultat de souscription tout en minimisant les exigences en capital.

L'exposition désigne la quantité de risques couverts par une compagnie d'assurance. Elle peut être mesurée en termes de montant des garanties accordées, de nombre de polices d'assurance en vigueur ou encore en termes de sévérité et fréquence des sinistres potentiels.

Il s'agit plus particulièrement de trouver les variations d'expositions optimales δ_i pour chacune de ces années i à partir des variations de prix ΔP_i afin de maximiser le résultat de souscription RS et minimiser le risque SCR_i . Le risque s'exprime ici sous la forme des sous-risques agrégés dans le $SCR non-vie$: risques de prime et de réserve. On suppose que ces risques, ainsi que les frais et sinistres évoluent linéairement avec l'exposition.

On pose le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{\delta_i} RS_{i+1} = Primes_{i+1} - (Sinistres + Frais)_{i+1} \\ \min_{\delta_i} SCR_{i+1} = SCR_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{cases}$$

Avec

$$Primes_{i+1} = (1 + \Delta P_{i+1}) \times (1 + \delta_{i+1}) \times Primes_i \text{ et } \begin{cases} Sinistres_{i+1} = Sinistres_i \times (1 + \delta_{i+1}) \\ Frais_{i+1} = Frais_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{cases}$$

En supposant qu'il n'y a pas d'inflation sinistre.

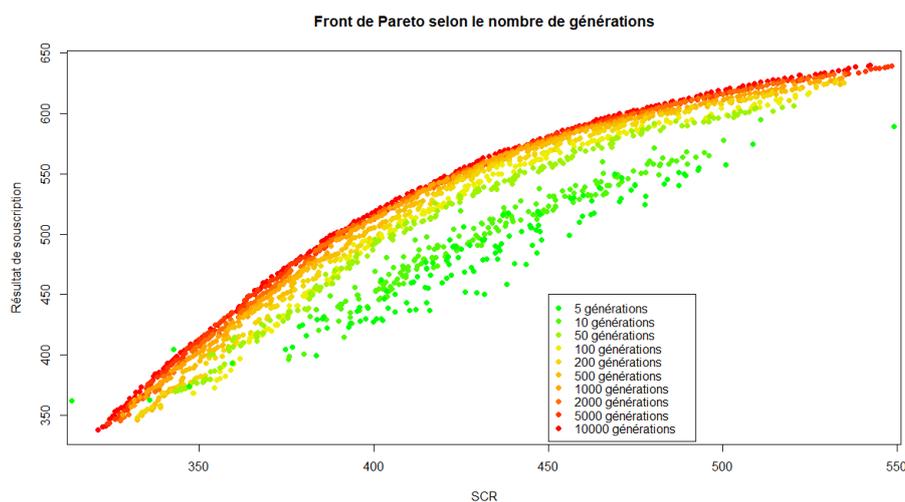
On suppose également que l'assureur veut souscrire à minimum de prime (ne pas descendre en dessous d'un certain niveau) pour ne pas se heurter à la difficulté de revenir sur le marché. Il ne veut pas non plus que son exposition dépasse une certaine limite supérieure et inférieure par an pour avoir une forte croissance. En effet, une stratégie tarifaire agressive conduirait à dégrader sa profitabilité.

Ainsi, on impose les contraintes suivantes :

- Des bornes pour les variations d'exposition.
- Une limite supérieure pour le SCR
- Une limite inférieure pour les primes

Dans le problème posé, l'équation de la minimisation n'est pas convexe et celle de la maximisation n'est pas concave. En effet, dans un problème d'optimisation multiobjectif, il y a plusieurs fonctions à optimiser simultanément. Il n'est donc pas possible de parler de convexité ou concavité d'un problème d'optimisation multiobjectif de manière globale. On peut parler de convexité ou concavité pour chaque fonction à optimiser séparément (ce n'est pas le cas ici en dérivant deux fois chaque équation du système par la variation d'exposition, on trouve 0). Mais cela ne donne pas une idée sur la géométrie (convexité ou concavité) globale du problème. Donc pour répondre à ce

problème d'optimisation, on utilise un algorithme génétique, issu de la famille des algorithmes évolutionnaires. Leur fonctionnement se base sur la génétique et la sélection naturelle. On génère un ensemble de solutions aléatoires, notre population de départ. Par des processus de croisement, mutation et sélection, on ne va conserver que les meilleurs individus répondant de manière optimale aux exigences du problème, c'est la *fitness* de l'individu. Puis, on recommence ce processus un grand nombre de fois (génération après génération) afin de converger vers les solutions optimales non-dominées sur une frontière efficiente appelée front de Pareto.

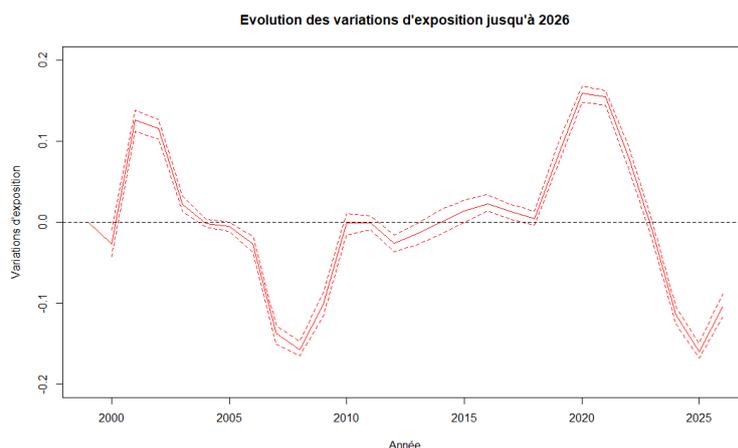


Stabilisation des résultats

L'étape suivante consiste à se fixer un nombre d'itérations (ou générations) suffisamment élevé afin d'avoir une forte convergence des résultats (ici, les variations d'exposition) sans pour autant garantir leur optimalité. Au vu du graphique ci-dessus, on opte pour un nombre de générations égal à 1000 pour une exécution de l'algorithme. Ensuite, on exécute un grand nombre de fois l'algorithme afin de trouver les variations d'expositions optimales pour chaque couple optimal (*Résultat de souscription ; SCR*) sur la frontière efficiente. Le caractère stochastique de l'algorithme fait que les résultats sont également des variables aléatoires. On en vérifie la stabilité des résultats par un test de Kolmogorov-Smirnov rejetant leur distribution uniforme sur leur domaine de définition.

On en fait la moyenne en prenant soin de s'apercevoir que leur variance diminue au fil des itérations. Cette moyenne est un excellent estimateur des variations d'exposition. Sur la frontière de Pareto, on s'intéresse à celui dont le ratio *Résultat de souscription/SCR* est maximal.

Ainsi, pour le prix moyen des *LoBs*, on applique le problème d'optimisation pour la période 1999-2021 et on obtient ainsi le vecteur des variations d'exposition optimal. On applique également le problème d'optimisation pour la période 2022-2026 avec les variations de prix issus des prix prédits sur cette période dans la partie 2 « Modélisation des cycles de marché ». On obtient alors les variations d'exposition ainsi que leurs intervalles de confiance.



Mise en place de la stratégie de souscription

Une appétence fixe au risque est une situation dans laquelle l'assureur ne va pas moduler son exposition en fonction de la dynamique des prix. Elle devient dynamique quand l'assureur choisit d'aligner son exposition en fonction de cette dynamique, changeant ainsi sa politique de souscription. Si elle est fixe, sa stratégie de souscription s'avère non optimale puisque l'assureur se prive d'un meilleur résultat de souscription par rapport à une stratégie où son appétence au risque est sensible à la dynamique des prix.

Par conséquent, il est suggéré à l'assureur de suivre une appétence au risque sensible à la dynamique de prix. On s'attache désormais à analyser les liens entre son exposition et les prix d'une part et le résultat de souscription d'autre part.

Pour chaque année, on remarque une corrélation positive entre la variation d'exposition et :

- Le taux de variation de prix
- La différence des résultats de souscription (entre l'année courante et l'année précédente)

Ainsi, les analyses de ces indicateurs clés de performance indiquent que quand les prix montent ou que l'assureur a enregistré un meilleur résultat de souscription que l'année précédente, il convient alors d'augmenter l'exposition et vice-versa.

De surcroît, concernant l'accélération des prix, une comparaison du problème bi-objectif avec un autre problème d'optimisation mono-objectif (maximisation seule du résultat de souscription) est effectuée. A la lumière des résultats obtenus, le modèle bi-objectif soulève une aberration stratégique. En effet, il propose d'augmenter plus fortement son exposition quand les prix en hausse gagnent un « pic », alors que dans la réalité opérationnelle, la demande d'assurance baisse et

l'assureur n'est donc plus en mesure à souscrire à davantage de contrats, réduisant donc son exposition.

En outre, l'assureur dispose du choix de moduler sa limite d'appétence au risque (augmentation ou baisse) à une certaine fréquence (annuelle, biannuelle, etc.) en fonction de la dynamique des prix (période respectivement haussière ou baissière). Par cette méthode, il parvient à augmenter son résultat technique.

L'assureur doit garder en tête que ces modèles sont très hypothétiques (linéarité des risques et des sinistres et frais avec l'exposition, pas d'inflation sinistre, non prise en compte de la hausse des taux d'intérêt). En effet, d'une part, l'inflation sinistre augmente le montant des sinistres et frais et diminue ainsi le résultat de souscription. Mais d'autre part, la hausse des taux d'intérêt permet à l'assureur de mieux fructifier le placement de ses primes. Ce problème d'optimisation donne une certaine idée théorique du monde économique, fournit quelques décisions dans des situations simples mais il ne remplacera jamais les processus d'aide à la décision dans les compagnies d'assurance.

Conclusion

Somme toute, il y a des facteurs qui ont un impact sur le cycle du marché assurantiel dans l'IARD, comme les événements de catastrophe, la capacité de capital disponible, les revenus d'investissement, l'inflation, le cycle des réserves et le résultat de souscription.

Il est difficile de prévoir les variations de prix en se basant uniquement sur ces facteurs individuellement, car l'impact sur les prix dépend notamment de la situation globale du marché.

Les variations de prix sont corrélées non seulement entre les *LoBs* mais également entre la réassurance et l'assurance. La modélisation des cycles de marché a permis de mettre en évidence que l'accélération ou la décélération des prix semble dépendre des variations de prix et des prix *niveaux*.

Néanmoins, si ce modèle de projection des variations de prix basé sur les observations du cycle du marché peut être utilisé, l'expertise qualitative via le sentiment de marché reste importante pour anticiper leurs variations futures.

Un exercice d'optimisation a été effectué en utilisant des chiffres fictifs pour déterminer comment faire évoluer l'exposition sous-jacente de manière à maximiser le résultat et minimiser les exigences en capital, tout en respectant des contraintes de prime, de variation d'exposition et

d'exigences en capital. Les résultats indiquent qu'il peut être optimal de développer ou de réduire l'exposition en fonction des variations de prix attendus (respectivement hausse et baisse des prix).

Il est également important pour les décisionnaires de savoir comment le cadre de l'appétence au risque peut évoluer de façon dynamique afin d'optimiser l'exposition. On a vu que l'assureur a le choix de remanier sa limite d'appétence au risque à une certaine fréquence en fonction de la dynamique des prix. Ainsi, en période de hausse des prix, il peut la rehausser et en période de baisse des prix, la baisser pour optimiser ses gains techniques.

Enfin, l'assureur doit être prudent avec les modèles qu'il manipule. D'une part, la modélisation et la projection des prix du marché comporte une forte incertitude qui grandit au fur et à mesure de la fenêtre de prédiction. Il doit donc se fixer une fenêtre de prédiction de court terme afin de manipuler des variations de prix obtenues avec une certaine fiabilité et utilisables dans le cadre de l'appétence au risque à suivre. Ce cadre d'appétence au risque présente également beaucoup d'hypothèses à ne pas négliger (linéarité des risques et des sinistres et frais avec l'exposition, pas d'inflation sinistre, non prise en compte de la hausse des taux d'intérêt). Ce problème d'optimisation donne donc une certaine idée théorique du monde économique, aide à des décisions simples mais ne remplace pas le processus d'aide à la décision générale d'une compagnie d'assurance.

Executive summary

General introduction

This study takes place in a context of transition between two regimes that took place in 2021. The first regime was characterized by historically low interest rates, low inflation, and low volatility (despite some episodic spikes). The second is characterized by rising interest rates, inflation at levels not seen in 40 years, and much more volatile financial markets across all asset classes. This evolution leads us to question the consequences of this change in regime on insurers.

Accustomed to a low interest rate environment during the 2010-2020 decade, insurers' financial results were put under pressure, pushing them to focus more on their technical results. These technical revenues depend, among other things, on the level of claims and insurance prices.

Indeed, these insurance prices fluctuate according to the macro-economic situation with bullish and bearish periods. Bullish periods are generally linked to large-scale world events: the liability crisis of the 1980s, the World Trade Center attacks on September 11, 2001, Hurricane Katrina in 2005 and the Covid-19 pandemic in 2020. Downturns are marked by periods of intense competition among insurers and decline (low demand for insurance). Regulation also plays a role in both situations (rising and falling prices).

A non-exhaustive list of factors related to these price fluctuations includes catastrophe events, available capital capacity (capital supply), investment income, inflation, the reserve cycle and underwriting results.

These permanent fluctuations related to the availability of coverage create a true market cycle of prices in insurance. In this framework, we focus on property and casualty insurance prices in the U.S. market. The choice of this country is not random since it is the most representative of the P&C insurance market with 56.4% of the world market share in 2021 and 9.1% of the American GDP devoted to insurance in 2021.

Insurers will have to manage these market cycles in order to adjust their underwriting strategy.

The year 2021 marks a break in the macroeconomic regime when central banks decide to raise interest rates to counter the breakthrough of inflation aggravated by the energy crisis of the Russian-Ukrainian conflict and the Covid-19 pandemic. The 2010-2021 decade of historically low prices has continued until 2019, when prices will rise again.

Faced with this situation, it is more necessary than ever for insurers to optimize their underwriting strategy by refocusing their capital on the most profitable business segments.

Risk appetite is at the heart of a company's strategy. It defines the level of risk that an insurance company is willing to take in order to conduct its business. It is generally based on operational limits, beyond which the insurer considers the pursuit of the strategy to be too risky.

Taking into account these market cycles is therefore the cement of the underwriting strategy for an insurer because it must constantly adapt its risk appetite in order to achieve profitable growth. The macroeconomic context is constantly changing the dynamics of prices. It is therefore imperative to understand the drivers of this price cyclicity in order to anticipate future dynamics.

The study aims to characterize the cyclical dynamics of insurance prices by different statistical methods in order to understand how an insurer can modulate its risk appetite within the framework of the underwriting strategy.

Thus, this study will allow us to establish a decision game on the underwriting strategy based on these dynamics. The aim is to show that price cyclicity is the pivot of this strategy through the insurer's risk appetite.

Market cycle mechanisms

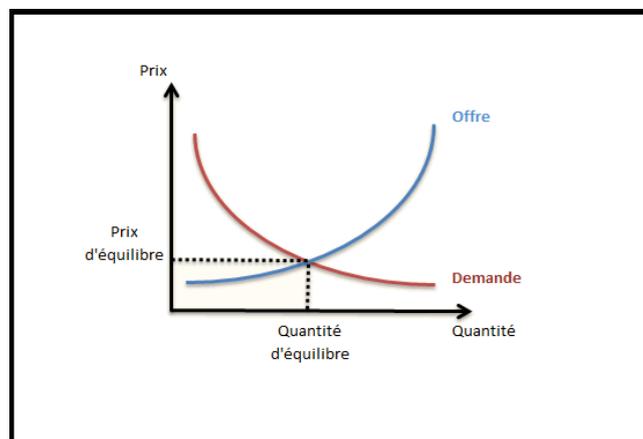
Before proposing a modeling of market cycles, it is necessary to define the mechanisms of market cycles.

In order to achieve its technical objectives, the company is required to make decisions within its risk appetite strategy, which is measured as the degree of risk that an insurance company is willing to accept in order to achieve its set goals. This strategy may lead the company to focus on the most profitable and least risky segments or lines of business.

Indicators such as the Combined Ratio or the required capital adequacy ratio (SCR) can be used to measure the profitability and risk of a line of business, respectively. However, when used in isolation, these indicators only offer a static image of profitability. In other words, their limitations become apparent when considering the dynamics of prices and quantifying the optimal weight for each of these insurance lines. Indeed, the profitability of a company's line of business strongly depends on market price conditions, which can fluctuate over time. This is why the idea is revisited by taking into account not only these indicators but also the dynamics of prices.

Thus, a non-exhaustive list of factors impacting on this dynamic (listed in the general introduction) can be drawn up. Among those listed, on the one hand, there is the frequency but also the severity of losses with catastrophes increasing the price of reinsurance and the cost of insurance by ricochet. And on the other hand, claims inflation, the capital capacity offered by the market (insurers' appetite, alternative capital such as insurance securities) and investment income with premium investments add to the extent of this impact. These factors generate a cycle of the capacity of a company to accept or not accept new risks. According to the theory of capacity constraint, the higher the excess capacity, the more competition among insurers and the lower the prices. This situation leads to more profit losses and less surplus, forcing insurers to raise their prices. This symbiosis between the hazards specific to insurance and the economic situation thus explains the presence of a price cycle in the insurance market that is constantly fuelled by competition between insurers.

In property and casualty insurance, there are different underwriting cycles per country and line of business, characterized by periods of low prices called soft market and periods of high prices called hard market. Internal and environmental factors of the insurance market create a law of supply and demand generating these cycles. A systematic showdown occurs between insurers and insured parties based on the available capacity of insurance contracts, which is linked to the insured party's negotiating power (low in hard market periods and high in soft market periods).



Modeling market cycles

While various drivers of market cycles have been established, it appears difficult to use the former in isolation to model the latter since market cycles also depend on the overall market situation. We therefore opt for statistical methods to model them and capture their dynamics. To achieve this, we will exploit the mathematical properties of prices from a database. Then, we will focus on this modeling via the market sentiment.

Characteristics of the database

We are provided with a public database from the Council of Insurance Agents & Brokers website with a depth of more than 20 years (the deepest) tracing the history of quarterly insurance prices on the American market for each line of business (or *LoB*) as well as the average price for these lines. This database also contains surveys of insurers from mid-2017. These surveys ask them about their feelings on changes in insurance supply and demand in recent quarters.

The analysis of the descriptive statistics allowed us to highlight particular mathematical properties such as the non-stationarity of most of the *LoBs*' prices or a strong correlation between them. Moreover, the analysis of price behaviors reveals a tendency to stability. These analyses will be very useful for the relevance of the choice and the verification of the underlying assumptions of the methods.

Existing methods

Several articles usually address the question of modeling according to two main approaches: regression models and time series.

The 1st article proposes a regression of price variations as a function of the prices themselves. The limits of this model lie mainly in the inadequacy of the exploitation of the data, which focuses only on the difference in prices.

A 2nd article proposes a model of the Combined Ratio using a second-order autoregressive process (*AR(2)*). But other studies have highlighted the non-stationarity of this performance indicator, which is subject to structural breaks that cannot be modeled by time series. It is therefore necessary to ensure that this sine qua non condition for modeling is met.

A 3rd article introduces the concept of a market cycle modeled by a regime-switching model: the Smooth Transition Regression (*STR*) model. This is a more realistic model that considers that the insurance market behaves differently in the hard and soft markets of the cycle.

Implemented methods

Our study focused on analyzing the insurance market price cycle according to 2 main parts:

- univariate modeling with an individual *LoB*
- multivariate modeling with the consideration of the joint trajectory of the prices of each *LoB*.

In each of these parts and in the light of the analyses from the descriptive statistics, we opted for 2 methods:

- time series, which are time-ordered data series using past values to predict what comes next.
- linear regressions, which are statistical models that predict a target variable that is a linear function of one or more explanatory variables.

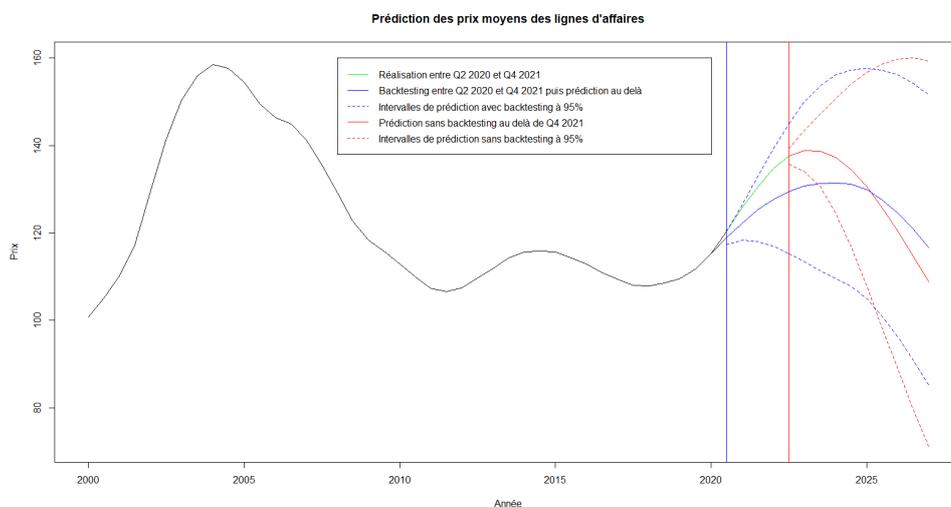
The main difference between these two methods is that time series take into account the past behavior to predict the future behavior of the variable while linear regressions will focus more on the influence of variables (exogenous or endogenous to the response variable) called predictor variables to explain this response variable.

Univariate approach

In univariate time series price modeling, the question was to determine the best type of process to use (autoregressive, moving average, or a combination of both) with the optimal time lag and coefficients.

However, this method does not go far enough in the analysis of the cycle. Indeed, it only relies on the past values of prices to predict their future. Linear regression provides a broader view of modeling by using variables such as the first-order (speed) and second-order (acceleration) difference in prices. For convenience, undifferentiated prices are referred to as level prices.

Using the least squares method, several regression models were tested. The regression of price acceleration on price velocity and price levels was found to be the best performing in terms of the significance of the coefficients and the score.



Nevertheless, the univariate approach for one LoB is notoriously inadequate with respect to its environment, as it ignores the potential influences of other LoBs. The multivariate approach answers this problem.

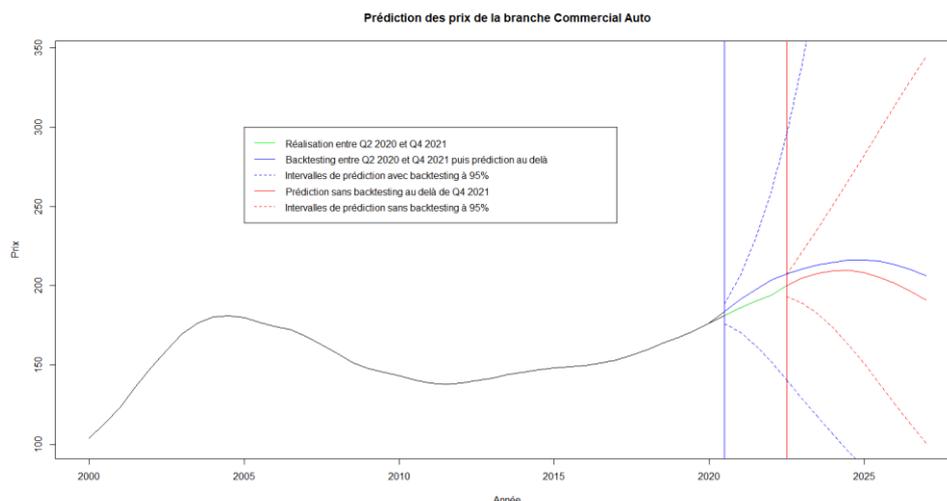
Multivariate approach

In multivariate modeling, we use VAR models, a vector that contains the evolution of the price of each LoB (multivariate time series). We work with differentiated series and we find the optimal lag of the model that minimizes one of the deviance criteria of choice. An alternative method consists in staying on non-stationary series and working with an error correction model: the VECM model.

While the model used allows us to take into account the joint trajectory of LoB prices, the robustness of the model remains questionable. Indeed, the relevance of the choice of the lag given the numerous information criteria remains an obstacle to calibration.

We then turn to the regression of the price of a LoB on the principal components of the other LoBs, an alternative that makes it possible to overcome the problem of multicollinearity that the classic linear regression must face. Although principal component analysis allows us to reduce the dimensionality of the problem, its main problem lies in its sensitivity to outliers creating an overlearning phenomenon.

Given the positive correlation of the LoBs revealed by the descriptive statistics, we then decided to regress the speed of the prices of a LoB on that of the average of the LoBs. The predictions seemed to us the most realistic given the dynamics of the previous prices.



This short-term projection of price dynamics can be used to anticipate changes in risk appetite dynamics.

Market sentiment

Nevertheless, if this model for projecting price variations based on observations of the market cycle can be used, qualitative expertise via the market sentiment of insurers remains important for anticipating future variations. However, the shallowness of the data concerning this market sentiment does not allow us to have a reliable model. Indeed, the data only goes back to 2017 with a period of hardening prices until today. But it does not prevent us from putting insurers' sentiment on the evolution of demand and supply capacity into perspective with the evolution of prices.

Dynamic risk appetite

Problem and ways to solve it

In this section, we want to determine what the optimal underwriting strategy would have been if we had prior knowledge of price dynamics over the period 1999-2021.

We are in the context of a fictional insurer that offers insurance prices aligned with those of the market and that has been able to anticipate all market price movements over this period. Its objective is to know how to vary its risk exposure in order to maximize its long-term underwriting result while minimizing its capital charge.

Exposure refers to the amount of risk covered by an insurance company. It can be measured in terms of the amount of guarantees granted, the number of insurance policies in force, or in terms of the severity and frequency of potential claims.

Specifically, the goal is to find the optimal exposure changes δ_i for each of these years i from the price changes ΔP_i in order to maximize the underwriting result UW and minimize the risk SCR_i . The risk here is defined as the aggregate sub-risks in the *non-life SCR*: premium and reserve risks. We then assume that these risks, as well as expenses and claims evolve linearly with exposure.

We pose the following optimization problem:

$$\begin{cases} \max_{\delta_i} UW_{i+1} = Premiums_{i+1} - (Claims + Costs)_{i+1} \\ \min_{\delta_i} SCR_{i+1} = SCR_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{cases}$$

With

$$Premiums_{i+1} = (1 + \Delta P_{i+1}) \times (1 + \delta_{i+1}) \times Premiums_i \text{ and } \begin{cases} Claims_{i+1} = Claims_i \times (1 + \delta_{i+1}) \\ Costs_{i+1} = Costs_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{cases}$$

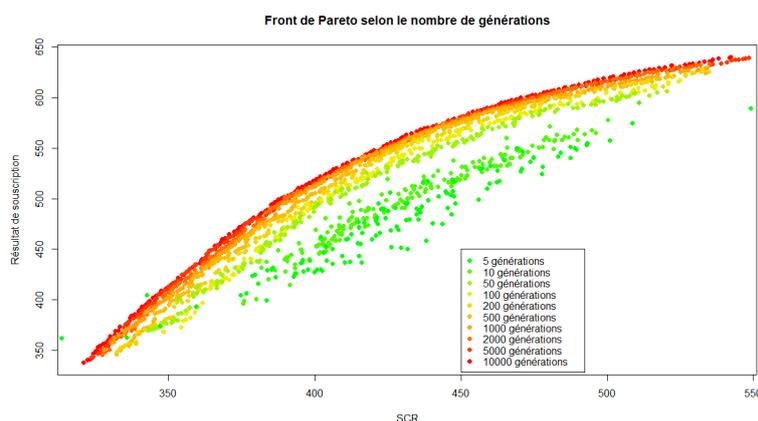
Assuming that there is no claim inflation.

It is also assumed that the insurer wants to underwrite at a minimum premium (not to go below a certain level) in order not to face the difficulty of re-entering the market. He also does not want his exposure to exceed a certain upper and lower limit per year to have strong growth. Indeed, an aggressive pricing strategy would lead to degrade its profitability.

Thus, the following constraints are applied:

- Boundaries for exposure variations
- An upper limit for the SCR
- A lower limit for the premiums

In this problem, the minimization equation is not convex, and the maximization equation is not concave. Indeed, in a multi-objective optimization problem, there are several functions to optimize simultaneously. It is therefore not possible to speak of the convexity or concavity of a multi-objective optimization problem in a global way. We can talk about convexity or concavity for each function to be optimized separately (it is not the case here by deriving twice each equation of the system by the exposure variation, we find 0). But this does not give an idea about the global geometry (convexity or concavity) of the problem. So, to answer this optimization problem, we use a genetic algorithm, from the family of evolutionary algorithms. Their operation is based on genetics and natural selection. We generate a set of random solutions, our starting population. By processes of crossing, mutation and selection, we will keep only the best individuals that meet the requirements of the problem in an optimal way, this is the fitness of the individual. Then we start this process a large number of times (generation after generation) in order to converge towards the non-dominated optimal solutions on an efficient frontier called Pareto front.



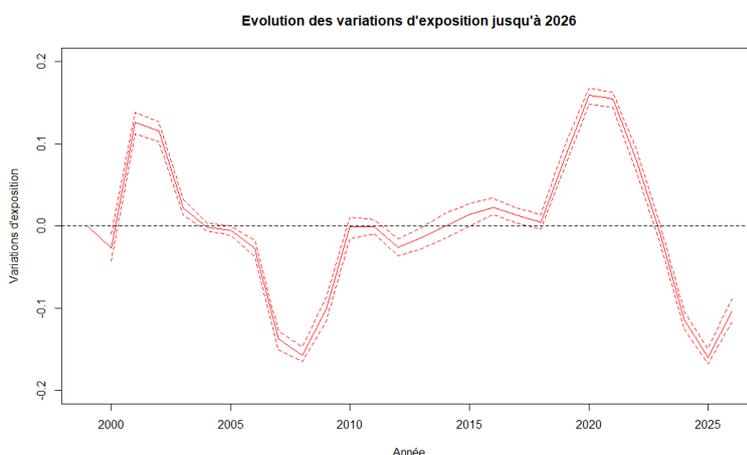
Stabilization of results

The next step is to set a sufficiently high number of iterations (or generations) in order to have strong convergence of the results (here, exposure variations) without guaranteeing their optimality. Based on the above chart, we opt for a number of generations equal to 1000 for an execution of the algorithm. Then we execute the algorithm many times to find the optimal exposure variations for

each optimal couple (Underwriting Result; SCR) on the efficient frontier. The stochastic nature of the algorithm means that the results are also random variables. We verify the stability of the results with a Kolmogorov-Smirnov test rejecting their uniform distribution in their domain of definition.

We take the average while taking care to notice that their variance decreases over the iterations. This average is an excellent estimator of exposure variations. On the Pareto frontier, we are interested in the one whose Underwriting result/SCR ratio is maximum.

Thus, for the average price of *LoBs*, the optimization problem is applied for the period 1999-2021 and the optimal exposure variation vector is obtained. The optimization problem is also applied for the period 2022-2026 with the price variations arising from the prices predicted for this period in the second section "Market cycle modeling". The exposure variations and their confidence intervals are then obtained.



Implementation of the underwriting strategy

A fixed risk appetite is a situation in which the insurer will not adjust its exposure according to price dynamics. It becomes dynamic when the insurer chooses to align its exposure with these dynamics, thus changing its underwriting policy. If it is fixed, its underwriting strategy is sub-optimal since the insurer deprives itself of a better underwriting result compared to a strategy where its risk appetite is sensitive to price dynamics.

Therefore, it is suggested that the insurer follow a risk appetite sensitive to price dynamics. We now focus on analyzing the links between his exposure and prices on the one hand and the underwriting result on the other.

For each year, we notice a positive correlation between the variation of exposure and :

- The rate of price change
- The difference in underwriting results (between the current year and the previous year)

Thus, the analyses of these key performance indicators indicate that when prices rise or when the insurer has recorded a better underwriting result than the previous year, it is appropriate to increase the exposure and vice versa.

Furthermore, regarding the price acceleration, a comparison of the bi-objective problem with another mono-objective optimization problem (maximizing only the underwriting result) is performed. In light of the results obtained, the bi-objective model raises a strategic aberration. Indeed, it proposes to increase its exposure more strongly when prices rise, whereas in the operational reality, the demand for insurance falls and the insurer is therefore no longer able to underwrite more contracts, thus reducing its exposure.

In addition, the insurer has the choice of modulating its risk appetite limit (increase or decrease) at a certain frequency (annual, bi-annual, etc.) depending on the dynamics of prices (respectively bullish or bearish period). By this method, he manages to increase his technical result.

The insurer must keep in mind that these models are very hypothetical (linearity of risks, claims and expenses with exposure, no claims inflation, no account taken of rising interest rates). Indeed, on the one hand, claims inflation increases the amount of claims and expenses and thus reduces the underwriting result. But on the other hand, the rise in interest rates allows the insurer to better profit from the investment of his premiums. This optimization problem gives some theoretical idea of the economic world, provides some decisions in simple situations but it will never replace decision support processes in insurance companies.

Conclusion

To put all in a nutshell, some factors impact the P&C insurance market cycle, such as catastrophe events, available capital capacity, investment income, inflation, reserve cycle, and underwriting experience.

It is difficult to predict price changes based solely on these factors individually, as the impact on prices depends, among other things, on overall market conditions.

Price changes are correlated not only between LoBs but also between reinsurance and insurance. The modeling of market cycles has shown that the acceleration or deceleration of prices seems to depend on price changes and price levels.

Nevertheless, if this model for projecting price variations based on observations of the market cycle can be used, qualitative expertise via market sentiment remains important for anticipating their future variations.

An optimization exercise was performed using dummy figures to determine how to move the underlying exposure in a way that maximizes earnings and minimizes capital charge, while respecting constraints on premium, exposure variation and capital charge. The results indicate that it may be optimal to expand or reduce exposure based on expected price changes (rising and falling prices respectively).

It is also important for decision makers to know how the risk appetite framework can dynamically change to optimize exposure. We have seen that the insurer has the option of reshaping its risk appetite limit at a certain frequency depending on price dynamics. Thus, in periods of rising prices, he can raise it and in periods of falling prices, lower it to optimize his technical gains.

Finally, the insurer must be careful with the models it uses. On the one hand, the modeling and projection of market prices involves a high degree of uncertainty that increases as the prediction window expands. He must therefore set itself a short-term prediction window in order to manipulate price variations obtained with a certain reliability and usable within the framework of the risk appetite to be followed. This risk appetite framework also presents many assumptions that should not be neglected (linearity of risks and claims and expenses with exposure, no claims inflation, no account taken of rising interest rates). This optimization problem therefore gives a certain theoretical idea of the economic world, helps in simple decisions but does not replace the general decision support process of an insurance company.

Introduction

La dernière décennie de taux bas a mis sous tension les revenus financiers des compagnies d'assurance qui ne parviennent à générer que de faibles profits via les placements financiers des primes encaissées. Par conséquent, cette situation pousse ces dernières à améliorer leurs revenus techniques afin de maintenir des résultats acceptables.

Le revenu technique dépend de beaucoup de facteurs. Son calcul repose en partie sur le niveau de sinistralité et le niveau des prix. Le niveau de sinistralité fluctue notamment selon la survenance d'évènements catastrophiques ou non catastrophiques d'origine naturelle (conditions climatiques, météorologiques, etc.) et humaine (criminalité, accidents d'automobile ou de travail, etc.). Il dépend également du macro-environnement mondial (économique, réglementaire) dans lequel baignent les assureurs. Quant au niveau des prix, ce dernier est fonction de plusieurs éléments. On peut citer la compétition entre assureurs qui tend à faire baisser les prix, la sinistralité qui tend à réduire la marge des assureurs, et l'appétence des assureurs au risque qui adaptent leur stratégie tarifaire afin de moduler leur exposition au risque. Dans ce mémoire, on restreint l'étude de ces prix d'assurance au champ de l'IARD et on constate qu'historiquement, ces prix suivent différentes phases : haussières et baissières.

Des périodes haussières des prix remarquables souvent liées au contexte macro-économique sont à noter : la crise de la responsabilité civile des années 1980, les attentats du World Trade Center le 11 septembre 2001, l'ouragan Katrina en 2005 et la pandémie de Covid-19 en 2020.

La crise de l'assurance responsabilité civile dans les années 1980¹ a été causée par un certain nombre de facteurs, notamment une augmentation significative de la sinistralité en termes de fréquence et de sévérité. Ces facteurs ont conduit à une augmentation des prix d'assurance et à une réduction de la disponibilité de la couverture.

Des événements catastrophiques tels que les attentats du World Trade Center et les ouragans (Andrew en 1992, Katrina en 2005) ont généré des situations de sur-sinistralité qui augmentent les coûts d'assurance et de réassurance se répercutant ainsi sur le prix des assurances. Les assureurs ont donc été contraints de rehausser les prix d'assurance.

Par ailleurs, l'inflation sociale est une raison souvent évoquée face à la hausse des prix débutée en 2019. Elle se définit comme l'augmentation des coûts des sinistres résultant de plusieurs facteurs tels que l'augmentation des litiges, des définitions plus larges de la responsabilité, des

¹ [Swiss Re. \(s.d.\). 1980s: risk management and the liability crisis.](#)

décisions de justice plus favorables aux plaignants et des indemnités compensatoires plus importantes accordées par les jurys.

D'autres facteurs peuvent également conduire à une hausse des prix. Une réduction de la disponibilité de capital (issue des investissements et emprunts mis de côté par une compagnie d'assurance utilisée pour couvrir les risques des polices d'assurance) peut être causée par des pertes importantes dans les marchés immobiliers et financiers. Les compagnies d'assurance peuvent donc être plus réticentes à assurer des risques, ce qui entraîne une réduction de la disponibilité et donc une augmentation des prix pratiquée par les compagnies d'assurance. De plus, un brutal accroissement des taux d'intérêt peut générer un impact sur les prix de l'assurance en augmentant le coût de capital pour les compagnies d'assurance et en réduisant la valeur de leurs actifs détenus (constitués majoritairement d'obligations émises par l'Etat et les entreprises).

Des périodes baissières des prix peuvent être observées pour plusieurs raisons. La demande d'assurance diminue ou lorsque l'offre d'assurance augmente incitant les assurances à baisser leurs prix pour rester compétitifs. C'est le cas avec la crise financière de 2008 a engendré une période de décroissance dans le monde de l'assurance avec une faible demande ce qui a poussé les assureurs à baisser les prix. Cette demande d'assurance est souvent considérée dans les pays développés comme liée à l'évolution du PIB. Pour les produits d'assurance automobile, les prix ont baissé dans certains pays suite à une réduction de la sinistralité. Cela s'est produit aux États-Unis dans les années 1990 en raison de l'amélioration de la sécurité routière et de la réduction des accidents de la route.

Plus encore, les prix assurantiels peuvent être influencés par d'autres facteurs comme les revenus d'investissement, le résultat de souscription et le cycle des réserves. Plus les taux d'intérêt sont élevés, plus la compagnie d'assurance peut faire fructifier le placement de ses primes et réduire ainsi ses prix pratiqués. De même qu'un résultat de souscription très satisfaisant peut conduire un assureur à revoir à la baisse ses tarifs. Quant au cycle des réserves, les boni de réserve (possibilité de libérer un surplus de réserve face à une sinistralité plus basse que prévue) permettent de réduire la pression à l'assureur et ainsi de faire baisser les prix.

En dehors des indicateurs économiques et de performance, la réglementation peut aussi jouer un rôle important dans le cours des prix assurantiels. Par exemple, elle peut se montrer exigeante en matière de réserves pour les assureurs, ce qui peut entraîner une hausse des coûts pour les assureurs et donc une hausse des prix pour les clients.

Tous ces facteurs impactent fortement la capacité disponible que possède une compagnie d'assurance à accepter ou non de nouveaux risques. Ainsi, selon la théorie de contrainte de capacité, plus le surplus de capacité est élevé, plus la concurrence entre assureurs s'installe et donc

les prix baissent. Cette situation mène à des pertes de profit plus abondantes et moins de surplus obligeant les assureurs à relever leurs prix.

Ces oscillations permanentes créent un cycle de marché des prix dans l'assurance. Ce cycle est d'autant plus marqué sur le marché assurantiel américain dans le domaine de l'IARD. En effet, c'est le plus gros marché de l'assurance avec 56,4% des parts de marché mondiaux en 2021² et 9,1% du PIB américain consacré à l'assurance en 2021³.

Dans ce marché, les prix d'assurance des compagnies ont donc globalement augmenté en 2001, baissé vers 2008 puis ont réamorcé une augmentation à partir de 2019.

Face à ces perpétuelles fluctuations, les assureurs se questionnent sans cesse afin de mieux pouvoir gérer ces cycles des prix. Ils doivent être capables de prévoir la tendance des marchés afin d'ajuster leur stratégie en conséquence. De plus, ils doivent être en mesure d'évaluer correctement les risques pour éviter les situations de surévaluations ou sous-évaluations des risques, qui peuvent entraîner des pertes financières. En d'autres termes, dans le cas de la surévaluation des risques, les assureurs sont trop prudents ce qui peut rendre les prix des polices d'assurance non compétitives et réduire les ventes. Dans le cas d'une sous-évaluation des risques, les assureurs peuvent voir leur rentabilité se dégrader à la survenue d'évènements.

En 2021, la reprise économique post Covid a engendré une inflation significative aggravée en 2022 par la crise énergétique liée au conflit russo-ukrainien. Par souci de maîtriser cette inflation galopante, les banques centrales des pays ajustent leur taux signant la fin de la politique monétaire des taux d'intérêt faibles. Le souci de cette maîtrise de la dynamique des prix n'est donc plus que jamais important depuis cette année charnière.

Des conséquences mitigées pour le secteur assurantiel apparaissent : une future hausse des produits financiers issus des placements des primes (importants pour les risques longs : construction, dommages corporels, etc.) mais aussi une probable hausse de la sinistralité si l'inflation économique se translate en inflation sinistre (ex : hausse du coût des matériaux de réparation, du coût de la main d'œuvre, etc.).

Face aux impacts anticipés des hausses des taux d'intérêt et du contexte inflationniste sur leurs revenus, il apparaît donc essentiel pour les compagnies d'assurance d'optimiser l'utilisation de leurs capitaux et de se recentrer leurs activités sur les segments les plus profitables.

² [Top 10 des marchés d'assurance non-vie en 2021](#)

³ [Taux de pénétration de l'assurance aux Amériques en 2021](#)

L'appétence au risque est au cœur de la stratégie d'une compagnie d'assurance. Pour orienter les actions de souscription et obtenir un portefeuille au profil de risque et à la rentabilité souhaitée, un autre volet opérationnel notable est abordé dans ce mémoire. Il s'agit de définir le niveau de risque qu'une compagnie d'assurance accepte de prendre pour conduire son activité. Elle s'appuie généralement sur des limites opérationnelles, au-delà desquelles l'assureur considère la poursuite de la stratégie comme étant trop risquée.

Dans le cadre de notre étude, l'appétence au risque sera traitée au travers d'un problème d'optimisation : l'assureur souhaite maximiser son résultat de souscription tout en définissant un niveau d'exigences en capital qu'il ne souhaite pas dépasser. Cependant, s'il garde un niveau fixe, sa stratégie de souscription pourrait s'avérer non optimale. En effet, en période de hausse des prix, en faisant le choix de limiter son exposition (ici, le nombre de contrats souscrits), il est susceptible de se priver d'une potentielle croissance rentable. À l'inverse, s'il maintient une capacité de souscription en période de baisse des prix, il peut voir sa rentabilité se dégrader. Cependant, d'autres approches de l'appétence au risque peuvent être creusées.

La prise en compte de cette cinétique cyclique des prix est donc cruciale pour un assureur car il doit constamment adapter son appétence au risque dans un souci de croissance rentable. Il est impératif de saisir les moteurs de cette cyclicité des prix afin d'anticiper la dynamique future car elle peut influencer la rentabilité des portefeuilles de risques et les risques financiers associés.

L'objectif de ce mémoire est donc de caractériser la cyclicité des prix du marché assurantiel américain de l'IARD, puis de proposer un cadre d'appétence au risque tenant compte de leur dynamique. La stratégie de souscription dans le cadre de la modélisation des prix sera ici étudiée dans un contexte très simplifié.

Nous tenterons dans ce qui suit, d'explicitier tour à tour les caractéristiques des cycles de prix du marché afin d'en connaître les principales forces motrices. Nous proposerons ensuite des modélisations de ces cycles de marché afin de capter la dynamique future. Enfin, nous utiliserons ces prix modélisés dans le cadre de l'appétence au risque en faisant une optimisation conjointe du résultat de souscription et des exigences en capital d'un assureur fictif. Cette optimisation nous permettra de déterminer la meilleure exposition pour un assureur à adopter au regard de la dynamique des prix. Les analyses sous-jacentes de cette optimisation nous permettront de déterminer comment un assureur arrive à moduler son appétence au risque (exposition et limite des exigences en capital) en fonction de ces cycles de prix du marché.

I. Caractérisation des cycles de marché

Dans cette partie, nous allons nous attarder dans une 1^{ère} partie sur le marché américain de l'assurance avec les cycles des prix à mettre en perspective avec leurs moteurs phares. Nous embrayerons sur une 2nd partie avec les caractéristiques de la base de données en réalisant une observation générale des cycles de marché suivie d'une étude plus approfondie avec des statistiques descriptives.

1.1 Marché américain de l'assurance

Dans cette section, on va présenter les prix du marché assurantiel américain ainsi que ses moteurs qui sont la clef de voûte de la compréhension des racines du cycle.

1.1.1 Les cycles des prix du marché américain

Nous nous focaliserons sur le marché des Etats-Unis. Ce choix n'est pas laissé au hasard car il est le plus représentatif du marché de l'assurance IARD avec 56,4% des parts de marché mondiaux en 2021 et 9,1% du PIB américain consacré à l'assurance en 2021.

Il nous est fourni des rapports publics sur l'évolution des prix d'assurance IARD sur le marché américain par le site web *The Council of Insurance Agents & Brokers (CIAB)*⁴. Cette organisation collabore avec le cabinet de conseil EY afin de publier un nouveau rapport sur l'état de l'assurance commerciale. Ces données retracent l'historique des prix d'assurance dans l'IARD pour chaque *LoB* ainsi qu'une moyenne des prix de ces lignes d'assurance (*lines of business* ou *LoBs*). La fréquence est trimestrielle et les données remontent au quatrième trimestre de 1999. Ce qui en fait le site avec la plus grande profondeur des données.

La *CIAB* est une organisation professionnelle qui représente les courtiers et agents d'assurance aux États-Unis. Ces membres sont responsables du placement de 85 % des primes d'assurance IARD aux États-Unis chaque année. Cela comprend un pourcentage important des 10 premiers courtiers en termes de revenus aux États-Unis (selon la liste du Top 100 de *Business Insurance*) ainsi qu'un certain nombre des 100 premiers courtiers en termes de revenus aux États-Unis (toujours selon le Top 100 de *Business Insurance*). Cette organisation comprend également les entreprises les plus innovantes et ayant la croissance la plus rapide de l'industrie, avec plus de

⁴ [CIAB. P/C Market Surveys.](#)

20% de sièges sociaux à l'international. Ce sont donc des acteurs importants dans l'industrie de l'assurance aux États-Unis.

Les données proviennent des membres américains de la *CIAB*. Cette organisation leur demande, par le biais d'une enquête en ligne, de fournir des estimations générales des principales tendances du marché, y compris la tarification des primes.

Pour le cours des prix du marché assurantiel, une segmentation existe selon la taille des polices d'assurances pour chaque *LoB* :

- petite (moins de 25.000 USD en commissions et frais)
- moyenne (entre 25.000 USD et 100.000 USD en commissions et frais)
- grande (plus de 100.000 USD en commissions et frais)

L'historique de ces rapports permet de retracer l'évolution des prix pour chaque *LoB* et la moyenne des prix dans le temps. La fréquence est trimestrielle et les données remontent au quatrième trimestre de 1999. Ce qui en fait le site avec la plus grande profondeur des données. La base contient également la variation de la moyenne des prix (c'est-à-dire, toutes *LoBs* confondues)

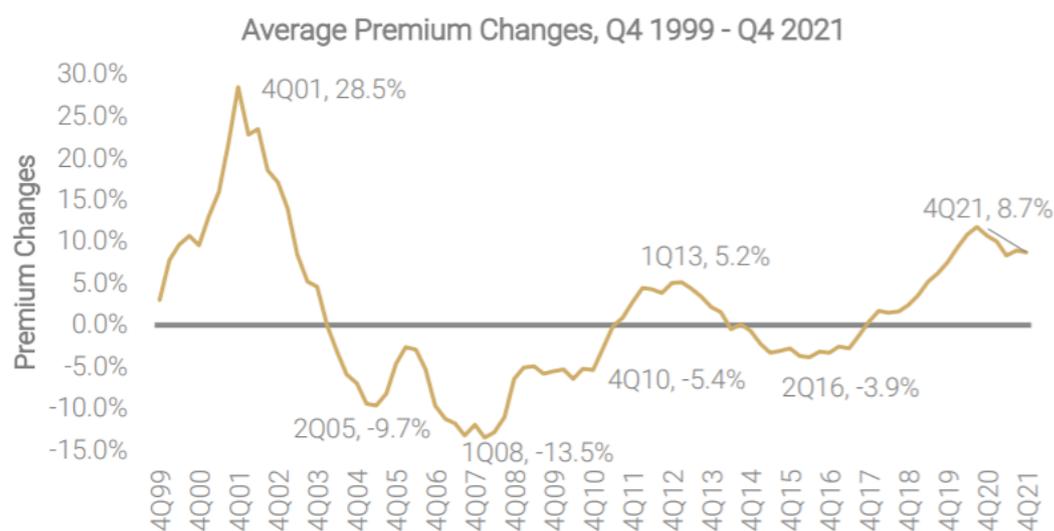


Figure I.1: Evolution des variations des prix moyens des *LoBs* dans l'IARD depuis 1999

Sur la base de ces évolutions, des indices de prix sont construits, débutant en 1999. Les variations de prix reportées trimestriellement étant annualisées, l'indice des prix pour un trimestre t est obtenu en inflatant l'indice des prix $t-1$ par le quart de la variation. Ainsi, les données trimestrielles étant indexées sur une base 100 annuelle, on multiplie les variations de prix par $\frac{100}{4} = 25$ afin d'en déduire la variation des prix en base annuelle et on l'additionne au prix du trimestre précédent afin de récolter le prix pour le trimestre suivant.

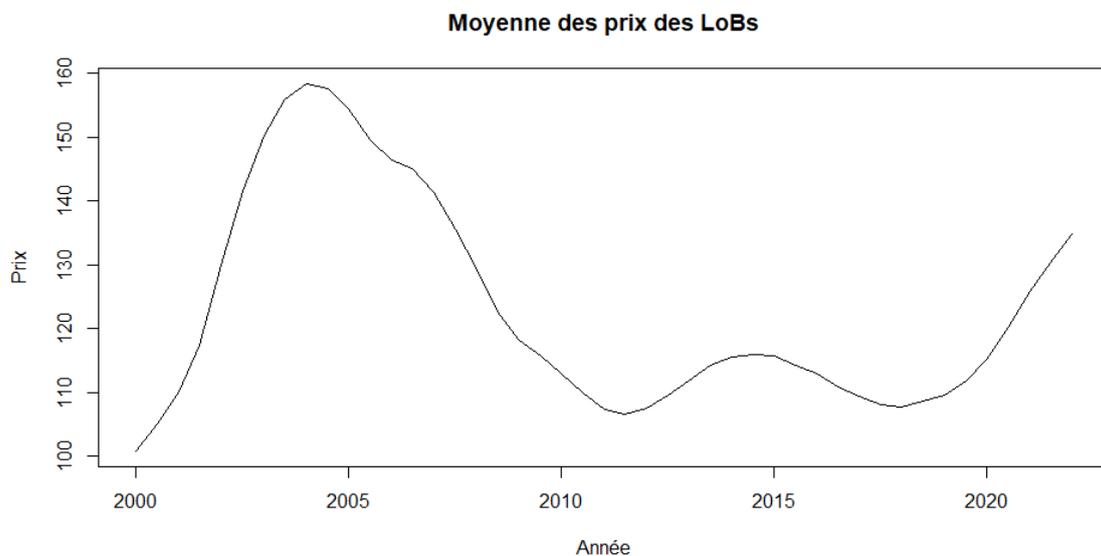


Figure 1.2: Evolution des prix moyens des LoBs dans l'IARD depuis 1999

La CIAB publie également des sondages pratiqués sur des assureurs depuis la mi-année 2017. Il leur est demandé ce qu'ils constatent sur les variations de l'offre et de la demande d'assurance. Cela constitue un véritable complément pour la captation de la dynamique des prix.

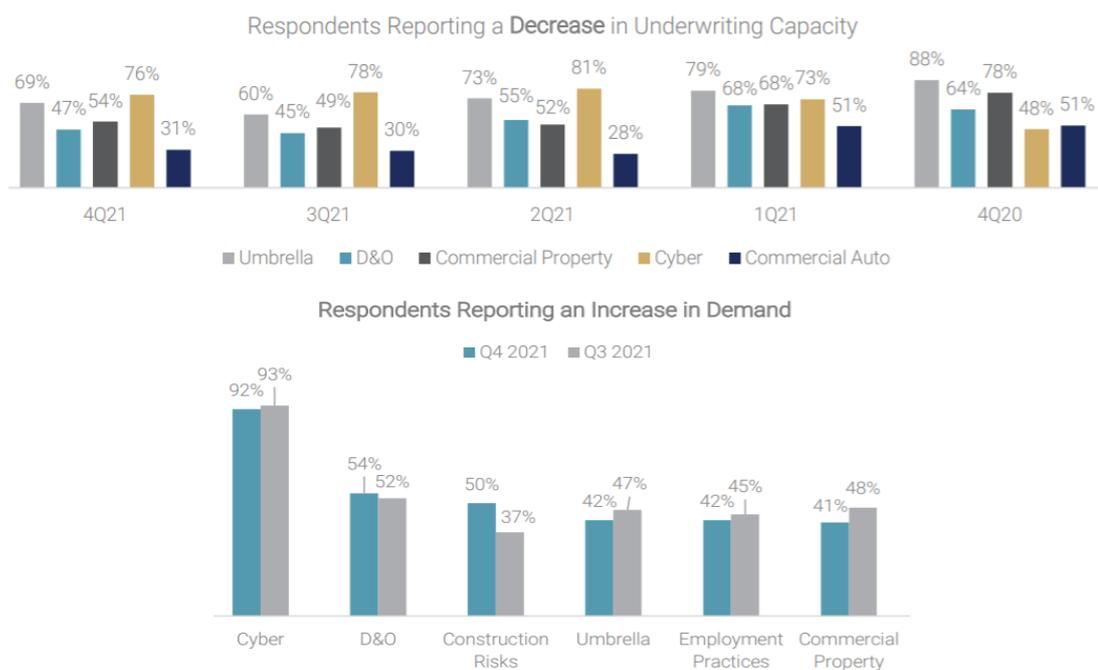


Figure 1.3: Evolution des sondages depuis 2017

Ces données ont donc également été récoltées dans le but d'intégrer leur ressenti dans la modélisation des cycles de marché. Les données ne remontant qu'à 2017, on peut tout de même les analyser sur le plan économique bien qu'elles ne couvrent pas un historique assez profond pour étudier les variations de cycle. Mais faute de couverture suffisamment large, il sera difficile de réaliser des modèles de prédiction suffisamment robustes.

Après avoir importé le jeu de données, on le nettoie puis l'explore. On va s'intéresser à 5 *LoBs* en particulier sur toutes les lignes. On dispose des :

- Assurances automobiles à destination des entreprises (*Commercial Auto*),
- Assurances accidents de travail (*Workers Compensation*),
- Assurances pour les dommages aux biens commerciaux (*Commercial Property*)
- Assurances responsabilité civile générale (*General Liability*)
- Assurances responsabilité civile complémentaire (*Umbrella Liability*)

On s'intéresse également à la moyenne des prix de l'*IARD* qui englobe toutes les autres.

1.1.2 Les moteurs de la cyclicité des prix

La théorie de la contrainte de capacité en assurance est une théorie qui explique comment les cycles de prix du marché de l'assurance peuvent être influencés par la disponibilité de capacité d'assurance. Selon cette théorie, il existe une relation dynamique entre le prix de l'assurance et le surplus, qui correspond à l'excédent d'actifs sur les passifs détenus par une compagnie. Autrement dit, les compagnies d'assurance ont une capacité limitée pour accepter de nouveaux risques, et elles doivent donc choisir soigneusement les risques qu'elles acceptent de couvrir en fonction de leur surplus disponible.

Lorsqu'une compagnie d'assurance dispose d'un grand surplus (capacité abondante), elle peut être plus encline à accepter de nouveaux risques, car elle dispose des ressources financières pour couvrir les éventuelles pertes. En revanche, si le surplus de la compagnie est faible (capacité limitée), elle peut être plus prudente quant à l'acceptation de nouveaux risques, car elle ne peut pas disposer de ressources suffisantes pour couvrir les éventuelles pertes.

De cette manière, la théorie de la contrainte de capacité suggère qu'il y a un compromis entre le prix de l'assurance et le surplus de la compagnie. Si une compagnie d'assurance dispose d'un grand surplus, elle peut être en mesure de proposer des prix plus bas pour la couverture de l'assurance, car elle dispose d'un coussin financier plus important pour absorber les éventuelles pertes. En revanche, si le surplus de la compagnie est faible, elle peut avoir besoin de demander des prix plus élevés pour la couverture de l'assurance afin de s'assurer qu'elle dispose de ressources suffisantes pour couvrir les éventuelles pertes.

En général, la théorie de la contrainte de capacité aide à expliquer comment les compagnies d'assurance gèrent leurs portefeuilles de risques et comment elles évaluent les risques. Comprendre cette théorie peut être important lors de la recherche d'une assurance, car elle peut influencer le coût et la disponibilité de la couverture.

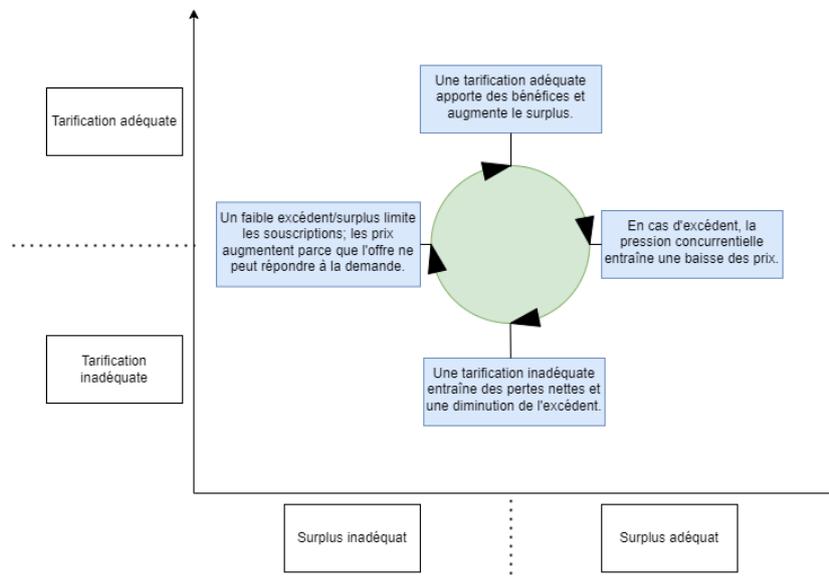


Figure I.4: Théorie de la contrainte de capacité⁵

Par conséquent, il existe plusieurs facteurs qui peuvent impacter la disponibilité de capacité d'assurance et donc les cycles de prix du marché de l'assurance. Notons qu'il existe également autant de cycles de marché assurantiel que de ligne d'affaire par pays. Ces différents cycles de marché peuvent être corrélés entre eux au sein d'une même ligne d'affaire ou au sein d'un même pays. Les paramètres suivants⁶ sont souvent cités comme les influençant (liste non exhaustive) :

- La tarification actuarielle avec l'incertitude liée à la sinistralité future
- Les pertes de l'année précédente pour chaque ligne d'affaire dans chaque pays et au niveau mondial pour tenir compte de l'impact de la réassurance
- Les risques de catastrophes naturelles (ouragans Andrew en 1992 et Katrina en 2005), catastrophes (Covid-19 en 2020) ou sériels (attentats du 11 septembre 2011) qui augmentent le coût de la réassurance et par conséquent celui de l'assurance
- La concurrence accrue entre assureurs qui, dans un but d'élargir leurs parts de marché, induit une baisse des prix et une augmentation de la demande de couverture d'assurance
- La concurrence entre les assureurs et les réassureurs, avec l'appétence au risque et les sources alternatives de capital
- Des indicateurs économiques pouvant influencer la demande de couverture d'assurance et la rentabilité des assureurs : l'inflation, le produit national brut, les salaires, les marchés financiers, etc.
- Les taux d'intérêt affectant la rentabilité des placements des primes

⁵ WANG, S., MAJOR, J., PAN, C., & LEONG, J. (2010). *U.S. Property-Casualty: Underwriting Cycle Modeling and Risk Benchmarks*.

⁶ DUTANG Christophe. (2012). *Etude des marchés d'assurance non-vie à l'aide d'équilibres de Nash et de modèles de risques avec dépendance*.

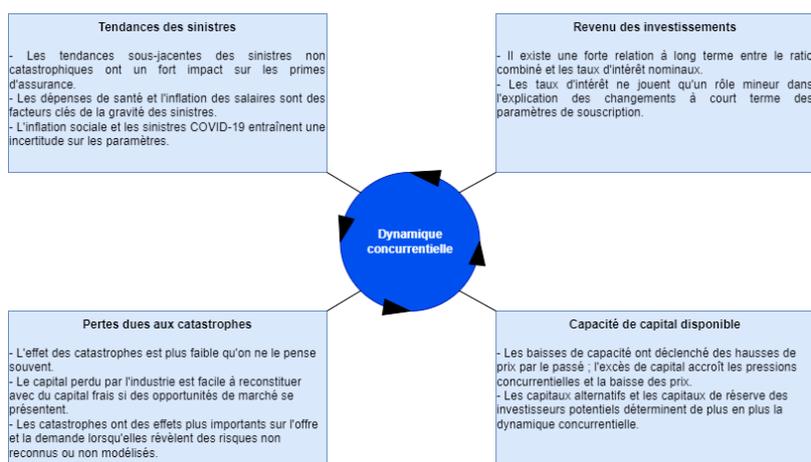
- La dimension juridique au travers notamment des réglementations : changements dans les lois et les réglementations qui peuvent impacter les exigences de couverture d'assurance et les coûts associés, changements de jurisprudence

Des indicateurs permettant de capturer l'évolution de ces paramètres peuvent être extraits de sources publiques telles que l'OCDE, le NAIC⁷, le site *Insurance Information Institute* et l'ARTEMIS:

- Le cours de la réassurance⁸ avec le *Rate On Line (RoL)* (rapport de la prime de réassurance sur le montant de la garantie) et les pertes estimées des biens des assurés
- Le revenu net d'investissement⁹ normalisé par les primes lié au taux de rendement actuariel des obligations (en particulier, l'obligation *T-Bond* américaine de maturité 10 ans)
- L'inflation avec l'indice américain des prix à la consommation¹⁰
- Les fonds propres
- La libération de réserves
- Le résultat de souscription¹¹
- Le rendement sur les fonds propres qui est équivalent au rapport du bénéfice net après imposition sur les fonds propres

On peut donc synthétiser tous ces impacts en 4 catégories principales :

- La tendance ou fréquence des sinistres : surtout pour les sinistres attritionnels
- Les catastrophes en ce qui concerne les sinistres atypiques
- La capacité de capital disponible
- Le revenu d'investissement



⁷ [Commissioners, N. A. \(2021\). U.S. Property & Casualty and Title Insurance Industries.](#)

⁸ [Institute, I. I. \(s.d.\). Facts + Statistics : US Catastrophes.](#)

⁹ [OECD Data. \(s.d.\). Long-term interest rates.](#)

¹⁰ [OECD Data. \(s.d.\). Inflation \(CPI\).](#)

¹¹ [Institute, I. I. \(s.d.\). Facts + Statistics : Industry overview.](#)

Episodes de durcissement des prix historiques			
Période Forces motrices	2000-2003	2008-2012	2018-2020
	Croissance des sinistres de responsabilité civile aux États-Unis	Inflation sociale et évolution défavorable des sinistres	Croissance bénigne des sinistres, pas un facteur de montée des prix
Pertes dues aux catastrophes	Attaque du World Trade Center	Les plus grandes par rapport aux pertes moyennes dues aux catastrophes	Les plus grandes par rapport aux pertes moyennes dues aux catastrophes et aux sinistres liés Covid-19
Revenu d'investissement	Pertes boursières	Pertes de crédit, faibles taux d'intérêt	Faibles taux d'intérêt, pas de perte d'actifs importante
Capacité de capital disponible	Pénurie de capital	Crise de capital et de liquidité 2007/2008	Retrait partiel de capital alternatif

Figure I.5: 4 principaux facteurs impactant les cycles de marché¹²

Tous ces facteurs peuvent donc expliquer la présence d'un cycle de marché. Cependant, modéliser les prix sur la seule base de ces facteurs pris séparément est difficile. L'impact de la situation globale des cycles de marché sur des cycles individuels est une piste intéressante à creuser avec les caractéristiques de la base de données.

1.2 Caractéristiques de la base de données

Cette partie va permettre de mettre en lumière des caractéristiques de la base de données à partir d'une observation générale puis d'un affinement de l'étude via les statistiques descriptives.

1.2.1 Observation des cycles

À partir de la moyenne des prix du marché assurantiel américain, on descend à une granularité plus fine avec 5 LoBs.

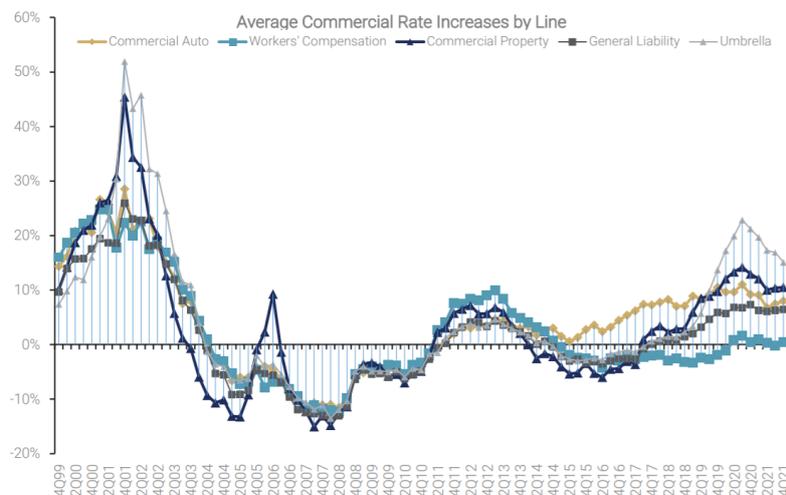


Figure I.6: Evolution des variations des prix par LoB depuis 1999

¹² [Society Of Actuaries. \(2021\). Understanding the Current Underwriting Cycle—Difficult Times Extend Hard Market.](#)

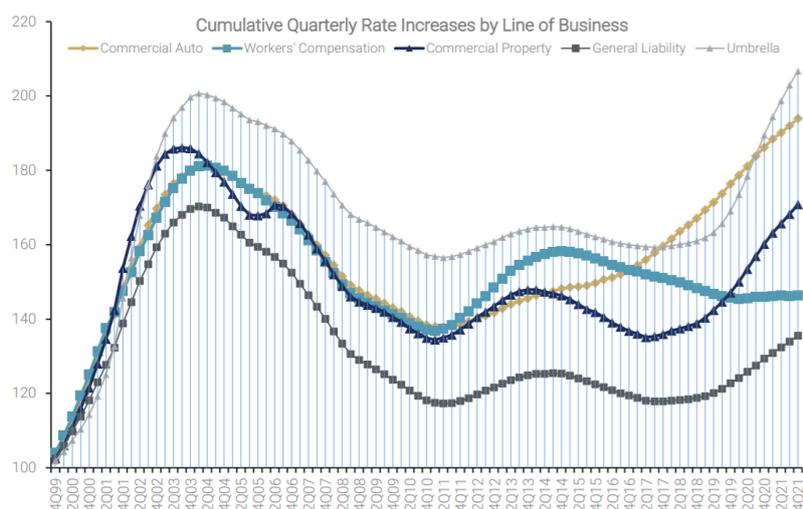


Figure I.7: Evolution des prix des LoBs dans l'IARD depuis 1999

Comme pour la moyenne des prix dans l'IARD, on peut retrouver les prix pour chaque *LoB* à partir de la variation de leurs prix. On peut observer des vitesses de prix très grandes à des périodes catastrophiques comme les attentats du 11 septembre 2001 notamment pour l'assurance pour les dommages aux biens commerciaux et responsabilité civile complémentaire, les prix se stabilisent jusqu'à 2007, une légère remontée s'observe pour l'assurance pour les dommages aux biens commerciaux en 2005 à cause notamment de l'ouragan Katrina. Entre 2008 et 2012, une période de décroissance mondiale conjuguée à une crise de capital et de liquidité donne un résultat sur la trajectoire des prix difficilement identifiable (légères baisses puis remontées respectivement en début et fin de cette période). Une recrudescence de la montée des prix réapparaît en 2019 due à la poursuite de la baisse des capacités des assureurs et de la hausse des franchises, se traduisant ainsi par des couvertures plus chères et plus limitées. Un pic s'observe en 2020-2021 pour l'assurance responsabilité civile complémentaire, avec l'inflation sociale et les risques sanitaires et juridiques¹³ accrus des groupes pharmaceutiques et de certains acteurs de l'agroalimentaire.

1.2.2 Statistiques descriptives

Par la suite, le focus est porté sur le comportement des prix.

Comportement des prix

Dans le but de modéliser le comportement des prix, on s'est intéressé à l'étude de plusieurs aspects statistiques du jeu de données. D'emblée, on s'est attardé sur la stationnarité des 6 séries (5 *LoBs* et leur moyenne). En effet, dans le cas de variables indexées sur le temps, la présence de

¹³ [Les Echos. \(2022\). Assurance : une hausse des primes cinq années de suite.](#)

séries non stationnaires avec une forte autocorrélation entraînerait une régression fallacieuse. Il s'agit d'une régression avec des résultats trop optimistes (score, significativité des coefficients et du modèle) qui feraient croire à une relation entre les variables alors que ce n'est pas le cas. C'est le cas notamment dans les processus autorégressifs non stationnaires. La non-prise en compte de l'hypothèse de stationnarité impacte grandement la qualité du modèle calibré. Nous avons donc fait passer le test augmenté de Dickey-Fuller ou test ADF à nos séries pour vérifier leur stationnarité. La plupart d'entre elles ne l'étaient pas donc le moyen pour les rendre stationnaire fut de les différencier.

De plus, on a observé plus en profondeur le comportement des prix en les séparant selon la phase du cycle ou encore selon un seuil de prix déterminé à partir de l'étude des prix *niveaux*, de la différence des prix d'ordre 1 et d'ordre 2. Les analyses graphiques ont pu mettre en évidence une linéarité entre chaque couple (différence d'ordre 2 – *niveaux*) et (différence d'ordre 2 – différence d'ordre 1).

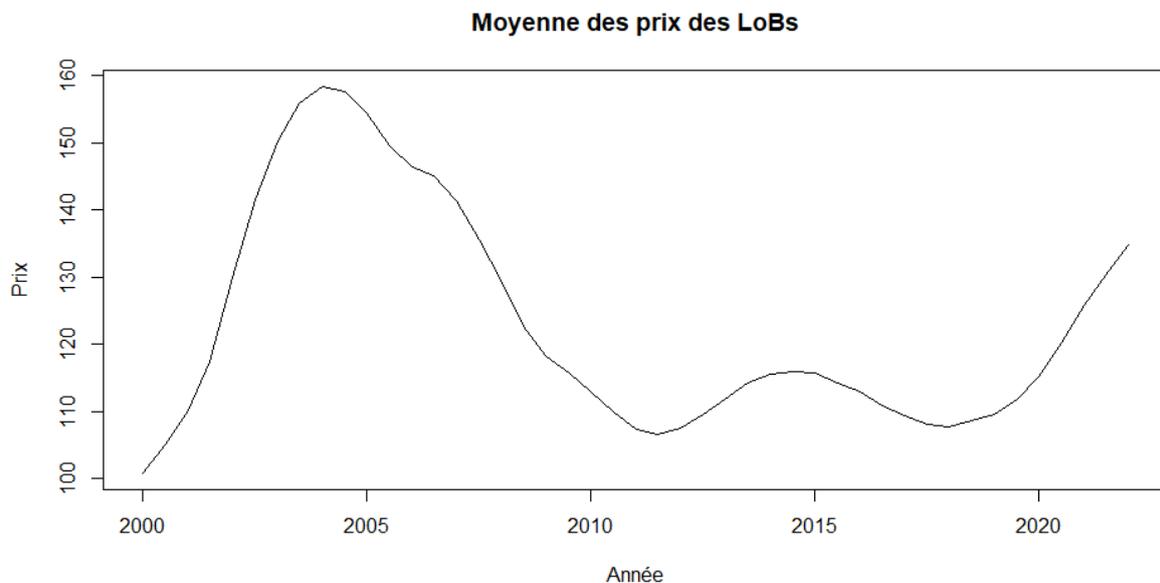


Figure 1.8: Evolution de la moyenne des prix depuis 1999

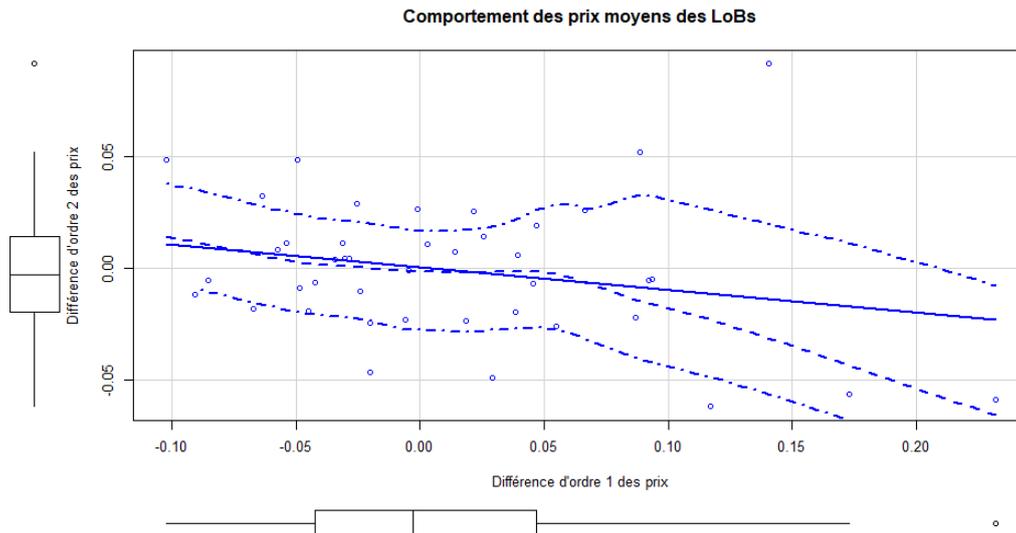


Figure 1.9: Comportement des prix moyens des LoBs

On a pu déduire des graphes que, les prix se stabilisent assez rapidement dans le temps en convergeant vers des extrema locaux (dérivées secondes des prix globalement positives en phase descendante et négatives en phase ascendante). Autrement dit, ils ne font pas des montées et des baisses incontrôlées. Une remontée se stabilise très vite (accélération négative) et une redescente se stabilise également très vite (accélération positive). Ce point est optimiste car il nous garantit des prédictions de résultats assez stables et plausibles dans le temps.

De surcroît, on s'est penché sur la corrélation des prix des *LoBs*. On remarque qu'ils sont très corrélés entre eux, ce qui rend intéressante la piste d'une modélisation des prix d'une *LoB* par ceux des autres.

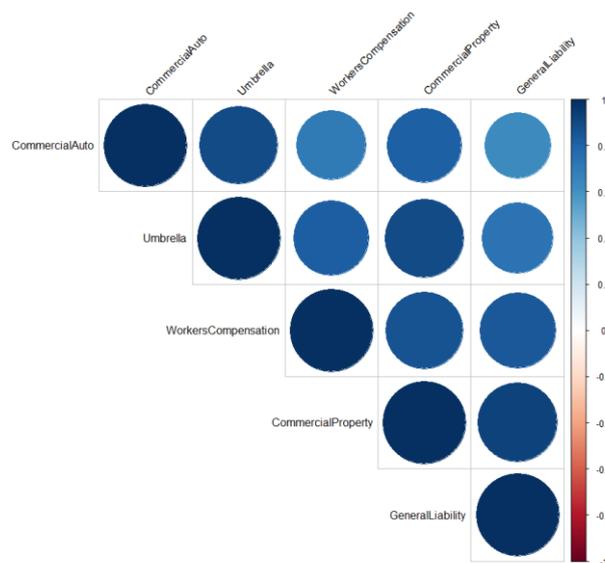


Figure 1.10: Graphique des corrélations des LoBs

II. Modélisation des cycles de marché

On cherche dans cette partie à utiliser ces statistiques descriptives afin de proposer une modélisation de la dynamique des prix.

2.1 La modélisation des cycles de marché dans la littérature

Cette partie va nous permettre de mettre en perspective les méthodes statistiques existantes dans le contexte de la modélisation des cycles de marché, en pointer les enjeux et limites et proposer des solutions. Ces méthodes existantes sont explicitées dans des articles, mémoires, thèses, etc.

Plusieurs articles abordent la question sous différentes approches : régressions linéaires, séries temporelles univariées, modèles VAR¹⁴ et modèles de régression à transition lisse avec changement de régime (assouplissement-durcissement des prix). L'objectif est donc de s'inspirer ces modèles afin de les adapter à notre problème qui est la modélisation des prix.

2.1.1 Modélisation par la régression linéaire

Un article *U.S. Property-Casualty : Underwriting Cycle Modeling and Risk Benchmarks*¹⁵ propose une régression des différences des prix en fonction des prix eux-mêmes en introduisant une séparation des prix en 2 échantillons : ceux en phase ascendante et ceux en phase descendante.

L'article décrit d'abord l'extraction d'un historique de données annuelles entre 1967 et 2009, provenant d'un site open source *SNL Financial, the National Association of Insurance Commissioners (NAIC), and A.M. Best*, dans la rubrique « niveau industriel » *Best's Aggregates & Averages*. Une fois nettoyées, les données se concentrent sur le *Total Premium Share (TPS)* qui est un facteur clé dans la modélisation des cycles de souscription et en fait donc un excellent proxy pour l'indice des prix. Cet indicateur se définit comme les primes nettes émises normalisées par le PIB. Le PIB étant lui-même un proxy de l'exposition :

¹⁴ Vecteur Auto-Régressif : modélisation multivariée de séries temporelles

¹⁵ WANG, S., MAJOR, J., PAN, C., & LEONG, J. (2010). *U.S. Property-Casualty: Underwriting Cycle Modeling and Risk Benchmarks*.

Pour t n'importe quelle année,

$$\begin{aligned} \text{Prix}_t &= \log(\text{TPS}) \\ &= \log\left(\frac{\text{NWP}}{\text{PSGDP}}\right) \end{aligned}$$

Avec :

- *NWP (Net Written Premium), les Primes Nettes Emises*
- *GDP (Gross Domestic Product), le PIB*
- *PSGDP (Private sector GDP), le PIB généré par le secteur privé*

On dispose donc de la trajectoire de ces *TPS* entre 1967 et 2009.

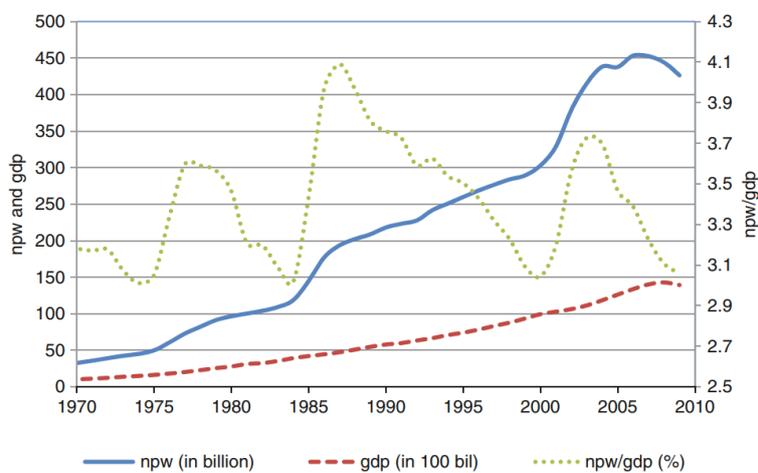


Figure II.1: Evolution des NPW, GDP et TPS dans l'IARD Américain entre 1967 et 2009

Ensuite, il définit ensuite les quantités suivantes :

$$\Delta_b Y = Y_t - Y_{t-1} \text{ appelée la différence } \ll \text{backward} \gg$$

$$\Delta_f Y_t = Y_{t+1} - Y_t \text{ appelée la différence } \ll \text{forward} \gg$$

Après, à partir de la différence *backward*, l'article établit une séparation des prix selon 2 régimes :

- Si $\Delta_b Y > 0$ alors Y_t est dans une période haussière des prix, période dite de durcissement des prix
- Si $\Delta_b Y < 0$ alors Y_t est dans une période baissière des prix, période dite d'assouplissement des prix

Une fois la séparation effectuée, il observe le comportement de la différence *forward* des prix $Y_{t+1} - Y_t$ en fonction des prix Y_t .

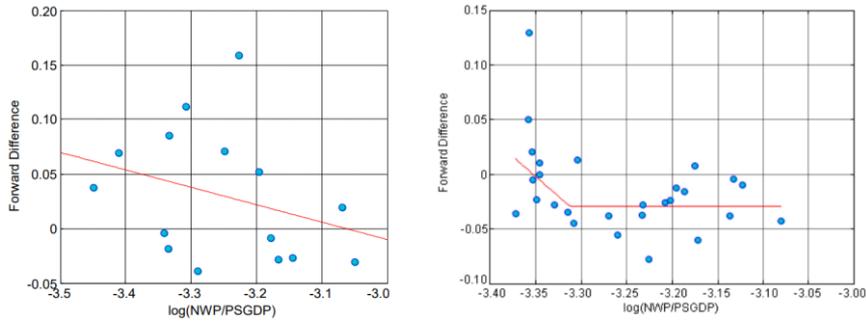


Figure II.2: Observations des différences de prix (**durcissement des prix** à gauche et **assouplissement des prix** à droite)

Il est calibré un modèle de régression selon le régime :

- Pour le régime de durcissement des prix : $\Delta_f Y_t = \alpha_{Hard} \times Y_t + \beta_{Hard} + \varepsilon_{Hard,t}$
- Pour le régime d'assouplissement des prix : $\Delta_f Y_t = \alpha_{Soft} \times \min(Y_t, \gamma) + \beta_{Soft} + \varepsilon_{Soft,t}$

Avec $\varepsilon_{Régime,t}$ les erreurs du modèle indépendantes et identiquement distribuées (iid)

Et $\varepsilon_{Régime,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $Régime \in \{Hard, Soft\}$

Concernant l'estimation des coefficients, la première régression (linéaire) utilise la méthode des moindres carrés ordinaire. La seconde régression (non linéaire) peut soit utiliser la méthode des moindres carrés généralisée soit la méthode du maximum de vraisemblance ou encore une méthode interne plus stable nommée *two-stage algorithm*.

La distribution de l'erreur des deux modèles de régression est étudiée. Selon les tests de normalité effectués (Shapiro, Lilliefors, ou encore le Chi-2), l'hypothèse de normalité des résidus ne peut pas être rejetée. Les résidus suivent donc une loi normale centrée et leur variance est calculée. Une fois leur modèle gaussien calibré, une dizaine de milliers de scénarios de prédiction des prochains prix sont réalisés en introduisant la composante aléatoire normale et centrée issue des résidus de la régression. Les prédictions s'étendent jusqu'à 2040 soit 30 années de prédiction à partir de 2010. La moyenne de ces scénarios permet ainsi de stabiliser les résultats.

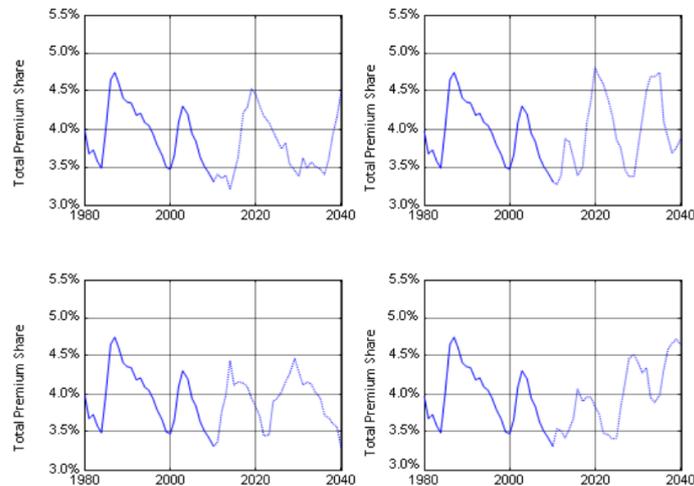


Figure II.3: 4 simulations de prédiction parmi les 10000 réalisées

Ces modèles possèdent donc un atout de prédiction non négligeable puisqu'au-delà de séparer les prix en deux catégories de régime, ils tiennent aussi compte de la dépendance linéaire décroissante entre vitesse des prix $\Delta_f Y_t$ et le prix Y_t à cet instant. Ainsi, les deux modèles confirment cette tendance qu'ont les prix à se stabiliser au cours du temps afin de basculer d'un régime à l'autre. Ce qui est un point positif pour l'hypothèse de cyclicité des prix mais aussi pour la qualité des prédictions que corroborent les graphes ci-dessus.

Les limites de ces modèles sont l'insuffisance de l'exploitation des données qui ne se focalise que sur la différence des prix. D'une part, sur le plan univarié, d'autres relations unissant éventuellement les prix avec les différences d'ordre supérieur de ces prix-là ne sont pas explorées. En effet, la différence d'ordre 2 dite accélération des prix $\Delta_f^2 Y_t = Y_{t+2} - 2 \times Y_{t+1} + Y_t$ aurait été une trajectoire intéressante de l'étude. En effet, elle permet de se rendre compte de la vitesse à laquelle les prix se stabilisent dans le cycle donnant ainsi un caractère saisonnier des prix avec une multitude de changements de régime sur de courtes périodes. D'autre part, sur le plan multivarié, l'article omet de tester les potentielles relations entre ces prix et d'autres variables comme le ratio de pertes pourtant modélisé également avant la régression des prix (cf. *Figure II.4* ci-dessous). De plus, l'article ne propose pas de modéliser individuellement les lignes d'affaire en fonction de la tendance générale de ces prix. Et enfin, les prédictions accumulent des erreurs du modèle au fil du temps puisque la variable prédite $\Delta_f Y_t$ comporte une incertitude et est ensuite utilisée comme prédicteur $Y_{t+1} = \Delta_f Y_t + Y_t$ de la régression suivante. Ainsi, les prédictions réalisées sur plus de 10 ans (ici, 30 ans) présentent une incertitude d'une telle ampleur qu'il n'y a plus d'intérêt stratégique à en faire la modélisation. En effet, cette dynamique des prix sera utilisée dans le cadre de l'appétence au risque.

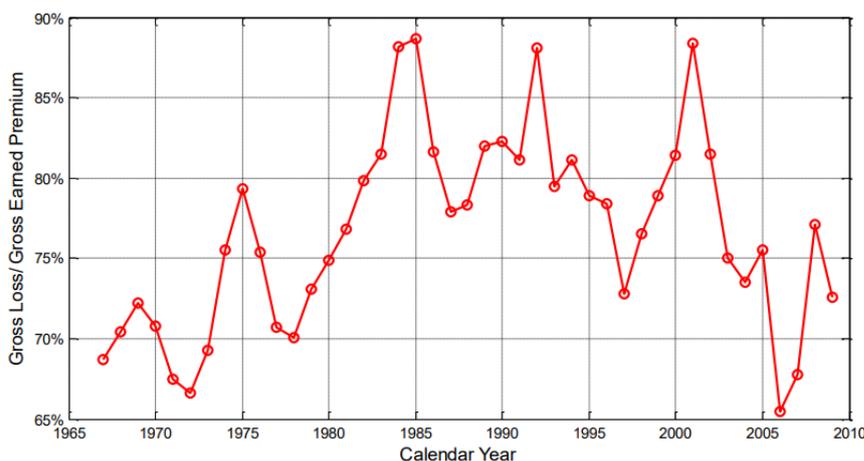


Figure II.4: Evolution du Loss Ratio brut dans la branche IARD aux Etats-Unis entre 1967 et 2009

Ce mémoire propose ainsi d'explorer ces différents champs vierges. Ainsi, pour une ligne d'affaire donnée (Line of Business ou *LoB*), il sera tenté d'autres types de régressions tels que la différence d'ordre 2 des prix $\Delta_f^2 Y_t$ en fonction de la différence d'ordre 1 des prix $\Delta_f Y_t$ et de ces derniers Y_t (sans différenciation, appelés « level ») dans le cas univarié. Il sera également pris en compte la corrélation des *LoBs* individuelles avec les autres *LoBs* ou encore la moyenne de ces

dernières dans le cas multivarié. Nous expliciterons plus en détail ces méthodes-là dans la partie 2.2 « Modélisations réalisées ».

2.1.2 Modélisation par les séries temporelles

Un chapitre *Insurance price volatility and underwriting cycles* issu du livre *Handbook of Insurance*¹⁶ passe également en revue la littérature sur la modélisation des cycles de marché et de leur volatilité. Il penche pour une modélisation des indicateurs financiers par leurs valeurs passées. Cette discipline est plus communément connue sous le nom de séries chronologiques ou temporelles. Elles sont utilisées afin de montrer que les résultats de souscription suivent un processus autorégressif de second ordre (ou AR(2)). Ces résultats sont illustrés à l'aide de la même base de données *Best's Aggregates & Averages, Property-Casualty, United States (A.M. Best Company) and Federal Reserve Bank of St. Louis FRED data system*. Elle recense les profits de souscription marché américain de l'assurance IARD pour la période 1955-2009. C'est une étude qui a été réalisée en réponse à une période de durcissement des prix aux Etats-Unis la plus forte jamais connue au milieu des années 1980. C'est une période de crise de l'offre dans l'assurance responsabilité civile des entreprises comme le met en avant le graphe ci-dessous (cf. *Figure II.5*). Cette expérience a donné lieu à des recherches approfondies sur les périodes de durcissement des prix et les causes générales des fluctuations des prix et de la disponibilité de la couverture sur les marchés de l'assurance.

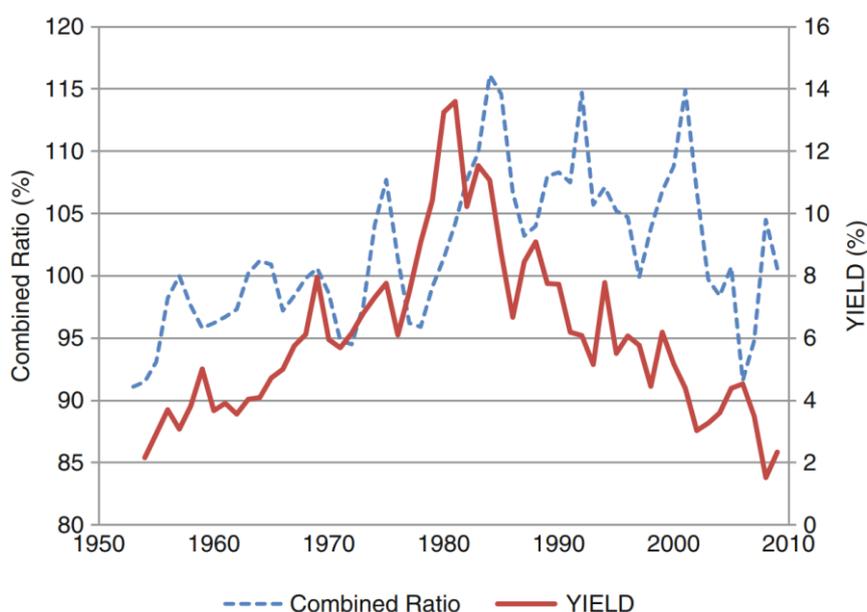


Figure II.5: Ratios combinés de l'assurance IARD aux États-Unis et rendements du Trésor à 5 ans : 1953-2009

¹⁶ DIONNE Georges. (2013). *Handbook of Insurance, Chapter 23: Insurance price volatility and underwriting cycles*.

La *figure II.6* ci-dessous présente les estimations des modèles *AR(2)* des ratios combinés agrégés dans l'IARD Américain en utilisant des données pour des sous-périodes de 25 ans qui se chevauchent au cours de la période 1955-2009. Les résultats sont présentés pour deux équations par période.

La première équation comprend une tendance temporelle *TIME*. La seconde comprend une tendance temporelle et le rendement de fin d'année des bons du Trésor américain à maturité 5 ans (échéance constante) au cours de l'année *YIELD*. Les résultats suggèrent également que les ratios combinés suivent un certain cycle de 4,4 à 6,1 ans pour les différentes sous-périodes jusqu'à 1994. Comme le prédit le modèle de la concurrence parfaite, le coefficient du *YIELD* est positivement corrélé aux taux d'intérêt :

- significativement positif pour les périodes 1970-1994 et 1975-1999, période de taux élevés
- Significativement négatif pour la période 1985-2009, qui comprend des taux exceptionnellement bas du début et de la fin des années 2000.

Table 23.1 Estimates of second-order autoregressive models of industry combined ratio $CR_t = b_0 + b_1CR_{t-1} + b_2CR_{t-2} + b_3TIME_t + b_4YIELD_t + v_t$

Sample	Constant	CR_{t-1}	CR_{t-2}	$TIME_t$	$YIELD_t$	Adj. R^2	Period
1955–1979	88.17 (6.86)	0.89 (6.91)	–0.81	0.15 (2.76)		0.72	5.5
	81.75 (5.88)	0.94 (7.04)	–0.80 (–6.11)	0.02 (0.20)	0.48 (1.15)	0.73	5.5
1960–1984	44.13 (2.64)	1.24 (6.48)	–0.71 (–3.41)	0.20 (2.28)		0.75	6.1
	37.08 (2.00)	1.23 (6.40)	–0.63 (–2.79)	0.03 (0.14)	0.42 (0.89)	0.75	6.0
1965–1989	52.81 (4.59)	1.12 (7.27)	–0.70 (–4.56)	0.31 (3.43)		0.81	5.8
	47.35 (3.33)	1.11 (7.04)	–0.64 (–3.52)	0.24 (1.76)	0.23 (0.67)	0.80	5.7
1970–1994	58.12 (3.61)	0.82 (4.45)	–0.46 (–2.46)	0.31 (2.14)		0.68	4.9
	40.76 (2.50)	0.84 (5.05)	–0.34 (–1.95)	0.21 (1.50)	0.71 (2.36)	0.74	4.8
1975–1999	49.97 (2.99)	0.80 (4.24)	–0.30 (–1.60)	0.08 (0.71)		0.50	4.7
	26.28 (1.56)	0.83 (5.06)	–0.23 (–1.38)	0.24 (2.15)	0.93 (2.76)	0.62	4.6
1980–2004	68.01 (3.57)	0.67 (3.47)	–0.27 (–1.46)	–0.11 (–1.03)		0.40	4.5
	21.06 (0.56)	0.81 (3.82)	–0.20 (–1.04)	0.32 (0.99)	1.19 (1.42)	0.42	4.5
1985–2009	91.18 (3.31)	0.51 (2.68)	–0.27 (–1.38)	–0.29 (–1.81)		0.47	4.4
	95.99 (2.36)	0.49 (2.31)	–0.27 (–1.35)	–0.34 (–0.95)	–0.18 (–0.16)	0.44	4.4

Note: Dependent variable is CR_t = loss ratio plus expense ratio (in percent). $TIME_t$ = time trend. $YIELD_t$ = year – end percentage yield on 5-year treasury bonds. Period is estimated period of cycle (in years). t -ratios are in parentheses below coefficient estimates. 1970–1994, 1975–1999, 1980–2004, and 1985–2009 sample periods include a dummy variable for 1992 (Hurricane Andrew). Sources: *Best's Aggregates & Averages, Property-Casualty, United States* (A.M. Best Company) and Federal Reserve Bank of St. Louis FRED data system

Figure II.6: Modèles AR(2) pour le ratio combiné avec les 2 équations

Les tests pour la série des ratios combinés dans l'IARD Américain analysée ci-dessus ont rejeté l'existence d'une racine unitaire. En effet, la principale caractéristique d'une série non stationnaire (par exemple, une série avec une racine unitaire) est que les chocs sont permanents, c'est-à-dire qu'ils persistent indéfiniment.

Cependant, si ce résultat est conforme dans le cadre des recherches sur le cycle de souscription, le problème de non-stationnarité subsiste dans l'utilisation d'un facteur de tendance *TIME* par le modèle. Ainsi, ces séries ne sont stationnaires que si on leur retire ce facteur. Ainsi, leur utilisation brute dans des modèles autorégressifs peut engendrer des problèmes de régression fallacieuse. L'introduction d'un tel terme est donc fortement contestable, causant également des problèmes de stabilité structurelle comme le met en lumière le professeur Chao-Chun LENG dans

une partie *Stationarity and stability of underwriting profits in property-liability insurance* d'un article *Journal of Risk Finance*. En effet, il y présente des preuves que les ratios combinés sont non stationnaires et sujets à des ruptures structurelles. C'est pourquoi il y a une grande difficulté dans les modèles $AR(2)$ à expliquer les potentiels chocs, question que tente de résoudre la modélisation *STR*.

2.1.3 Modélisation par la régression à transition lisse

Un article *Cyclicality in the French Property-Liability Insurance Industry : New Findings over the Recent Period*¹⁷ propose une tout autre approche. Il relate l'extraction d'un historique de données annuelles allant de 1963 à 2008. Les données d'assurance comprennent le ratio combiné français avant réassurance, pour l'ensemble de la branche, les primes émises, le capital et le résultat de la réassurance. Elles sont tirées de 1963 à 1994 par Céline BLONDEAU, autrice d'une thèse de doctorat *Evolution de l'Assurance en France et Cyclicité des Résultats en Assurances de Dommages* parue en 2001. Ces données sont complétées par les données tirées des différents numéros du rapport annuel publié par France Assureurs de 1995 à 2008. Céline BLONDEAU constate que le ratio combiné est lié, entre autres, au taux d'intérêt, au rendement boursier et au taux d'inflation sur cette même période.

Le modèle abordé est la régression à transition lisse (*Smooth Transition Regression* ou *STR* model). C'est un modèle appartenant à la classe des modèles de changement de régime. L'idée est de modéliser la variable à étudier sur deux régimes distincts (durcissement et assouplissement des prix). Chaque régime est caractérisé par un processus stochastique et la transition d'un régime à l'autre est lisse. Le modèle est donc plus réaliste car les profits de souscription suivent différents régimes avec des valeurs de paramètres qui évoluent selon les différentes phases du cycle de souscription. En effet, il considère que le marché de l'assurance se comporte différemment dans les phases ou régimes de durcissement ou assouplissement des prix dans le cycle.

La modélisation du ratio combiné CR_t consiste à étudier son lien avec les différentes variables explicatives listées comme suit :

- La capacité mesurée par le rapport entre le capital et les primes : cp_t
- Les primes logarithmiques : lpn_t
- Le résultat de la réassurance défini comme la différence entre la part des dépenses de l'assureur et les primes cédées aux réassureurs (normalisée aux primes) : $reass_t$
- Le taux d'intérêt nominal d'une obligation d'État à long terme : $intn_t$

¹⁷ BRUNEAU Catherine, S. N. (2015). *Cyclicality in the French Property-Liability Insurance Industry : New Findings over the Recent Period*.

- Le rendement du marché boursier défini comme la différence d'ordre 1 de l'indice boursier logarithmique : $dlian_t$
- Le taux d'inflation défini comme la première différence de l'indice des prix à la consommation logarithmique : $dlipc_t$

Avant d'entamer la STR, l'article considère le modèle VAR(p) suivant :

$$X_t = (CR_t, cp_t, lpn_t, reass_t, intn_t, dlian_t, dlipc_t) X_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \times X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Avec p le lag optimal du modèle VAR

Et ε_t les erreurs iid

Se rendant compte de l'instabilité du modèle par le test de Chow (cf. Annexe G) et de l'impossibilité de détecter une « rupture » de la structure afin de changer de régime, il se tourne vers celui de la STR.

On spécifie le modèle STR pour chaque variable y_t de X_t de la façon suivante :

$$y_t = \phi \cdot x_t + \theta \cdot x_t \cdot F(s_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Avec $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p+k})$ et $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p+k})$

ϕ et θ représentent respectivement les parties linéaire et non linéaire de la dynamique

$$x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, z_{t1}, \dots, z_{tk})$$

Avec y_{t-i} les lags des variables endogènes $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

Et z_{tj} les variables exogènes $\forall j \in \{1, \dots, k\}$

$F(s_t; \gamma, c)$ est la fonction de transition telle que $F \in [0, 1]$

0 et 1 représentent les régimes extrêmes

γ , la pente qui mesure la vitesse de transition entre les 2 régimes

c , le seuil pour la variable de transition s_t

s_t est une variable exogène :

→ $s_t \leq c$ alors y_t est dans le 1^{er} régime (assouplissement des prix)

→ $s_t > c$ alors y_t est dans le 2nd régime (durcissement des prix)

Pour valider le modèle STR, 3 étapes sont indispensables :

- Tests de linéarité
- Choix du modèle STR (LSTR ou ESTR)
- Estimations et validations du modèle

Mais avant d'entamer le test de linéarité, il faut vérifier que les résidus du modèle $VAR(p)$ ne soient pas autocorrélés par le test de Portemanteau. Toutes les étapes sont détaillées dans la partie *Annexe A*.

Ce modèle apparaît donc comme plus plausible que la régression linéaire. En effet, dans la réalité, la trajectoire des indicateurs (économiques, de performance ou encore des prix, etc.) connaît un point de cassure afin de basculer d'une phase à l'autre. Si le cycle des prix du marché assurantiel est instable, alors il conviendra de creuser cette méthode alternative à la régression linéaire. Cependant, elle présente l'inconvénient du grand nombre de paramètres à calibrer.

2.2 Modélisations réalisées

Cette partie consiste à utiliser la dynamique antérieure des prix pour chaque *LoB* ainsi que leur moyenne afin de prédire les prix à venir les 5 prochaines années. Pour y parvenir, on va décomposer l'étude suivant deux types de modélisation : univariée et multivariée.

Dans la modélisation univariée pour une *LoB*, on ne considère que sa dynamique indépendamment de celle des autres contrairement à la modélisation multivariée où l'on considère les trajectoires comme étant dépendantes l'une de l'autre.

Les propriétés des variables étudiées dans les statistiques descriptives vont être utilisées afin d'implémenter des méthodes de séries temporelles¹⁸ et de régressions linéaires.

2.2.1 Modélisation univariée

Dans la modélisation univariée, on s'intéresse au comportement individuel de chaque *LoB*. Plusieurs calibrages ont été tentés pour prédire les prix.

Dans la suite, on appelle :

- t l'indice de temps
- Prix *niveaux*, la série des index de prix X_t
- Vitesse ou variation ou encore différenciation d'ordre 1 des prix ΔX_t
- Accélération ou différenciation du 2nd ordre des prix $\Delta^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1}$

2.2.1.1 Séries temporelles

¹⁸ [DAUXOIS Jean-YVES. \(2016\). Introduction à l'Étude des Séries Temporelles.](#)

D'un point de vue mathématique, une série temporelle est une série de données indexée par le temps. L'analyse du comportement de ces séries revêt donc un intérêt primordial pour les compagnies d'assurances avec une capacité de prédire le futur des prix en exploitant ses propriétés statistiques (moyenne, variance, etc.). Ces modèles se basent sur la compréhension de l'évolution passée. Pour prédire, elles reposent sur le principe du lien entre la valeur future des prix et :

- Leur valeur passée (dite retardée), introduisant le concept de modèle Auto Régressif (AR).
- La valeur de chocs aléatoires retardée. Ce sont des chocs de moyenne nulle, et de variance constante et non autocorrélés (bruit blanc). On parle alors de moyenne mobile (*Moving Average model* ou modèle MA).

Avant d'embrancher sur ces deux modèles ainsi que leurs dérivés, introduisons les outils suivants.

2.2.1.1.1 Outils

Dans cette section, on va aborder les hypothèses de stationnarité et de blancheur du bruit préalables à tout calibrage des séries temporelles.

Stationnarité

La définition générale du processus stationnaire ou faiblement stationnaire X_t est :

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_h, \forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\text{En particulier pour } h = 0, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2$$

Un processus X_t est dit strictement ou fortement stationnaire si :

$$\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \mathcal{L}(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}) \text{ avec } (t_i, k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Fortement stationnaire \Rightarrow Faiblement stationnaire

Bruit blanc

La définition générale du bruit blanc (BB) est celle du bruit blanc faible ε_t :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \forall (t, s) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } t \neq s$$

Donc par définition, le bruit blanc est stationnaire.

Le bruit blanc est fort si :

$$\varepsilon_t \text{ sont i.i.d } \forall t \in \mathbb{Z}$$

Un cas particulier du bruit blanc fort est le bruit blanc gaussien : $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

BB gaussien \Rightarrow *BB fort* \Rightarrow *BB faible*

Modèle AR

Un processus Auto Régressif d'ordre p (dite $AR(p)$) s'exprime de la manière suivante :

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i \times X_{t-i} + \varepsilon_t$$

p est le lag, i.e le nombre d'observations retardées utilisées

$(c, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$: c étant une constante et t le temps

φ_i les paramètres du modèle $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

ε_t un bruit blanc

Le processus $AR(p)$ n'étant pas obligatoirement stationnaire. Des conditions nécessaires existent et diffèrent selon l'ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_1| < 1 \text{ suffisantes si } p = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 + \varphi_2 < 1 \\ \varphi_2 - \varphi_1 < 1 \end{array} \right. \text{ suffisantes si } p = 2 \\ |\varphi_2| < 1 \\ \sum_{i=1}^p \varphi_i < 1 \text{ mais non suffisantes si } p > 2 \\ |\varphi_p| \end{array} \right.$$

Modèle MA

Un processus de Moyenne Mobile d'ordre q (dite $MA(q)$) s'exprime de la manière suivante :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i \times \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

q est le lag, i.e le nombre d'observations retardées utilisées

$(\mu, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$: $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ et t le temps

θ_i les paramètres du modèle $\forall i \in \{1, \dots, q\}$

ε_t un bruit blanc

Les processus $MA(q)$ avec $q < \infty$ sont toujours stationnaires.

De ces deux modèles parents dérivent deux autres modèles :

Modèle ARMA

Un modèle Auto Régressif d'ordre p et Moyenne Mobile d'ordre q (dit $ARMA(p, q)$) s'exprime de la manière suivante :

$$X_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \varphi_i \times X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \times \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

p et q sont les lags, i.e les nombres d'observations retardées utilisées

$$\alpha = \mu \times \left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i\right)$$

φ_i et θ_j les paramètres du modèle $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, q\}$

ε_t un bruit blanc

Remarques :

- Un modèle Auto Régressif $AR(p)$ est un $ARMA(p,0)$
- Un modèle Moyenne Mobile $MA(q)$ est un $ARMA(0,q)$
- Les processus $ARMA(p,q)$ avec $p < \infty$ et $q < \infty$ ne sont définis que s'ils sont stationnaires

Cependant si le processus à modéliser n'est pas stationnaire, on peut recourir à sa différenciation. En effet, cela permet de réduire les variations de la série d'un temps à l'autre et donc de réduire la tendance et la saisonnalité afin de stabiliser la moyenne dans le temps. En effet, une série temporelle se décompose de la manière suivante :

$$Y_t = c + trend_t + saisonality_t + X_t$$

Avec $trend_t$ est la tendance, une fonction déterministe à variation lente

$saisonnality_t$ est la saisonnalité, une fonction périodique de période r telle que :

$$\sum_{i=1}^r saisonality_{t+i} = 0$$

X_t un processus stationnaire

Ainsi, les processus ARIMA sont la généralisation des processus ARMA pour des séries non stationnaires.

Modèle ARIMA

Un modèle Auto Régressif d'ordre p Intégré d'ordre d et Moyenne Mobile d'ordres q (dit $ARIMA(p,d,q)$) s'exprime de la manière suivante :

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i \times B^i\right) \times \nabla^d (X_t - \mu) = \sum_{i=1}^q \theta_i \times \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$, l'opérateur de différenciation de X_t tel que

$$\nabla^1 X_t = \Delta X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}$$

B , l'opérateur de retard tel que $B^d X_t = X_{t-d} \forall d \in \mathbb{N}$

X_t n'est pas stationnaire mais $\nabla^d X_t$ l'est

Tests de stationnarité

Après avoir défini les différents modèles que nous offre la discipline des séries temporelles, il convient de trouver les ordres optimaux pour modéliser les *LoBs*. Pour y accéder, des tests d'autocorrélogramme sont réalisés avec des caractéristiques graphiques qui nous permettent de déterminer le meilleur processus à adopter pour la *LoB*. Mais pour y prétendre, chaque *LoB* modélisée par un processus X_t qui aurait potentiellement une composante issue d'un processus $AR(p)$ doit vérifier sa stationnarité par le test statistique « Augmented Dickey–Fuller » (ou test ADF) décrit en *Annexe B*.

Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Ce sont des tests qui se basent sur l'observation des autocorrélogrammes simples et partiels pour un processus X_t désormais considéré comme stationnaire.

L'autocorrélogramme simple consiste en un tracé de la fonction d'autocorrélation (ou ACF) $\rho_X(h)$ qui se définit de la manière suivante :

$$\rho_X : \mathbb{Z} \rightarrow [-1, 1]$$

$$h \mapsto \rho_X(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\mathbb{V}(X_t) \times \mathbb{V}(X_{t+h})}} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\mathbb{V}(X_t)} = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \quad \forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2$$

Avec $\gamma_X(h)$ la fonction d'autocovariance du processus X_t aux propriétés suivantes :

$$\gamma(0) \geq 0$$

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0), \forall h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{la fonction autocovariance est donc bornée}$$

$$\gamma(h) = \gamma(-h), \forall h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \gamma_X(h) \text{ est paire.}$$

Les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation pour les processus $MA(q)$ sont données en *Annexe C*.

Pour l'autocorrélogramme partiel, il convient de définir quelques notions préalables. On appelle $EL(X_t | \mathcal{H}_{t-h}^{t-1}) = \sum_{i=1}^h \phi_i(h) \times X_{t-i}$ la régression linéaire d'une variable X_t sur $\mathcal{H}_{t-h}^{t-1} = \text{Vect}(X_{t-h}, \dots, X_{t-1})$. On définit alors la fonction d'autocorrélation partielle (ou PACF), le coefficient de corrélation $\phi_h(h)$ entre les variables $X_t - EL(X_t | \mathcal{H}_{t-h+1}^{t-1})$ et $X_{t-h} - EL(X_{t-h} | \mathcal{H}_{t-h+1}^{t-1})$.

Etude des autocorrélogrammes

Dans cette partie, il s'agit d'analyser les autocorrélations simples et partielles de nos *LoBs* afin de trouver les ordres optimaux pour le modèle. Les interprétations peuvent être synthétisées dans le tableau ci-dessous :

	AR(p) stationnaire	MA(q)	ARMA(p,q)
ACF	Décroissance géométrique du pic vers 0 Forme sinusoïdale	$\rho_X(h) = 0 \forall h > q$	Décroissance géométrique du pic vers 0 après le lag $\max(0; q - p)$ Forme sinusoïdale
PACF	$\phi_h(h) = 0 \forall h > p$	Décroissance géométrique du pic vers 0 Forme sinusoïdale	Décroissance géométrique du pic vers 0 après le lag $\max(0; p - q)$ Forme sinusoïdale

Figure II.7: Tableau de décision pour le choix du modèle ARMA

Estimation des coefficients par Maximum de Vraisemblance

Une fois l'ordre du processus trouvé pour chacune de ces LoBs. Il convient de trouver les coefficients du modèle afin d'en achever le calibrage.

Soit X_t un processus $ARMA(p, q)$:

$$X_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \varphi_i \times X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \times \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = X_t - \alpha - \sum_{i=1}^p \varphi_i \times X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \times \varepsilon_{t-i}$$

avec $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Étant donné la dépendance des valeurs futures aux valeurs passées dans les séries temporelles, on définit une vraisemblance conditionnelle aux valeurs passées de X_t et ε_t :

$$L(\varphi, \theta, \mu, \sigma^2 | \varepsilon, X) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma} \times \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^T \times \sigma^T} \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2\right)$$

On peut passer à la log-vraisemblance $l(\varphi, \theta, \mu, \sigma^2 | \varepsilon, X) = \log(L(\varphi, \theta, \mu, \sigma^2 | \varepsilon, X))$:

$$\max_{\varphi, \theta, \mu, \sigma^2} L(\varphi, \theta, \mu, \sigma^2 | \varepsilon, X) \Leftrightarrow \max_{\varphi, \theta, \mu, \sigma^2} l(\varphi, \theta, \mu, \sigma^2 | \varepsilon, X)$$

$$l(\varphi, \theta, \mu, \sigma^2 | \varepsilon, X) = -\frac{T}{2} \cdot \log(2\pi) - T \cdot \log(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2$$

Pour trouver les estimations des paramètres, il faut utiliser des méthodes numériques itératives. Une méthode souvent utilisée est la méthode de Newton-Raphson¹⁹ (cf. *Annexe D*).

Prédiction et intervalles de prédiction

¹⁹ [BILDER Chris. \(2022\). Time series analysis : ARIMA \(estimation, maximum likelihood\).](#)

Une fois les modèles stationnaires de nos $LoBs$ calibrés par des processus $ARMA(p,q)$ avec l'ordre et les coefficients estimés, on peut réaliser des prédictions.

Une vérification est réalisée sur les résidus ξ_t du modèle afin de vérifier qu'ils sont centrés et non corrélés, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[\xi_t] = 0$ et $Corr(\xi_t, \xi_s) = 0, \forall (t, s) \in \mathbb{Z}^2$ et $t \neq s$.

La vérification sur la centralité des résidus s'effectue par un intervalle de confiance $IC_{1-\alpha}$ sur leur moyenne au niveau de risque α . Si $0 \in IC_{1-\alpha}$ alors à un niveau α , on considère que les résidus sont centrés.

$$IC_{1-\alpha}(\mathbb{E}[\xi]) = \mathbb{E}[\hat{\xi}] \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\widehat{\sigma}_{\xi}}{\sqrt{T}}$$

avec $\widehat{\sigma}_{\xi}$ l'écart type estimé des résidus ξ

et $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile à $1 - \frac{\alpha}{2}$ associé à loi des résidus

Quant à la vérification sur l'absence de corrélation, on le fait à l'aide d'un ACF. Graphiquement, si aucun pic à part celui du lag 0 n'est significatif, les résidus sont considérés comme non corrélés.

On affiche les prédictions des prix pour les $LoBs$. On note cette valeur \widehat{X}_t . À cause d'erreurs inhérents à tout modèle de prédiction, chacune de ces prédictions incorpore une certaine incertitude. Ainsi, chaque prédiction est associée à un intervalle $IP_{1-\alpha}$ dans lequel la vraie valeur des prix X_t à venir est encadrée avec un niveau de risque α . Les résidus sont centrés et distribués normalement. On définit l'intervalle de prédiction au niveau $1 - \alpha$ comme suit :

$$IP_{1-\alpha}^t = \widehat{X}_t \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma}_{\xi} \text{ pour } t > T$$

Le niveau de risque généralement retenu est de 5% pour la prédiction. Comme les résidus sont normaux, on assigne au quantile la valeur donnée pour une loi $\mathcal{N}(0,1)$: $q_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 1.96$.

Estimation des $IP_{1-\alpha}$ par bootstrap des résidus (méthode de Monte Carlo)

La méthode consistant à attribuer la même largeur d'intervalle à chaque prédiction est naïve car elle ne tient pas compte de l'erreur cumulée. En effet, chaque prédiction est utilisée pour la suivante. Or dans l'intervalle de prédiction introduit plus haut, $\widehat{\sigma}_{\xi}$ est constant, rendant les bornes de l'intervalle de même largeur. On définit donc une nouvelle erreur de prédiction ξ'_t telle que :

$$X_t = \widehat{X}_t + \xi'_t \text{ pour } t > T$$

Pour chaque prédiction, on suppose que les résidus sont similaires à ceux des prédictions précédentes. On procède à un rééchantillonnage des résidus ξ'_{t-1} afin de former le vecteur ξ'_t . Pour la première prédiction, ξ'_1 est formé à partir de ξ_t .

Afin former les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de prédiction, on cherche la valeur associée au quantile $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ de ξ'_t . Autrement dit $IP_{95\%} = X_t \in [\widehat{X}_t - q_{0.975}^{\xi'_t}; \widehat{X}_t + q_{0.975}^{\xi'_t}]$. On procède ainsi de suite après m prédictions : $X_{T+m} = f(\widehat{X}_t) + \sum_{t=1}^m \xi'_t$.

Ainsi, l'intervalle de prédiction s'élargit au fur et à mesure des prédictions, ce qui semble réaliste.

2.2.1.1.2 Application

On cherche à représenter les séries d'index de prix X_t par des séries temporelles.

Nous testons la stationnarité des *LoBs*, à part la *LoB Workers Compensation*, aucune des autres ainsi que leur moyenne n'est stationnaire. En effet, hormis la première *LoB*, leur test ADF affiche une statistique dont la $p - value$ est supérieure à 5%. Pour les stationnariser, plusieurs transformations sont réalisées mais sans succès :

- Semestrialisation, annualisation des données afin de lisser les observations et atténuer la variation de leur moyenne cours du temps
- Logarithmisation, passage à la puissance α telle que $0 < \alpha < 1$ afin de réduire l'hétéroscédasticité, c'est-à-dire rendre leur variance plus constante au cours du temps

On tente alors une transformation des données suivie d'une différenciation afin de les stationnariser, ce qui donne les résultats suivants :

- Semestrialisation puis différenciation de la moyenne des *LoBs*
- Annualisation puis différenciation de la *LoB Commercial Auto*
- Semestrialisation puis différenciation de la *LoB Commercial Property*
- Annualisation puis différenciation de la *LoB General Liability*
- Annualisation puis différenciation de la *LoB Umbrella*

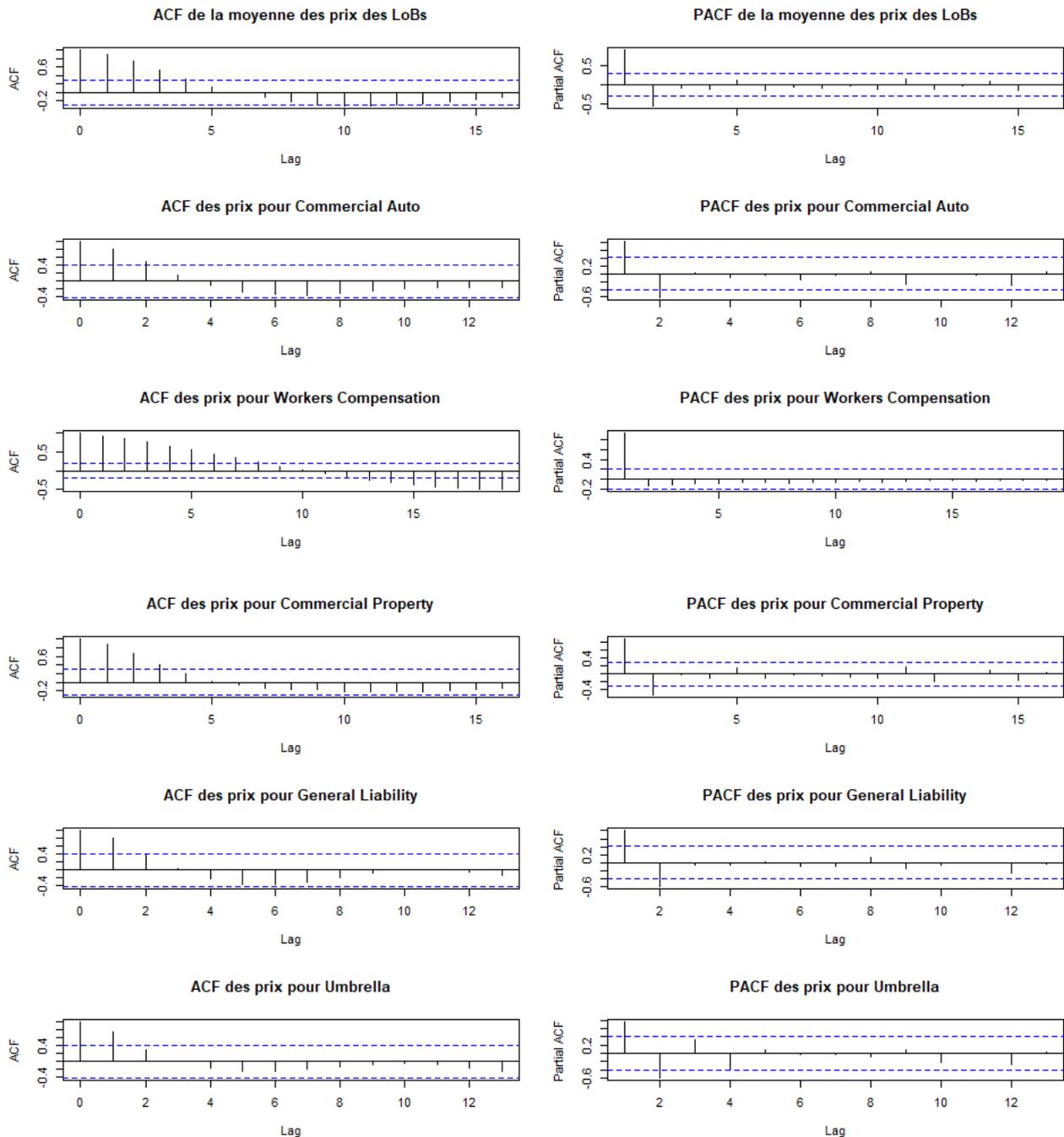


Figure II.8: Autocorrélogrammes pour les différentes LoBs

Les autocorrélogrammes révèlent un ACF avec un motif sinusoïdal. Concernant le PACF, la *LoB Workers Compensation* présente un pic significatif au lag 1 indiquant un processus $AR(1)$. Enfin, les prix des autres *LoBs* ainsi que la moyenne de leurs prix différenciés présentent 2 aux lags 1 et 2 orientant ainsi le choix pour des processus $ARIMA(2, 1, 0)$.

Après le choix optimal des tuples d'ordres (p, d, q) , on estime les coefficients des modèles par maximum de vraisemblance en supposant que les bruits blancs suivent une loi normale. Le résultat de la procédure nous donne un critère qui sert de comparatif entre les différents modèles testés pour une même *LoB*. Ce critère est l'AIC défini comme tel : $AIC = -2 \times \log(L) + 2 \times k$ avec k le nombre de paramètres estimés tel que $k = p + q + \mathbb{I}_{d=0} + 1$. Les 2 derniers provenant pour $\mathbb{I}_{d=0}$ de

l'apparition d'un terme constant en cas de série non différenciée et l'ajout d'un paramètre pour l'estimation de la variance des résidus du modèle σ_{ξ}^2 . Il s'agit de prendre parmi un panel de modèles testés, celui qui minimise le critère AIC.

Pour des modèles avec un échantillon de taille relativement petit et/ou que le nombre de paramètres est trop grand comme ici : $\frac{T}{k} < 40$, on considère le critère $AICc = AIC + \frac{2 \times k \times (k+1)}{n-k-1}$.

Le critère AIC nous corrobore bien nos choix de lag précédents modèles. En revanche, pour la *LoB Workers Compensation*, il apparaît que le modèle *AR(1)* est loin d'être le plus optimal avec un critère qui met en lumière le choix d'un modèle *AR(2)*. Plusieurs raisons peuvent l'expliquer. Dans le PACF, on peut observer un deuxième pic presque significatif pour le lag 2. De plus, cette *LoB* est la seule à n'avoir subi aucune différenciation, ni transformation selon la fréquence des données (semestrielle, annuelle au lieu de trimestrielle).

Série	Modèles candidats	AIC
Moyenne des LoBs	Modèle ARIMA(2,1,0)	158.67
	Modèle ARIMA(2,0,0)	170.96
	Modèle ARIMA(1,1,0)	176.89
	Modèle ARIMA(2,1,1)	160.09
Commercial Auto	Modèle ARIMA(2,1,0)	119.75
	Modèle ARIMA(2,0,0)	137.11
	Modèle ARIMA(1,1,0)	133.41
	Modèle ARIMA(2,1,1)	121.88
Workers Compensation	Modèle ARIMA(2,0,0)	123.98
	Modèle ARIMA(1,0,0)	420.76
	Modèle ARIMA(1,1,0)	132.71
	Modèle ARIMA(1,0,1)	333.94
Commercial Property	Modèle ARIMA(2,1,0)	201.07
	Modèle ARIMA(2,0,0)	211.78
	Modèle ARIMA(1,1,0)	215.14
	Modèle ARIMA(2,1,1)	202.84
General Liability	Modèle ARIMA(2,1,0)	124.21
	Modèle ARIMA(2,0,0)	130.42
	Modèle ARIMA(1,1,0)	135.38
	Modèle ARIMA(2,1,1)	125.29
Umbrella	Modèle ARIMA(2,1,0)	149.65
	Modèle ARIMA(2,0,0)	160.46
	Modèle ARIMA(1,1,0)	159.74
	Modèle ARIMA(2,1,1)	149.73

Figure II.9: Tests de différents modèles discriminés par l'AIC

On calibre les coefficients, réalise le test de Wald et les coefficients apparaissent tous significatifs pour ces modèles.

Série	Moyenne des LoBs	Commercial Auto	Workers Compensation
Modèle ARIMA(p,d,q)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA(2,0,0)
Estimation φ_1	1.48	1.58	1.97
Erreur φ_1	0.11	0.12	0.008
Test statistique φ_1	12.98	13.6	236.1
p-value φ_1	0	0	0
Estimation φ_2	-0.61	-0.83	-0.99
Erreur φ_2	0.12	0.13	0.008
Test statistique φ_2	-5.21	-6.25	-119.76
p-value φ_2	1.85×10^{-7}	4.11×10^{-10}	0
Estimation c	/	/	149.85
Erreur c	/	/	3.08
Test statistique c	/	/	48.36
p-value c	/	/	0

Série	Commercial Property	General Liability	Umbrella
Modèle ARIMA(p,d,q)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA(2,1,0)
Estimation φ_1	1.41	1.44	1.34
Erreur φ_1	0.12	0.14	0.14
Test statistique φ_1	11.64	10.51	9.55
p-value φ_1	0	0	0
Estimation φ_2	-0.57	-0.74	-0.79
Erreur φ_2	0.13	0.15	0.15
Test statistique φ_2	-4.51	-4.86	-5.14
p-value φ_2	6.55×10^{-6}	1.17×10^{-6}	2.81×10^{-7}

Figure II.10: Tests de significativité statistique des modèles calibrés

Ensuite, on teste la centralité et l'absence de corrélation des résidus ξ_t .

Pour la centralité, on récupère leur moyenne, la variance du modèle ainsi que la taille de l'échantillon. On se prémunit également de leur distribution qui est unanimement gaussienne dans les cas testés. Pour tester la normalité, on dispose de 2 outils :

- Le test de Shapiro-Wilk
- Le diagramme Quantile-Quantile (QQ) pour une loi Normale

Le test de Shapiro-Wilk est un test où l'hypothèse nulle H_0 est que la distribution de l'échantillon est normale. Si le test est non significatif (H_0 vraie), c'est-à-dire $p - value_{test\ S-W} > 5\%$, la distribution de l'échantillon est normale à un niveau de confiance de $1 - 5\% = 95\%$. Ce test est adapté pour des petits échantillons avec une taille $T < 30$, entre autres utilisé pour les séries annualisées entre 1999 et 2021 (soit 23 observations).

Pour le diagramme QQ, une distribution théorique est comparée à celle de l'échantillon. Ici, pour des données trimestrielles ou semestrialisées avec par conséquent une taille $T > 30$, on utilise le théorème de la limite centrale (ou TCL) où il est supposé qu'un échantillon de taille $T > 30$ suit une loi normale. Le test réalisé est donc le QQ Normale. On affiche les quantiles théoriques de la loi Normale ainsi que les quantiles de l'échantillon et on trace une fonction linéaire $y = x$ en rouge afin de vérifier l'adéquation entre les quantiles théoriques et empiriques. Les résultats ci-dessous (cf. Figure II.11) montrent une majorité écrasante du nuage de points sur la fonction linéaire tracée en rouge et reflètent donc une distribution normale de l'échantillon.

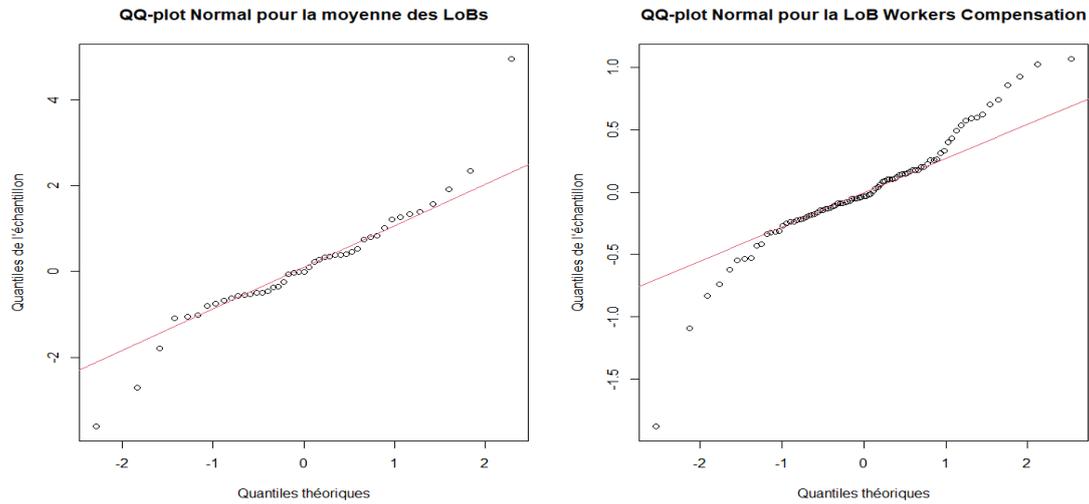


Figure II.11: Graphe des QQ-Plot Normale pour 2 LoBs en particulier

Les intervalles de confiance calculés sur la moyenne des résidus concluent à leur centralité. Notons que pour les séries différenciées d'ordre 1, on perd naturellement une observation dans la taille T de l'échantillon.

Série	Taille _{résidus}	$E[\hat{\xi}_t]$	$V[\hat{\xi}_t]$	p-value _{Normalité résidus}	QQ-Plot _{Normalité résidus}	IC _{95%} ($E[\xi_t]$)
Moyenne des LoBs	44	0.1	1.764	0.005	Adéquation	[-0.29; 0.495]
Commercial Auto	22	0.717	8.708	0.505	Adéquation	[-0.516; 1.95]
Workers Compensation	89	0.015	8.225	< 0.001	Adéquation	[-0.084; 0.097]
Commercial Property	44	0.233	4.667	0.003	Adéquation	[-0.405; 0.871]
General Liability	22	0.295	11.12	0.292	Adéquation	[-1.099; 1.689]
Umbrella	22	1.395	35.31	0.69	Adéquation	[-1.088; 3.878]

Figure II.12: Résultats des tests de normalité et centralité

Pour l'absence de corrélation, les ACF performés nous confirment bien l'absence d'autocorrélation des résidus :

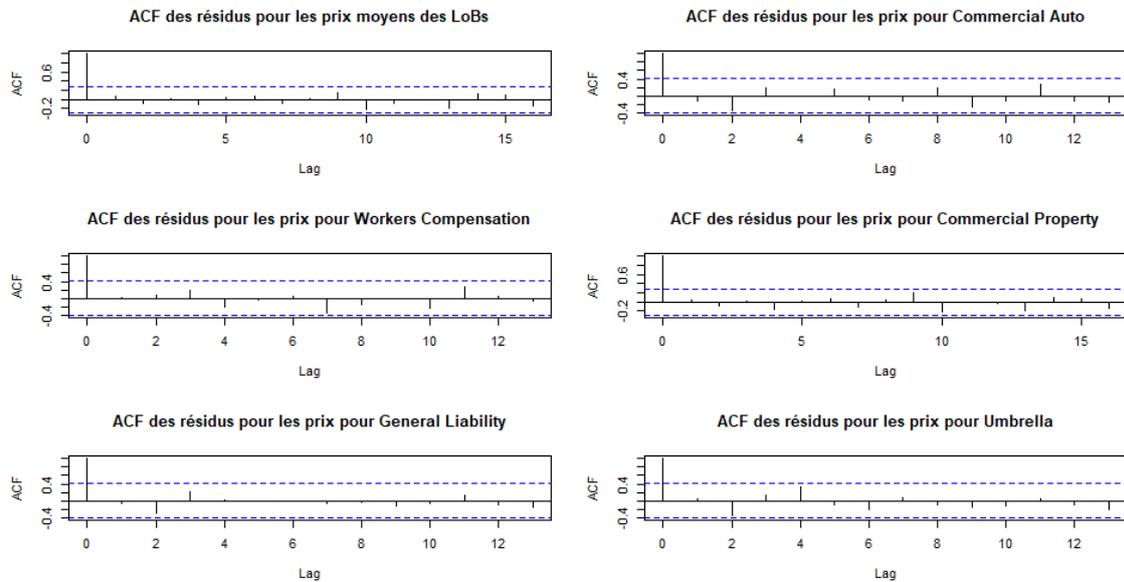


Figure II.13: Autocorrélogrammes pour les résidus des différentes LoBs

Prédictions et intervalles de prédiction

On prédit les prix moyens des *LoBs* pour les 5 prochaines années (2022-2026).

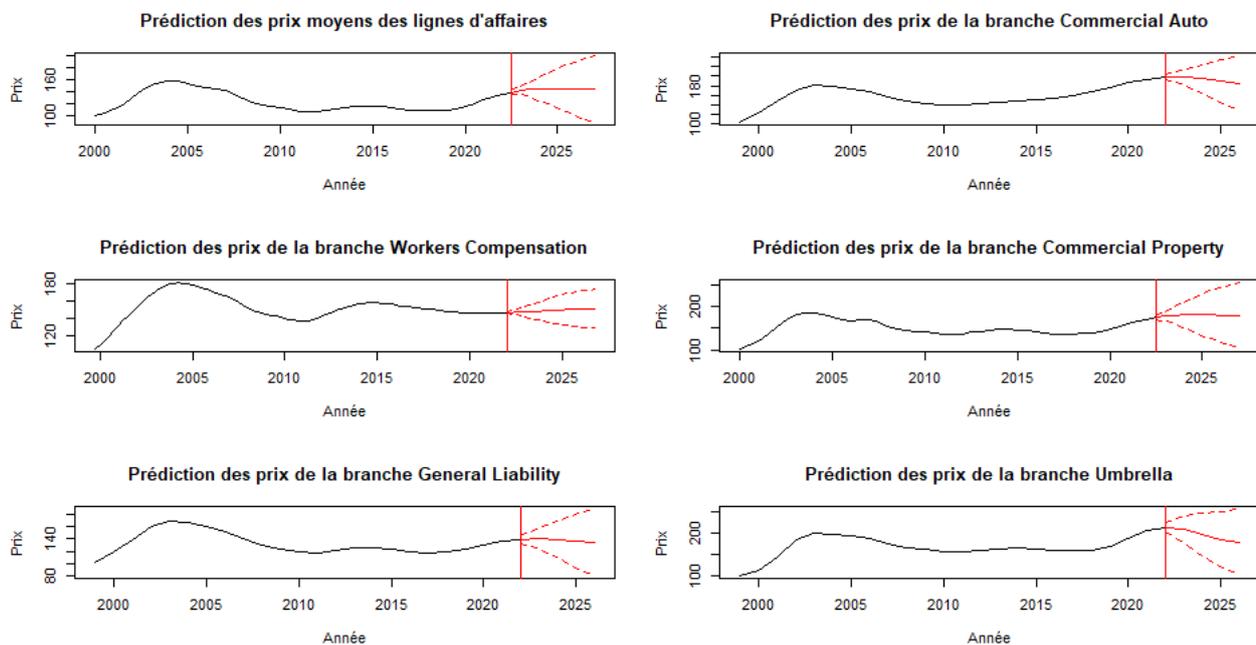


Figure II.14: Prédictions des prix pour les différentes LoBs

Conclusion

Si les séries temporelles utilisent les prix passés pour prédire les prix futurs, il n'en demeure pas moins qu'elles négligent leur aspect dynamique (vitesse ou « différence d'ordre 1 », accélération ou « différence d'ordre 2 »). Tout de même, il a été question d'étudier implicitement la vitesse pour les séries différenciées mais à l'ordre 1, qu'en est-il de l'ordre 2 ? En outre, ces modèles ne prennent

pas en compte la différence de comportement des prix selon certains paramètres : autour d'un seuil fixé, dans une période du cycle de marché, etc. Nous allons nous pencher sur des régressions linéaires afin d'établir les potentiels liens entre les prix et leurs accélérations et vitesses.

2.2.1.2 Régression linéaire

Si les statistiques descriptives ont permis de mettre en évidence certains liens de linéarité entre les différents niveaux cinétiques des prix, il s'agit maintenant de les joindre dans un seul et même modèle pour chaque *LoB* en vue de calibrer des modèles de régression multiple. Commençons par créer les variables de la vitesse et l'accélération des prix :

ΔX_t , le taux de variation ou vitesse des prix X_t

$\Delta X_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \times 4 \Rightarrow$ On annualise les vitesses trimestrielles d'où le coefficient 4.

On fait le choix de travailler sur des données semestrielles, réduisant ainsi notre échantillon des prix et des vitesses des prix de moitié.

2.2.1.2.1 Outils

On va observer les liens entre les 3 variables suivantes X_t , ΔX_t et $\Delta^2 X_t$ ce qui va axer nos analyses sur la nécessité de séparer les échantillons selon deux méthodes.

Séparation des comportements

Une étape préalable à tout calibrage consiste à faire une séparation binaire des comportements. Ainsi, à partir des X_t et de ΔX_t et $\Delta^2 X_t$, on va tirer à chaque fois 2 de ces 3 variables afin de réaliser des modèles 2 à 2 pour chaque *LoB*. Ensuite, on visualise les graphiques et on relève les comportements selon deux méthodes :

- La période du cycle de marché dans laquelle se trouve le prix
- La fixation d'un seuil au-dessus ou en dessous duquel les prix s'écartent du modèle

Ces deux méthodes supposent donc un comportement homogène des prix dans leur segmentation.

Période du cycle de marché

On étudie $\Delta^2 X_t$ en fonction des ΔX_t . En observant le graphe ci-dessous (cf *Figure II.15*), on remarque qu'en période d'assouplissement des prix ($\Delta X_t < 0$), s'installe une tendance à la stabilisation des prix par le biais de la décélération dans leur phase de baisse ($\Delta^2 X_t > 0$). Cette tendance s'accompagne aussi d'une baisse linéaire des prix indiquant une indépendance de l'accélération ($\Delta^2 X_t \cong 0$). Cette particularité contraste avec la période de durcissement des prix

($\Delta X_t > 0$) où les prix n'ont globalement qu'une seule tendance : celle de décélérer pour atteindre un maximum après avoir connu une accélération à la suite d'un minimum.

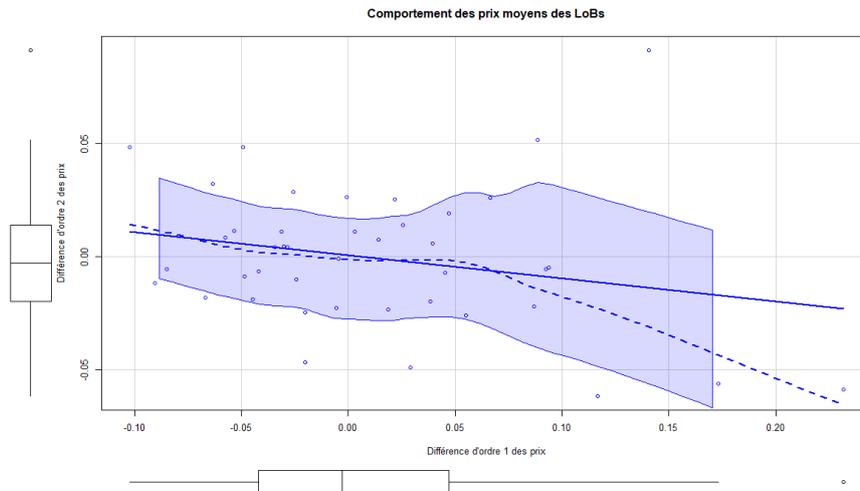


Figure 11.15: Comportement des prix moyens des LoBs

On réalise une fonction afin de détecter les optima locaux du cycle de la moyenne des prix des *LoBs*. Cette fonction s'apparente à un curseur de recherche sur le temps de l'observation. Afin de filtrer les sens de variations non significatifs du cycle, il convient de définir une fenêtre glissante d'étude sur laquelle on cherche ces optima. Il peut être difficile de définir statistiquement la largeur de cette fenêtre. L'observation du cycle nous amène à fixer une demi-largeur de part et d'autre du curseur de déplacement de 10 observations chacune. Pour des données semestrielles, cela revient à s'intéresser aux 5 années qui précèdent et succèdent le curseur pour ainsi couvrir globalement deux phases de cycles de marché jointes par un basculement de régime, notre optimum. La fonction cherche initialement à chercher les maxima locaux du cycle des prix. On lui passe également en argument son opposé afin de chercher ses minima locaux. En effet : $\min_{t \in \mathbb{N}^*} X_t = \max_{t \in \mathbb{N}^*} (-X_t)$.

On implémente la fonction de maximisation. On calcule le signe de la dérivée seconde de X_t , $\text{sign}(\Delta^2 X_t) \forall t \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, on récupère tous maxima locaux, c'est-à-dire, un sous-ensemble $I \in \mathbb{N}^*$ d'indices i tel que $\text{sign}(\Delta^2 X_i) < 0 \forall i \in I$. Cela étant, on regarde les 10 observations antérieures et postérieures à i pour tester la validité de ce maximum local c'est-à-dire si $\exists v \in I : X_v > X_{v \pm k} \forall k \in [1; 10]$. Enfin, on récupère tous les maxima X_v respectant ces 2 conditions et par déduction tous les minima $-X_v$ ainsi que les indices v . Alors, on affiche les séparateurs v illustrant les changements de régime. Si la méthode est retenue, on est prêt à séparer les données selon la période du cycle.

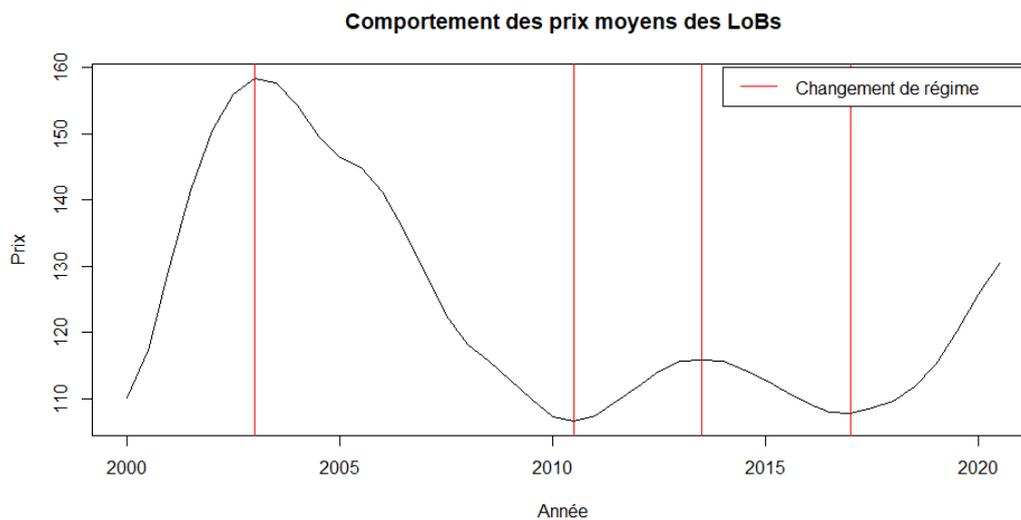


Figure II.16: Séparation des prix moyens des LoBs selon la période du cycle

Fixation d'un seuil

On étudie $\Delta^2 X_t$ en fonction des prix X_t . En observant le graphe ci-dessous (cf. Figure II.17), on remarque une tendance à l'accélération des prix ($\Delta^2 X_t > 0$) en dessous de l'indice 115, témoignant d'une remontée des prix après une période dite d'assouplissement des prix. Au-dessus de ce seuil, les prix ont un comportement beaucoup moins organisé, plus anarchique, bien que l'accélération reste globalement négative signifiant une montée puis stagnation des prix vers un maximum. On fait donc le choix de séparer la modélisation des prix en deux groupes : ceux en dessous de 115 et ceux au-dessus de 115.

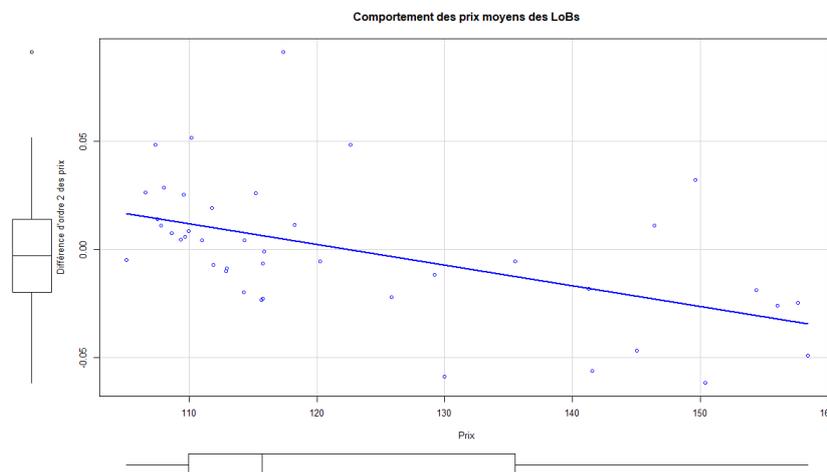


Figure II.17: Comportement des prix moyens des LoBs

Comparaison des méthodes de séparation

Préparation des échantillons

Une fois la 1^{ère} méthode implémentée, on dispose de deux méthodes opérationnelles de séparation des prix du marché.

Ainsi, pour chaque méthode, on procède à la séparation de l'échantillon afin de récupérer les indices temporels des prix et les catégoriser dans 2 groupes distincts A et B . Une fois les indices récupérés et catégorisés dans A et B , on parvient donc à réaliser une séparation de l'échantillon initial X_t en deux échantillons fils $X_{t \in A}$ et $X_{t \in B}$. On procède de même avec $\Delta X_t = \Delta X_{t \in A} \cup \Delta X_{t \in B}$ et $\Delta^2 X_t = \Delta^2 X_{t \in A} \cup \Delta^2 X_{t \in B}$.

Calibrage des régressions et choix de la méthode

Une fois les échantillons $\Delta^2 X_t$, ΔX_t et X_t séparés et préparés, on calibre un modèle de régression linéaire. On va estimer les coefficients par la méthode des moindres carrés explicitée en *Annexe E*.

Une fois le calibrage des régressions explicité, on opte a posteriori pour la méthode de séparation qui nous donne des modèles de régression avec les coefficients les plus significatifs et le score le plus élevée.

Ainsi, on effectue des tests pour trouver le meilleur modèle de régression linéaire de $\Delta^2 X_t$ en fonction de ΔX_{t-1} et X_{t-1} . Au sein d'une même méthode, on teste également d'autres régressions de $\Delta^2 X_{t-1}$ en fonction des 2 variables séparément mais également de ΔX_t en fonction de X_{t-1} . Une fois le meilleur modèle trouvé, on compare les méthodes entre elles et on trouve la plus optimale. Les critères de comparaison sont les suivants :

- p – *value* des coefficients
- score de la régression
- p – *value* globale du modèle

2.2.1.2.2 Application et résultats

Comparaison des méthodes

Pour la méthode de séparation selon la période du cycle, le meilleur modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 X_t = \alpha_{Hard} \times \Delta X_{t-1} + \beta_{Hard} \times X_{t-1} + \gamma_{Hard,t} + \varepsilon_{Hard,t} \text{ (hard market)} \\ \Delta^2 X_t = \alpha_{Soft} \times X_{t-1} + \gamma_{Soft,t} + \varepsilon_{Soft,t} \text{ (soft market)} \end{cases}$$

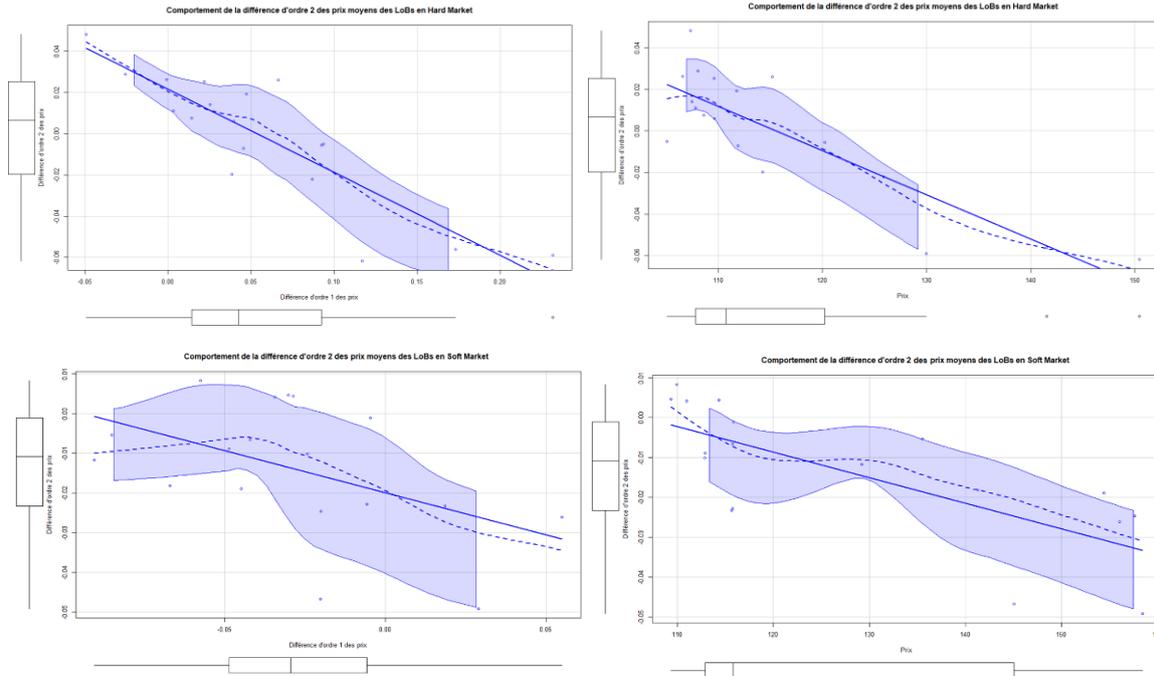


Figure II.18: Comportement des prix selon les périodes de durcissement (hard market) ou d'assouplissement des prix (soft market)

On a les résultats suivants pour ce modèle sélectionné :

Hard Market				
Coefficient	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.1481	0.0396	3.74	0.0020
X_{t-1}	-0.0012	0.0004	-3.21	0.0058
ΔX_{t-1}	-0.2418	0.0680	-3.56	0.0029
n = 18 $R^2 = 0.854$ F-statistic = 43.936 global pvalue = $5.35 \cdot 10^{-7}$				
Soft Market				
Coefficient	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0685	0.0193	3.54	0.0027
X_{t-1}	-0.0006	0.0001	-4.31	0.0005
n = 18 $R^2 = 0.537$ F-statistic = 18.559 global pvalue = 0.0005				

Figure II.19: Résultats des régressions pour la méthode de séparation selon la période du cycle

On compare les résultats à ceux issus d'autres tests dont les indicateurs optimaux de la régression linéaire sont moins bons dans le tableau ci-dessous (Figure II.20).

Hard Market					Soft Market				
Coefficient	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	Coefficient	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0215	0.0050	4.26	0.0006	(Intercept)	0.05560	0.01886	2.94859	0.00996
ΔX_{t-1}	-0.4030	0.0576	-7.00	$2.98 \cdot 10^{-6}$	X_{t-1}	-0.00057	0.00014	-4.06153	0.00102
n = 18 $R^2 = 0.754$ F-statistic = 49.041 global pvalue = $2.98 \cdot 10^{-6}$					ΔX_{t-1}	-0.14160	0.07062	-2.00504	0.06335
n = 18 $R^2 = 0.731$ F-statistic = 43.509 global pvalue = $6.15 \cdot 10^{-6}$					n = 18 $R^2 = 0.635$ F-statistic = 13.041 global pvalue = 0.00052				
(Intercept)	0.24561	0.03765	6.52340	$7.02 \cdot 10^{-6}$	(Intercept)	-0.0199	0.0044	-4.51	0.0004
X_{t-1}	-0.00213	0.00032	-6.59617	$6.15 \cdot 10^{-6}$	ΔX_{t-1}	-0.2120	0.0961	-2.21	0.0423
n = 18 $R^2 = 0.731$ F-statistic = 43.509 global pvalue = $6.15 \cdot 10^{-6}$					n = 18 $R^2 = 0.233$ F-statistic = 4.87 global pvalue = 0.042				

Figure II.20: Résultats d'autres régressions pour la méthode de séparation selon période du cycle

Pour le modèle avec le durcissement des prix, le coefficient de détermination reste le plus élevé des 2 autres avec des coefficients significatifs et un modèle globalement plus significatif.

Pour le modèle avec l'assouplissement des prix, le coefficient n'est certes pas le plus élevé en comparaison à un des 2 modèles mais tous les coefficients du modèle sélectionné sont significatifs $p_{value} < 0.05$.

Pour la méthode de séparation par la fixation du seuil, le meilleur modèle est le suivant :

$$\Delta^2 X_t = \alpha \times \Delta X_{t-1} + \beta \times X_{t-1} + \gamma + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \text{ le résidu du modèle}$$

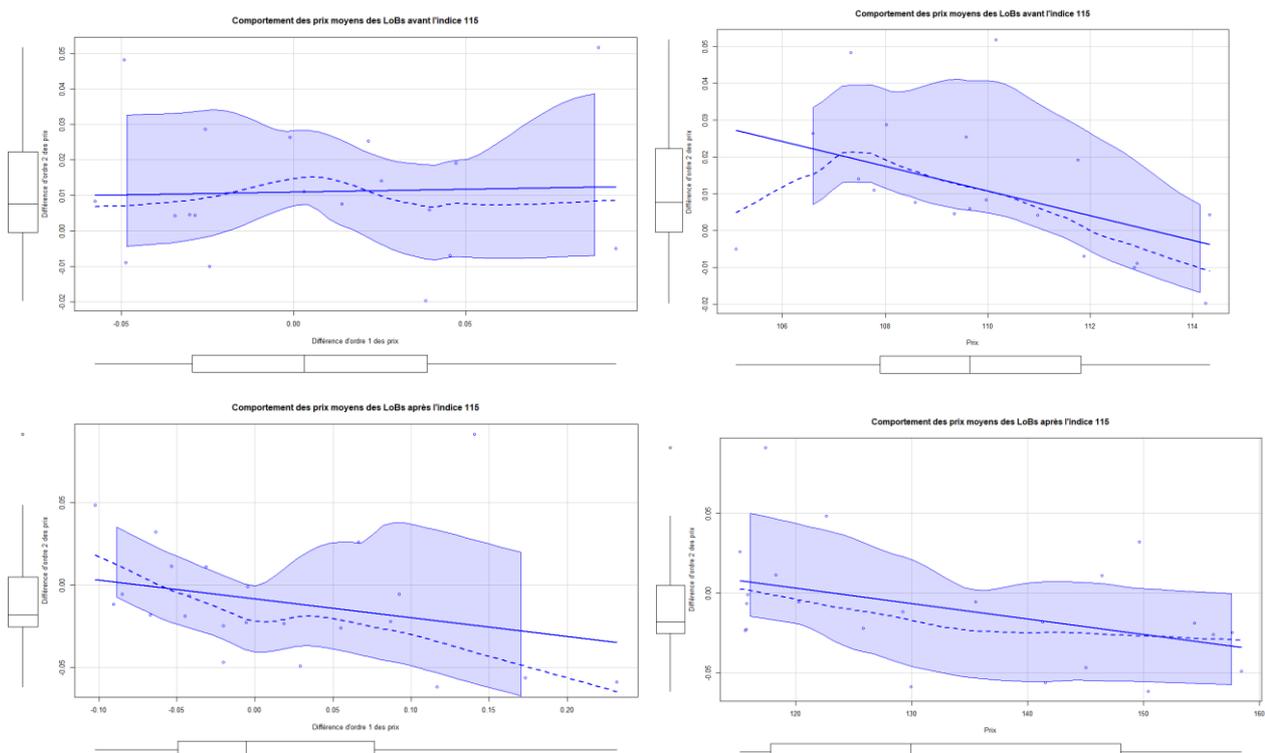


Figure II.21: Comportement des prix aux alentours du seuil 115

On a les résultats suivants pour ce modèle sélectionné :

Au dessus de 115				
Coefficient	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.1273	0.0585	2.18	0.0418
X_{t-1}	-0.0010	0.0004	-2.34	0.0300
ΔX_{t-1}	-0.1247	0.0768	-1.62	0.1203
n = 23				
$R^2 = 0.277$				
F-statistic = 3.837				
global pvalue = 0.03886				
En dessous de 115				
Coefficient	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.3870	0.1801	2.15	0.0473
X_{t-1}	-0.0034	0.0016	-2.09	0.0530
ΔX_{t-1}	-0.0194	0.0941	-0.21	0.8395
n = 19				
$R^2 = 0.215$				
F-statistic = 2.197				
global pvalue = 0.144				

Figure II.22: Résultats des régressions pour la méthode de séparation par le seuil

Au vu des résultats (score, significativité des coefficients et du modèle), le constat est sans appel : la méthode de séparation la plus optimale est celle selon la période du cycle. C'est donc celle qui sera retenue pour la modélisation des prix moyens de la *LoB*.

$$\begin{cases} \Delta^2 X_t = \alpha_{Hard} \times \Delta X_{t-1} + \beta_{Hard} \times X_{t-1} + \gamma_{Hard,t} + \varepsilon_{Hard,t} \text{ (hard market)} \\ \Delta^2 X_t = \alpha_{Soft} \times X_{t-1} + \gamma_{Soft,t} + \varepsilon_{Soft,t} \text{ (soft market)} \end{cases}$$

Validation

Afin d'attester de la validité des résultats, il convient de tester les quelques conditions nécessaires. En effet, le comportement des résidus doit répondre à certains critères :

- Distribution normale et centrée
- Absence d'autocorrélation
- Homoscédasticité ou homogénéité, c'est-à-dire une variance constante

Les 2 premiers tests utilisent les mêmes méthodes exploitées dans la partie « modélisation par les séries temporelles ». Pour tester l'homoscédasticité des résidus, on affiche les résidus en fonction de la variable réponse $\widehat{\Delta^2 X_t}$. On remarque ci-dessus (cf. *Figure II.23*) que les résidus semblent être de valeur constante nulle pour tout $\widehat{\Delta^2 X_t}$. Ce qui apparaît être un bon point pour leur homogénéité.

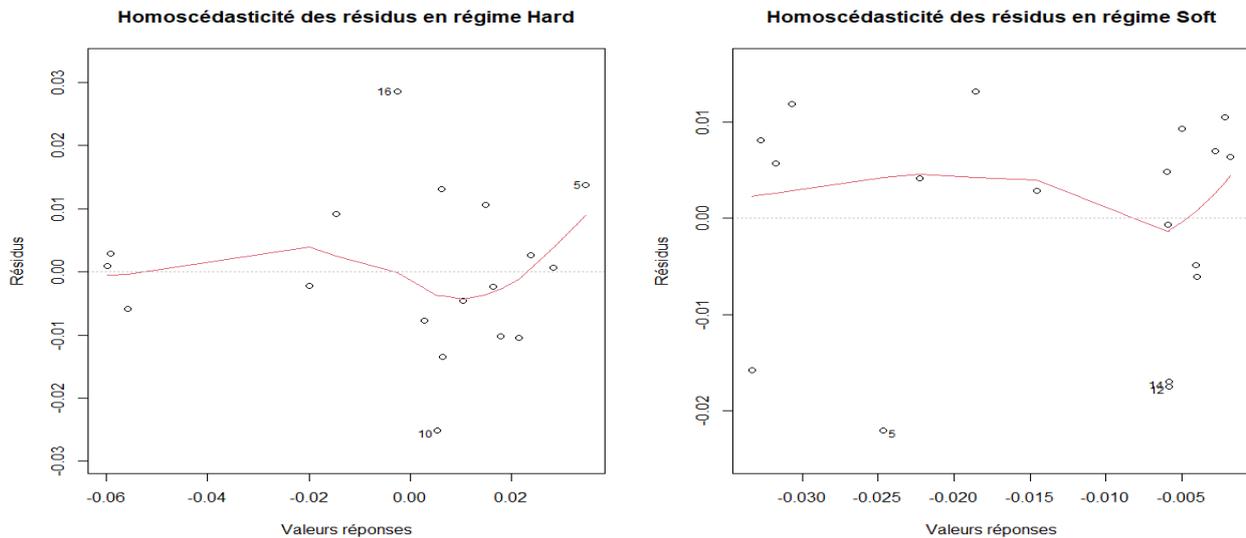


Figure 11.23: Homoscédasticité des résidus

On réalise également le test de Breush-Pagan dont les hypothèses sont les suivantes :

- $H_0 : \mathbb{V}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \forall i \in [1; n]$
- $H_1 : \mathbb{V}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \forall i \in [1; n]$

Ces tests affichent des p – *value* respectivement de 0.51 et 0.45 pour les régimes de durcissement et d'assouplissement des prix. Étant plus grandes que 5%, on accepte H_0 , c'est-à-dire l'homoscédasticité des résidus.

Une fois les conditions de la régression vérifiées, on procède à la prédiction des futurs prix sur un horizon de 5 ans par la méthode de Monte Carlo (ou bootstrapping).

Prédiction et intervalles de prédiction

Calibration de la loi des résidus

Afin de réaliser ces prédictions et les intervalles de prédiction, on calibre une loi normale sur les résidus $\varepsilon_{Hard,t}$ et $\varepsilon_{Soft,t}$ pour chacun de ces modèles :

$$\begin{cases} \Delta^2 X_t = \alpha_{Hard} \times \Delta X_{t-1} + \beta_{Hard} \times X_{t-1} + \gamma_{Hard,t} + \varepsilon_{Hard,t} \text{ (hard market)} \\ \Delta^2 X_t = \alpha_{Soft} \times X_{t-1} + \gamma_{Soft,t} + \varepsilon_{Soft,t} \text{ (soft market)} \end{cases}$$

De manière générale, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0; \frac{\sum_{i=1}^{n-p} \varepsilon_i}{n-p-1}\right)$.

Ainsi, on trouve $\hat{\sigma}(\varepsilon_{Hard,t}) = 0.013$ et $\hat{\sigma}(\varepsilon_{Soft,t}) = 0.0116$

Déroulement du processus de prédiction

Sur un horizon de 5 ans à fréquence semestrielle, on veut donc générer 10 nouvelles prédictions X_{t+1} . Pour y parvenir, il est nécessaire de remarquer dans quel régime se situent les prix en calculant la quantité $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. Deux cas de figure apparaissent :

- Si $\Delta X_t > 0$, on prédit la valeur $\Delta^2 X_{t+1}$ à partir du modèle avec le durcissement des prix en ajoutant une composante issue d'un ensemble de variables aléatoires tiré de la loi $\mathcal{N}\left(0; \hat{\sigma}^2(\varepsilon_{Hard,t})\right)$
- Si $\Delta X_t < 0$, on prédit la valeur $\Delta^2 X_{t+1}$ à partir du modèle avec l'assouplissement des prix en ajoutant une composante issue d'un ensemble de variables aléatoires tiré de la loi $\mathcal{N}\left(0; \hat{\sigma}^2(\varepsilon_{Hard,t})\right)$

On calcule ensuite la quantité $\Delta X_{t+1} = \Delta X_t + \Delta^2 X_{t+1}$. Puis, on en déduit la valeur de X_{t+1} qui est $X_{t+1} = X_t \cdot \left(1 + \frac{\Delta X_{t+1}}{2}\right)$ avec $\frac{\Delta X_{t+1}}{2}$ le taux de variation des prix semestrialisé.

On simule cette procédure un grand nombre de fois (10000). On récolte ainsi les prédictions dans une matrice retraçant les 10000 scénarios de 10 prédictions chacun :

$$\begin{pmatrix} X_i^1 & \dots & X_{i+9}^1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_i^{10000} & \dots & X_{i+9}^{10000} \end{pmatrix} \text{ pour } i = T + 1$$

Afin d'obtenir chaque prédiction j , on calcule $\mathbb{E}[X_j^h] \forall h \in [1; 10000]$. Cette étape nous permet donc de stabiliser les résultats.

On obtient également les intervalles de prédiction à un niveau de 95% :

- Pour la borne supérieure, à chaque prédiction j avec $j \in [T + 1; T + 10]$, on cherche le quantile 97,5% de l'ensemble $\{X_j^1, \dots, X_j^{10000}\}$
- Pour la borne inférieure, à chaque prédiction j avec $j \in [T + 1; T + 10]$, on cherche le quantile 2,5% de l'ensemble $\{X_j^1, \dots, X_j^{10000}\}$

L'intervalle de prédiction s'élargit au fur et à mesure des prédictions puisqu'à chaque prédiction, sont considérés les 2 scénarios parmi les plus extrêmes : les 2,5% des prix les plus bas et les 2,5% des prix les plus hauts. Et les prédictions suivantes utiliseront comme prédicteurs ces 2 prix extrêmes, ce qui n'aura pour effet qu'accroître fatalement l'intervalle au fil du temps.

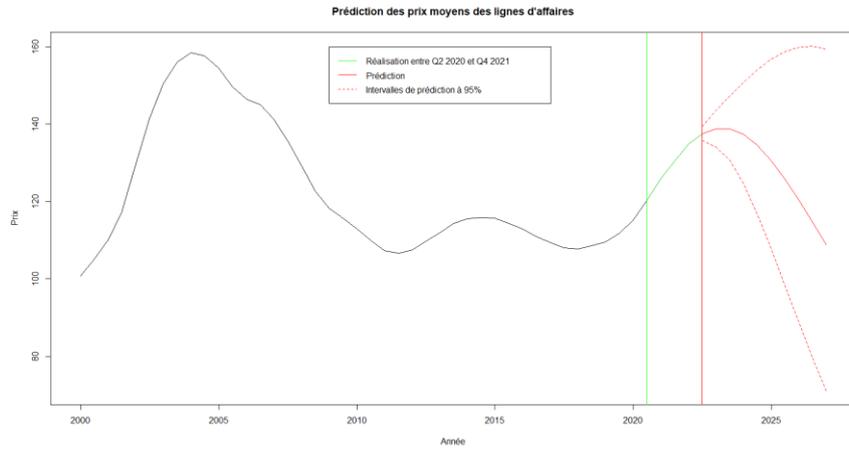


Figure II.24: Prédiction des prix moyens des LoBs

On réalise la même application pour la LoB Commercial Auto et on obtient les prédictions suivantes.

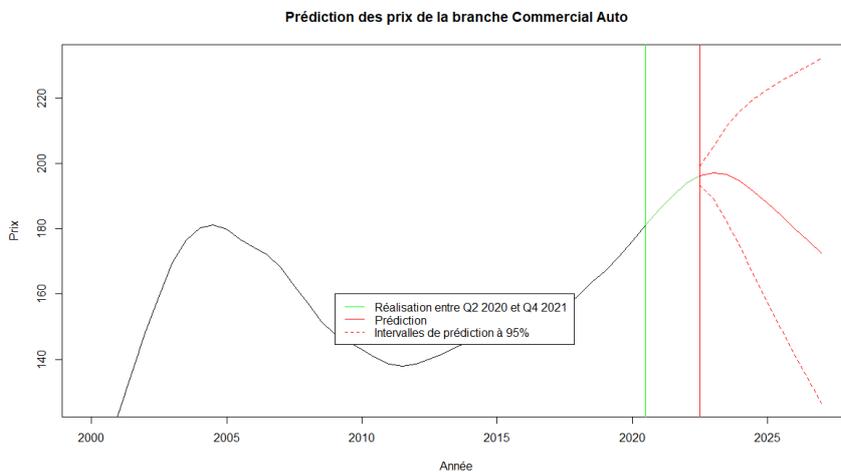


Figure II.25: Prédiction des prix de la LoB Commercial Auto

Backtesting

Par la suite, afin de vérifier la qualité de nos modèles, nous réalisons un *backtesting*. Il s'agit de procéder à une troncature des prix des 2 dernières années et de prédire les prochains prix avec les intervalles de prédiction. Les résultats montrent une tendance qui se rapproche non seulement de la réalisation antérieure avec les 2 années tronquées 2020 et 2021 mais aussi des prédictions à partir de 2022.

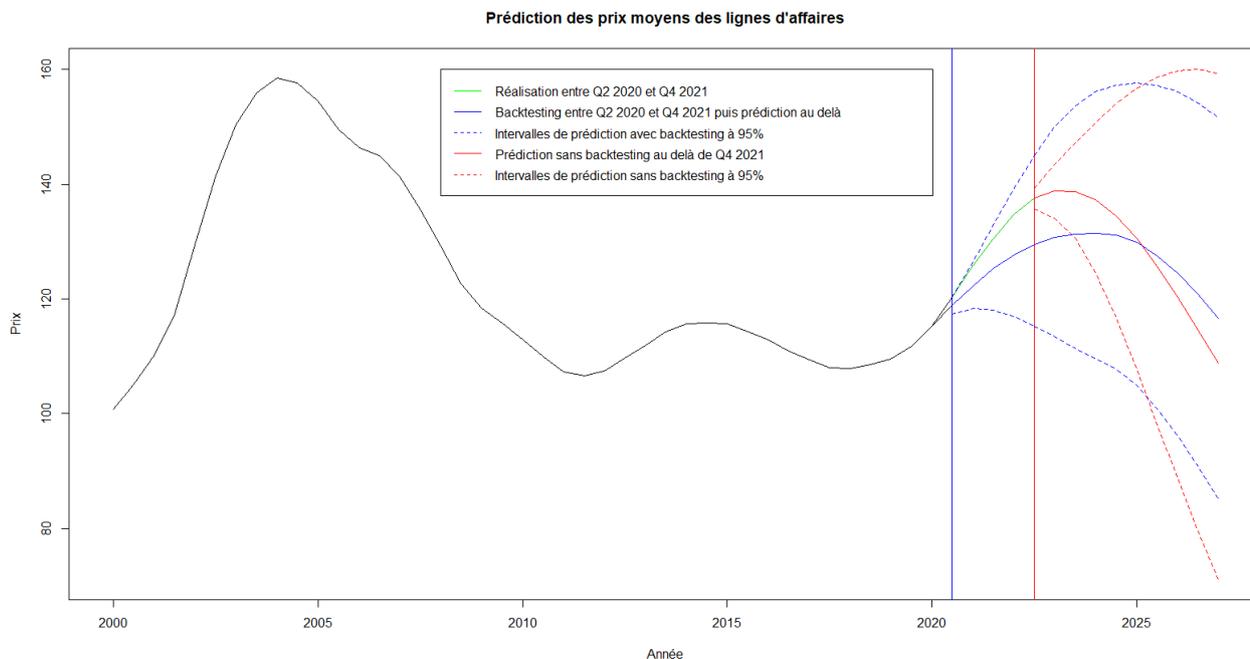


Figure II.26: Backtesting et prédiction des prix moyens des LoBs

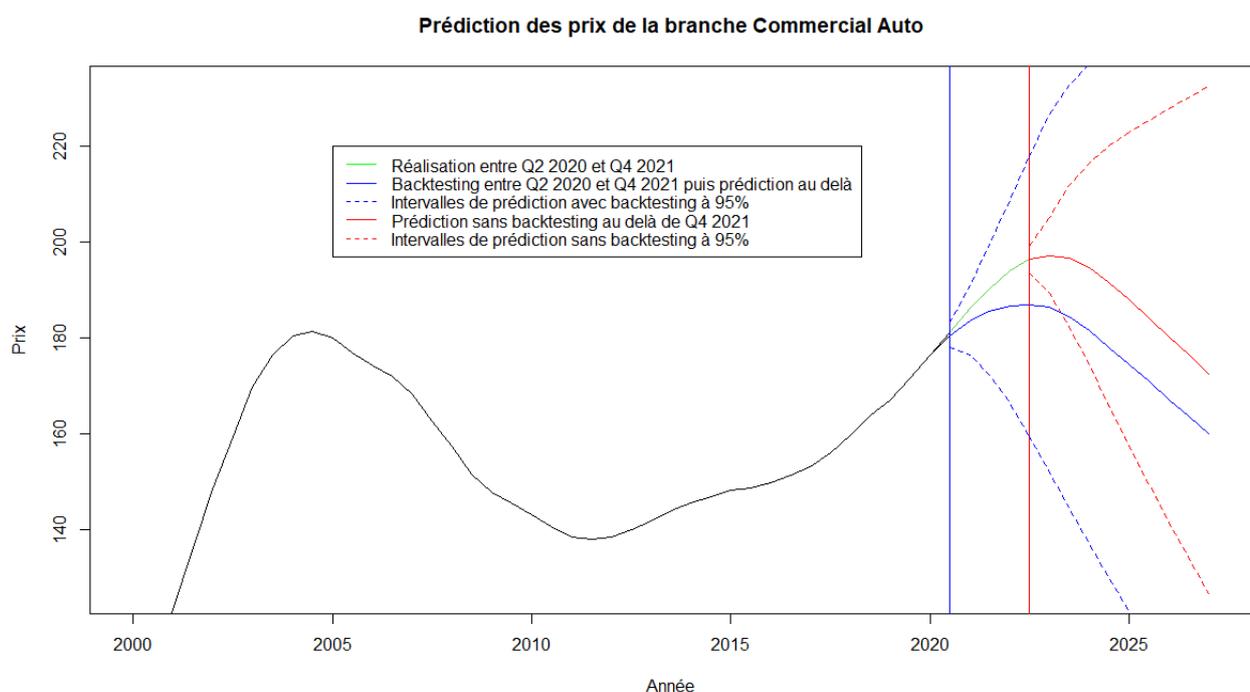


Figure II.27: Backtesting et prédiction des prix de la LoB Commercial Auto

2.2.1.3 Synthèse de la modélisation univariée

Bien que la modélisation univariée ait permis de mettre en évidence les liens qui unissent les prix avec leur décalage dans le temps ou encore leur dynamique avec leurs différences de tout ordre, elle présente un caractère très autarcique. En effet, en prenant en omettant de prendre en compte la corrélation entre une branche de l'IARD avec les autres branches, ces modèles considèrent une trajectoire des prix hermétique à la conjoncture assurantielle.

Or, dans la partie 1, les graphiques ont montré qu'à chaque évènement de grande ampleur (catastrophique, sériel, etc.), les prix de chaque ligne d'affaire ont tendance à évoluer dans le même sens. Cette coévolution est, par ailleurs, corroborée par les statistiques descriptives avec le corrélogramme.

Ainsi, la modélisation univariée connaît des limites très problématiques pour la prédiction en considérant les *LoBs* prises séparément, ce qui a fortement aiguillé notre choix sur la modélisation multivariée. Des versions multivariées de ces méthodes interviennent pour prendre le relais sur la modélisation des prix, assurant ainsi une meilleure qualité du modèle. Nous allons donc nous pencher sur ces méthodes.

2.2.2 Modélisation multivariée

Ainsi, plusieurs méthodes ont été tentées en réponse aux autres :

- Les modèles VAR par rapport aux séries temporelles univariées
- Deux régressions plus complexes que celle abordée :
 - une régression d'une *LoB* sur les composantes principales des autres appelée régression en composante principale (PCR)
 - une régression entre les prix d'une *LoB* et la moyenne des prix des *LoBs*

2.2.2.1 Modèles à Vecteur Auto-Régressif (VAR)

Le modèle univarié des séries temporelles fait défaut sur un point : l'absence d'action rétroactive des *LoBs* sur une autre *LoB* individuelle. Ce qui en fait un modèle assez rigide ne prenant pas en compte le futur parcours potentiel des autres variables spécifiées dans le modèle. C'est ce que nous allons tenter de combattre avec le modèle VAR général et son dérivé corrigé, le modèle VECM.

2.2.2.1.1 Modèle VAR simple

2.2.2.1.2.1 Outils

Le modèle *Vector Auto Regressive (VAR)* permet de pallier une lacune majeure des modèles *ARIMA(p,d,q)*, la possibilité de traiter concomitamment plusieurs séries temporelles afin de capturer leurs interdépendances dynamiques. C'est donc une généralisation du modèle *ARIMA* dans le cas à plusieurs variables. Dans ce modèle, toutes les variables sont endogènes, c'est-à-dire expliquées par leurs propres valeurs passées et par les valeurs passées des autres variables.

On travaille sur des données annualisées et on les différencie afin de les stationnariser. On définit un modèle $VAR(p)$ avec k variables endogènes et p le lag de cette façon :

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_t^1 \\ \vdots \\ Y_t^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^1 & \dots & \alpha_{1,k}^1 & \dots & \alpha_{1,1}^p & \dots & \alpha_{1,k}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k,1}^1 & \dots & \alpha_{k,k}^1 & \dots & \alpha_{k,1}^p & \dots & \alpha_{k,k}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1}^1 \\ \vdots \\ Y_{t-1}^k \\ \vdots \\ Y_{t-p}^1 \\ \vdots \\ Y_{t-p}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \vdots \\ \varepsilon_t^k \end{pmatrix} \quad (1)$$

On note $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^i & \dots & \alpha_{1,k}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k,1}^i & \dots & \alpha_{k,k}^i \end{pmatrix}$ une matrice $k \times k$

Et $I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice $k \times k$

Plus de détails sur la spécification des modèles sont donnés en *Annexe F*.

Ensuite, on va s'attacher à vérifier la validité du modèle :

- La centralité et l'homogénéité des résidus E du modèle
- L'absence d'autocorrélation des résidus
- La normalité des erreurs
- La stabilité du modèle

Tous ces tests de validité, hormis celui de la centralité (déjà expliqué) sont explicités en *Annexe G*.

Pour tester la stabilité de la structure du modèle $VAR(p)$, on effectue un test de diagramme de contrôle cumulatif de somme (CUSUM). Il s'agit d'une technique d'analyse séquentielle utilisée pour détecter les changements dans le cadre du contrôle de qualité statistique. Une cassure structurelle est un changement inattendu dans le temps des paramètres du modèle, ce qui peut entraîner de grosses erreurs de prévision et une fiabilité réduite du modèle. Or, la stabilité structurelle est l'invariance dans le temps des coefficients du modèle et est, par conséquent, un enjeu central dans toutes les applications des modèles VAR. Le manque de stabilité structurelle des coefficients entraîne souvent l'échec de la prévision et devrait être systématiquement testé.

Un test alternatif existe également : le test de Chow. Pour ce test, 2 tests statistiques existent : « sample-split » et « break-point ». Si le test dépasse une valeur critique, alors l'hypothèse nulle de stabilité est rejetée.

La complexité du test est également expliquée plus en détail en *Annexe G*.

2.2.2.1.2.2 Application et résultats

Résultats des tests

Pour le test d'homoscédasticité, on obtient une $p - value \geq 0.3329$ pour chaque lag q testé, ce qui assure, avec un risque de 5% de se tromper, l'homogénéité des résidus.

Pour le test du Portemanteau, on obtient une $p - value = 0.9997$. On considère donc avec un risque de 5% une absence d'autocorrélation des résidus.

Pour le test de Normalité, on obtient les $p - values$ suivantes :

- 0.84 pour le test Jarque-Bera
- 0.89 pour le test « skewness »
- 0.55 pour le test « kurtosis »

Ce test suggère une distribution normale des résidus avec un risque de 5%.

Pour le test de stabilité structurelle, on va tester les ruptures structurelles dans les résidus de notre modèle afin de surveiller la détection des changements. L'absence de stabilité structurelle des coefficients est souvent à l'origine de l'échec des prévisions et doit être testée de manière systématique. Ici, on n'observe pas de cassure significative :

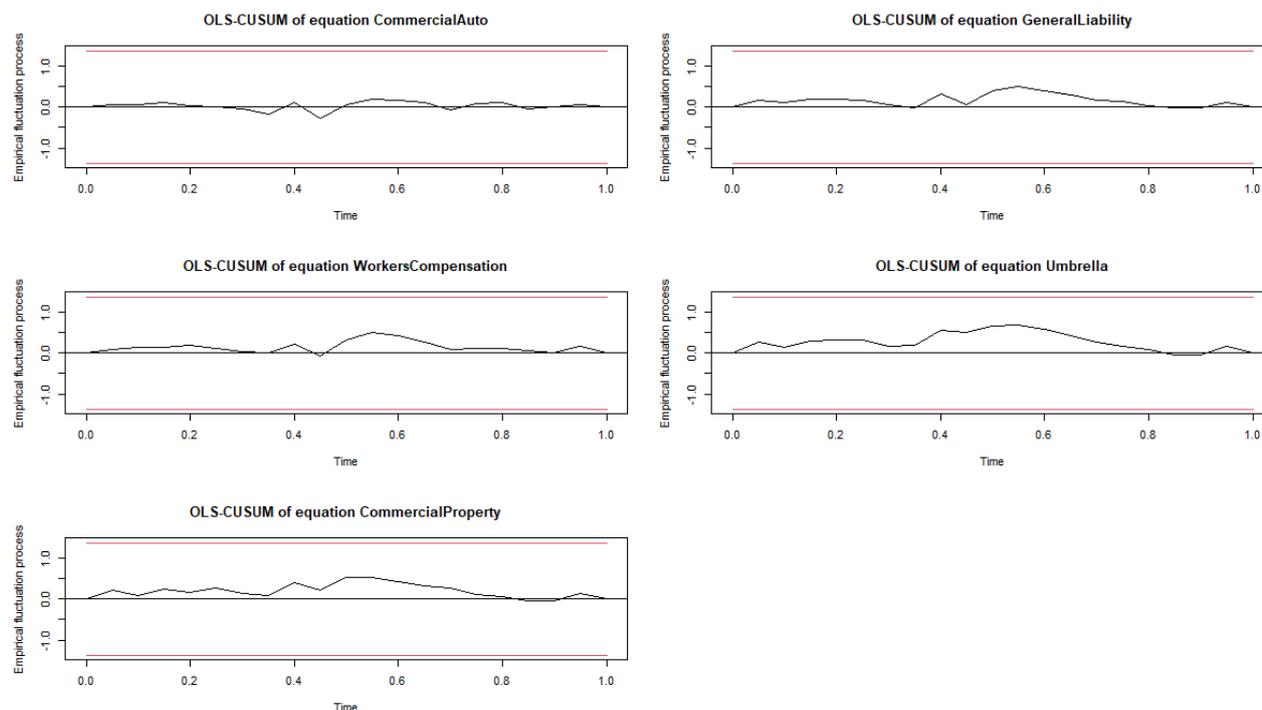


Figure II.28: Test de stabilité structurelle du modèle VAR

Prédictions et intervalles de prédiction

Une fois les tests validés, on procède à la prédiction des prix pour les 5 LoBs ainsi qu'aux intervalles de prédictions par bootstrapping basée sur la normalité des résidus précédemment mise en évidence.

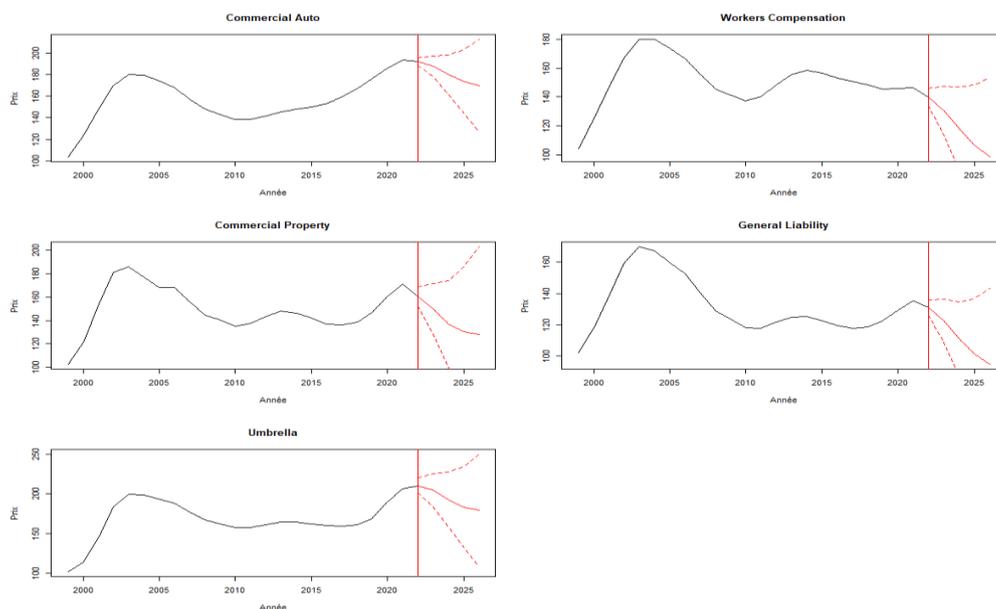


Figure II.29: Prédiction des prix des LoBs individuelles par le modèle VAR simple

Cependant, la différenciation peut poser des problèmes en termes de pertes d'information. En effet, cela explique en grande partie la faible significativité des coefficients du modèle et les fortes incertitudes dans la prédiction. Alors pour atténuer ces effets, il convient de se tourner vers un autre modèle non différencié mais avec un correctif apporté pour la non-stationnarité.

2.2.2.1.2 Modèle « Vector Error Correction » (VECM)

2.2.2.1.2.1 Outils

Le VECM impose une restriction supplémentaire en raison de l'existence de données non stationnaires mais cointégrées. Il utilise l'information de la restriction de cointégration dans ses spécifications. Ainsi, plutôt que de différencier les séries non stationnaires, il serait intéressant de s'attacher à cette notion de cointégration. Quand les séries sont individuellement intégrés d'ordre d : $I(d)$, deux cas se précisent si :

- $d = 0$ alors la série est stationnaire sans différenciation ($I(0)$)
- $d > 0$ alors la série est stationnaire après d différenciations successives ($I(d)$)

Si une combinaison linéaire de plusieurs séries $I(d)$ est $I(d_-)$ avec $d_- < d$ alors ces séries temporelles sont dites cointégrées. Sur les 5 *LoBs*, 4 sont $I(1)$ et la seule *Workers Compensation* est $I(0)$. Il convient de chercher le nombre de relations linéaires qui sont cointégrées, c'est-à-dire stationnaires. Cette notion est déterminante pour pouvoir construire le VECM suivant :

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Avec $\Pi = -(I_k - \sum_{i=1}^p A_i)$ et $\Gamma_i = -\sum_{k=i+1}^p A_k$

Et Π et Γ_i sont des matrices de taille $k \times k$

Ainsi le VECM est obtenu en soustrayant à chaque membre de l'équation d'un $VAR(p)$, le terme Y_{t-1} ainsi on obtient un $VECM(p-1)$. Puisque les séries sont non stationnaires, le processus $VAR(p)$ aura des racines unitaires (cf. test ADF), ce qui revient à considérer $\det(I_k - \sum_{i=1}^p z^i A_i) = 0$ pour $z = 1$ et donc $\det(\Pi) = 0$.

Puisque la matrice n'est pas inversible, on définit $rang(\Pi) = r$ comme le nombre de relations linéaires stationnaires pour $0 < r < k$. Ainsi on peut réécrire Π sous forme suivante : $\Pi = \alpha \beta^T$ où α et β sont des matrices de taille $k \times r$.

Ensuite, on estime les paramètres du modèle VECM par la méthode Johansen explicitée en *Annexe H*.

2.2.2.1.2.2 Application et résultats

On trouve ainsi le r optimal pour la calibration du modèle VECM. Ici, pour un risque $\alpha = 0.05$, on trouve $r = 3$

H_0	test	valeurs critiques		
		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
$r \leq 4$	5.72	6.50	8.18	11.65
$r \leq 3$	19.87	15.66	17.95	23.52
$r \leq 2$	40.75	28.71	31.52	37.22
$r \leq 1$	91.67	45.23	48.28	55.43
$r = 0$	149.14	66.49	70.60	78.87

Figure II.30: Résultats du test de cointégration de Johansen

Prédictions et intervalles de prédiction

Une fois le rang r optimal capturé, on dispose des estimations de Π et Γ afin de prédire les prix pour les 5 *LoBs*. On construit également les intervalles de prédiction par bootstrapping

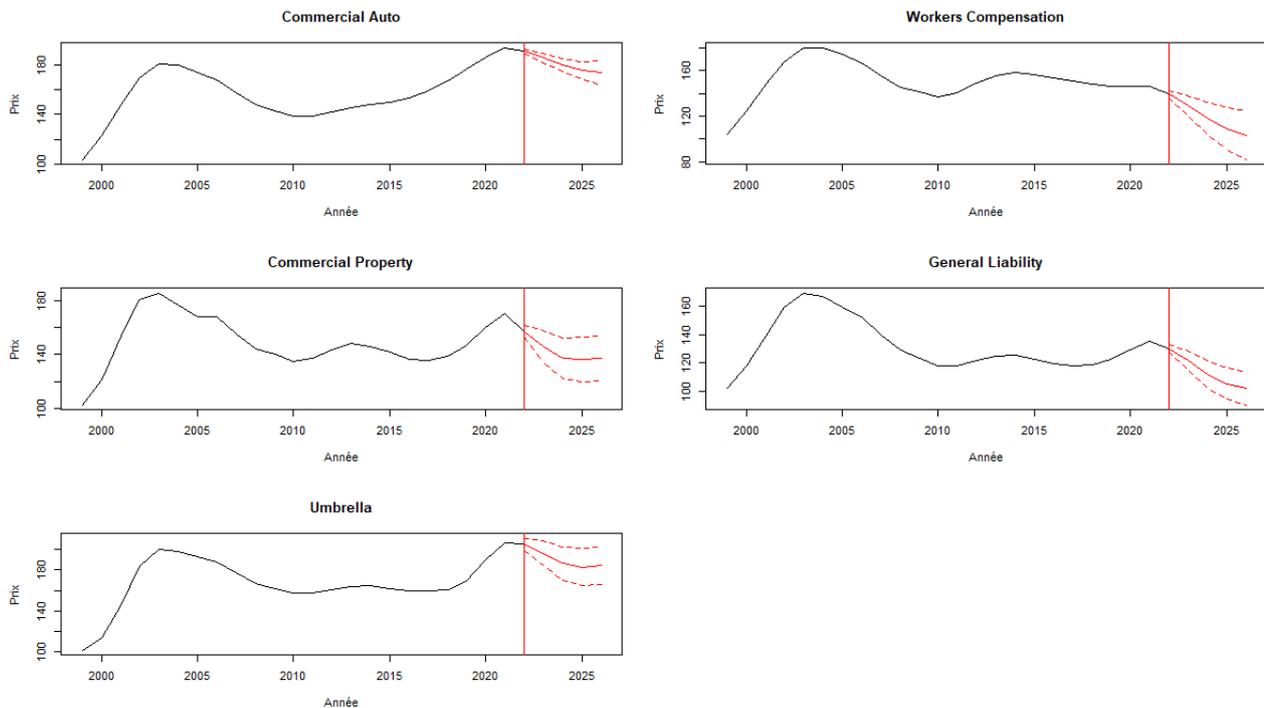


Figure II.31: Prédiction des prix des LoBs individuelles par le modèle VECM

2.2.2.1.3 Modèle STR (*Smooth Transition Regression*)

Le modèle VAR précédemment implémenté a été vérifié comme modèle stable structurellement, ce qui évite de passer par un modèle de régression à transition lisse (STR) où l'enjeu est d'établir une rupture structurelle puis un basculement d'un régime à l'autre.

2.2.2.1.4 Synthèse de la modélisation VAR

Ces modèles VAR et VECM présentent des inconvénients notamment sur le fait de devoir travailler sur des séries stationnaires. De plus, le choix du lag n'est pas unique avec tous les critères d'information (AIC, HQ, SC, FPE) qui ne sont pas unanimes. On se tourne donc vers d'autres types de régressions multivariées afin de prendre en compte les influences des *LoBs* sans toutes ces contraintes.

2.2.2.2 Autres régressions

Il est question dans ce qui suit d'apporter une analyse multidimensionnelle pour les *LoBs* en tentant de trouver des calibrations et hypothèses moins contraignantes que celles que nous propose la théorie des modèles VAR. Deux méthodes complémentaires à la régression linéaire simple sont proposées : la régression en composantes principales (PCR) et la régression linéaire des *LoBs* sur la moyenne.

2.1.2.2.1 Régression en composantes principales (PCR)

L'ACP utilise une base de données multidimensionnelle assez grande et son but est de synthétiser cette information en seulement quelques nouvelles variables appelées composantes principales. Il identifie les directions le long desquelles la variation des données est maximale afin d'obtenir des nouveaux axes d'études. Ces nouvelles variables correspondent à une combinaison linéaire des variables originelles.

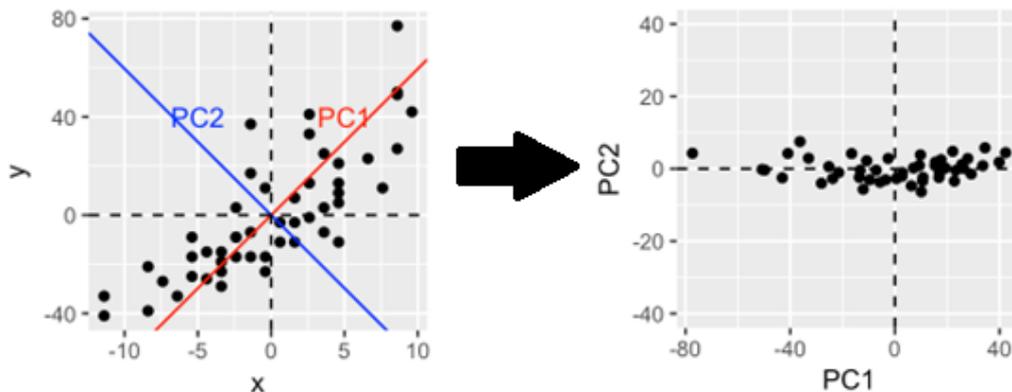


Figure II.32: Principe de l'ACP

Ce modèle s'avère très pratique car la régression sous-jacente parvient à endiguer le problème de multicollinéarité. En effet, dans la régression multilinéaire qu'on a tenté de modéliser pour les *LoBs*, il a été mis en évidence une trop forte colinéarité entre ces dernières. Ce qui rendait le modèle peu fiable avec des coefficients de régression non significatifs (trop grande erreur d'estimation). Il fallait donc réduire notre nombre de prédicteurs dans le modèle et le choix de la régression en composantes principales s'est donc naturellement imposé.

On observe les prix de nos *LoBs* 3 à 3. On remarque qu'on peut facilement réduire le problème en 2 dimensions. Donc en faisant une ACP sur les 5 *LoBs* conjointement on peut trouver une nouvelle dimension inférieure à 5.

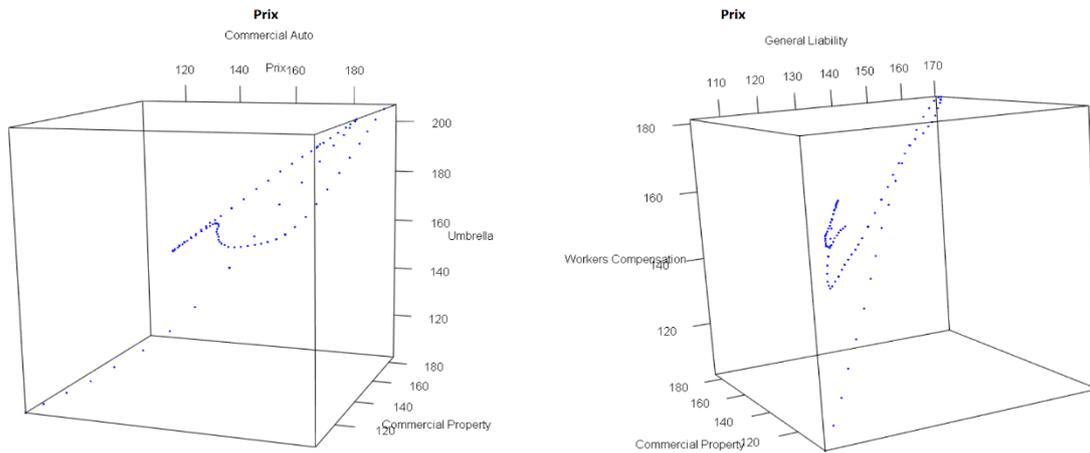


Figure II.33: Prix de 3 LoBs

La régression en composantes principales consiste à calibrer une régression linéaire sur une *LoB* en fonction des composantes principales des autres *LoBs*. Elle se décompose en 3 étapes :

- ACP (Analyse en Composantes Principales) sur les variables explicatives,
- Régression linéaire (ou OLS) sur les composantes retenues
- Calcul des paramètres du modèle sur les variables d'origine

ACP

Ainsi on considère le modèle ACP suivant :

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^1 & \dots & X_n^p \end{pmatrix} \text{ avec } p \text{ le nombre de prédicteurs et } n \text{ le nombre d'observations.}$$

On a pris soin de standardiser (centrer et réduire) les prédicteurs (autres *LoBs*) pour éviter qu'une variable avec une gamme de valeurs trop différente des autres variables n'influe fortement sur le modèle.

$$\text{Ainsi, on standardise les données } X \text{ en } \tilde{X} = \begin{pmatrix} \frac{X_1^1 - \mathbb{E}[X^1]}{\sigma(X^1)} & \dots & \frac{X_1^p - \mathbb{E}[X^p]}{\sigma(X^p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{X_n^1 - \mathbb{E}[X^1]}{\sigma(X^1)} & \dots & \frac{X_n^p - \mathbb{E}[X^p]}{\sigma(X^p)} \end{pmatrix} \text{ avec } \tilde{X}_j^i = \frac{X_j^i - \mathbb{E}[X^i]}{\sigma(X^i)}$$

Le principe de l'ACP est expliqué en *Annexe I*. Si on applique ce principe sur les 5 *LoBs*, on peut s'intéresser aux pourcentages de variances expliquées par chaque composante i définis comme $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$. Cela nous donne les résultats suivants :

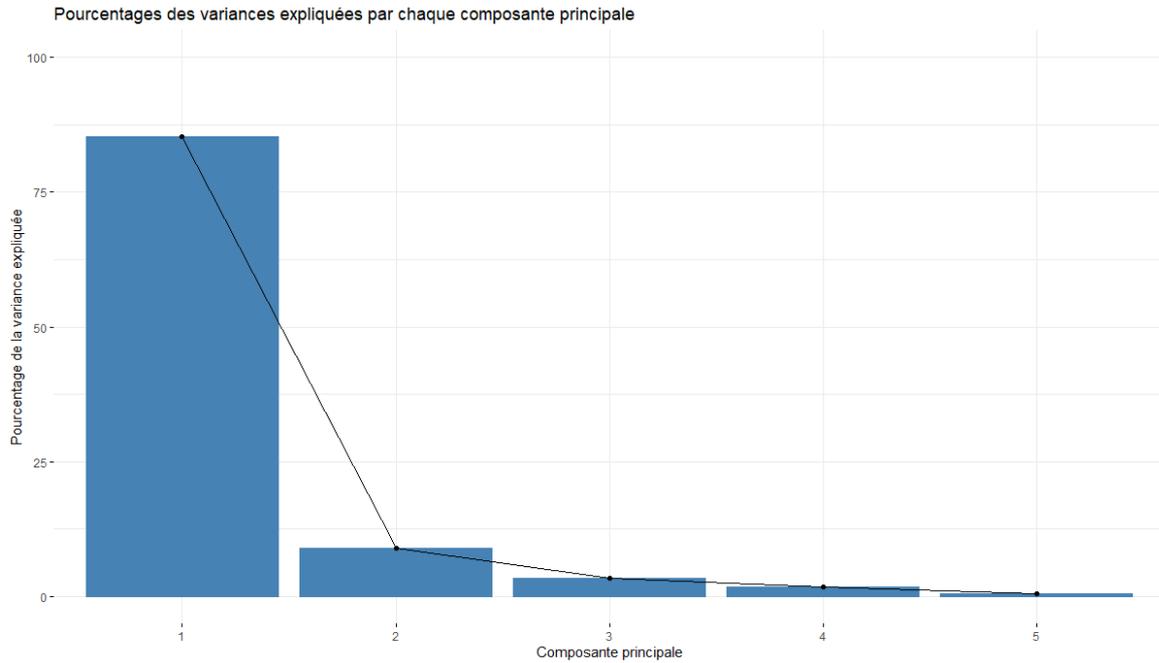


Figure II.34: Pourcentage des variances expliquées par chaque composante principale

Comme le graphique 3D plus haut, nous le confirme, notre jeu de données à 5 dimensions est très facilement réductible en 1 ou 2 dimensions.

On dispose des données trimestrielles. On sépare nos données en 2 catégories : un échantillon d'apprentissage de taille $n - 1$ entre 1999 et 2019, et un échantillon test « testing dataset » entre 2020 et 2021.

On réalise une modélisation avec l'échantillon d'apprentissage. Dans le cadre de la PCR, on va modéliser chaque *LoB* par une régression sur les composantes principales issues de l'ACP des autres *LoBs*. Ce qui enlève une dimension au jeu de données de taille p et réduit donc le problème à une dimension \mathbb{R}^q comme suit avec $q = p - 1$:

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_2^i \\ \vdots \\ X_n^i \end{pmatrix} = \widetilde{X}_{n-1}^{-t} \cdot \beta + \varepsilon_n$$

$$\text{avec } \widetilde{X}_{n-1}^{-t} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1^1 & \dots & \widetilde{X}_1^{l-1} & \widetilde{X}_1^{l+1} & \dots & \widetilde{X}_1^p \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \widetilde{X}_{n-1}^1 & \dots & \widetilde{X}_{n-1}^{l-1} & \widetilde{X}_{n-1}^{l+1} & \dots & \widetilde{X}_{n-1}^p \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \varepsilon_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix} \text{ le vecteur des résidus.}$$

Ainsi, on réalise d'abord une ACP pour chaque *LoB* sur les composantes principales des autres *LoBs*.

Régression OLS sur les composantes principales

Ensuite, on réalise une régression linéaire de la *LoB* sur les composantes principales issues de l'ACP sur les autres variables afin d'utiliser les coefficients trouvés pour le calcul des coefficients sur les variables d'origine. Mais d'avant d'explicitier cette dernière étape, attachons-nous à comprendre de plus près comment sélectionner le nombre de composantes optimales de l'ACP.

On effectue cette régression OLS sur les i composantes principales aux variances expliquées les plus élevées avec $i \in [1; 4]$. Ainsi, on pourra utiliser ces coefficients afin de retrouver le modèle de la *LoB* avec les coefficients pour chaque variable d'origine qui sont ici les autres *LoBs*. Pour chaque i , on réalise une validation croisée avec 10 blocs pour vérifier la performance du modèle. Puis, on sélectionne le nombre optimal (ici, minimal) de composantes principales qui maximisent suffisamment le score ou de manière équivalente, réduisent l'erreur quadratique moyenne des résidus de la prédiction (MSEP). Par exemple, pour la *LoB* des accidents de travail (*Workers Compensation*), on remarque que le nombre de composants optimal i pour un score R^2 élevé et un *MSEP* faible est de 2. En effet, on peut voir que le calibrage du modèle pour la branche est meilleur avec 2 composantes principales mais empire au-delà de 2 composantes.

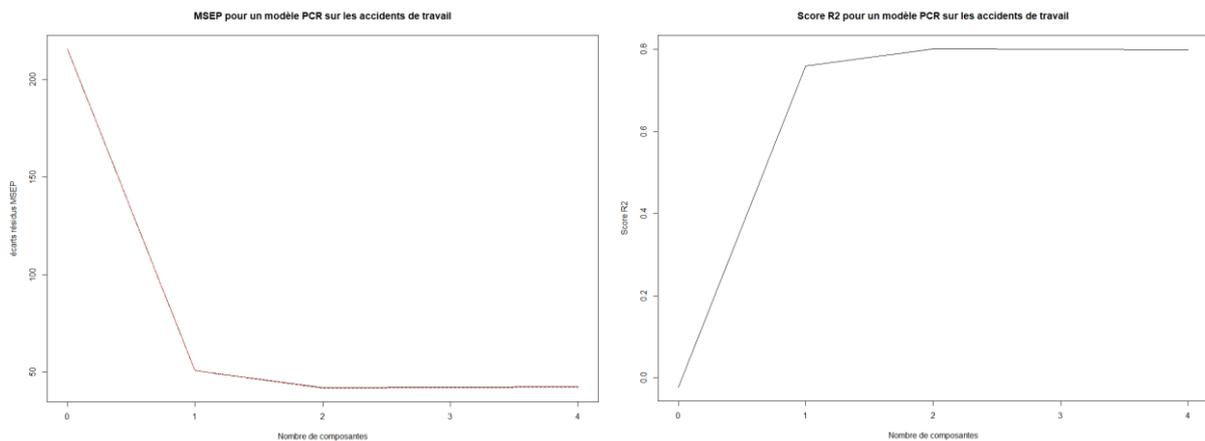


Figure 11.35: Résidus et score pour la PCR sur la *LoB* *Workers Compensation*

Après avoir trouvé le nombre de composantes optimal k pour chaque modèle d'une *LoB*, on régresse linéairement la *LoB* sur les k composantes principales retenues sur les q . Ces composantes principales ont les variances expliquées les plus élevées. On trouve les coefficients $\widehat{\gamma}_k$ de cette régression par la méthode des moindres carrés (hors intercept).

Calcul des paramètres du modèle sur les variables d'origine

On retrouve les coefficients $\widehat{\beta}_q$ du modèle d'origine à q dimensions de la manière suivante : $\widehat{\beta}_q = V_k \cdot \widehat{\gamma}_k$ avec $V_k = [v_1, \dots, v_k]$ la sous matrice de taille $q \times k$ issue de la base orthonormée des vecteurs propres.

On réussit donc à trouver les prix à partir du modèle initial :

$$\widehat{Y}_n = \widehat{X}_{n-1}^{-1} \cdot \widehat{\beta}_q$$

Validation du modèle

On applique le modèle à l'échantillon de test qui s'étend de 2020 à 2021 afin de vérifier la qualité des prédictions à venir. On calcule le *MSEP* et on trouve une valeur légèrement supérieure au *MSEP* effectué sur l'échantillon d'apprentissage, constat logique puisque la calibration du modèle est par définition effectuée sur l'échantillon d'apprentissage.

Prédictions et intervalles de prédiction

Enfin, on prédit les nouveaux prix de chaque *LoB* à partir de 2022 jusqu'à 2026.

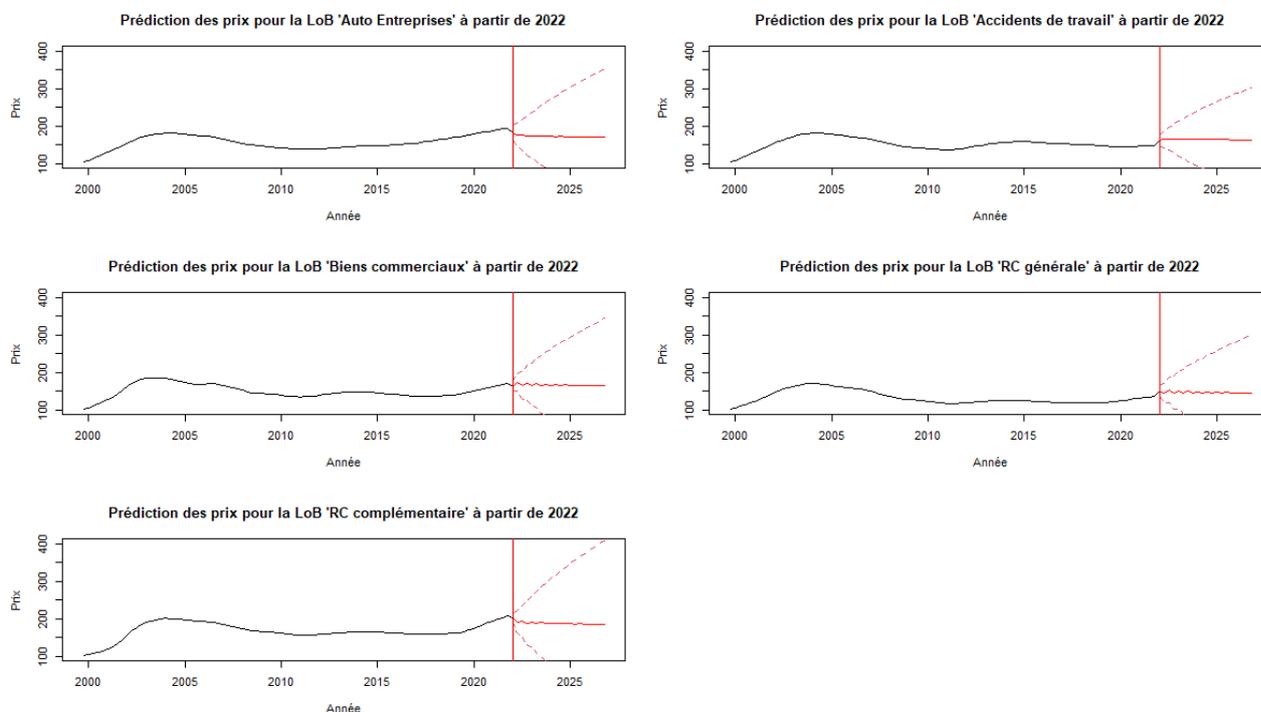


Figure II.36: Prédiction des prix des *LoBs* individuelles modélisées par la PCR

Les prédictions ont des trajectoires quasi-constantes, voire monotones pour certaines avec des turbulences cycliques. Plusieurs raisons l'expliquent : le fait de choisir le nombre de composantes via l'erreur des résidus comme expliqué ci-dessus mais au-delà du choix, il n'y a aucune raison a priori de croire que les composantes principales ayant la plus grande variance sont les composantes qui prédisent le mieux la réponse. De plus, on peut également expliquer le problème des turbulences par la sensibilité du modèle aux valeurs aberrantes, ce qui induit un phénomène de surapprentissage.

Une dernière méthode va être testée prenant en compte la corrélation entre la *LoB* à modéliser et la moyenne de l'ensemble des *LoBs* afin d'avoir des prédictions plus réalistes.

2.1.2.2 Régression linéaire avec la ligne d'affaire moyenne

Cette dernière modélisation se décompose en 2 étapes. La première est une modélisation des prix pour toute ligne d'affaire confondue (prix moyen) par une régression linéaire réalisée sur la différence d'ordre 2 des prix.

$$\begin{cases} \Delta^2 \text{prix}_t = \alpha \times \Delta \text{prix}_{t-1} + \beta \times \text{prix}_{t-1} + \varepsilon_t \text{ (hard market)} \\ \Delta^2 \text{prix}_t = \alpha \times \text{prix}_{t-1} + \varepsilon_t \text{ (soft market)} \end{cases}$$

La seconde est une modélisation des prix pour chaque ligne d'affaire par une régression linéaire réalisée sur la différence d'ordre 1 des prix afin d'éviter toute régression fallacieuse. Ainsi en différenciant les séries, on élimine toute forme de covariance entre elles.

$$\Delta \text{prix}_t = \alpha \times \Delta \text{prix moyen}_{t-1} + \varepsilon_t$$

La 1^{ère} partie de cette méthode fait écho à la régression univariée mais il s'agit en réalité de revisiter une méthode qui ne fonctionnait pas pour les *LoBs* individuelles. En effet ces dernières souffraient d'une trajectoire monotone, ce qui rendait la qualité de prédiction peu plausible sur les 15 années à suivre (à gauche) contrairement au nouveau modèle où sur le même horizon, les prédictions suivent une trajectoire beaucoup plus réaliste (à droite).

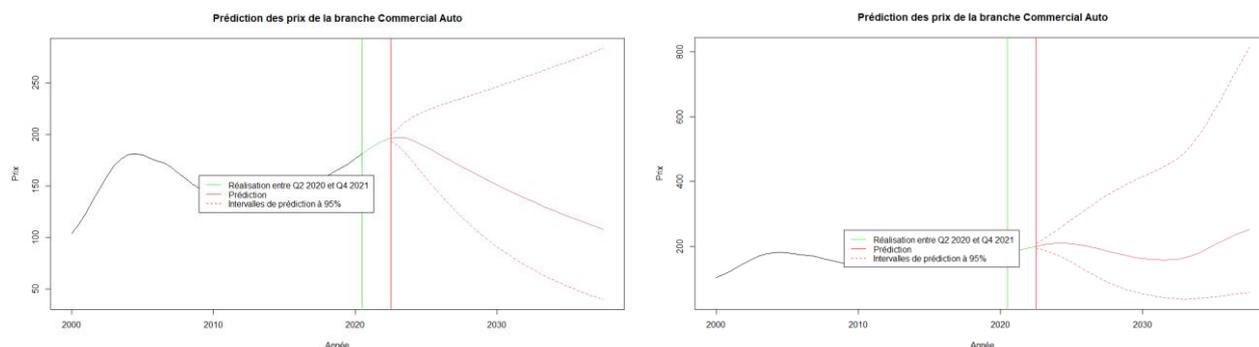


Figure II.37: Comparaison des prédictions de prix pour la LoB Commercial Auto (univariée et multivariée)

À partir du nouveau modèle, on réalise les prédictions suivantes ainsi que le *backtesting*.

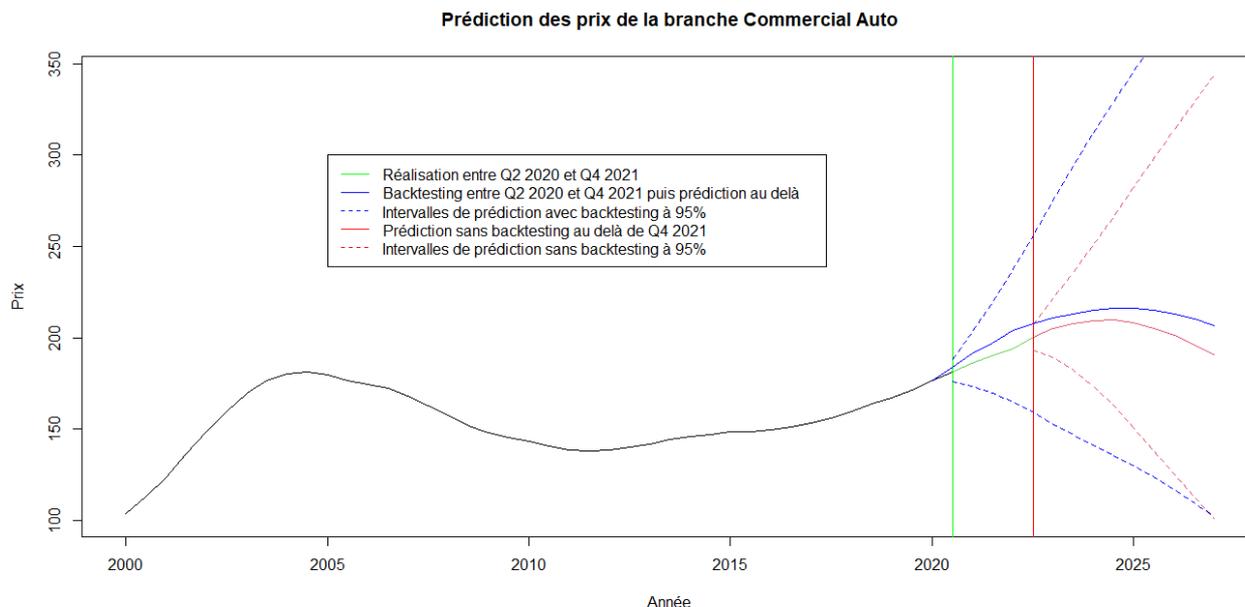


Figure II.38: Prédiction des prix pour la LoB Commercial Auto

On réalise également des prédictions, intervalles de prédictions et *backtesting* pour les 4 autres *LoBs* (cf. modèles utilisés en *Annexe J*).

2.2.3 Synthèse de la modélisation des cycles de marché

De toutes les modélisations réalisées précédemment, la régression linéaire des prix de chaque *LoB* en fonction des prix moyens des *LoBs* à en juger les caractères de fidélité et de lissage des prédictions.

Le tableau ci-dessous récapitule les avantages et inconvénients de chaque modèle.

Méthode	Sous-méthode	Avantages	Inconvénients
Univariée	Régression linéaire	Choix du nombre de prédicteurs plus large Prise en compte des liens entre : - prix, - différence d'ordre 1 des prix, et - différence d'ordre 2 des prix	Monotonie des prédictions
	Séries temporelles (modèles AR)	Prise en compte du passé pour prédire le futur pour une même <i>LoB</i>	Contrainte fréquente de non-stationnarité des données induisant une régression fallacieuse : nécessité de les différencier mais perte d'information Choix du lag pas toujours évident
Multivariée	Régression d'une <i>LoB</i> en fonction de la moyenne des <i>LoBs</i>	Mêmes que dans le cas univarié Résultats plus plausibles cependant	
	Régression en composantes principales	Réduction de la dimension du problème	Choix du nombre de composantes Régressions trop lisses ou explosives résultant du mauvais choix du nombre de prédicteurs ou composantes Surapprentissage (sensibilité aux valeurs extrêmes)
	Séries temporelles (modèles VAR)	Prise en compte du passé des <i>LoBs</i> pour prédire le futur d'une autre <i>LoB</i>	Contrainte fréquente de non-stationnarité des données induisant une régression fallacieuse : nécessité de les différencier mais perte d'information Choix du lag pas toujours évident selon les multiples critères de déviance

Figure II.39: Comparatif des méthodes de modélisation des cycles de marché

On ne peut pas reprocher grand-chose à cette régression. Cependant, si l'assureur choisit de modéliser la dynamique des prix par cette méthode ou même une autre, il doit être conscient de l'incertitude de ces prédictions qui grandit au fur et à mesure de l'horizon de prédiction considéré. Il doit donc en faire un usage à bon escient et ne l'utiliser que les prédictions à court terme (1-2 ans).

2.3 Sondages et sentiments de marché

Dans cette partie, on dispose de sondages réalisés sur des assureurs permettant de quantifier leur constat sur l'évolution de la demande et l'offre les années précédentes. Ces derniers peuvent se révéler tout autant légitimes pour capter la tendance dans les cycles. Les réponses sont catégorisées comme suit : baisse, stabilisation ou augmentation.

On veut modéliser les phases du cycle en fonction de ces données-là. Les données ne remontant qu'à 2017, la seule période observable est donc celle du durcissement des prix, il apparaît donc difficile de réaliser des modèles de classification. On bascule alors sur des modèles de régression simples des prix des *LoBs* en fonction des résultats des sondages. Cependant ces derniers n'ont aucune significativité statistique.

On se propose alors de faire une analyse plutôt économique en juxtaposant les résultats du sondage avec les prix de la *LoB*.

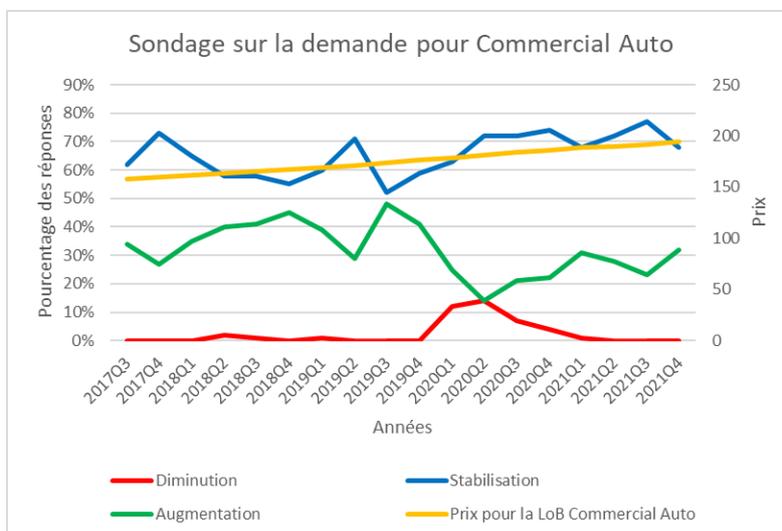


Figure II.40: Sondage sur la demande pour la LoB Commercial Auto

Pour la branche *Commercial Auto*, la tendance est plutôt en faveur d'une stabilisation de la demande voire même augmentation jusqu'à fin 2019 où cette tendance baisse au profit de la tendance en faveur de la baisse. Ce qui se confirme avec la montée monotone des prix depuis 2017.

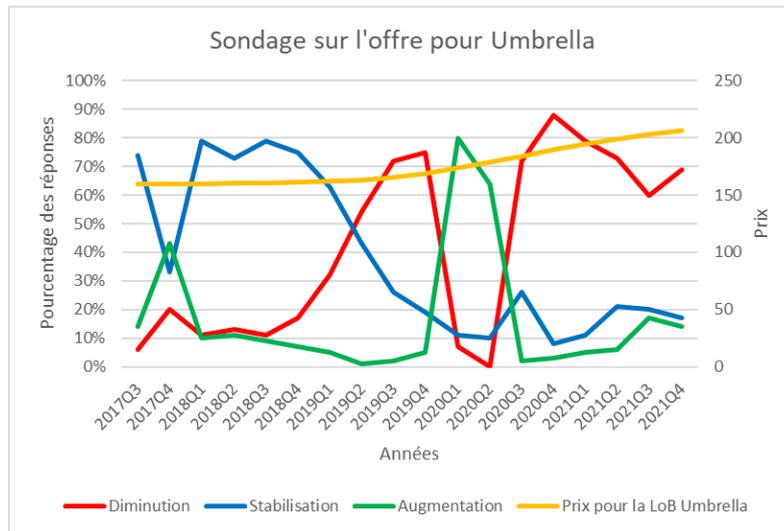


Figure II.41: Sondage sur l'offre pour la LoB Umbrella

Pour la branche *Umbrella*, la tendance est plutôt en faveur d'une stabilisation de l'offre jusqu'à 2019 où cette tendance disparaît progressivement pour laisser place à la tendance en faveur de la baisse. Cependant cette tendance décline nettement jusqu'à 2020 au profit de la tendance en faveur de l'augmentation. Cette dernière connaît une grave baisse depuis 2020 avec la pandémie du Covid-19 avec une montée de la tendance à la baisse de l'offre. Ce dernier point est cohérent avec la montée des prix puisque les domaines de l'agroalimentaire et de la pharmaceutique ont fait diminuer la courbe de l'offre d'assurance avec les risques sanitaires et juridiques.

III. Appétence au risque

Une fois la dynamique des prix anticipée, il convient à l'assureur de les utiliser afin de moduler son appétence au risque en trouvant la stratégie de souscription optimale. On translate ainsi le cadre d'une dynamique des prix anticipée sur le marché américain à un cadre d'appétence au risque pour des assureurs européens.

On définit l'appétence au risque comme étant les degrés et types de risque globaux qu'une organisation est disposée à assumer afin de poursuivre ses objectifs stratégiques. C'est donc en adéquation avec ses objectifs stratégiques que l'organisation va choisir de « s'exposer » afin de les atteindre.

Plusieurs indicateurs peuvent être utilisés dans le cadre de ce suivi : le ratio de solvabilité, le ratio combiné²⁰, le résultat de souscription, etc.

Une fois qu'on a listé ces indicateurs et défini les outils pour les mesurer, il convient de s'intéresser l'horizon temporel de cette mesure. Ce sont des périodes de retour, où l'on va relever et analyser les valeurs de ces indicateurs. Pour le *SCR*, cette vision est traditionnellement annuelle. Mais pour d'autres indicateurs, la vision peut être plus longue. Certaines métriques sont de moyen terme (ex : métriques liées au résultat de souscription) afin d'être observables sur un horizon couvrant celui du plan stratégie défini par la compagnie d'assurance. Plus encore, des indicateurs de solvabilité de plus long terme (5 ans) peuvent être introduites, correspondant à l'horizon des engagements de l'assureur. Par la suite, il convient de définir une zone de confort pour ces indicateurs-là, c'est-à-dire une limite opérationnelle au-delà ou en deçà de laquelle l'assureur ne peut pas franchir.

3.1 Indicateur de risque

Parmi ces indicateurs énumérés, le ratio de solvabilité renvoie à un des trois piliers majeurs d'une directive européenne de 2009 : Solvabilité-II, celui des exigences quantitatives. Cette directive ne s'applique évidemment que pour les assureurs européens.

En effet, cette directive se décline en trois piliers : les exigences quantitatives, les activités de contrôle et la transparence de l'information. Ce premier pilier repose sur le Capital de Solvabilité Requis (aussi appelé *Solvency Capital Requirement* ou *SCR*), c'est-à-dire la quantité minimale de fonds propres nécessaire afin de faire face à une ruine à horizon un an avec une probabilité de

²⁰ Le montant cumulé des sinistres normalisé par le montant des primes acquises

99,5%. Autrement dit, l'objectif est de garantir des fonds propres nécessaires afin de faire face à un choc tous les 200 ans, le choc bicentenaire.

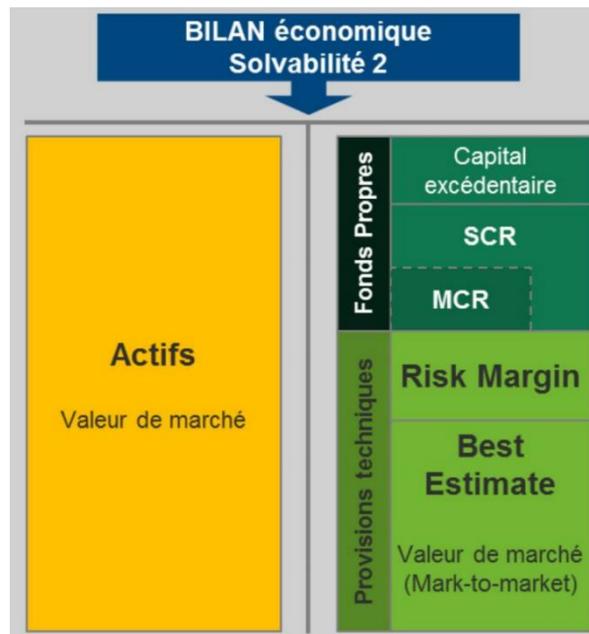


Figure III.1: Bilan comptable d'une compagnie d'assurance sous Solvabilité 2

Pour expliciter plus formellement le SCR, considérons Y les fonds propres, c'est-à-dire la différence entre la valeur de l'actif et la valeur des engagements au passif (provisions techniques). Un risque existe sur ces fonds propres Y . Ainsi, on applique une situation de stress sur Y . On note X la variable aléatoire correspondant à la différence entre Y du scénario espéré et Y du pire scénario en cas de survenance du risque. Donc, le SCR se définit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 SCR &= VaR_{0,995}(X) \\
 &= -\inf x \in \mathbb{R} : F_X(x) > 0.995 \\
 &= F_X^{-1}(0.005)
 \end{aligned}$$

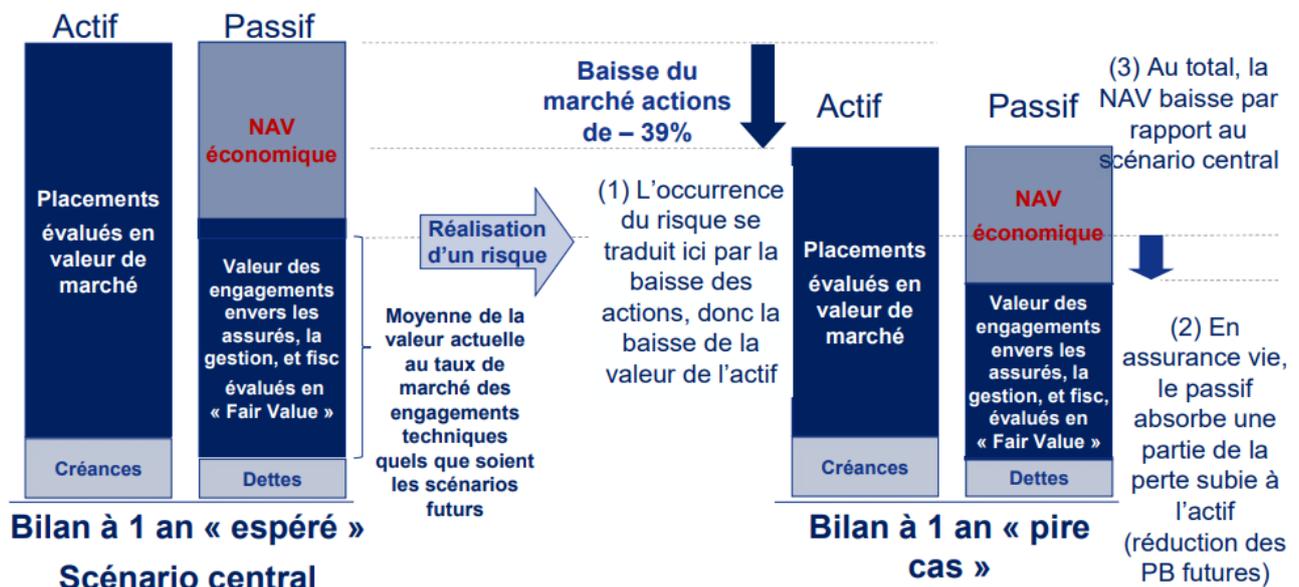


Figure III.2: Exemple de survenance d'un risque « actions »

Le SCR a donc pour objectif d'absorber la ruine d'une compagnie d'assurance, garantissant ainsi qu'elle ne fera faillite en moyenne qu'au plus une fois tous les 200 ans.

Le ratio de solvabilité se traduit donc comme le rapport entre les fonds propres disponibles et le SCR, la quantité minimale de fonds propres nécessaire à l'absorption du choc bicentenaire.

Ainsi, en cas d'appétence plus élevée dans une ligne d'affaire, la compagnie d'assurance va accepter de prendre des risques plus élevés en se fixant tout de même une limite. En cas d'appétence au risque plus élevée (augmentation de l'exposition), elle ne respectera plus cette limite fixée. Un tel événement est qualifié de *Breach de Risk Appetite*. Il va la conduire à s'exposer davantage, autrement dit à augmenter sa capacité de souscription afin d'augmenter son résultat de souscription. Par ailleurs, le SCR va augmenter en réponse à cette augmentation de l'exposition²¹.

Cependant, une autre variable va s'imposer comme le chef d'orchestre de la stratégie de souscription : la variation des prix d'assurance. En cas de montée des prix, l'assureur a l'opportunité d'améliorer son résultat de souscription. De plus, la variation des prix d'assurance nous amène à creuser plus en profondeur la stratégie de souscription afin de s'intéresser aux lignes d'affaire les plus rentables.

Dans notre étude qui se focalise sur le cycle de marché IARD, on se concentre sur le SCR *non-vie* avec les sous-risques de prime et de provisionnement (ou risque de réserve).

Ces sous-risques proviennent principalement de la particularité très singulière de l'activité d'une compagnie d'assurance basée sur l'inversion du cycle de production. En effet, dans le cas d'autres secteurs d'activités avec un cycle de production classique, le prix de revient est a priori connu avant la vente et on peut donc fixer le prix d'un produit. La particularité de l'assurance est donc l'inversion de ce processus : le prix, ou prime perçue, est estimé en fonction des sinistres moyens subis par l'assuré. Ce qui implique une fixation du prix au moment de la signature du contrat, puis le coût de revient, ici l'indemnisation du sinistre en cas de survenance, est connu plusieurs années après. La conséquence de ce système est que le revenu généré par une police d'assurance est fatalement source d'un aléa car il est difficile de garantir que la prime perçue soit suffisante pour couvrir le sinistre et générer un revenu positif. La notion de risque est donc au cœur de l'activité d'assurance.

²¹ Quantité de risques couverts par une compagnie d'assurance, mesurée ici en termes de nombre de contrats souscrits

Le *SCR non-vie primes* découle de l'incertitude quant à la fréquence et à la sévérité des sinistres, ce qui peut entraîner une perte pour l'assureur si les sinistres dépassent les primes perçues. C'est le risque de souscription par excellence, lié à une mauvaise estimation de la tarification des primes et une déviation de la sinistralité. Il concerne les risques futurs dont :

- Certains sont déjà des engagements, couverts par la réserve de primes, c'est-à-dire la provision pour primes non acquises et risques non échus.
- D'autres sont liés aux polices que l'on s'attend à souscrire au cours de la période de risque, couvertes par le revenu correspondant des primes attendues.

Ce risque dépend de plusieurs facteurs dont :

- Le niveau de risque des produits d'assurance offerts par l'entreprise, qui dépend du type de couverture : niveau de garantie, taux de coassurance, franchises et limites supérieures de la police.
- La gestion du risque de souscription : la qualité et l'efficacité des processus de souscription de l'assureur, y compris l'évaluation des risques, la tarification et la sélection des risques.
- La réassurance : dans quelle mesure l'assureur a transféré une partie du risque de souscription à d'autres compagnies d'assurance grâce à des accords de réassurance.
- La réglementation, régissant les activités de souscription de l'assureur, qui comprend des exigences de solvabilité et d'adéquation des fonds propres, ainsi que la conformité aux normes et règlements de souscription.

Le *SCR non-vie réserves* quant à lui, découle de l'incertitude quant à l'adéquation des réserves détenues par l'assureur pour couvrir ses futurs engagements au titre des sinistres. C'est un risque lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à leur mauvaise estimation. Il concerne les engagements relatifs aux polices d'assurance couvrant des années historiques, appelés également provisions pour futurs sinistres.

Ce risque dépend de plusieurs facteurs dont :

- Le développement des sinistres : l'expérience historique de sinistres de l'assureur et l'incertitude associée au développement des sinistres au fil du temps, qui peuvent entraîner des changements dans le montant des réserves nécessaires pour couvrir les sinistres futurs.
- La gestion des sinistres : la capacité de l'assureur à gérer et régler les sinistres de manière efficace, y compris l'exactitude et la rapidité du traitement des sinistres et l'adéquation des réserves pour sinistres.
- La méthodologie de provisionnement : l'adéquation et la fiabilité des méthodes utilisées par l'assureur pour calculer ses réserves, y compris les hypothèses formulées concernant la fréquence, la sévérité et le calendrier des sinistres.
- La qualité et l'exactitude des données utilisées par l'assureur pour estimer ses réserves, y compris l'exhaustivité et la rapidité des données de sinistres.

- La réassurance : dans quelle mesure l'assureur a transféré une partie du risque de provisionnement à d'autres compagnies d'assurance par le biais d'arrangements de réassurance.
- La réglementation, régissant les exigences en matière de provisionnement de l'assureur, y compris les exigences de solvabilité et d'adéquation du capital, ainsi que la conformité aux normes et réglementations en matière de provisionnement.

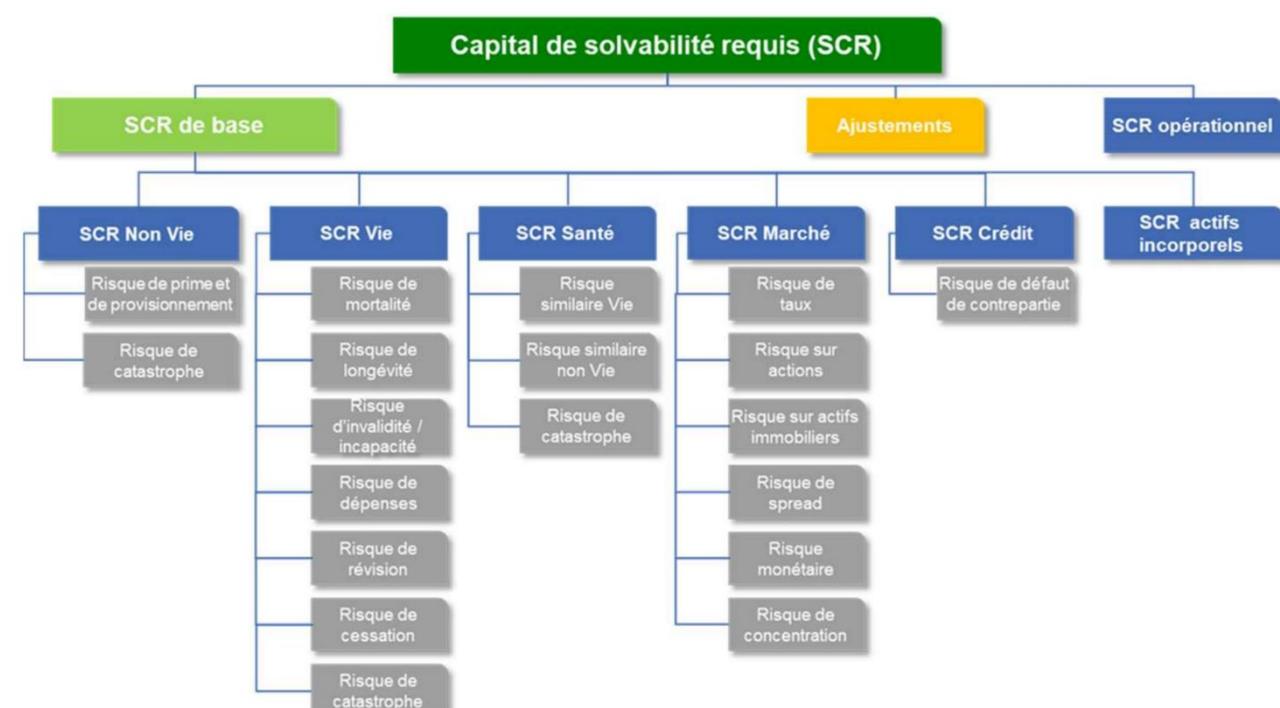


Figure III.3: Modules de risques dans le calcul du SCR

A partir de ces indicateurs de risque, plusieurs cadres d'appétence peuvent se décliner :

- L'allocation à chaque *LoB* d'un niveau d'exigence en capital (*SCR*) correspondant au risque porté par chacune par différentes méthodes de contribution : proportionnelles, marginales ou de Shapley en vue de respecter le niveau de risque global de la compagnie d'assurance.
- L'identification des indicateurs de surveillance de l'appétence au risque (résultat de souscription, *SCR*, ratio de solvabilité, ratio de sinistralité ou encore ratio combiné) et des leviers de pilotage (vitesse des prix, accélération des prix, etc.). Une fois identifiés, ils nous permettront de quantifier l'impact de la valeur de chaque levier de pilotage sur la valeur de chaque indicateur de surveillance.

Dans le 1^{er} cadre, si on fixe un niveau de risque cible global, on peut déterminer les niveaux de risque cible des sous branches. La méthode de contribution proportionnelle vise à allouer à la *LoB* la proportion du risque global auquel elle contribue alors que la méthode marginale tient compte des effets de diversification entre les différentes *LoB* en étudiant par conséquent l'impact marginal

de chaque *LoB* sur l'ensemble du portefeuille. La méthode de Shapley vise quant à elle à étudier les impacts marginaux sur tous les sous-ensembles du portefeuille, et pas seulement la totalité. Cependant, ce cadre ne garantit pas que toutes les combinaisons des niveaux de risque associés aux *LoBs* soient envisagées.

C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers le 2nd cadre en réalisant un problème d'optimisation bi-objectif avec 2 métriques d'appétence au risque : le résultat technique et le SCR à partir de la connaissance des prix moyens des *LoBs*. Autrement dit, à partir des valeurs des vitesses des prix connues ou prédites, nous pourrions alors calculer le champ de valeurs pour chacune de ces métriques et ainsi déterminer l'impact de la dynamique des prix sur ces dernières. Une extension du problème d'optimisation qui prendrait en compte toutes les *LoBs* pourrait également être étudiée afin d'optimiser l'allocation de capital pour chaque *LoB* sans avoir à tester toutes les combinaisons comme dans le 1^{er} cadre.

3.2 Définition du problème

Dans cette partie, on va utiliser la dynamique des prix antérieure et postérieure du marché afin d'aider à la décision dans le cadre de la stratégie de souscription. Plus précisément, on veut établir un jeu décisionnel qui détermine les variations d'expositions nécessaires à la poursuite des objectifs techniques de l'assureur en fonction des indicateurs de pilotage de l'exposition à disposition :

- Le résultat de souscription
- La vitesse et l'accélération des prix

Il convient donc dans un 1^{er} temps de définir ces objectifs techniques que ciblent les variations d'expositions. Dans un 2nd temps, on résoudra le problème d'optimisation avec ces objectifs afin de récolter ces variations d'exposition. Et dans un 3^{ème} et dernier temps, on étudiera les potentiels liens entre les variations d'exposition et ses indicateurs de pilotage définis plus haut.

Problème d'optimisation

Ainsi, on veut déterminer ce qu'aurait été la stratégie de souscription optimale si on avait eu une connaissance a priori de la dynamique des prix sur la période 1999-2021.

On se place dans le cadre d'un assureur fictif qui propose des prix d'assurance alignés sur ceux du marché et qui a été capable d'anticiper tous les mouvements de prix du marché sur cette période. Son objectif est de savoir comment faire varier son exposition au risque pour maximiser sur le long terme son résultat de souscription tout en minimisant les exigences en capital.

L'exposition désigne la quantité de risques couverts par une compagnie d'assurance. Elle peut être mesurée en termes de montant des garanties accordées, de nombre de polices d'assurance en vigueur ou encore en termes de sévérité et fréquence des sinistres potentiels.

Il s'agit plus particulièrement de trouver les variations d'expositions optimales δ_i pour chacune de ces années i à partir des variations de prix ΔP_i afin de maximiser le résultat de souscription RS et minimiser le risque SCR_i . Le risque s'exprime ici sous la forme des sous-risques agrégés dans le SCR non-vie : risques de prime et de réserve. On suppose la linéarité des risques. Autrement dit, le SCR et les sinistres et frais augmentent proportionnellement à l'exposition.

On formule le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{\delta_i} RS_{i+1} = Primes_{i+1} - (Sinistres + Frais)_{i+1} \\ \min_{\delta_i} SCR_{i+1} = SCR_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{cases}$$

Avec

i étant l'indice de l'année tel que $i \in [0; N - 1]$ avec N le nombre total d'années.

δ_{i+1} la variation d'exposition décidée à cette année $i + 1$ avec $\delta_0 = 0$

RS_{i+1} : le résultat de souscription à l'année i

$Primes_{i+1}$: les primes encaissées à l'année $i + 1$

$Primes_{i+1} = (1 + \Delta P_{i+1}) \times (1 + \delta_{i+1}) \times Primes_i$ avec ΔP_{i+1} la variation des prix de l'assurance à l'année $i + 1$ avec $Primes_0$ défini comme le prix initial moyen de l'assurance

Le calcul du SCR initial permet de rendre compte des besoins en capital de l'entreprise. Avec $Exposition_i = Exposition_0 \times \prod_{k=1}^i (1 + \delta_k)$, on fait l'hypothèse que le SCR augmente proportionnellement à l'exposition.

$$\begin{cases} Sinistres_{i+1} = Sinistres_i \times (1 + \delta_{i+1}) \\ Frais_{i+1} = Frais_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{cases}$$

On fait la forte hypothèse qu'il n'y a pas d'inflation sinistre et que les sinistres et frais augmentent proportionnellement à l'exposition.

On suppose également que l'assureur veut souscrire à minimum de prime (ne pas descendre en dessous d'un certain niveau) pour ne pas se heurter à la difficulté de revenir sur le marché. Il ne veut pas non plus que l'amplitude de sa variation d'exposition ne dépasse une certaine limite supérieure et inférieure par an pour avoir une forte croissance. En effet, une stratégie tarifaire agressive (souscription de contrats à un rythme effréné en période de baisse des prix et de montée de la demande) conduirait à dégrader sa profitabilité.

On pose les contraintes suivantes :

$$\exists SCR_{lim} \geq 0, Primes_{lim} \geq 0 \text{ t. } q$$

$$\begin{cases} SCR_i \leq SCR_{lim} \\ Primes_i \geq Primes_{lim} \\ \delta_i \in [\min_{\delta_i} ; \max_{\delta_i}] \end{cases}$$

On dispose des variations de prix réalisés (1999-2021) et modélisés (2022-2026). Ainsi, on peut les appliquer au problème d'optimisation afin de trouver les variations d'exposition optimales. Cependant, le problème de minimisation posé n'étant pas convexe (dans le cas de la minimisation) ou concave (dans le cas de la maximisation), les méthodes de résolutions usuelles comme la descente de gradient ne permettent pas de connaître cet optimum théorique d'autant plus que la solution optimale n'est pas unique. En effet, dans un problème d'optimisation multiobjectif, il y a plusieurs fonctions à optimiser simultanément. Il n'est donc pas possible de parler de convexité ou concavité d'un problème d'optimisation multiobjectif de manière globale. On peut parler de convexité ou concavité pour chaque fonction à optimiser séparément (ce n'est pas le cas ici en dérivant deux fois chaque équation du système par la variation d'exposition, on trouve 0). Mais cela ne donne pas une idée sur la géométrie globale (concavité ou convexité) du problème.

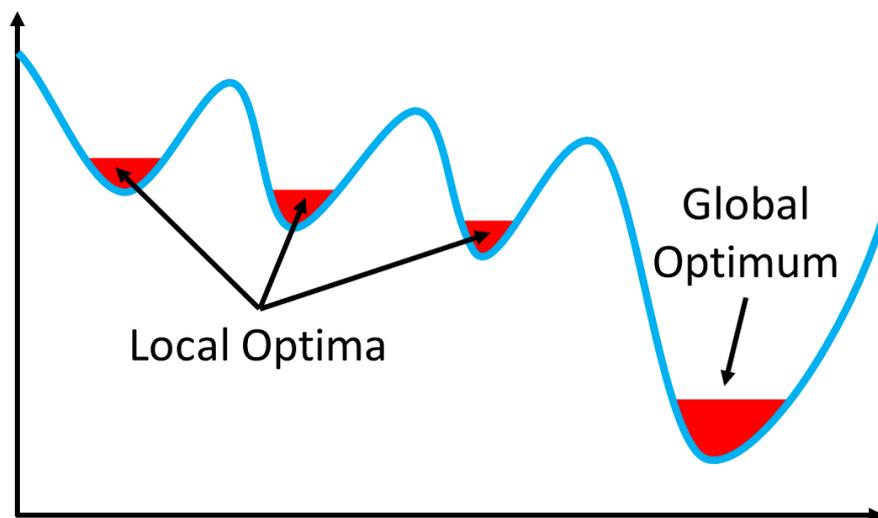


Figure III.4: Présence d'optima locaux ne garantissant pas la convergence vers l'optimum global par la descente de gradient

Par conséquent, un des moyens pour le résoudre est de trouver un ensemble de solutions approchées. C'est pour combler ce besoin que sont nés les algorithmes génétiques.

3.3 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques²², classés comme algorithmes évolutionnistes, correspondent à un type de méthode d'optimisation stochastique fondé sur la théorie de Darwin avec les concepts de génétique et de sélection naturelle.

Il faut savoir d'emblée que face à un problème d'optimisation multiobjectif, leur but est d'obtenir une solution approchée puisqu'il n'existe pas de solution exacte.

Leur fonctionnement global est le suivant : partir d'une population de solutions potentielles initiales tirées au hasard. On évalue cette population en fonction de leur performance puis par des processus de sélection, les meilleurs se reproduisent par des processus de croisement et de mutation. On recommence ce cycle avec la nouvelle population jusqu'à ce que l'on trouve une solution satisfaisante.

On résoudra donc le problème d'optimisation développé plus haut à l'aide d'un algorithme génétique : l'algorithme NSGA-II (2^{ème} version de *Nondominated Sorted Genetic Algorithm*) développé par Deb, Pratap, Agarwal, et Meyarivan. En effet, le choix s'est porté sur cet algorithme en raison de sa capacité à résoudre un problème d'optimisation multiobjectif (biobjectif ici) sous contraintes ainsi que sa vitesse de convergence vers les optima de Pareto²³ bien meilleure que l'ancienne version. En effet, cette dernière proposait une complexité de calcul trop élevée, une sélection de solutions optimales pas assez élitistes (perte de bonnes solutions) et une nécessité de spécifier un paramètre de partage pour assurer une forte diversité de solutions équivalentes.

Avant de l'appliquer directement au problème, il convient de s'attarder un peu plus en détail sur les étapes du cycle de cet algorithme.

Procédure de l'algorithme génétique NSGA-II

Le NSGA-II génère une population sur l'ensemble des solutions (valeurs des paramètres ou *chromosomes*) uniformément choisies sur leur domaine de définition (contraintes). On duplique cette population en utilisant des opérateurs évolutionnaires simples sur leurs *gènes* : le croisement et la mutation. On évalue la performance (*fitness*) relative du groupe dupliqué. Sur la base de ces performances, on les classe par ordre décroissant et on en sélectionne la moitié via un 3^{ème} opérateur appelé la sélection. Cette procédure est ensuite répétée de manière itérative pour

²² [VALLEE, T., & YILDIZOGLU, M. \(2001\). *Présentation des algorithmes génétiques et de leurs applications en économie.*](#)

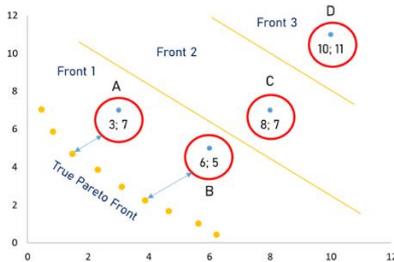
²³ Ensemble de solutions optimales

converger vers une population au génome idéal. Cette dernière se compose d'individus qui parcourent l'ensemble des optima de Pareto du problème appelé Front de Pareto. Chaque itération est appelée génération.

Cet algorithme repose sur 3 opérateurs :

- L'opérateur de croisement avec l'opérateur de croisement binaire simulé
- L'opérateur de mutation avec l'opérateur polynomial
- L'opérateur de *fitness* : Pour comparer le *fitness* des individus, ceux-ci sont triés dans des ensembles appelés rangs du front de Pareto et dans chacun de ces ensembles en fonction de leur *crowding distance*.

Dans chaque ensemble, les individus sont Pareto non-dominés. Ainsi, les individus qui ne sont Pareto-dominés par aucun individu de la population sont classés dans l'ensemble E_1 . Puis, ceux qui ne sont dominés que par les individus de $E_j \forall j \in [1, q]$ sont classés dans l'ensemble E_{j+1} , et cette procédure est répétée de manière itérative jusqu'à $E_{q+1} = \emptyset$. Mais plusieurs individus peuvent être dans le même ensemble, ce qui pose un problème pour le classement et la sélection et introduit au concept de *crowding distance*.



Dans ce problème de minimisation bi-objective, A et B Pareto-dominent C et D. Pour départager A et B, on recourt à la notion de *crowding distance*.

Figure III.5: Concept de domination de Pareto

La *crowding distance* d'un individu donne une estimation de la densité des individus qui l'entourent dans l'ensemble E_j . Les individus sont classés par *crowding distance* décroissante. Voici un algorithme qui permet de la calculer :

On se place dans l'ensemble E_j avec k solutions Pareto non-dominés $\{i_1, \dots, i_k\} \forall k \in \mathbb{N}^*$

Initialisation des *crowding distances* $d_i = 0 \forall i \in \{i_1, \dots, i_k\}$

Pour chaque fonction objective $f_m \forall m \in [1; n]$, n étant le nombre de fonctions objectives

- Il existe une suite $(u_l)_{1 \leq l \leq k}$ à valeurs dans $\{1, \dots, k\}$
- Tri des solutions i selon f_m tel que $f_m(i_{u_1}) < \dots < f_m(i_{u_k})$
- Pour $h \in [2, \dots, k - 1]$
 - $d_{i_{u_h}} = d_{i_{u_h}} + f_m(i_{u_{h+1}}) - f_m(i_{u_{h-1}})$
- $d_{i_{u_1}} = d_{i_{u_k}} = \infty$

L'algorithme consiste donc en 5 étapes dont 4 récurrentes, toutes synthétisées dans cette image :

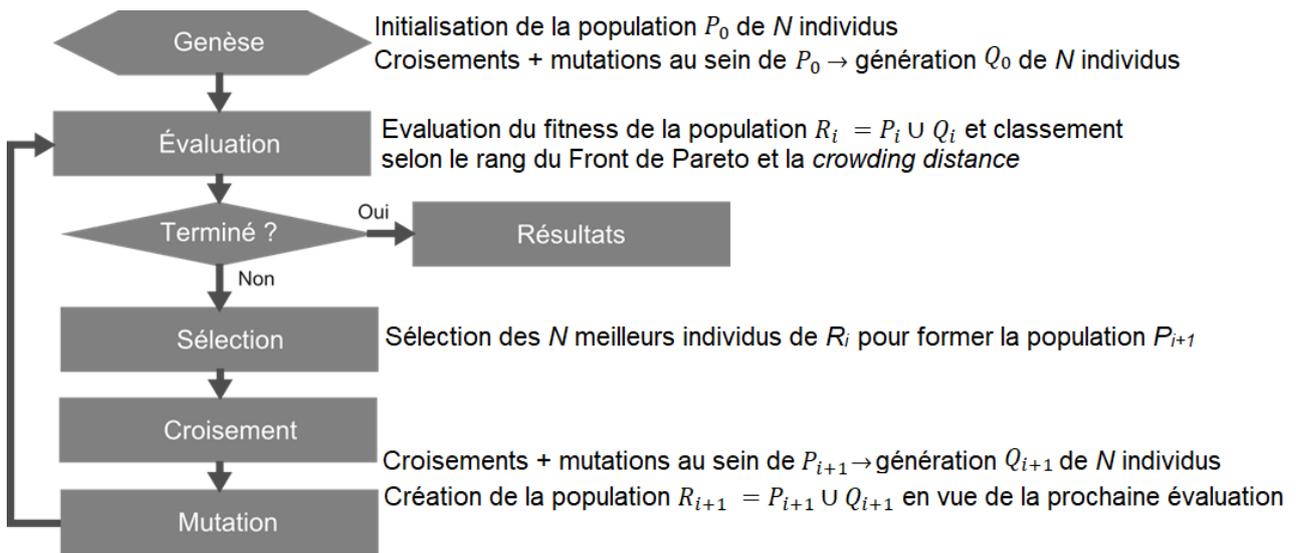


Figure III.6: Procédure itérative de l'algorithme NSGA-II

Voici un focus approfondi sur l'étape de sélection des individus de la population R_i :

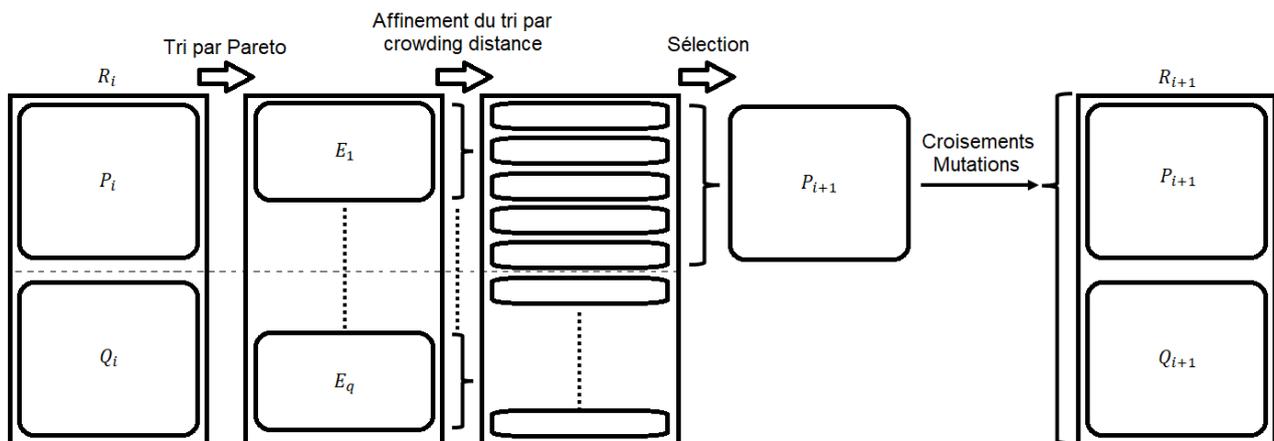


Figure III.7: Etape de sélection de l'algorithme NSGA-II

Au fil des générations, les valeurs moyennes de chaque fonction objectif tendent à se stabiliser, ce qui prouve que l'algorithme offre la possibilité de converger vers l'ensemble des optima de Pareto.

Cependant la difficulté de cet algorithme réside dans sa capacité à définir clairement la notion de convergence théorique, ce qui s'explique en partie par la faiblesse voire l'absence d'hypothèses.

Il est donc nécessaire d'étudier la convergence de l'algorithme pour le problème posé.

Application

Une fois la procédure explicitée, on reprend notre problème d'optimisation posé précédemment et on lui applique l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta} RS = \sum_{i=0}^{N-1} Primes_{i+1} - (Sinistres + Frais)_{i+1} \\ \min_{\delta} SCR = \sum_{i=0}^{N-1} SCR_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{array} \right.$$

$$s. c \left\{ \begin{array}{l} SCR_i \leq 25 \\ Primes_i \geq 80 \\ \delta_i \in [-0.2; 0.2] \end{array} \right.$$

$$SCR_0 = 20$$

$Primes_0$ défini comme le prix initial moyen de l'assurance au 4^{ème} trimestre 1999

On travaille sur le jeu de données annuel de la *LoB* moyenne. Ainsi, on procède à une optimisation année par année de 1999 à 2021.

L'entreprise se fixe comme objectif la limite d'un *SCR* qui ne dépasse jamais 25. Les primes encaissées doivent également ne jamais tomber sous le seuil des 80. En outre, on veut limiter les variations d'expositions entre -20% et +20%.

Une fois exécuté, l'algorithme affiche des résultats. Cependant, se pose la question de leur fiabilité mathématique. En effet, malgré les nombreuses générations, l'aspect stochastique des processus de croisement et mutation conduit l'algorithme à générer des individus aléatoirement à partir d'une population. Mais ces processus ne sont pas infallibles : la génération peut passer à côté d'individus beaucoup plus performants.

3.4 Convergence de l'algorithme

L'enjeu impératif étant de déterminer la qualité de la convergence sous le prisme de la stabilité des résultats, on procède en 2 étapes. Dans un 1^{er} temps, on va étudier la stabilité des valeurs de chaque fonction objectif. Puis dans un 2nd temps, si la 1^{ère} étape est validée, nous nous attarderons sur la stabilité des résultats qui composent la valeur de chaque fonction.

3.4.1 Etude des fonctions objectifs

On va observer les valeurs que prennent les fonctions objectifs : résultat de souscription et SCR. On fixe un nombre d'itérations du NSGA-II puis pour chacun, on va générer un front de Pareto comme le montre la *figure III.8* plus loin.

L'objectif étant de maximiser le résultat de souscription et de minimiser le SCR, les solutions optimales se translatent d'autant plus vers le quadrant supérieur gauche de la *figure III.8* que le nombre d'itérations (ou générations) ne cesse d'augmenter. Cette représentation n'est pas sans rappeler la frontière efficiente de Markowitz en gestion de portefeuille avec la représentation du rendement du portefeuille à maximiser en fonction de son risque à minimiser.

On remarque qu'un nombre insuffisant d'itérations donne un nuage de solutions diffus, pas assez ordonné de sorte à déterminer un état de Pareto. À partir de 500-1000 itérations, une frontière consistante commence à se dessiner.

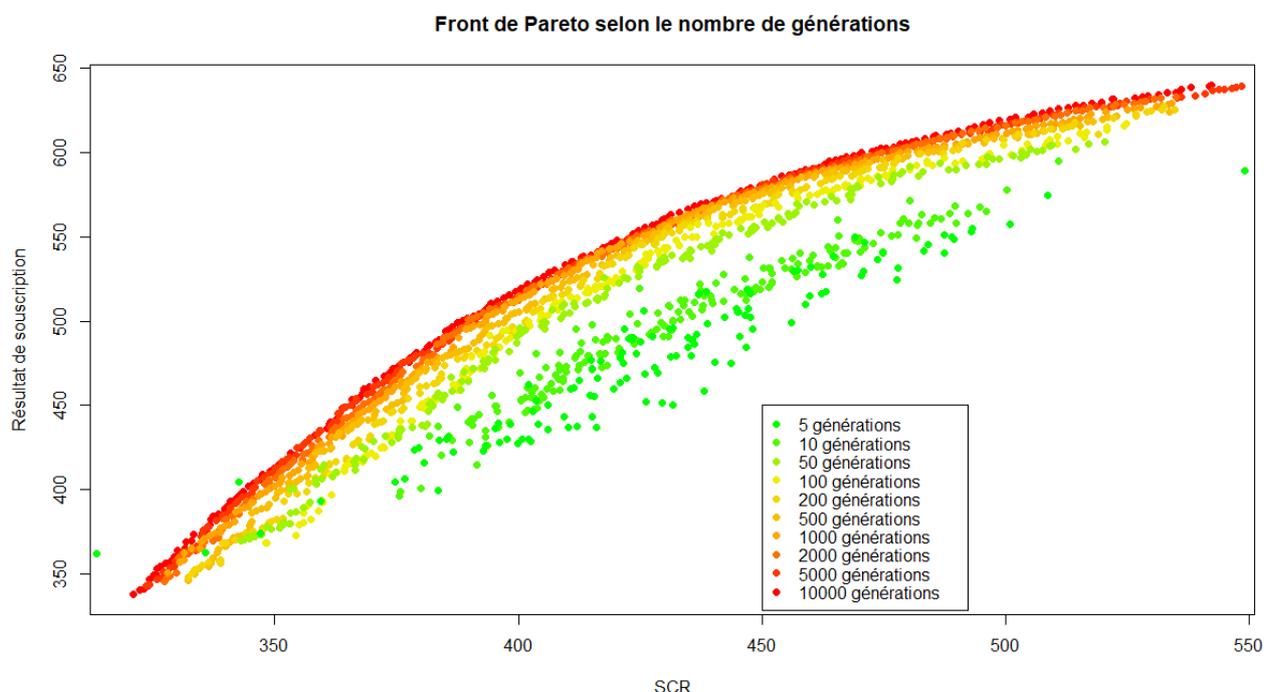


Figure III.8: Front de Pareto selon le nombre de générations (itérations)

Cette analogie met en lumière la possibilité pour l'algorithme d'obtenir des solutions qui convergent vers cette frontière efficiente appelée le front de Pareto. En effet, elles sont les paramètres d'un résultat de souscription qui ne fait qu'augmenter et d'un SCR qui ne fait que baisser au fil des générations.

Toutefois, cette méthode est insuffisante dans sa capacité à garantir la stabilité des résultats puisque l'algorithme est de nature incapable de déterminer explicitement un optimum théorique. Autrement dit, ce front de Pareto observé est une condition nécessaire mais non suffisante pour assurer la convergence de ces résultats. C'est pourquoi une étude complémentaire des solutions

qui permettent d'obtenir ce couple *Résultat de souscription/SCR* se révèle indispensable pour la poursuite de toute analyse supplémentaire sur ces solutions.

3.4.2 Etude des solutions

Les résultats de l'algorithme NSGA-II trahissent sa principale faiblesse : sa stochasticité. Autrement dit, les variations d'exposition δ deviennent des variables aléatoires par définition, ce qui ôte toute garantie de convergence vers les résultats exacts.

C'est pourquoi, on se penche désormais sur les propriétés de convergence des solutions optimales. Cette étude se décompose en 2 temps également. D'abord, on va réaliser plusieurs exécutions afin de comparer leur comportement pour un même couple *Résultat de souscription/SCR*. Que les comportements révèlent ou non des différences, cette étape ne nous permet pas de déterminer si les résultats sont stables. Cette étape va simplement nous aider à identifier la nature des oscillations observées sur les optima :

- Elles sont réellement significatives, et correspondent aux valeurs optimales du vecteur des variations d'exposition
- Il existe une seule solution optimale mais des fluctuations autour de l'optimum sont constatées en raison de la stochasticité de l'algorithme

Cette étape est importante pour la décision d'enchaîner ou non sur la 2nde. En effet, si la 1^{ère} explication est retenue, nous ne poursuivrons pas dans l'étude de la stabilité considérant qu'après tout il peut exister une multitude solutions optimales pour un même couple *Résultat de souscription/SCR*.

En revanche, dans le cas contraire, la tendance des solutions à potentiellement converger sera une hypothèse que seule la 2nd étape sera en mesure de confirmer. Le cas échéant, un travail d'affinement de l'étude par un test statistique sera invoqué afin de confirmer la stabilité des résultats.

3.4.2.1 Comparaison des exécutions

Cette étape préliminaire est déterminante pour la suite de la procédure. On maintient les mêmes contraintes du problème et on se fixe un certain nombre d'autres paramètres.

De prime abord, on se fixe un certain panel de valeurs du nombre d'itérations I . Au vu de la solidité de la frontière efficiente à partir de 500 itérations, on se fixe les valeurs $I \in \{500; 1000; 10000\}$

Pour chaque nombre d'itérations I , cette solidité de la frontière nous permet également de se fixer un certain nombre d'exécutions τ_I (ou tests) de l'algorithme, certes petit (ici, $\tau \in [1; 5]$) mais suffisant pour établir une conjecture sur la significativité des résultats. Il ne s'agit après tout que d'une étape préliminaire afin de savoir s'il faut éliminer l'hypothèse des multiples solutions optimales et opter pour la théorie de la convergence vers un seul optimum. Cette dernière sera confirmée par des tests ultérieurs.

Pour chaque test τ_I , on se fixe également quelques zones d'observation $z_{o,q}$ de la frontière efficiente où figurent les q couples optimaux *Résultat de souscription/SCR* notés $(RS^{*\tau, z_{o,q}}; SCR^{*\tau, z_{o,q}})$ obtenus par le NSGA-II. On note o le numéro de la zone, $q \in \{1, \dots, Q\}$ et Q étant le nombre de couples total de couples correspondant au cardinal de la population.

Ainsi, à chaque I croissant, on va observer si les différences de comportement des optima se réduisent dans cette zone. Dans le cas contraire, on laissera tomber la 2^{ème} étape, les résultats considérés comme trop peu stables.

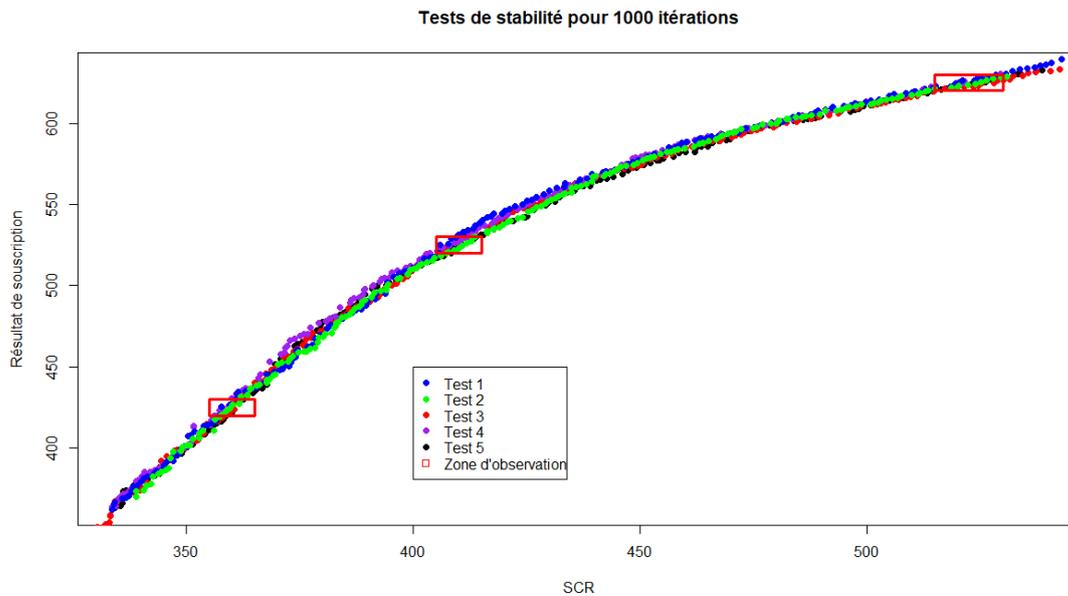


Figure III.9: Simulations du Front de Pareto après 1000 itérations

Pour chaque nombre d'itérations I , pour chaque test τ_I et dans une même zone d'observation $z_{o,q}$, on a une dizaine de couples *Résultat de souscription/SCR* pour lesquels on en déduit les variations d'expositions optimales $\delta_I^{*\tau, z_{o,q}}$. À noter que $\delta_I^{*\tau, z_{o,q}} = [\delta_0, \delta_{1,I}^{*\tau, z_{o,q}}, \dots, \delta_{N,I}^{*\tau, z_{o,q}}]$ avec N le nombre total d'années.

$$\text{On note ces valeurs } \delta_I^{*\tau, z_{o,q}} = \arg \max_{\text{empirique}} RS_I^{\tau, z_{o,q}} \cap \arg \min_{\text{empirique}} SCR_I^{\tau, z_{o,q}}$$

Ces $\delta_I^{*\tau, z_0, q}$ ont des valeurs très proches pour chaque année. Elles ont une corrélation avoisinant 1 avec une trajectoire quasi identique. Cela s'explique par le fait qu'elles proviennent du même test τ , de la même zone d'observation z_0 avec un certain mode de genèse des populations qui lui est propre.

On fait donc la moyenne de leurs trajectoires pour chaque test τ_I telle que : $\mathbb{E}[\delta_I^{*\tau, z_0}] = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \delta_I^{*\tau, z_0, j}$. Ensuite, on va regarder $\mathbb{E}[\delta_I^{*\tau, z_0}] \forall \tau \in [1; 5]$ et $\forall I \in \{500; 1000; 10000\}$

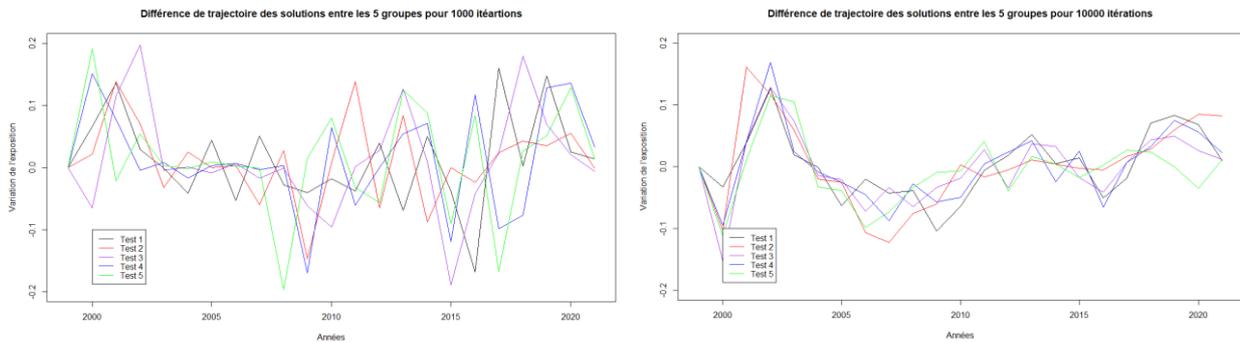


Figure III.10: Variations d'exposition pour une position du Front de Pareto selon le nombre d'itérations

L'hypothèse serait donc que plus I augmente, plus les tests τ_I convergent vers la même valeur de $\mathbb{E}[\delta_I^{*\tau, z_0}]$. Ce que confirme le graphe des corrélations des tests ci-dessous (cf. Figure III.11) infirmant par conséquent l'hypothèse selon laquelle il existe plusieurs résultats tous viables pour une même position q sur la frontière efficiente.

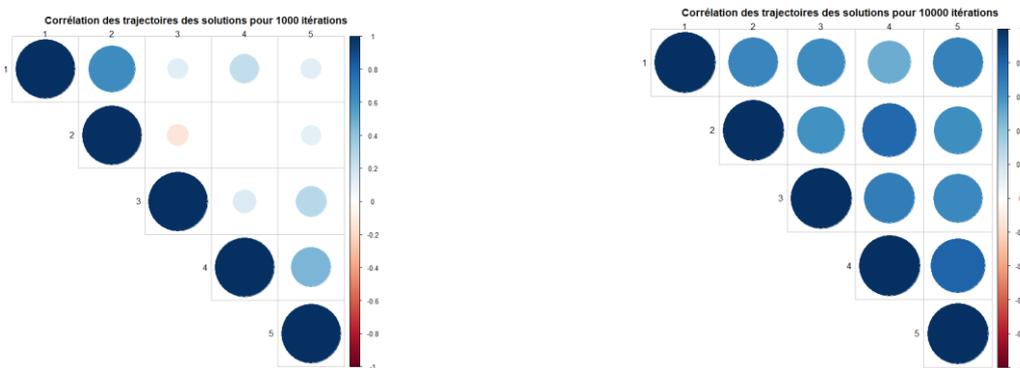


Figure III.11: Graphique des corrélations des trajectoires des solutions issues des simulations selon le nombre d'itérations

On veut désormais vérifier cette conjecture par un test statistique qui attestera de la significativité des résultats obtenus par la multiplication du nombre d'itérations I .

3.4.2.2 Tester la significativité des résultats

Cette étape consiste à exécuter T fois l'algorithme NSGA-II avec un nombre de générations $I = 1000$ et $Q = 200$ afin de générer T variables aléatoires $(\delta_t^{*q})_{0 \leq t \leq T}$ indépendantes et

identiquement distribuées. Ainsi, le but est d'obtenir un tenseur d'ordre 3 avec les dimensions suivantes :

- L'ordre d'itération $t \forall t \in [1, \dots, T]$
- Les Q positions de la frontière efficiente
- Les vecteurs δ_T^{*q} avec $q \in [1; Q]$ associés à chaque position q de la frontière efficiente

Pour chaque position q de la frontière efficiente, la question sera ensuite de déterminer si les oscillations de $(\delta_t^{*q})_{0 \leq t \leq T}$ constatées sont statistiquement significatives.

Génération du tenseur d'ordre 3

A chaque itération $0 \leq t \leq T$, on trie les résultats suivants obtenus par le NSGA-II :

- $(RS_t^{*1}, \dots, RS_t^{*Q})$ le vecteur des Q Résultats de souscription optimaux
- $(SCR_t^{*1}, \dots, SCR_t^{*Q})$ le vecteur des Q SCR optimaux
- $(\delta_t^{*1}, \dots, \delta_t^{*Q})$ les Q vecteurs optimaux correspondant chacun au couple $(RS_t^{*q}, SCR_t^{*q})_{1 \leq q \leq Q}$

En effet, tous les couples $(RS_t^{*q}, SCR_t^{*q})_{1 \leq q \leq Q}$ obtenus par l'algorithme sont ceux pour lesquels aucune combinaison des solutions $(\delta_t^{*q})_{1 \leq q \leq Q}$ ne permet d'améliorer le rendement sans détériorer le risque ou inversement.

Ainsi, à chaque itération $t \in [1; T]$, il existe une suite $(rk_q)_{1 \leq q \leq Q}$ à valeurs dans $[1; Q]$ qui permette d'ordonner les vecteurs optimaux de Résultats de souscription et SCR conjointement :

$$\begin{cases} RS_t^{*rk_1} < \dots < RS_t^{*rk_Q} \\ SCR_t^{*rk_1} < \dots < SCR_t^{*rk_Q} \end{cases}$$

En effet, dans un problème d'optimisation où il faut maximiser RS et minimiser SCR , $(RS_t^{*q})_{1 \leq q \leq Q}$ est une fonction croissante et concave en $(SCR_t^{*q})_{1 \leq q \leq Q}$.

$(\delta_t^{*rk_1}, \dots, \delta_t^{*rk_Q})$ sont les vecteurs correspondant chacun au couple $(RS_t^{*rk_q}, SCR_t^{*rk_q})_{1 \leq q \leq Q}$

Test de significativité

Une fois le tenseur obtenu, on va vérifier si les résultats sont statistiquement significatifs. Un test significatif est appliqué sur les résultats correspondant à chaque position q de la frontière efficiente avec 2 hypothèses à la clé :

- Les résultats émettent une difficulté à converger et doivent être ignorés
- Les résultats convergent vers un seul optimum et peuvent être exploités

Ces hypothèses peuvent être respectivement reformulées de cette manière :

- $H_0 : \left(\delta_t^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T} \sim \mathcal{U}[-0.2 ; 0.2]$. En effet, cela suppose que les $\left(\delta_t^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$ sont tirés uniformément sur leur domaine de définition, indépendamment de la direction vers laquelle l'algorithme est censé les faire converger.
- $H_1 : \left(\delta_t^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$ ne suivent pas une loi uniforme $\mathcal{U}[-0.2 ; 0.2]$. Ce qui signifie que l'algorithme tient compte de la convergence des $\left(\delta_t^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$ vers des valeurs bien spécifiques.

L'étape est cruciale car on a besoin de résultats stables non seulement pour appliquer l'algorithme aux prix modélisés dans la partie 2 mais aussi pour adapter la prise de décision de varier l'exposition selon certains paramètres dans une analyse ultérieure.

La méthode proposée consiste donc à observer les T réalisations du vecteur des variations d'expositions $\left(\delta_t^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$ permettant d'obtenir les T couples $\left(RS_t^{*rkq}, SCR_t^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$.

Cela revient observer ses valeurs : $\left(\delta_{j,t}^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$ afin d'obtenir la matrice suivant pour les Q positions sur la frontière efficiente avec $j \in [1; N]$

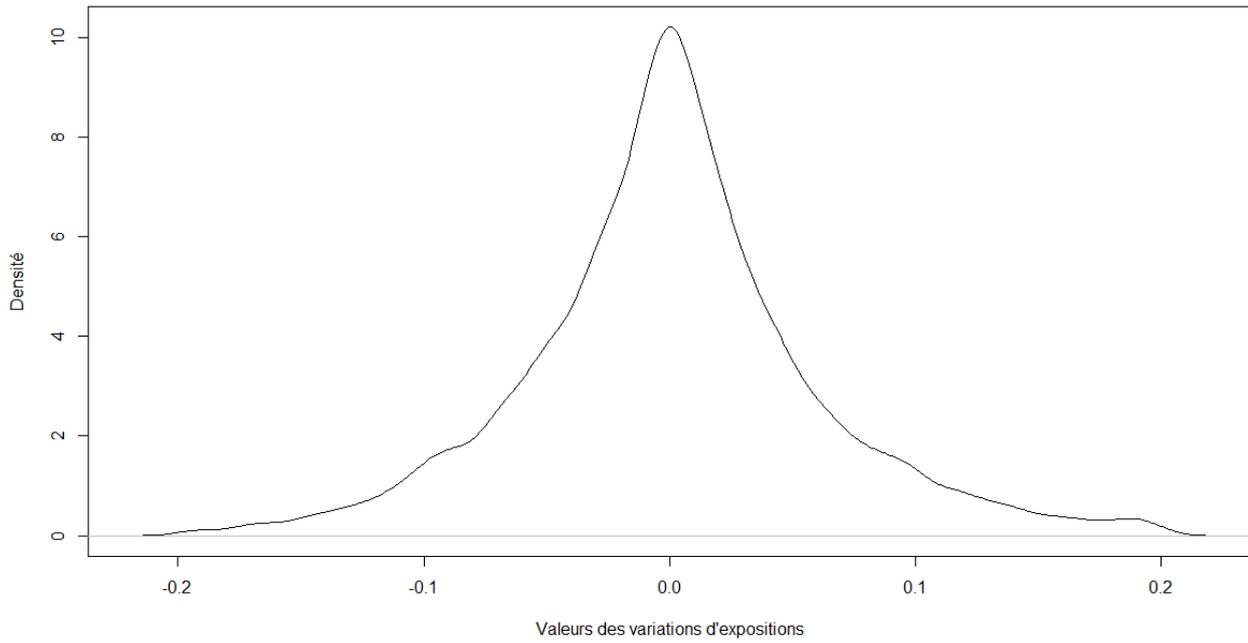
$$\begin{pmatrix} \delta_{1,t}^{*rk_1} & \dots & \delta_{N,t}^{*rk_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{1,t}^{*rk_Q} & \dots & \delta_{N,t}^{*rk_Q} \end{pmatrix}$$

On répète cette matrice T fois afin d'obtenir le tenseur $Q \times N \times T$. Ensuite, on focalise notre attention sur chaque position q du tenseur :

$$\begin{pmatrix} \delta_{1,1}^{*rk_q} & \dots & \delta_{N,1}^{*rk_q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{1,T}^{*rk_q} & \dots & \delta_{N,T}^{*rk_q} \end{pmatrix}$$

On va alors comparer chaque colonne $\left(\delta_{j,t}^{*rkq} \right)_{1 \leq t \leq T}$ des observations avec celles d'une loi uniforme $\mathcal{U}[-0.2 ; 0.2]$. On peut utiliser la fonction de densité ou encore les QQ-plot pour une loi uniforme

Uniformité des variations d'exposition rejetée



QQ-Plot d'une loi uniforme U[-0.2,0.2]

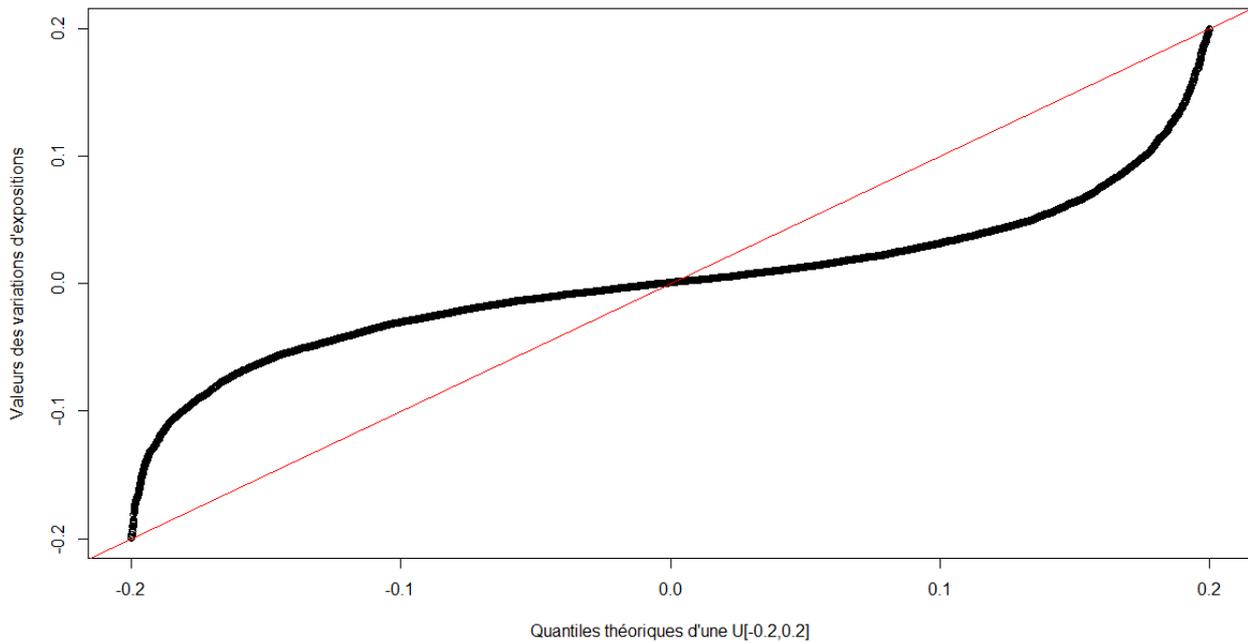


Figure III.12: Tests d'adéquation à une loi uniforme (densité et QQ-Plot)

Les tests semblent infirmer l'hypothèse d'uniformité des $(\delta_{j,t}^{*rkq})_{1 \leq t \leq T}$. Un autre test plus sensible est également appliqué à chacune de ces colonnes : le test de *Kolmogorov-Smirnov* avec les mêmes hypothèses.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est test statistique qui vise à comparer la fonction de répartition empirique des observations d'une variable aléatoire à une fonction de répartition

théorique. C'est un des tests d'adéquation non paramétrique les plus courants avec celui du χ^2 pour la densité mais beaucoup plus performant que ce dernier qui perd de l'information. Soient $(\delta_{j,t}^{*rkq})_{1 \leq t \leq T} = (X_t)_{1 \leq t \leq T}$ les variables indépendantes et identiquement distribuées. En voici les hypothèses :

$$H_0 : \widehat{F}_{X_t}(x) = F_X(x)$$

$$H_1 : \widehat{F}_{X_t}(x) \neq F_X(x)$$

Avec $\widehat{F}_{X_t}(x)$ la fonction de répartition empirique de $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$, définie comme suit :

$$\widehat{F}_{X_t}(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}_{X_t \leq x}$$

Et $F_X(x)$ une fonction de répartition théorique.

On peut également utiliser la statistique d'ordre et ordonner $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$ à l'aide d'une suite $(rk_t)_{1 \leq t \leq T}$ à valeurs dans $[1; T]$ telle que :

$$\widehat{F}_{X_{rk_t}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < X_{rk_1} \\ \frac{t}{T} & \text{pour } X_{rk_t} \leq x < X_{rk_{t+1}} \\ 1 & \text{pour } X_{rk_T} \geq x \end{cases}$$

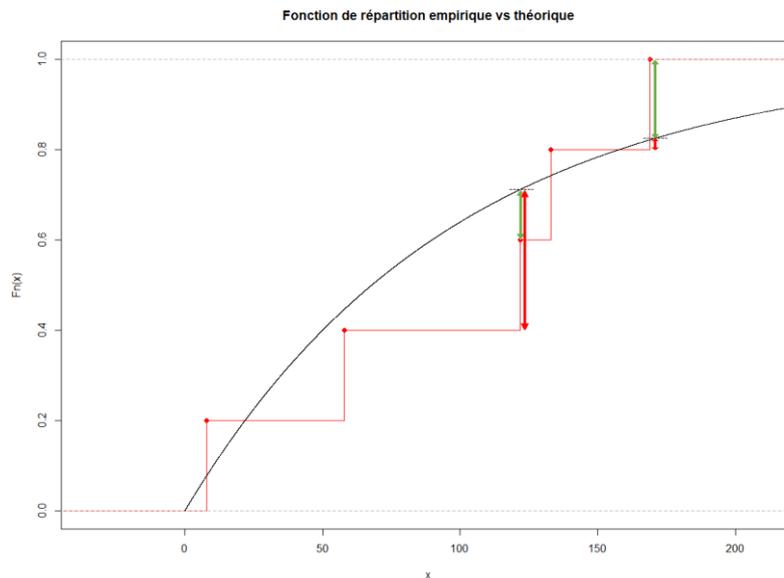


Figure III.13: Distances entre fonction de répartition empirique (escalier) et théorique (courbe)

Alors, la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov, notée $KS(\widehat{F}, F)$, est définie par :

$$KS_T(\widehat{F}, F) = \max_{t \in [1; T]} \left\{ \left| \widehat{F}_{X_{rk_t}}(x) - \frac{t}{T} \right|; \left| \widehat{F}_{X_{rk_t}}(x) - \frac{t-1}{T} \right| \right\}$$

La statistique $KS(\widehat{F}, F)$ donne donc la distance maximale entre la fonction de répartition théorique et la fonction de répartition empirique.

Une fois $KS_T(\hat{F}, F)$ calculée, on calcule sa probabilité asymptotique de dépasser un certain seuil critique $\frac{s}{\sqrt{T}}$ défini par simulations de Monte Carlo²⁴ (cf. *Annexe K*) donnant lieu à une table de Kolmogorov-Smirnov.

$$\mathbb{P}\left(KS_T(\hat{F}, F) > \frac{s}{\sqrt{T}}\right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \alpha(s) = 2 \times \sum_{r=1}^{+\infty} (-1)^{r-1} \exp(-2s^2 r^2)$$

À un niveau de confiance $1 - \alpha$, on a donc \hat{F} qui converge en probabilité vers F . Dans notre cas, on fixe un niveau de risque $\alpha = 5\%$ pour lequel $s = 1.36$.

À ce stade-là, au risque $\alpha = 5\%$, se présentent 2 cas :

- Si $KS_T(\hat{F}, F) < \frac{s}{\sqrt{T}}$ alors on accepte l'hypothèse H_0 selon laquelle $\widehat{F}_{X_t}(x) = F_X(x)$
- Si $KS_T(\hat{F}, F) \geq \frac{s}{\sqrt{T}}$ alors on rejette l'hypothèse H_0 et on se tourne vers $H_1 : \widehat{F}_{X_t}(x) \neq F_X(x)$

En appliquant ce test au contexte de cette étude avec $F_X(x) = \frac{x+0.2}{0.4} \mathbb{I}_{x \in [-0.2, 0.2]} + \mathbb{I}_{x > 0.2}$, on trouve $KS_{10000}(\hat{F}, F) \gg 0.0136$ pour tous les vecteurs $(\delta_{j,1}^{*rkq}, \dots, \delta_{j,T}^{*rkq}) \forall j \in [1; N] \forall q \in [1, Q]$. On en déduit que les $(\delta_{j,t}^{*rkq})_{1 \leq t \leq T}$ ne suivent pas une loi uniforme $\mathcal{U}[-0.2; 0.2]$.

Ainsi, on en conclut que les résultats obtenus sont significatifs, c'est-à-dire les variations d'exposition $(\delta_{j,t}^{*rkq})_{1 \leq t \leq T}$ convergent. Cependant, les oscillations autour du résultat, dues à la volatilité intrinsèque de l'algorithme, sont encore trop importantes. Elles empêchent ainsi leur exploitation et toute forme aide à la décision dans la stratégie d'entreprise. Il s'agit d'utiliser les nombreuses exécutions de l'algorithme afin de les stabiliser.

3.4.2.3 Stabilisation des résultats

Ces multiples exécutions nous génèrent une suite de variables aléatoires $(\delta_{j,t}^{*rkq})_{1 \leq t \leq T}$ indépendantes et identiquement distribuées (*i. i. d.*). On a également $\mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*rkq}] < +\infty$, ce qui nous permet de stabiliser les résultats par *la Loi Forte des Grands Nombres* :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_{j,t}^{*rkq} = \mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*rkq}]$$

²⁴ WICKLIN, R. (s.d.). *Critical values of the Kolmogorov-Smirnov test.*

Cette loi mathématique nous permet donc de travailler avec des quantités déterministes $\mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*r k q}]$ pour chaque année j et pour chaque position q de la frontière de Pareto. Ce qui est salutaire pour la détermination précise de la stratégie d'entreprise.

Pour y parvenir, à chaque itération $1 \leq t \leq T$, on va se concentrer sur la position la plus optimale de toutes les autres positions de la frontière de Pareto. On la nomme q_t^* telle que $\delta_t^{*q_t^*} = \arg \max_{q \in [1; Q]} \frac{RS_t^{*q_t^*}}{SCR_t^{*q_t^*}}$ afin d'obtenir le vecteur unique optimal des variations d'expositions $\mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*q^*}]$ telles que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_{j,t}^{*q_t^*} = \mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*q^*}]$

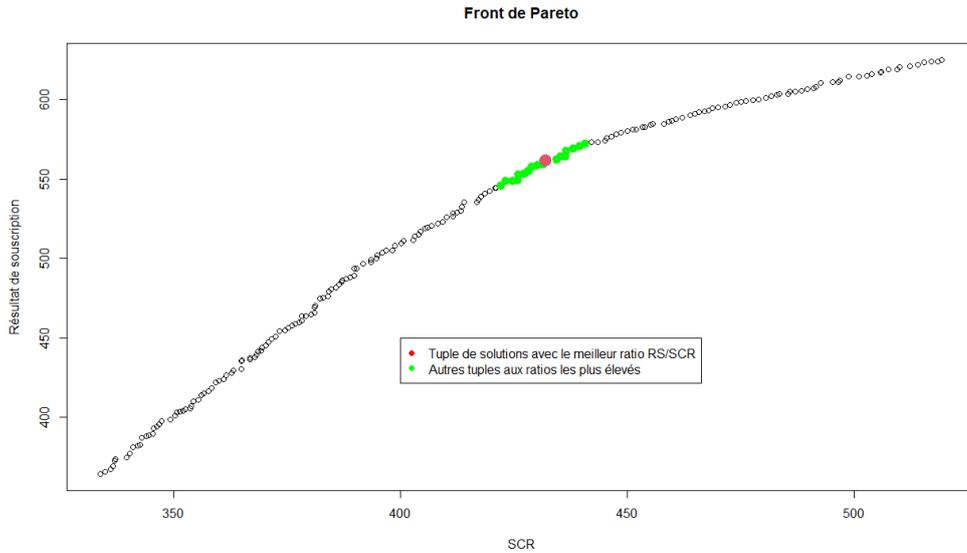


Figure III.14: Groupe de solutions sur le Front de Pareto maximisant le ratio RS/SCR

On réalise un intervalle de confiance au niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ sur $\mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*q^*}]$ pour quantifier les dispersions autour de $Y_{j,t} = \delta_{j,t}^{*q^*}$ d'où la nécessité d'avoir T assez grand pour les réduire le plus possible.

En effet, on a $Y_{j,t}$ i. i. d et $\overline{Y_{j,T}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{j,t}$

$$\mathbb{E}[\overline{Y_{j,T}}] = \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T Y_{j,t} \right] = \mathbb{E}[Y_{j,1}]$$

$$\mathbb{V}[\overline{Y_{j,T}}] = \mathbb{V} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{j,t} \right] = \frac{1}{T^2} \mathbb{V} \left[\sum_{t=1}^T Y_{j,t} \right] = \frac{\mathbb{V}[Y_{j,1}]}{T}$$

$$\sigma(\overline{Y_{j,T}}) = \frac{\sigma(Y_{j,1})}{\sqrt{T}}$$

Ainsi avec T itérations, on diminue d'un facteur \sqrt{T} , la dispersion sur les j vecteurs d'observations $(Y_{j,t})_{1 \leq t \leq T} \forall j \in [1, N]$

Pour chaque vecteur j , voici les quantiles empiriques d'encadrement :

$$Q_{1-\frac{\alpha}{2}}^j = \inf\{y \mid \widehat{F}_{Y_{j,t}}(y) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\}$$

$$Q_{\frac{\alpha}{2}}^j = \inf\{y \mid \widehat{F}_{Y_{j,t}}(y) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

On obtient l'intervalle de confiance suivant :

$$IC_{1-\alpha}(Y_{j,t}) = \left[Q_{\frac{\alpha}{2}}^j; Q_{1-\frac{\alpha}{2}}^j \right]$$

Par la suite, on affiche les variations d'exposition les plus optimales avec leurs intervalles de confiance à un niveau de confiance de 95%.

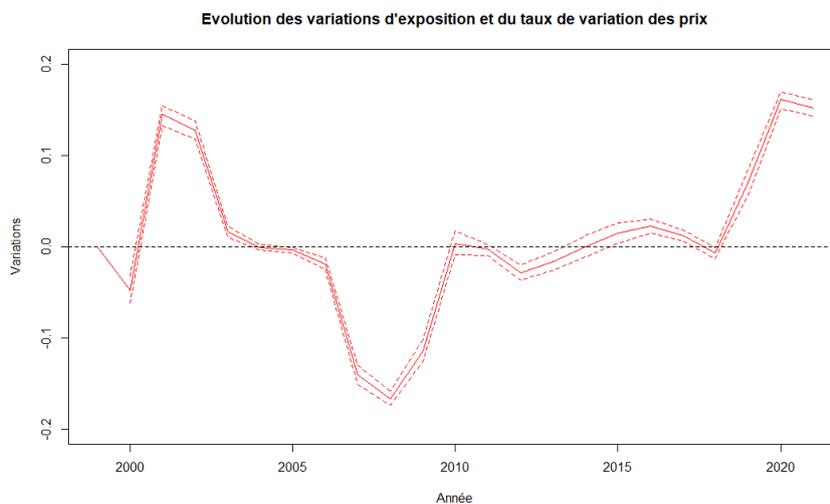


Figure III.15: Variations d'exposition optimales depuis 1999

On utilise ces variations d'expositions pour déterminer la meilleure stratégie à adopter pour l'entreprise en fonction d'indicateurs clé de performance.

IV. Stratégie de souscription

On arrive ici à l'apogée de l'étude dont l'objectif initial était de modéliser les prix de l'assurance pour les utiliser dans un algorithme d'optimisation afin de trouver les variations d'exposition optimales nécessaires à la mise en place de toute stratégie pour la compagnie d'assurance. C'est ce que les parties 2 et 3 ont respectivement traité.

Ainsi, l'assureur dispose des éléments suivants :

- Les prix modélisés jusqu'à 2026 et par déduction, les taux de variation des prix
- Les variations d'expositions $\mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*rkq}]$ optimales pour chaque couple (*Résultat de Souscription* ; *SCR*) par rapport à l'historique
- Les variations d'expositions $Y_j = \mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*q*}]$ optimales maximisant le rapport *Résultat de Souscription/SCR* sur la frontière efficiente

On va donc dans ce qui suit dans une 1^{ère} section fournir une comparaison entre une appétence fixe et une appétence au risque dynamique. Dans une 2^{ème} section, on va analyser les indicateurs de suivi stratégique afin de piloter la décision concernant la meilleure exposition à adopter puis appliquer les prix modélisés au NSGA-II afin de corroborer les analyses. Dans une 3^{ème} section, on va comparer le modèle d'optimisation défini dans la partie 3 au même modèle mais sans limite fixe sur le *SCR* afin de comprendre l'intérêt qu'un assureur aurait à moduler de manière variable sa limite d'appétence au risque. Ainsi ces 2 dernières sections nous permettront de convertir les résultats issus de leurs analyses synthétiques pour en une véritable source d'aide stratégique à la décision. Enfin dans une 4^{ème} et dernière section, on fera la synthèse de la stratégie de souscription.

4.1 Comparaison entre une appétence fixe et une appétence dynamique au risque

Il convient de montrer qu'une appétence au risque fixe peut rendre une stratégie de souscription non optimale et dégrader la rentabilité de l'assureur par rapport à une appétence au risque sensible à la dynamique des prix.

Pour ce faire, on reprend le même cadre fictif défini pour le problème d'optimisation dans la partie 3. On dispose donc de la dynamique des prix de 1999 à 2021 soit un historique de 23 ans. On suppose qu'il n'y a pas d'inflation sinistre et que les prix proposés par l'assureur suivent les prix de marché. On va donc calculer les résultats de souscription et le *SCR* de chaque année à partir

des variations d'exposition qui dépendent de l'appétence au risque de l'assureur. On fait le cumul de chacune de ces 2 variables. On dispose de 50 de fonds propres initiaux et on définit le ratio de solvabilité comme suit en faisant l'hypothèse qu'aucune dividende n'est reversée à l'actionnaire et que le résultat global d'une année à l'autre se réduit au revenu technique (hypothèse d'absence de revenu financier) :

$$\text{Ratio de Solvabilité}_i = \frac{\text{Fonds Propres initiaux} + \sum_{k=1}^i \text{Résultat de Souscription}_k}{\sum_{k=1}^i \text{SCR}_k}$$

Avec i le nombre d'années depuis 1998.

On veut comparer le cumul du résultat de souscription et le ratio de solvabilité dans chaque situation d'appétence au risque.

Dans le cadre d'une appétence au risque fixe, l'assureur ne prend aucun risque en faisant le choix de ne souscrire à aucun contrat supplémentaire d'une année à l'autre. Ainsi la variation d'exposition vaut 0, c'est-à-dire $\mathbb{E} \left[\delta_{j,1}^{*r k q} \right] = 0$. Le SCR est fixée à 20 pour chaque année.

Année	Variation de prix	Variation d'exposition	Exposition	Prime	Frais	Sinistre	Résultat de souscription	SCR	Ratio de solvabilité
4Q99	0,00%	0,00%	100,00	100,00	25,00	75,00	0,00	20,00	2,50
4Q00	9,34%	0,00%	100,00	109,34	25,00	75,00	9,34	20,00	1,48
4Q01	17,98%	0,00%	100,00	128,99	25,00	75,00	28,99	20,00	1,47
4Q02	15,74%	0,00%	100,00	149,30	25,00	75,00	49,30	20,00	1,72
4Q03	5,35%	0,00%	100,00	157,28	25,00	75,00	57,28	20,00	1,95
4Q04	-2,56%	0,00%	100,00	153,26	25,00	75,00	53,26	20,00	2,07
4Q05	-5,17%	0,00%	100,00	145,33	25,00	75,00	45,33	20,00	2,10
4Q06	-3,51%	0,00%	100,00	140,24	25,00	75,00	40,24	20,00	2,09
4Q07	-8,55%	0,00%	100,00	128,25	25,00	75,00	28,25	20,00	2,01
4Q08	-8,48%	0,00%	100,00	117,38	25,00	75,00	17,38	20,00	1,90
4Q09	-4,53%	0,00%	100,00	112,06	25,00	75,00	12,06	20,00	1,78
4Q10	-4,94%	0,00%	100,00	106,52	25,00	75,00	6,52	20,00	1,66
4Q11	0,14%	0,00%	100,00	106,68	25,00	75,00	6,68	20,00	1,56
4Q12	4,09%	0,00%	100,00	111,04	25,00	75,00	11,04	20,00	1,48
4Q13	3,35%	0,00%	100,00	114,76	25,00	75,00	14,76	20,00	1,43
4Q14	0,09%	0,00%	100,00	114,86	25,00	75,00	14,86	20,00	1,39
4Q15	-2,48%	0,00%	100,00	112,02	25,00	75,00	12,02	20,00	1,35
4Q16	-3,11%	0,00%	100,00	108,54	25,00	75,00	8,54	20,00	1,29
4Q17	-1,43%	0,00%	100,00	106,98	25,00	75,00	6,98	20,00	1,24
4Q18	1,66%	0,00%	100,00	108,76	25,00	75,00	8,76	20,00	1,20
4Q19	5,13%	0,00%	100,00	114,34	25,00	75,00	14,34	20,00	1,18
4Q20	9,23%	0,00%	100,00	124,89	25,00	75,00	24,89	20,00	1,18
4Q21	7,13%	0,00%	100,00	133,80	25,00	75,00	33,80	20,00	1,21
TOTAL							504,62	460	
Fonds propres initiaux									50

Figure IV.1: Appétence au risque fixe

Dans le cadre d'une appétence au risque dynamique, on utilise une des variations d'exposition optimales $\mathbb{E} \left[\delta_{j,1}^{*r k q} \right]$ sur la frontière de Pareto. L'exposition au risque est donc variable d'une année à l'autre. Si l'assureur voit les prix monter dans une ligne d'affaire, il sera plus appétent à accepter de nouveaux contrats et ainsi dépasser sa limite de SCR. Il module alors sa limite de SCR en fonction des conditions de prix du marché.

Année	Variation de prix	Variation d'exposition	Exposition	Prime	Frais	Sinistre	Résultat de souscription	SCR	Ratio de solvabilité	
4Q99	0,00%	0,00%	100,00	100,00	25,00	75,00	0,00	20,00	2,50	
4Q00	9,34%	-4,80%	95,20	104,09	23,80	71,40	8,89	19,04	1,51	
4Q01	17,98%	14,47%	108,98	140,57	27,24	81,73	31,60	21,80	1,49	
4Q02	15,74%	12,79%	122,92	183,51	30,73	92,19	60,59	24,58	1,77	
4Q03	5,35%	1,64%	124,93	196,50	31,23	93,70	71,56	24,99	2,02	
4Q04	-2,56%	-0,09%	124,82	191,30	31,20	93,61	66,48	24,96	2,14	
4Q05	-5,17%	-0,39%	124,34	180,70	31,08	93,25	56,37	24,87	2,16	
4Q06	-3,51%	-1,90%	121,98	171,06	30,49	91,48	49,08	24,40	2,14	
4Q07	-8,55%	-14,03%	104,87	134,49	26,22	78,65	29,63	20,97	2,06	
4Q08	-8,48%	-16,68%	87,38	102,57	21,84	65,53	15,19	17,48	1,97	
4Q09	-4,53%	-11,41%	77,41	86,74	19,35	58,05	9,34	15,48	1,88	
4Q10	-4,94%	0,38%	77,70	82,77	19,42	58,27	5,07	15,54	1,79	
4Q11	0,14%	-0,28%	77,48	82,66	19,37	58,11	5,17	15,50	1,70	
4Q12	4,09%	-2,85%	75,28	83,59	18,82	56,46	8,31	15,06	1,64	
4Q13	3,35%	-1,67%	74,02	84,95	18,51	55,52	10,93	14,80	1,60	
4Q14	0,09%	-0,03%	74,00	85,00	18,50	55,50	11,00	14,80	1,56	
4Q15	-2,48%	1,46%	75,08	84,11	18,77	56,31	9,02	15,02	1,51	
4Q16	-3,11%	2,24%	76,76	83,31	19,19	57,57	6,55	15,35	1,46	
4Q17	-1,43%	1,20%	77,68	83,10	19,42	58,26	5,42	15,54	1,42	
4Q18	1,66%	-0,73%	77,11	83,87	19,28	57,84	6,75	15,42	1,38	
4Q19	5,13%	7,06%	82,56	94,39	20,64	61,92	11,84	16,51	1,35	
4Q20	9,23%	16,11%	95,85	119,72	23,96	71,89	23,86	19,17	1,34	
4Q21	7,13%	15,17%	110,40	147,71	27,60	82,80	37,32	22,08	1,36	
TOTAL							539,96	433		
Fonds propres initiaux							50			

Figure IV.2: Appétence au risque dynamique

On remarque dans le cas d'une appétence fixe au risque, on a un résultat de souscription et un ratio de solvabilité plus faibles que dans le cas d'une appétence dynamique au risque.

Par conséquent, face à cette situation, l'assureur est invité à se tourner vers une stratégie de souscription qui s'adapte constamment à la dynamique des prix afin de maximiser son rendement et sa solvabilité.

On va donc maintenant s'intéresser aux variables qui aideront l'assureur à prendre sa décision concernant la stratégie souscription.

4.2 Indicateurs de pilotage de l'exposition

Dans cette partie, on va étudier l'impact de certains indicateurs clés de performance (KPI) qui ont un impact significatif sur les variations d'exposition. En effet, l'assureur éprouve le besoin de connaître la stratégie à adopter pour maximiser son rendement tout en réduisant la portée de ses engagements. Sa stratégie se classe comme suit : augmenter, maintenir ou réduire le nombre de contrats en cours.

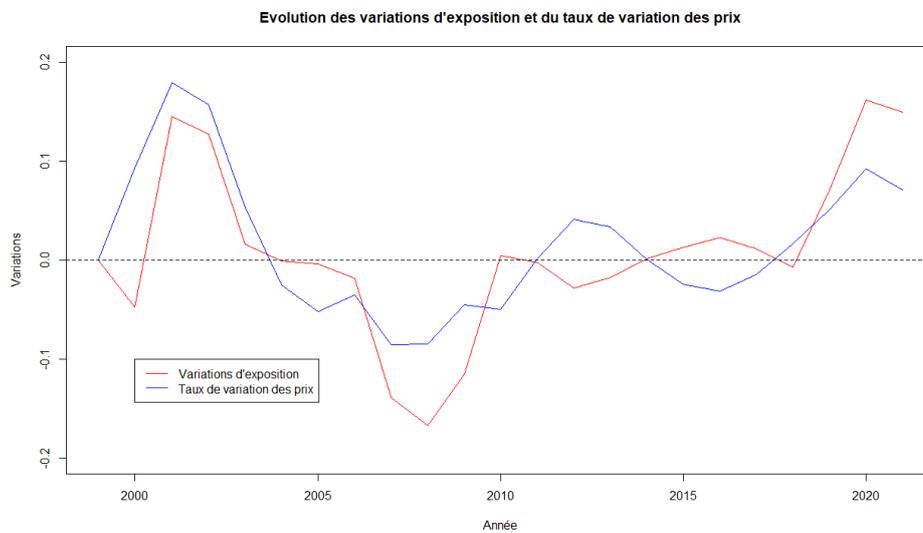
Cette stratégie diffère selon le problème posé. Dans la partie 3, il est bi-objectif mais il serait tout de même intéressant de savoir comment elle évolue dans un problème mono-objectif avec pour seul objectif, la maximisation du résultat de souscription.

On travaille avec les variations d'exposition optimales $Y_j = \mathbb{E}[\delta_{j,1}^{*q*}]$ maximisant le rapport *Résultat de Souscription/SCR* sur la frontière efficiente.

D'une part, nous allons donc analyser l'influence des prix et du résultat de souscription sur l'exposition dans le problème bi-objectif avec toutes les contraintes et hypothèses faites en partie 3. Et d'autre part, nous étudierons l'influence des prix sur l'exposition dans le cadre mono-objectif. Enfin, nous analyserons les variations d'exposition issues de l'algorithme NSGA-II appliqué aux prix modélisés de la partie 2 afin de confirmer la pertinence de la stratégie de souscription proposée à l'assureur.

Problème bi-objectif

On a pu observer une très forte corrélation entre les variations d'exposition Y_j et les taux de variation des prix ΔX_t : $(\rho_{\Delta X_j, Y_j} = 0.75) \forall j \in [1; N]$ avec N la dernière année.



Coefficients	Estimation	Erreur-type	Statistique t	Probabilité
Constante	-0,001389	0,011184	-0,124	0,902
ΔX_t	1,009650	0,158478	6,371	4,12e-06

Figure IV.3: Corrélation positive entre variations d'exposition et taux de variation des prix attestée par une régression linéaire de la 1^{ère} sur la 2^{ème}

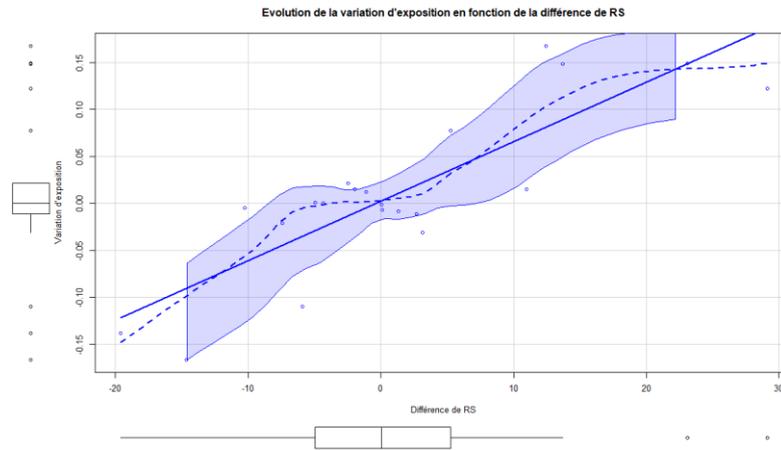
De surcroît, on a remarqué que Y_j est une fonction croissante de la différence de résultat de souscription ΔRS_j définie comme : $\Delta RS_j = RS_j - RS_{j-1}$.

$$\begin{aligned} \Delta RS_j &= Primes_j - (Sinistres + Frais)_j - [Primes_{j-1} - (Sinistres + Frais)_{j-1}] \\ &= Primes_{j-1} [(1 + \Delta X_j) \cdot (1 + Y_j) - 1] - Y_j \cdot (Sinistres + Frais)_{j-1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta RS_j}{\partial Y_j} = Primes_{j-1} \cdot (1 + \Delta X_j) - (Sinistres + Frais)_{j-1} > 0$$

$$\text{puisque } RS_j = (1 + Y_j) \cdot [Primes_{j-1} \cdot (1 + \Delta X_j) - (Sinistres + Frais)_{j-1}] > 0$$

$$\text{et que } (1 + Y_j) > 0 \text{ car } Y_j \in [-0.2; 0.2]$$



Coefficients	Estimation	Erreur-type	Statistique t	Probabilité
Constante	0,0036932	0,0118101	0,313	0,758
ΔRS_t	0,0035922	0,0006211	5,784	1,42e-05

Figure IV.4: Régression linéaire de la variation d'exposition en fonction de la différence de RS

Enfin, on réalise une régression linéaire de Y_t :

$$Y_t = \alpha \cdot \Delta X_t + \beta \cdot \Delta^2 X_t + \gamma$$

On trouve une corrélation négative entre Y_t et $\Delta^2 X_t$.

Coefficients	Estimation	Erreur-type	Statistique t	Probabilité
Constante	0,040510117	0,020581111	1,968315384	0,06556052
ΔX_t	0,926321499	0,126500704	7,322658864	1,19123E-06
$\Delta^2 X_t$	-0,401004141	0,197062307	-2,034910409	0,05776118

Figure IV.5: Résultats de la régression des variations d'exposition sur la vitesse et l'accélération des prix en bi-objectif

Voici les conclusions pour la stratégie :

- Augmenter l'exposition si les prix et le résultat de souscription augmentent d'une année à l'autre
- Augmenter plus fortement l'exposition lorsque les prix s'appêtent à gagner un « pic » ou maximum que lorsqu'ils sont en pleine remontée suite à une « vallée » ou minimum (dû au coefficient négatif lié à l'accélération des prix)

Ainsi, les analyses de ces indicateurs de suivi stratégiques indiquent que toutes choses égales par ailleurs, quand les prix montent ou que l'assureur a enregistré un meilleur résultat de souscription que l'année précédente, il lui est alors conseillé d'augmenter l'exposition et vice-versa.

Cependant, l'interprétation quant à l'analyse de l'influence de l'accélération des prix sur l'exposition peut paraître surprenante puisque le coefficient associé est négatif. Ainsi, quand les prix

sont en remontée (dans une « vallée »), l'accélération des prix est positive mais avec le jeu des coefficients pour la vitesse et l'accélération des prix, l'assureur augmente globalement son exposition. Mais toujours selon ce modèle, il est incité à l'augmenter plus fortement dans une période où les prix s'apprêtent à rejoindre un « pic ». Il est pourtant difficilement concevable d'un point de vue opérationnel pour un assureur d'attendre une telle période pour augmenter son exposition. En effet, les prix montent, la demande est en baisse, l'assureur n'aura donc pas la possibilité de souscrire à davantage de contrats.

Nous nous questionnons dès à présent sur l'influence de l'accélération des prix sur les variations d'exposition dans un problème mono-objectif afin d'attester de la validité de la stratégie proposée dans le cadre bi-objectif.

Problème mono-objectif

Dans ce problème, on retire l'objectif de minimisation du SCR du problème tout en conservant les contraintes sans celle sur le SCR. On calcule les nouvelles variations d'exposition Y_t . Enfin, on réalise la même régression linéaire de Y_t sur les paramètres précédents.

Coefficients	Estimation	Erreur-type	Statistique t	Probabilité
Constante	-0,064407137	0,040512722	-1,589800299	0,130303216
ΔX_t	0,422220712	0,249009292	1,695602237	0,108196676
$\Delta^2 X_t$	1,055847286	0,387905713	2,72191734	0,014495775

Figure IV.6: Résultats de la régression des variations d'exposition sur la vitesse et l'accélération des prix en mono objectif

Voici les conclusions pour la stratégie :

- Augmenter l'exposition si les prix augmentent
- Augmenter plus fortement l'exposition lorsque les prix sont en pleine remontée suite à une « vallée » ou minimum que lorsqu'ils s'apprêtent à gagner un « pic » ou maximum (dû au coefficient positif lié à l'accélération des prix)

L'interprétation de ces analyses semble plus plausible face à une réalité où en période de forte demande, les prix sont au plus bas. Les assureurs ne sont pas prêts dans une telle situation à couvrir des risques. Ils réduisent donc leur couverture d'assurance, ce qui réduit l'offre d'assurance et ainsi les prix finissent par remonter. Ils sont donc au paroxysme de leur appétence au risque et vont chercher à développer davantage la *LoB* en acceptant de plus en plus de contrats.

Malgré ces interprétations criantes de contradictions, il convient tout de même de donner une explication mathématique.

Explications des différences

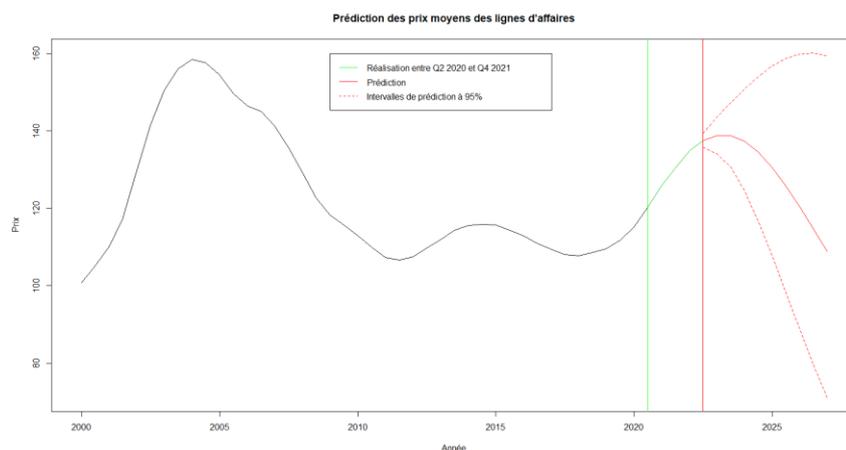
Ces différences d'interprétation proviennent de la contrainte de minimisation du SCR qui ne figure pas dans le problème mono-objectif. En effet, lors d'une chute de prix jusqu'à une « vallée », la décision unanime pour les 2 problèmes d'optimisation est de baisser l'exposition. Seulement lors de la remontée des prix, le problème mono-objectif ne cible pas la minimisation du SCR, ce qui engendre une plus grande liberté à augmenter de l'exposition. Or le problème bi-objectif doit prendre en considération, ce qui limite fortement ces augmentations. Le problème vient de la contrainte pénalisante du SCR dans le problème bi-objectif. Il faut que le résultat dégagé par l'assureur soit suffisant pour ne pas être pénalisé dans son exposition.

Exposition optimale en période de stabilité des prix et de résultat de souscription

Notons également un rejet de la significativité de la constante dans les différentes régressions linéaires réalisées (p – *value* très élevée), ce qui incite l'assureur à ne prendre aucune décision sur son exposition quand les prix ou le résultat de souscription varient très peu voire pas du tout (toutes les variations valent 0). Ce choix est judicieux. En effet, quand une incertitude pèse sur la dynamique future des prix ou sur le résultat de souscription, il convient à l'assureur de maintenir son exposition telle quelle.

Modulation de l'exposition à venir

Les prix modélisés confirment bien la stratégie de décision établie dans les conclusions avant. En effet, les prix modélisés de la moyenne des *LoB* estiment l'atteinte d'un pic en 2023 suivi d'une chute pour les années à suivre.



Ce qui explique une baisse de l'exposition et valide par conséquent les recommandations du jeu de décision. (cf *Figure IV.7* avec les variations d'exposition et leurs intervalles de confiance).

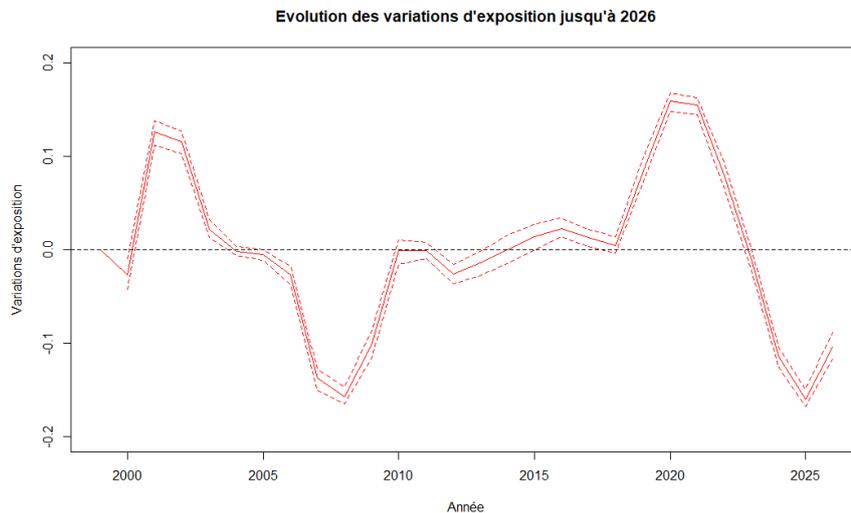


Figure IV.7: Scénario des variations d'exposition au-delà de 2022

4.3 Modèle d'optimisation avec modulation dynamique de la limite du SCR

Dans cette section, on va aborder un cadre d'optimisation plus relâché qu'on ne l'avait défini dans la partie 3. En effet, nous allons supprimer la contrainte fixe liée au *SCR* afin de mettre en lumière le bénéfice supplémentaire que peut avoir un assureur à moduler la limite définie dans son appétence au risque.

En d'autres termes, il s'agit de déterminer si en modulant sa limite, l'assureur peut engranger de meilleurs résultats de souscription tout en ne dégradant pas son ratio de solvabilité. Et le cas échéant, il serait intéressant de se pencher sur la fréquence et les règles selon lesquelles il peut la réviser.

Deux cadres sont alors envisagés. Dans le 1^{er}, on supprime la contrainte liée au *SCR* et dans le 2nd, on définit une limite du *SCR* variable en fonction de la dynamique des prix.

Suppression de la contrainte liée au *SCR*

Nous avons donc exécuté 10000 fois l'algorithme NSGA-II sans la contrainte sur le *SCR* afin de stabiliser les résultats. On obtient les couples (*Résultat de Souscription ; SCR*) optimaux sur la frontière de Pareto. Ainsi, de cette absence de limite de *SCR*, naissent un grand nombre de couples aux valeurs astronomiques.

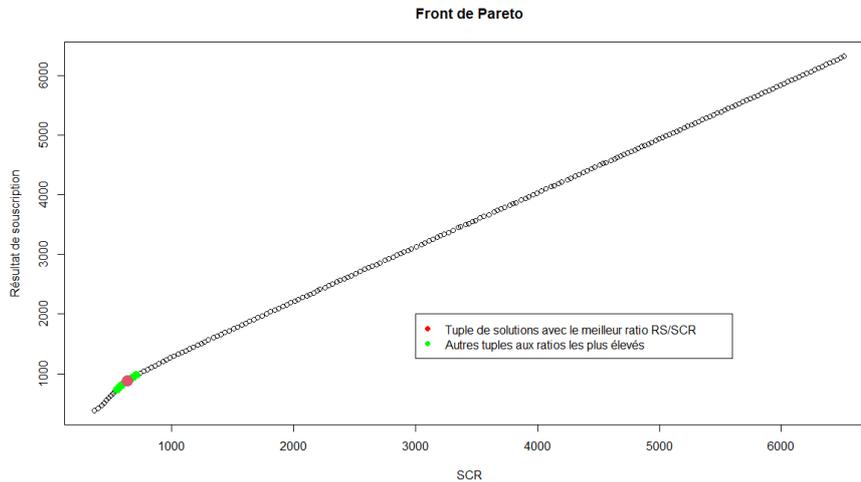


Figure IV.8: Groupe de solutions sur le Front de Pareto maximisant le ratio RS/SCR dans un problème sans contrainte de SCR

L'assureur peut opter pour le ou les 10 couples parmi les 200 sur la frontière efficiente qui maximisent le rapport *Résultat de Souscription/SCR* de sorte à conserver un ratio de solvabilité acceptable par rapport au problème d'optimisation précédent.

Année	Variation de prix	Variation d'exposition	Exposition	Prime	Frais	Sinistre	Résultat de souscription	SCR	Ratio de solvabilité	Année	Variation de prix	Variation d'exposition	Exposition	Prime	Frais	Sinistre	Résultat de souscription	SCR	Ratio de solvabilité		
4Q99	0,00%	0,00%	100,00	100,00	25,00	75,00	0,00	20,00	2,50	4Q99	0,00%	0,00%	100,00	100,00	25,00	75,00	0,00	20,00	2,50		
4Q00	9,34%	-4,80%	95,20	104,09	23,80	71,40	8,89	19,04	1,51	4Q00	9,34%	18,43%	118,43	129,49	29,61	88,82	11,06	23,69	1,40		
4Q01	17,98%	14,47%	108,98	140,57	27,24	81,73	31,60	21,80	1,49	4Q01	17,98%	18,44%	140,26	180,93	35,07	105,20	40,67	28,05	1,42		
4Q02	15,74%	12,79%	122,92	183,51	30,73	92,19	60,59	24,58	1,77	4Q02	15,74%	18,82%	166,65	248,80	41,66	124,99	82,15	33,33	1,75		
4Q03	5,35%	1,64%	124,93	196,50	31,23	93,70	71,56	24,99	2,02	4Q03	5,35%	18,25%	197,06	309,94	49,27	147,80	112,87	39,41	2,05		
4Q04	-2,56%	-0,09%	124,82	191,30	31,20	93,61	66,48	24,96	2,14	4Q04	-2,56%	16,87%	230,31	352,97	57,58	172,73	122,66	46,06	2,20		
4Q05	-5,17%	-0,39%	124,34	180,70	31,08	93,25	56,37	24,87	2,16	4Q05	-5,17%	10,77%	255,10	370,75	63,78	191,33	115,65	51,02	2,22		
4Q06	-3,51%	-1,90%	121,98	171,06	30,49	91,48	49,08	24,40	2,14	4Q06	-3,51%	-14,38%	218,41	306,29	54,60	163,81	87,88	43,68	2,18		
4Q07	-8,55%	-14,03%	104,87	134,49	26,22	78,65	29,63	20,97	2,06	4Q07	-8,55%	-17,80%	179,53	230,25	44,88	134,65	50,72	35,91	2,10		
4Q08	-8,48%	-16,68%	87,38	102,57	21,84	65,53	15,19	17,48	1,97	4Q08	-8,48%	-18,07%	147,08	172,65	36,77	110,31	25,56	29,42	1,99		
4Q09	-4,53%	-11,41%	77,41	86,74	19,35	58,05	9,34	15,48	1,88	4Q09	-4,53%	-17,57%	121,25	135,87	30,31	90,93	14,63	24,25	1,90		
4Q10	-4,94%	0,38%	77,70	82,77	19,42	58,27	5,07	15,54	1,79	4Q10	-4,94%	-16,52%	101,22	107,82	25,30	75,91	6,69	20,24	1,82		
4Q11	0,14%	-0,28%	77,48	82,66	19,37	58,11	5,17	15,50	1,70	4Q11	0,14%	-12,08%	88,99	94,94	22,35	66,74	5,94	17,80	1,76		
4Q12	4,09%	-2,85%	75,28	83,59	18,82	56,46	8,31	15,06	1,64	4Q12	4,09%	-4,14%	85,31	94,73	21,33	63,98	9,42	17,06	1,71		
4Q13	3,35%	-1,67%	74,02	84,95	18,51	55,52	10,93	14,80	1,60	4Q13	3,35%	-3,11%	82,66	94,86	20,66	61,99	12,20	16,53	1,68		
4Q14	0,09%	-0,03%	74,00	85,00	18,50	55,50	11,00	14,80	1,56	4Q14	0,09%	2,09%	84,38	96,93	21,10	63,29	12,54	16,88	1,64		
4Q15	-2,48%	1,46%	75,08	84,11	18,77	56,31	9,02	15,02	1,51	4Q15	-2,48%	0,91%	85,15	95,39	21,29	63,87	10,23	17,03	1,60		
4Q16	-3,11%	2,24%	76,76	83,31	19,19	57,57	6,55	15,35	1,46	4Q16	-3,11%	4,91%	89,33	96,96	22,33	67,00	7,62	17,87	1,56		
4Q17	-1,43%	1,20%	77,68	83,10	19,42	58,26	5,42	15,54	1,42	4Q17	-1,43%	4,28%	93,16	99,66	23,29	69,87	6,59	18,63	1,52		
4Q18	1,66%	-0,73%	77,11	83,87	19,28	57,84	6,75	15,42	1,38	4Q18	1,66%	8,81%	101,37	110,25	25,34	76,02	8,89	20,27	1,48		
4Q19	5,13%	7,06%	82,56	94,39	20,64	61,92	11,84	16,51	1,35	4Q19	5,13%	12,22%	113,75	130,06	28,44	85,31	16,31	22,75	1,45		
4Q20	9,23%	16,11%	95,85	119,72	23,96	71,89	23,86	19,17	1,34	4Q20	9,23%	15,56%	131,45	164,18	32,86	98,59	32,72	26,29	1,44		
4Q21	7,13%	15,17%	110,40	147,71	27,60	82,80	37,32	22,08	1,36	4Q21	7,13%	15,83%	152,26	203,72	38,06	114,19	51,47	30,45	1,45		
TOTAL									539,96	433	TOTAL									844,29	617
Fonds propres initiaux									50		Fonds propres initiaux									50	

Figure IV.9: Comparaison entre 2 méthodes d'optimisation sur le ratio de solvabilité (avec contrainte de SCR à gauche et sans contrainte de SCR à droite)

Ainsi, on peut voir que dans l'optimisation sans contrainte de limite pour le SCR, l'assureur réalise un meilleur résultat de souscription que dans l'optimisation avec contrainte de SCR. Cependant, l'assureur peut voir son ratio de solvabilité baisser à cause d'un trop grand SCR dû à sa décision de souscrire à davantage de contrats comme en témoignent les variations d'exposition plus grandes.

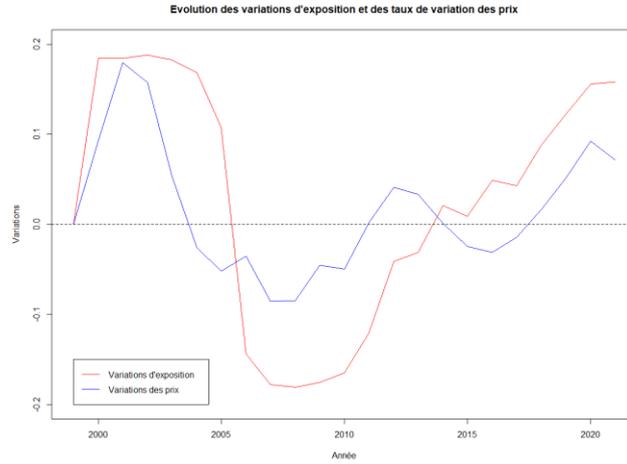


Figure IV.10: Corrélation positive entre variations d'exposition et les taux de variation des prix dans un problème sans contrainte de SCR

A l'instar du problème avec contrainte sur le SCR, une forte corrélation entre les variations d'exposition Y_j et les taux de variation des prix ΔX_t : $(\rho_{\Delta X_j, Y_j} = 0.72) \forall j \in [1; N]$ avec N la dernière année.

Limite supérieure du SCR variable en fonction de la dynamique des prix

Nous redéfinissons de nouvelles contraintes du problème d'optimisation présenté dans la partie 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta} RS = \sum_{i=0}^{N-1} Primes_{i+1} - (Sinistres + Frais)_{i+1} \\ \min_{\delta} SCR = \sum_{i=0}^{N-1} SCR_i \times (1 + \delta_{i+1}) \end{array} \right.$$

$$s. c \left\{ \begin{array}{l} SCR_{i+1} \leq s_{i+1} = s_i \times \mathbb{I}_{\Delta X_t=0} + s_i \times 1.1 \times \mathbb{I}_{\Delta X_t>0} + s_i \times 0.9 \times \mathbb{I}_{\Delta X_t<0} \text{ avec } s_0 = 25 \\ Primes_i \geq p_{i+1} = p_i \times \mathbb{I}_{\Delta X_t=0} + p_i \times 1.1 \times \mathbb{I}_{\Delta X_t>0} + p_i \times 0.9 \times \mathbb{I}_{\Delta X_t<0} \text{ avec } p_0 = 80 \\ \delta_i \in [-0.2; 0.2] \end{array} \right.$$

En effet, pour une année i , si les prix montent, on rehausse la limite s_i du SCR de 10% afin que l'assureur puisse augmenter son appétence au risque en souscrivant à davantage de contrats. L'assureur rehausse également de 10% sa limite inférieure du niveau de primes afin de faire du profit. En cas de baisse des prix, l'assureur diminue sa limite d'appétence au risque de 10%. La limite inférieure du niveau de primes encaissées p_i doit également baisser de 10% car l'assureur fait face à une perte de profit et donc sa limite inférieure de niveau de primes encaissées doit diminuer également. Ces variations d'une année à l'autre sont incluses dans l'intervalle des variations d'exposition $\delta_i \in [-0.2; 0.2]$ afin de permettre à l'assureur une marge de manœuvre plus grande

dans sa variation d'exposition afin de respecter les contraintes. Sans ces contraintes, il n'y existe pas de région de solutions faisables au problème.

Nous avons donc exécuté 10000 fois l'algorithme NSGA-II afin de stabiliser les résultats. Nous réalisons les mêmes étapes que dans le cas de la suppression de contrainte sur le SCR en prenant le couple (Résultat de Souscription ; SCR) au meilleur rapport Résultat de Souscription/SCR

Année	Variation de prix	Variation d'exposition	Exposition	Prime	Frais	Sinistre	Résultat de souscription	SCR	Ratio de solvabilité	Année	Variation de prix	Variation d'exposition	Exposition	Prime	Frais	Sinistre	Résultat de souscription	SCR	Ratio de solvabilité
4Q99	0,00%	0,00%	100,00	100,00	25,00	75,00	0,00	20,00	2,50	4Q99	0,00%	0,00%	100,00	100,00	25,00	75,00	0,00	20,00	2,50
4Q00	9,34%	18,43%	118,43	129,49	29,61	88,82	11,06	23,69	1,40	4Q00	9,34%	16,29%	116,29	127,15	29,07	87,22	10,86	23,26	1,41
4Q01	17,98%	18,44%	140,26	180,93	35,07	105,20	40,67	28,05	1,42	4Q01	17,98%	18,82%	138,18	178,24	34,54	103,63	40,06	27,64	1,42
4Q02	15,74%	18,82%	166,65	248,80	41,66	124,99	82,25	33,33	1,75	4Q02	15,74%	18,39%	163,59	244,24	40,90	122,69	80,64	32,72	1,75
4Q03	5,35%	18,25%	197,06	309,94	49,27	147,80	112,87	39,41	2,05	4Q03	5,35%	11,46%	182,34	286,78	45,58	136,75	104,44	36,47	2,04
4Q04	-2,56%	16,87%	230,31	352,97	57,58	172,73	122,66	46,06	2,20	4Q04	-2,56%	-10,15%	183,84	251,10	40,96	122,88	87,26	32,77	2,16
4Q05	-5,17%	10,77%	255,10	370,75	63,78	191,33	115,65	51,02	2,22	4Q05	-5,17%	-10,65%	146,39	212,75	36,60	109,79	66,36	29,28	2,18
4Q06	-3,51%	-14,38%	218,41	306,29	54,60	163,81	87,88	43,68	2,18	4Q06	-3,51%	-15,83%	123,21	172,78	30,80	92,41	49,57	24,64	2,16
4Q07	-8,55%	-17,80%	179,53	230,25	44,88	134,65	50,72	35,91	2,10	4Q07	-8,55%	-19,35%	99,37	127,45	24,84	74,53	28,07	19,87	2,10
4Q08	-8,48%	-18,07%	147,08	172,65	36,77	110,31	25,56	29,42	1,99	4Q08	-8,48%	-19,48%	80,02	93,92	20,00	60,01	13,91	16,00	2,02
4Q09	-4,53%	-17,57%	121,25	135,87	30,31	90,93	14,63	24,25	1,90	4Q09	-4,53%	-19,18%	64,67	72,47	16,17	48,50	7,80	12,93	1,96
4Q10	-4,94%	-16,52%	101,22	107,82	25,30	75,91	6,60	20,24	1,82	4Q10	-4,94%	-16,25%	54,16	57,69	13,54	40,62	3,53	10,83	1,89
4Q11	0,14%	-12,08%	88,99	94,94	22,25	66,74	5,94	17,80	1,76	4Q11	0,14%	8,22%	98,61	62,53	14,65	43,96	3,91	11,72	1,83
4Q12	4,09%	-4,14%	85,31	94,73	21,33	63,98	9,42	17,06	1,71	4Q12	4,09%	6,42%	62,38	69,26	15,59	46,78	6,88	12,48	1,78
4Q13	3,35%	-3,11%	82,66	94,86	20,66	61,99	12,20	16,53	1,68	4Q13	3,35%	7,86%	67,28	77,21	16,82	50,46	9,93	13,46	1,74
4Q14	0,09%	2,09%	84,38	96,93	21,10	63,29	12,54	16,88	1,64	4Q14	0,09%	8,29%	72,86	83,69	18,21	54,64	10,83	14,57	1,70
4Q15	-2,48%	0,91%	85,15	95,39	21,29	63,87	10,23	17,03	1,60	4Q15	-2,48%	-7,42%	67,45	75,56	16,86	50,59	8,11	13,49	1,65
4Q16	-3,11%	4,91%	89,33	96,96	22,33	67,00	7,62	17,87	1,56	4Q16	-3,11%	-7,33%	62,51	67,85	15,63	46,88	5,34	12,50	1,61
4Q17	-1,43%	4,28%	93,16	99,66	23,29	69,87	6,50	18,63	1,52	4Q17	-1,43%	-9,02%	56,87	60,84	14,22	42,65	3,97	11,37	1,57
4Q18	1,66%	8,81%	101,37	110,25	25,34	76,03	8,88	20,27	1,48	4Q18	1,66%	8,58%	61,75	67,16	15,44	46,32	5,41	12,35	1,54
4Q19	5,13%	12,22%	113,75	130,06	28,44	85,31	16,31	22,75	1,45	4Q19	5,13%	9,12%	67,38	77,04	16,85	50,54	9,66	13,48	1,51
4Q20	9,23%	15,56%	131,45	164,18	32,86	98,59	32,72	26,29	1,44	4Q20	9,23%	15,76%	78,00	97,42	19,50	58,50	19,42	15,60	1,50
4Q21	7,13%	15,83%	152,26	203,72	38,06	114,19	51,47	30,45	1,45	4Q21	7,13%	16,30%	90,72	121,39	22,68	68,04	30,66	18,14	1,51
TOTAL							844,29	617			TOTAL							606,64	436
Fonds propres initiaux							50				Fonds propres initiaux							50	

Figure IV.11: Comparaison entre 2 méthodes d'optimisation sur le ratio de solvabilité (sans contrainte de SCR à gauche et avec contrainte dynamique de SCR à droite)

Il s'avère que la méthode avec une limite dynamique du SCR donne un moins bon résultat de souscription mais globalement de meilleurs ratios de solvabilité qu'avec une suppression de la limite. En faisant ce choix de stratégie, l'assureur est certes plus contraint dans son appétence au risque mais plus prudent. Ses variations d'exposition Y_j sont beaucoup plus corrélées aux taux de variation des prix ΔX_t : $(\rho_{\Delta X_j, Y_j} = 0.90) \forall j \in [1; N]$ avec N la dernière année.

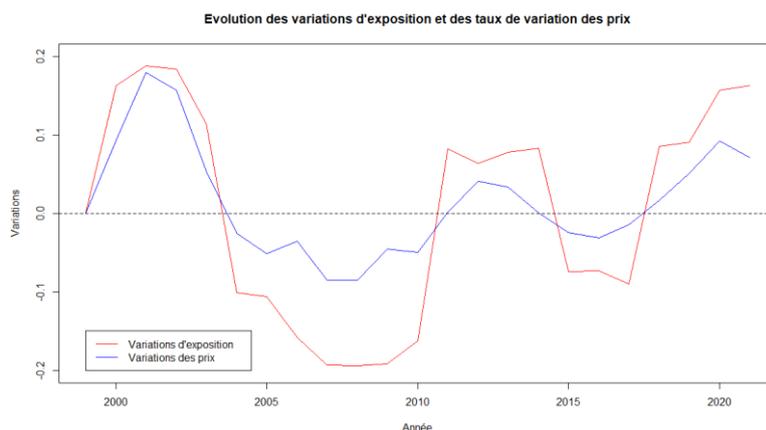


Figure IV.12: Corrélation positive entre les variations d'exposition et les taux de variation des prix dans un problème avec contrainte variable de SCR

Points communs entre les 2 cadres de modulation de la limite supérieure du SCR

Les analyses concernant l'influence des indicateurs de suivi stratégiques sur l'exposition nous donnent les mêmes conclusions que dans le problème avec contrainte fixe sur le *SCR*.

Observons le lien entre le *SCR* et la dynamique des prix. On réalise une régression linéaire de la différence de *SCR* d'une année à l'autre sur les taux de variation des prix ΔX_t

Ces analyses proposent une stratégie alternative à l'assureur en maintenant un ratio de solvabilité acceptable. Elles lui conseillent de réviser la limite de son *SCR* selon la période des prix (baissière ou haussière). Ainsi, pour chaque année, si ces derniers montent, la limite du *SCR* sera augmentée. S'ils baissent, cette limite sera réduite. Ces changements imposent donc à l'assureur de suivre une gouvernance d'appétence au risque. C'est une limite dépendante de la dynamique des prix.

De plus, si l'assureur choisit une contrainte dynamique sur son *SCR*, il ferait un bon moins résultat de souscription que dans un cadre sans contrainte mais aurait un meilleur ratio de solvabilité. L'assureur se trouve donc dans un compromis entre profit et prudence.

De surcroît, la modulation dynamique de la limite du *SCR* permet à l'assureur de ne pas tomber dans une aberration stratégique à cause de la fixité d'une contrainte.

4.4 Synthèse de la stratégie de souscription

In fine, la stratégie de souscription d'un assureur vue sous le prisme des modèles présentés ci-dessus présente des enjeux et des limites.

Il est montré qu'une appétence au risque insensible à la dynamique des prix peut s'avérer non optimale pour le résultat de souscription d'un assureur. S'il choisit d'adapter son exposition à cette dynamique, il maximise sa profitabilité sans dégrader son ratio de solvabilité.

Quand les prix montent ou que l'assureur enregistre un meilleur résultat de souscription que l'année passée, il est légitime d'augmenter son appétence au risque en souscrivant à davantage de contrats. Cependant au fur et à mesure que les prix montent, les assureurs constatent une baisse progressive de la demande. Par conséquent, les prix baisseront. C'est là toute la dynamique du cycle, ce qui fait que l'exposition s'auto-régulera.

Quant au résultat de souscription, il augmente en période haussière des prix ce qui amène les assureurs à disposer de résultats techniques suffisamment satisfaisants pour envisager de baisser leurs prix, bien que cette tendance ne s'observe plus depuis 2018 (cf. *Figure I.11*).

Plus encore, l'assureur a le choix de moduler sa limite d'appétence au risque (augmentation ou baisse) annuellement en fonction de la dynamique des prix (période respectivement haussière ou baissière). Ainsi, il ne se prive pas d'accumuler de plus grands bénéfices tout en ne dégradant pas son ratio de solvabilité. La question quant à la fréquence de révision de cette limite peut également se poser puisqu'elle pourrait impacter son résultat de souscription et son ratio de solvabilité.

D'un point de vue opérationnel, un arsenal de solutions s'offre à l'assureur afin de lui permettre d'augmenter son exposition et sa limite d'appétence au risque. Il peut proposer de nouveaux produits d'assurance avec des garanties plus larges afin de capter de nouveaux marchés. Mais par conséquent, la typologie de risque est susceptible de changer avec une sinistralité plus élevée. Pour pallier cette contrainte, il peut aussi envisager la stratégie de la fusion-acquisition de structures assurantielles afin de garder un certain monopole sur le marché assurantiel en cas de montée des prix. La solution de la réassurance peut également se présenter pour lui permettre une plus grande liberté à accepter de nouveaux contrats.

Il est important de noter une limite fondamentale du problème : les résultats dépendent des conditions initiales et des contraintes imposées.

On peut également reprocher l'hypothèse simpliste de linéarité entre l'exposition et le risque d'une part et les sinistres et frais d'autre part. Avec ces grandes simplifications, ce problème d'optimisation demeure inapte à modéliser un monde économique théorique mais peut donner des pistes d'exploration afin d'aider les compagnies d'assurance dans leur processus de décision sans pour autant le remplacer.

Cependant, ce problème est inefficace face à la conjoncture économique en perpétuel changement (hausse des taux d'intérêt, inflation économique se traduisant en inflation sinistre). Ces mouvements ne sont donc pas intégrés au modèle, ce qui nous permet d'introduire ses limites.

V. Limites et perspectives d'évolution

Cette partie recense les limites des modèles étudiés et propose également des axes d'amélioration.

5.1 Analyse des cycles de marché

D'emblée, les régressions univariées et multivariées n'ont pas pris en considération l'environnement économique et financier actuel dans leur modèle avec l'inflexion des taux d'inflation et d'intérêt. Mais dans ce cas, il n'aurait été possible de réaliser qu'une seule prédiction. Autrement dit, pour des prédictions plus larges, si on devait implémenter un modèle pour chaque cycle propre à ces 2 facteurs, il faudrait prendre en considération plusieurs moteurs pour chacun dont le 1^{er} étant le lien direct entre les 2. En effet, dans notre contexte, une inflation engendre généralement une remontée des taux par les banques centrales du monde afin de la freiner.

Quant au jugement d'expert, le peu de données dont on disposait sur l'offre et la demande pour la *LoB Workers Compensation* ne nous permettait pas de réaliser un modèle de prédiction assouplissement/durcissement des prix au vu du déséquilibre des classes en faveur de l'assouplissement des prix pour cette *LoB*. Il apparaît donc caduc de réaliser des modèles de classification par crainte de commettre du sur-apprentissage.

En outre, ce jugement d'expert aurait pu être complété par la tendance des articles sur l'évolution des prix du marché assurantiel. Mettre en perspective cette tendance des articles (sentiment d'assouplissement ou de durcissement des prix) avec la trajectoire réelle des prix ferait donc l'objet d'un modèle où l'on pourrait capter la tendance des prix à partir de ces articles. Si le modèle donne des résultats pertinents, les articles pourraient s'avérer être un excellent informateur sur la trajectoire des prix. Cette tendance des articles est déterminée par une méthode de comptage des mots clés en faveur d'une période d'assouplissement ou de durcissement des prix. Pour une meilleure contextualisation de ces mots clés en faveur d'une période, une approche souhaitable serait l'utilisation du *Word Embedding* (prolongement lexical). En particulier, elle permet de construire un modèle de données avec la phase du cycle des prix en variable réponse et les articles d'actualité sur l'assurance parus la même année en variable prédictive. Ensuite, elle isole chaque mot clé d'un texte issu d'un article par des techniques de nettoyage (minuscule, suppression de la ponctuation, des conjonctions grammaticales, etc.) puis de créer un champ lexical associé. Ainsi, chaque mot du champ lexical sera dénombré dans l'article afin de construire un modèle avec le nombre d'occurrences de chaque mot dans le champ des variables prédictives. On teste le modèle

sur l'année en cours afin de prédire la période du cycle des prix. C'est donc une méthode d'apprentissage d'une représentation de mots.

5.2 Appétence au risque

Par ailleurs, le problème d'optimisation ne tient pas compte de l'environnement économique. En d'autres termes, l'inflation impacte négativement le résultat de souscription des assureurs avec des sinistres et des frais qui augmentent. Elle incite l'assureur à réduire drastiquement son exposition. De même, elle peut avoir un impact sur les *SCR non-vie*. Si l'inflation est plus élevée que prévu, les coûts des sinistres ayant eu lieu mais n'ayant pas été payés vont augmenter. Ce qui peut augmenter les provisions nécessaires. Cette inflation impacte également le coût des sinistres futurs.

En outre, la hausse des taux d'intérêt permet d'augmenter les produits financiers des primes placées surtout pour les risques longs comme la construction et les dommages corporels mais le secteur de l'Assurance Non-Vie est globalement composé de risques courts contrairement au secteur de l'Assurance Vie. Ainsi, les effets positifs de cette hausse sont moins importants. Les taux d'intérêt ont également un impact significatif sur le *SCR non-vie*. En effet, si les flux financiers générés sont considérés en vision économique, alors ils sont escomptés avec une courbe des taux sans risque. Cela peut réduire le montant du *SCR non-vie* et donc des *SCR primes* et *SCR réserves*.

Plusieurs simplifications ont été opérées dans le cadre de l'étude de la stratégie de souscription, fonction de la dynamique des prix.

La sinistralité n'est pas aléatoire d'une année à l'autre. Elle est seulement linéaire à l'exposition. Dans un contexte plus réaliste tenant compte des événements mondiaux de grande ampleur, on aurait pu envisager un coefficient appliqué à la sinistralité chaque année en fonction du contexte macroéconomique (augmentation de la sinistralité lors d'événements catastrophiques mondiaux).

Nous n'avons également pas tenu compte de la réalité quant à la mise en place de la stratégie de souscription. En effet, nous avons supposé que l'exposition soit modulable à l'infini et instantanément. De plus, la prédiction n'est efficiente que sur un horizon court alors que la vision d'appétence au risque peut être plus longue, d'où la nécessité de réaliser des périodes de retour sur les indicateurs d'appétence au risque sur le même horizon que la prédiction des prix afin de s'assurer de l'adéquation de la stratégie d'entreprise avec la dynamique des prix.

Plusieurs effets sont également omis dans cette étude : l'effet *SCR marché* (seul le *SCR non-vie* est calculé ici) mais également l'effet diversification du portefeuille avec les *LoBs*. Pour ce dernier point et au vu de la corrélation positive mais imparfaite entre les *LoBs*, il aurait fallu intégrer la modélisation des cycles des *LoBs* au problème d'optimisation. On aurait rajouté un poids variable d'une année à l'autre pour chacune de ces *LoBs* en fonction de leur rentabilité singulière dans le portefeuille. Par conséquent, le problème d'optimisation reviendrait à trouver les variations d'exposition et les poids des *LoBs* optimaux.

Cette étude utilise les prix d'assurance IARD du marché américain, faute de données publiques sur le marché européen. Ce qui rend l'étude de l'appétence au risque difficilement transposable sur le marché européen. Cependant, on peut imaginer des interdépendances entre le cycle de marché européen et américain au vu des événements de grande ampleur qui affectent autant les assureurs européens qu'américains, notamment dans la réassurance (attentats du WTC, ouragan Katrina, pandémie de Covid-19, etc.).

En prenant en compte cette liste de simplifications, on pourrait alors implémenter un problème d'optimisation plus proche de la réalité. Plus encore, on pourrait envisager une autre forme de problème d'optimisation tenant compte des effets de l'inflation : la minimisation du ratio combiné. Il faudrait donc modéliser cette métrique financière à la place des prix et les utiliser dans le cadre de l'appétence au risque. Cependant, il est compliqué de disposer des informations sur cette dernière (retard des données, faible richesse des données avec une fréquence uniquement annuelle) et de les traiter. En effet, il faudrait décorréliser l'inflation du niveau de catastrophes, information que l'on n'a pas toujours.

De surcroît, ce cadre réduit la notion d'exigences en capital au *SCR non-vie* car on a fait le choix de s'attarder sur les risques techniques. Si on s'intéresse de plus près au calcul du *SCR total*, d'autres modules de risque sont à prendre en compte comme le *SCR crédit* ou le *SCR marché* ainsi que leurs corrélations afin de les agréger. Or, ces derniers sont fortement impactés par ce changement d'environnement macroéconomique.

Conclusion

Somme toute, l'objectif de ce mémoire était de comprendre comment un assureur arrive à moduler son appétence au risque en fonction de la dynamique des prix assurantiels dans l'IARD.

Dans un 1^{er} temps, il a fallu identifier les facteurs économiques qui ont un impact sur ces prix. Une corrélation positive s'observe entre l'augmentation des prix et les événements de catastrophe et l'inflation. Cependant, il est difficile de prévoir les variations de prix en se basant uniquement sur ces facteurs de manière individuelle, car l'impact sur les prix dépend notamment de la situation globale du marché. De plus, ils ne permettent de réaliser qu'une prédiction des futurs prix sur du très court terme faute de pouvoir modéliser et prédire l'évolution de ces mêmes facteurs.

C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers des méthodes statistiques en modélisant les prix des lignes d'affaire en fonction de leur comportement passé ou de celui des autres lignes d'affaire. Les statistiques descriptives ont permis de mettre en évidence que l'accélération ou la décélération des prix semble dépendre des variations de prix et des prix *niveaux*. On observe également une corrélation positive entre les cycles de prix pour chaque ligne d'affaire. Ainsi, ces méthodes se basent sur les propriétés mathématiques des prix. Ainsi, considérer la co-trajectoire des lignes d'affaire permet d'offrir une meilleure précision et une plus grande flexibilité pour capturer les tendances des prix et perdre le moins d'information possible sur leur dynamique.

Si un assureur utilise ces méthodes-là afin de modéliser les prix, il doit être conscient que les prédictions sont de moins en moins fiables sur le long terme avec un intervalle qui s'élargit au fur et à mesure du temps. Donc il lui est recommandé de se fixer une fenêtre courte d'années (1-2 ans) dans lequel le prix varie de manière monotone (plus grande confiance envers une prédiction de baisse ou de hausse). L'assureur ne doit pas chercher à anticiper une stratégie de souscription pour un futur trop lointain.

Néanmoins, si ce modèle de projection des variations de prix basé sur les observations du cycle du marché peut être utilisé, l'expertise qualitative via le sentiment de marché reste importante pour anticiper leurs variations futures.

Dans un 2nd temps, un exercice d'optimisation a été effectué en utilisant des chiffres fictifs pour déterminer comment faire évoluer l'exposition sous-jacente de manière à maximiser le résultat et minimiser les exigences en capital, tout en respectant des contraintes de prime, de variation d'exposition et des exigences en capital.

Les résultats de l'algorithme nous ont indiqué qu'il peut être optimal de développer ou de réduire l'exposition dans une ligne d'affaire en fonction des variations de prix attendus. Ce qui prouve que la prise en compte de la dynamique des prix permet à l'assureur de remanier en permanence son appétence au risque (exprimée ici sous la forme des variations d'exposition). Ce point est essentiel afin d'optimiser sa stratégie de souscription. Nous avons donc décliné cette stratégie sous plusieurs approches dans le cadre du problème d'optimisation.

Pour ce faire, on a d'abord montré à partir d'un exemple qu'une appétence au risque qui prend en compte la dynamique des prix permet à l'assureur d'avoir de meilleurs résultats que si on la garde fixe. Ainsi, si un assureur décide d'aligner sa politique tarifaire sur celle du marché IARD alors il lui est fortement recommandé d'avoir une stratégie d'appétence au risque qui s'ajuste en fonction de cette dynamique.

Ensuite, nous avons réalisé un jeu de décision sur les indicateurs leviers de la stratégie de souscription de l'assureur. En effet, il est important pour les décisionnaires de savoir comment et à quelle fréquence le cadre de l'appétence au risque peut évoluer de façon dynamique pour permettre une meilleure latitude dans les modulations de l'exposition et de la limite d'appétence au risque.

In fine, si les prix du marché exercent une influence sur l'appétence au risque des assureurs, il convient de ne pas oublier les limites de ce modèle. D'emblée, on fait de fortes hypothèses sur le problème d'optimisation (risque technique non-vie seul évoqué, sinistralité non aléatoire, linéarité entre l'exposition et le risque d'une part et les sinistres et frais d'autre part). On suppose également que l'exposition est modulable à l'infini et instantanément et que la prédiction des prix marche sur un horizon court alors que la vision d'appétence au risque peut être plus longue. Par ailleurs, cette appétence est définie dans un cadre insensible à la conjoncture économique où l'on ne suppose pas d'inflation sinistre ni de remontée des taux d'intérêt qui en réalité sont autant de paramètres qui invitent l'assureur à se questionner sans cesse la meilleure stratégie de souscription à adopter. Avec ces grandes simplifications, ce problème d'optimisation est loin de constituer un outil révolutionnaire dans le processus de décision des compagnies d'assurance mais il peut fournir quelques pistes d'exploration et indications sur la meilleure stratégie de souscription à adopter pour un assureur.

En somme, l'impact du cycle des prix des assurances sur l'appétence au risque des assureurs dépendra de plusieurs facteurs, tels que les objectifs et le profil de risque de l'assureur, la situation sur le marché de l'assurance, la réglementation et la capacité de l'assureur à maintenir sa rentabilité malgré des coûts plus élevés pour la couverture des risques.

Bibliographie

- ARTEMIS. *Catastrophe bonds & ILS issued and outstanding by year.*
- Atlas Magazine. (2022). *Taux de pénétration de l'assurance aux Amériques en 2021.*
- Atlas Magazine. (2022). *Top 10 des marchés d'assurance non vie en 2021.*
- BILDER Chris. (2022). *Time series analysis : ARIMA (estimation, maximum likelihood).*
- BRUNEAU Catherine, S. N. (2015). *Cyclicity in the French Property-Liability Insurance Industry : New Findings over the Recent Period.*
- Commissioners, N. A. (2021). *U.S. Property & Casualty and Title Insurance Industries.*
- CIAB. *P/C Market Surveys.*
- DAUXOIS Jean-YVES. (2016). *Introduction à l'Étude des Séries Temporelles.*
- DEBEHOGNE Sophie, H. M.-V. (2021). *Solvency II review to strengthen insurance sector.*
- DIONNE Georges. (2013). *Handbook of Insurance, Chapter 23: Insurance price volatility and underwriting cycles.*
- DUTANG Christophe. (2012). *Etude des marchés d'assurance non-vie à l'aide d'équilibres de Nash et de modèles de risques avec dépendance.*
- Institute, I. I. . *Facts + Statistics : Industry overview.*
- Institute, I. I. . *Facts + Statistics : US Catastrophes.*
- Les Echos. (2022). *Assurance : une hausse des primes cinq années de suite.*
- LÜTKEPOHL, H. (1990). *Introduction to Multiple Time Series Analysis.*
- LÜTKEPOHL, H. (2001). *Vector autoregressive and vector error correction models.*
- OECD Data. . *Inflation (CPI).*
- OECD Data. . *Long-term interest rates.*
- SANDSTRÖM, A. (2010). *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice.*
- Society Of Actuaries. (2021). *Understanding the Current Underwriting Cycle—Difficult Times Extend Hard Market.*
- Swiss Re. *1980s: risk management and the liability crisis.*
- VALLEE, T., & YILDIZOGLU, M. (2001). *Présentation des algorithmes génétiques et de leurs applications en économie.*
- WANG, S., MAJOR, J., PAN, C., & LEONG, J. (2010). *U.S. Property-Casualty: Underwriting Cycle Modeling and Risk Benchmarks.*
- WICKLIN, R. (2019). *Critical values of the Kolmogorov-Smirnov test.*

Annexes

A. Détails de la régression à transition lisse (STR)

On spécifie le modèle STR pour chaque variable y_t de X_t de la façon suivante :

$$y_t = \phi \cdot x_t + \theta \cdot x_t \cdot F(s_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Avec $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p+k})$ et $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p+k})$

ϕ et θ représentent respectivement les parties linéaire et non linéaire de la dynamique

$$x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, z_{t1}, \dots, z_{tk})$$

Avec y_{t-i} les lags des variables endogènes $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

Et z_{tj} les variables exogènes $\forall j \in \{1, \dots, k\}$

$F(s_t; \gamma, c)$ est la fonction de transition telle que $F \in [0, 1]$

0 et 1 représentent les régimes extrêmes

γ , la pente qui mesure la vitesse de transition entre les 2 régimes

c , le seuil pour la variable de transition s_t

s_t est une variable exogène :

→ $s_t \leq c$ alors y_t est dans le 1^{er} régime (assouplissement des prix)

→ $s_t > c$ alors y_t est dans le 2nd régime (durcissement des prix)

→ $s_t \ll c$ alors $F = 0 \leftrightarrow y_t = \phi \cdot x_t + \varepsilon_t$ → $s_t \gg c$ alors $F = 1 \leftrightarrow y_t = (\phi + \theta) \cdot x_t + \varepsilon_t$

$F(s_t; \gamma, c)$ peut prendre différentes formes selon l'identification du modèle STR à venir :

$$\text{Pour } \gamma > 0 \rightarrow F = \begin{cases} \frac{1}{1 + \exp(-\gamma \times (s_t - c))} \leftrightarrow \text{fonction logistique (modèle LSTR)} \\ 1 - \exp(-\gamma \times (s_t - c)^2) \leftrightarrow \text{fonction exponentielle (modèle ESTR)} \end{cases}$$

Pour valider le modèle STR, 3 étapes sont indispensables :

- Tests de linéarité
- Choix du modèle STR (LSTR ou ESTR)
- Estimations et validations du modèle

Avant d'entamer le test de linéarité, il faut vérifier que les résidus du modèle VAR(p) ne soient pas autocorrélés par le test de Portemanteau. Une fois la vérification faite, le test va consister à s'intéresser à la partie non-linéaire de la dynamique de y_t . Il s'agit donc de sélectionner la variable de transition s_t parmi toutes les autres candidates qui rejette le plus l'hypothèse de linéarité.

$$\text{Soit } H_0 : \gamma = 0 \cup H'_0 : \phi = \theta$$

$$\text{vs } H_1 : \gamma > 0$$

On remplace $F(s_t; \gamma, c)$ par une approximation de Taylor au 3^{ème} ordre (autour de $\gamma = 0$).

$y_t = \beta_0 + \beta_1' \cdot x_t + \beta_2' \cdot x_t \cdot s_t + \beta_3' \cdot x_t \cdot s_t^2 + \beta_4' \cdot x_t \cdot s_t^3 + \eta_t H_0$ devient $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$
 s_t sera sélectionnée d'autant plus qu'elle rejette H_0 .

Les résultats obtenus pour cette étape sont les suivants. On considère la variable de transition s_t comme étant celle dont la statistique de Fisher F_0 est la plus faible pour ce test de linéarité. Ici, pour les séries y_t du ratio combiné CR et de la capacité cp , on trouve que la variable de transition qui rejette le plus ce critère de linéarité est la variable cp_{t-2} .

Table 5 : p-values of Linearity Tests and Model Selection Tests

Equation CR				
Transition Variable	F_0	F_4	F_3	F_2
dln_{t-1}	0.441	0.154	0.587	0.696
dln_{t-2}	0.121	0.070	0.552	0.200
cp_{t-1}	0.234	0.524	0.182	0.191
cp_{t-2}	0.030	0.068	0.119	0.148
$reass_{t-1}$	0.716	0.936	0.698	0.192
$reass_{t-2}$	0.924	0.811	0.591	0.820
$dintn_{t-1}$	0.652	0.839	0.196	0.710
$dintn_{t-2}$	0.146	0.126	0.239	0.353
$dlian_{t-1}$	0.423	0.895	0.509	0.081
$dlian_{t-2}$	0.931	0.907	0.793	0.525
$dlipc_{t-1}$	0.194	0.039	0.844	0.450
$dlipc_{t-2}$	0.300	0.193	0.509	0.320
Equation cp				
Transition Variable	F_0	F_4	F_3	F_2
dln_{t-1}	0.162	0.070	0.315	0.576
dln_{t-2}	0.222	0.878	0.039	0.385
cp_{t-1}	0.060	0.911	0.311	0.232
cp_{t-2}	0.026	0.049	0.056	0.312
$reass_{t-1}$	0.546	0.337	0.864	0.286
$reass_{t-2}$	0.700	0.760	0.634	0.292
$dintn_{t-1}$	0.407	0.474	0.253	0.428
$dintn_{t-2}$	0.512	0.194	0.493	0.259
$dlian_{t-1}$	0.553	0.877	0.188	0.471
$dlian_{t-2}$	0.815	0.459	0.582	0.922
$dlipc_{t-1}$	0.414	0.771	0.397	0.136
$dlipc_{t-2}$	0.445	0.776	0.745	0.070

Note : F_0 is the F-statistics of the linearity test. F_4 , F_3 and F_2 are the F-statistics of the model selection tests corresponding respectively to H_{04} , H_{03} and H_{02} .

Tests de linéarité F_0 et de spécification (F_2 , F_3 et F_4) du modèle STR

L'étape suivante va consister à spécifier le modèle STR, c'est-à-dire trouver le modèle le plus approprié.

$$H_{04} : \beta_4 = 0$$

$$H_{03} : \beta_3 = 0 \cup \beta_4 = 0 \quad H_{02} : \beta_2 = 0 \cup \beta_3 = \beta_4 = 0$$

Plusieurs cas se déclinent :

- Rejeter H_{04} revient à rejeter la spécification ESTR
- Accepter H_{03} revient à accepter la spécification LSTR
- Rejeter H_{03} puis accepter H_{02} revient à accepter la spécification ESTR
- Accepter H_{03} puis rejeter H_{02} revient à accepter la spécification LSTR
- Rejeter H_{02} et H_{04} plus fortement que H_{03} revient à accepter la spécification LSTR
- Rejeter H_{03} fortement que H_{02} et H_{04} revient à accepter la spécification ESTR

Les résultats listés en *Figure II.8* révèlent un fort rejet de H_{04} avec F_4 le plus petit pour la variable de transition cp_{t-2} , ce qui ne laisse pas d'autre choix plus adéquat qu'un modèle LSTR pour les séries CR et cp .

Figure 3.1: Transition Function for Equation CR

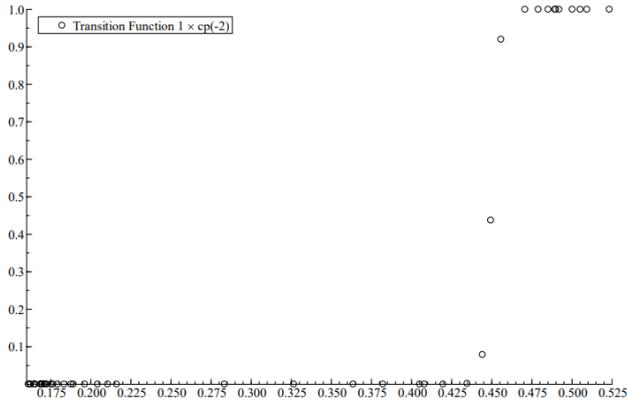
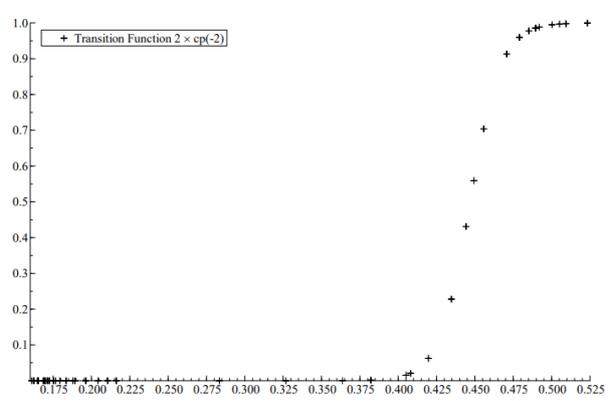


Figure 3.2: Transition Function for Equation cp



Fonction de transition logistique (LSTR) choisie pour CR et cp

L'étape finale consiste à estimer et valider le modèle après les spécifications. On réalise une régression non-linéaire par la méthode des moindres carrés généralisés afin de trouver les paramètres de seuil c et de pente γ ainsi que les vecteurs ϕ et θ du modèle.

Table 6 : Estimation of LSTR Model for Combined Ratio and Capacity Ratio

	CR_t	cp_t
First Regime		
CR_{t-1}	0.775*** (4.479)	
CR_{t-2}	-0.233* (-1.726)	
$dipm_{t-1}$		-0.403*** (-4.290)
cp_{t-1}		0.953*** (21.690)
constant		0.065*** (3.366)
Second Regime		
CR_{t-1}	-0.864*** (-3.304)	
cp_{t-1}		0.821*** (3.564)
$dlian_{t-1}$	0.151*** (3.143)	
$dlipc_{t-1}$		2.552*** (2.500)
constant		-0.467*** (-4.089)
γ	423.9	99
c	0.450	0.447
R^2	0.461	0.991
AIC	-6.748	-8.261
BIC	-6.503	-7.892
σ_{NL}	0.028	0.015
$V = \frac{\sigma_{NL}^2}{\sigma_L^2}$	0.886	0.882

Note : σ_{NL} is the residual standard deviation of the LSTR model. V is the ratio of the residual standard deviations in the estimated LSTR and linear models.

Estimation des paramètres du modèle STR

Il ne reste plus qu'à vérifier que les résidus du modèle ne soient pas corrélés, qu'il n'y ait plus de non-linéarité restante, que les paramètres estimés de seuil c et de pente γ soient constants et que la variable de transition s_t ne soit pas corrélée aux résidus : $Cov(s_t, \varepsilon_t) = 0$.

Table 7 : p-Values of Specification Tests for LSTR Model

Equation CR			Equation cp		
Autocorrelation residuals			Autocorrelation residuals		
LM(1)	0.408		LM(1)	0.990	
LM(4)	0.517		LM(4)	0.720	
LM(6)	0.591		LM(6)	0.884	
Parameter constancy			Parameter constancy		
	CR_{t-1}	$dlian_{t-1}$		$dipm_{t-1}$	$dlipec_{t-1}$
LM ₃	0.174	0.690	LM ₃	0.867	0.674
LM ₂	0.150	0.792	LM ₂	0.119	0.259
LM ₁	0.662	0.492	LM ₁	0.143	0.401
Nonlinearity			Nonlinearity		
F ₀	0.182		F ₀	0.549	
F ₄	0.448		F ₄	0.553	
F ₃	0.429		F ₃	0.279	
F ₂	0.753		F ₂	0.439	
Heteroscedasticity			Heteroscedasticity		
ARCH(1)	0.274		ARCH(1)	0.912	
ARCH(2)	0.412		ARCH(2)	0.884	
Normality			Normality		
SK	0.511		SK	0.970	
EK	3.428		EK	3.827	
JB	2.200		JB	2.440	

Table 8 : Covariance Matrix Between Transition variable and Residuals

Equation CR		Equation cp	
	cp_{t-2}		cp_{t-2}
ε_t	0.0008	ε_t	0.0003

Table 9 : Forecast Performance of LSTR and Linear Models (RMSE)

Equation CR			Equation cp		
	LSTR	Linear		LSTR	Linear
1	0.04363	0.0532	1	0.01887	0.02843
3	0.04460	0.0565	3	0.01944	0.01464
5	0.04465	0.0577	5	0.01913	0.05916

Validation du modèle STR

B. Test de stationnarité d'une série temporelle

Le processus peut se décomposer comme la somme d'une tendance déterministe polynomiale du temps : $\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i \times t^i$ et d'une marche aléatoire :

$$\Delta X_t = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i \times t^i + \gamma \times X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \times \Delta X_{t-i} + \epsilon_t$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Chaque test ADF utilise les hypothèses suivantes :

Soit $H_0 : \gamma = 0 \Leftrightarrow$ présence d'une racine unitaire

\Leftrightarrow la moyenne des données n'est pas stationnaire

vs $H_1 : \gamma < 0 \Leftrightarrow$ absence de racine unitaire

\Leftrightarrow la moyenne des données est stationnaire

La statistique de test pour cette régression linéaire est : $test = \frac{\hat{\gamma}}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\gamma})}}$. C'est une valeur de la

distribution de Dickey-Fuller que suit la variable aléatoire DF .

Selon l'ordre p du processus $AR(p)$ et par conséquent selon l'hypothèse nulle H_0 du test ainsi que la présence ou non d'une tendance et d'une constante dans le test de régression, DF ne suit pas la même distribution de Dickey-Fuller. Cette distribution dépend également de la taille T de la série temporelle.

Ainsi, pour un modèle $AR(1)$ et une régression sans termes de tendance ni constante, l'hypothèse nulle H_0 de non-stationnarité se réduit à $\varphi = 1$ et $H_1 : |\varphi| < 1$. DF^{T,H_0} devient :

$$DF^{T,H_0} = \frac{\hat{\varphi} - 1}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\varphi})}} = \frac{\hat{\varphi} - 1}{\sqrt{\sum_{t=2}^T (X_t - \hat{\varphi} \times X_{t-1})^2 (\sum_{t=2}^T X_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{W(1)^2 - 1}{2 \times \sqrt{\int_0^1 W(r)^2 dr}}$$

avec $W(\cdot)$ un mouvement Brownien standard

Pour des valeurs critiques de DF_{α}^{T,H_0} avec $\alpha \in \{0.01; 0.025; 0.05\}$ le niveau de risque, si $test < DF_{\alpha}^{H_0}$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse de stationnarité. Une fois la stationnarité obtenue (naturellement ou par différenciation). On passe aux tests suivants.

C. Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation pour un processus $MA(q)$

Pour un processus $MA(q)$ avec θ_i les paramètres du modèle $\forall i \in \{1, \dots, q\}$:

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2\right) \times \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ \left(\theta_h + \sum_{i=1}^{q-h} \theta_{h+i} \times \theta_i\right) \times \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } 1 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\rho_X(h) = \begin{cases} \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2\right) & \text{si } h = 0 \\ \left(\theta_h + \sum_{i=1}^{q-h} \theta_{h+i} \times \theta_i\right) & \text{si } 1 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

D. Méthode de Newton-Raphson

Réécrivons $(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2, \mu)$ comme un vecteur $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ où $k = p + q + 2$.

Désignons $\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_i}$ comme la dérivée partielle première de la log-vraisemblance par rapport à chaque paramètre β_i et $l^{(1)}(\beta) = \left(\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_k} \right)$ est un vecteur de taille $k \times 1$ de ces dérivées partielles premières.

Désignons $\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$ comme la dérivée partielle seconde de la log-vraisemblance par rapport aux

paramètres β_i et β_j . $l^{(2)}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_k^2} \end{pmatrix}$ est la matrice Hessienne, symétrique par le

théorème de Schwarz, et inversible de taille $k \times k$ de ces dérivées partielles secondes.

Les estimations itératives de β peuvent être trouvées en utilisant l'équation suivante :

$$\hat{\beta}_{(g)} = \hat{\beta}_{(g-1)} - [l^{(2)}(\hat{\beta}_{(g-1)})]^{-1} \times l^{(1)}(\hat{\beta}_{(g-1)}) \quad \forall g \in \mathbb{N}$$

Le processus d'itération s'arrête lorsque ces $\hat{\beta}_{(g)}$ convergent vers $\hat{\beta}$, autrement dit lorsque $|\hat{\beta}_{(g)} - \hat{\beta}_{(g-1)}| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ petit.

Matrice de covariance pour les estimateurs

Pour connaître la qualité de l'estimation, on définit l'information de Fisher :

$$I(\beta) = \mathbb{E}_{\beta} \left[l^{(1)}(\hat{\beta}_{(g-1)})^2 \right]$$

Sous des conditions de régularité avec notamment l'absence de dépendance entre le support du modèle (\mathbb{R} ici pour la loi normale) et le paramètre β

$$I(\beta) = -\mathbb{E}_{\beta} [l^{(2)}(\hat{\beta}_{(g-1)})]$$

La matrice de covariance est l'inverse de la matrice de $I(\beta)$. La matrice de covariance $k \times k$ estimée

aura la forme suivante : $\Sigma = I^{-1}(\beta) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[\beta_1] & \dots & Cov(\beta_1, \beta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\beta_k, \beta_1) & \dots & \mathbb{V}[\beta_k] \end{pmatrix}$

La suite d'estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ suit asymptotiquement une loi normale telle que $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\beta))$

Par conséquent, on peut tester la significativité statistique de chaque β_i en appliquant le test statistique de Wald :

$$W = T\hat{\beta}^T\hat{I}^{-1}(\beta)\hat{\beta} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(k)$$

Pour l'estimation d'un paramètre β_i ($k = 1$), on considère le test statistique $Z = \sqrt{W}$:

Soit $H_0 : \beta_i = 0$ v.s $H_1 : \beta_i \neq 0$

$$Z = \sqrt{T} \frac{|\hat{\beta}_i|}{\sqrt{[I^{-1}(\beta)]_{ii}}}$$

Avec $[I^{-1}(\beta)]_{ii} = T \times \mathbb{V}(\hat{\beta}_i)$ l'élément (i, i) de la matrice de covariance $I^{-1}(\beta)$

$$Z = \frac{|\hat{\beta}_i|}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\beta}_i)}}$$

$$Z \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$p - value_Z = 2 \times (1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < Z))$$

En d'autres termes, si $Z > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ avec $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors on rejette $H_0 : \beta_i = 0$ au risque α , et on accepte $H_1 : \beta_i \neq 0$. Ceci est équivalent à dire que si $p - value_Z < \alpha$ alors on rejette $\beta_i = 0$ au risque α et on accepte $\beta_i \neq 0$

E. Méthode des moindres carrés

Une fois les échantillons $\Delta^2 X_t$, ΔX_t et X_t séparés et préparés, on calibre un modèle de régression linéaire. On va estimer les coefficients par la méthode des moindres carrés. Soient :

- la matrice des variables explicatives Y de taille $n \times k$ avec n le nombre d'observations et k le nombre de variables explicatives
- le vecteur des coefficients Ω de taille k associés aux variables explicatives Y
- le vecteur Z , le vecteur prédit ou vecteur réponse de taille n
- la variable ε , le vecteur des erreurs de taille n

$$\begin{cases} Z = Y \cdot \Omega + \varepsilon \\ \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I) \text{ avec } I \text{ la matrice identité de taille } n \times n \end{cases}$$

Un test est réalisé sur la significativité des coefficients β_i y compris l'intercept β_0 de β . C'est le test de Student défini comme tel : $H_0: \beta_i = 0$ vs $H_1: \beta_i \neq 0 \forall i \in [0; k]$

Ainsi, on cherche à minimiser la quantité $\varepsilon = Z - Y \cdot \Omega$.

On cherche à minimiser la norme euclidienne du résidu $\|\varepsilon\|_2 = \|Z - Y \cdot \Omega\|_2$ ce qui donne les équations normales suivantes :

$$Z - Y \cdot \hat{\Omega} = 0$$

$$Y \cdot \hat{\Omega} = Z$$

$$Y^T \cdot Y \cdot \hat{\Omega} = Y^T \cdot Z \text{ avec } (Y^T \cdot Y) \text{ matrice carrée symétrique inversible de taille } k \times k$$

$$\hat{\Omega} = (Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T \cdot Z$$

Les coefficients de la régression estimés, il faut en estimer la dispersion $\hat{\sigma}(\hat{\Omega}) = \sqrt{\mathbb{V}[\hat{\Omega}]}$ afin de déterminer le t -test statistique tel que $t\text{-test} = \frac{\hat{\Omega}}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\Omega}]}}$. Cette quantité définie plus tard nous permettra de définir si les coefficients estimés $\hat{\Omega}$ sont significatifs.

$$\mathbb{V}[\hat{\Omega}|Y] = \mathbb{V}[(Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T \cdot Z|Y] = (Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T \cdot \mathbb{V}[Z|Y] \cdot Y \cdot (Y^T \cdot Y)^{-1}$$

$$\text{Car } \mathbb{V}[f(Y) \cdot Z|Y] = f(Y) \cdot \mathbb{V}[Z|Y] \cdot f(Y)^T \text{ avec } f(Y) \text{ qui est } \mathcal{F} - \sigma(Y) \text{ mesurable et } f : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$$

$$\mathbb{V}[\hat{\Omega}|Y] = \sigma^2 I (Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T \cdot Y \cdot (Y^T \cdot Y)^{-1}$$

$$\text{En effet, } \mathbb{V}[Z|Y] = \mathbb{V}[Y \cdot \Omega|Y] + \mathbb{V}[\varepsilon|Y] = \mathbb{V}[\varepsilon] = \sigma^2 \text{ avec } Y \perp \varepsilon$$

$$\mathbb{V}[\hat{\Omega}|Y] = \sigma^2 I (Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T \cdot Y \cdot (Y^T \cdot Y)^{-1}$$

$$\mathbb{V}[\hat{\Omega}|Y] = \sigma^2 I \cdot (Y^T \cdot Y)^{-1}$$

$$\text{Donc, } \widehat{\mathbb{V}[\hat{\Omega}]} = \hat{\sigma}^2 I \cdot (Y^T \cdot Y)^{-1}$$

Pour une régression linéaire simple, on prend :

$$Z = \Delta^2 X_t = \begin{pmatrix} \Delta^2 X_2 \\ \vdots \\ \Delta^2 X_T \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{T-1} \end{pmatrix} \text{ et } \Omega = \begin{pmatrix} \gamma_{Soft} \\ \alpha_{Soft} \end{pmatrix}$$

Avec $T - 1$ la taille du sous-ensemble de l'échantillon.

Ainsi :

$$(Y^T \cdot Y)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 & -\sum_{t=2}^T X_{t-1} \\ -\sum_{t=2}^T X_{t-1} & (T-1) \end{pmatrix}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2}$$

$$(Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - X_1 \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1} & \dots & \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - X_{T-1} \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1} \\ (T-1) \cdot X_1 - \sum_{t=2}^T X_{t-1} & \dots & (T-1) \cdot X_{T-1} - \sum_{t=2}^T X_{t-1} \end{pmatrix}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2} \text{ de taille } 2 \times (T-1)$$

$$\widehat{\Omega} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - X_1 \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1} & \dots & \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - X_{T-1} \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1} \\ (T-1) \cdot X_1 - \sum_{t=2}^T X_{t-1} & \dots & (T-1) \cdot X_{T-1} - \sum_{t=2}^T X_{t-1} \end{pmatrix}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2} \times \begin{pmatrix} \Delta^2 X_2 \\ \vdots \\ \Delta^2 X_T \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\Omega} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 \cdot \sum_{t=2}^T \Delta^2 X_t - \sum_{t=2}^T X_{t-1} \sum_{t=2}^T \Delta^2 X_t \\ (T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1} \cdot \sum_{t=2}^T \Delta^2 X_t - \sum_{t=2}^T X_{t-1} \sum_{t=2}^T \Delta^2 X_t \end{pmatrix}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2}$$

$$\widehat{\alpha}_{Soft} = \frac{\widehat{\Omega}_{[2]}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2} = \frac{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1} \cdot \sum_{t=2}^T \Delta^2 X_t - \sum_{t=2}^T X_{t-1} \sum_{t=2}^T \Delta^2 X_t}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2}$$

$$\widehat{\alpha}_{Soft} = \frac{(T-1)^2 \left(\sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1} \cdot \Delta^2 X_t}{T-1} - \sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}}{T-1} \sum_{t=2}^T \frac{\Delta^2 X_t}{T-1} \right)}{(T-1)^2 \left(\sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}^2}{T-1} - \left(\sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}}{T-1} \right)^2 \right)} = \frac{cov(X_{t-1}, \Delta X_t^2)}{V[X_{t-1}]}$$

$$\widehat{\gamma}_{Soft} = \frac{\widehat{\Omega}_{[1]}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2} = \frac{(T-1)^2 \left(\sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}^2}{T-1} \cdot \sum_{t=2}^T \frac{\Delta^2 X_t}{T-1} - \sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}}{T-1} \sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1} \cdot \Delta^2 X_t}{T-1} \right)}{(T-1)^2 \left(\sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}^2}{T-1} - \left(\sum_{t=2}^T \frac{X_{t-1}}{T-1} \right)^2 \right)}$$

$$\widehat{\gamma}_{Soft} = \frac{((V[X_{t-1}] + E^2[X_{t-1}]) \cdot E[\Delta^2 X_t] - E[X_{t-1}] \cdot E[X_{t-1} \cdot \Delta^2 X_t])}{V[X_{t-1}]}$$

$$\widehat{\gamma}_{Soft} = E[\Delta^2 X_t] - E[X_{t-1}] \cdot \frac{cov(X_{t-1}, \Delta X_t^2)}{V[X_{t-1}]} = E[\Delta^2 X_t] - E[X_{t-1}] \cdot \widehat{\alpha}_{Soft}$$

Une fois les coefficients estimés, on calcule leur variance estimée en prenant les éléments de la diagonale de la matrice variance-covariance : $V[\widehat{\gamma}_{Soft}] = \widehat{V}[\widehat{\Omega}]_{[11]}$ et $V[\widehat{\alpha}_{Soft}] = \widehat{V}[\widehat{\Omega}]_{[22]}$.

$$\widehat{V}[\widehat{\Omega}] = \hat{\sigma}^2 \cdot I \cdot (Y^T \cdot Y)^{-1} = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 & -\sum_{t=2}^T X_{t-1} \\ -\sum_{t=2}^T X_{t-1} & (T-1) \end{pmatrix}}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2}$$

$$\mathbb{V}[\widehat{\alpha}_{Soft}] = \frac{(T-1) \cdot \hat{\sigma}^2}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{(T-1) \cdot \mathbb{V}[X_{t-1}]}$$

$$\mathbb{V}[\widehat{\gamma}_{Soft}] = \frac{\sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 \cdot \hat{\sigma}^2}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2} = \frac{\mathbb{E}[X_{t-1}^2] \cdot \hat{\sigma}^2}{(T-1) \cdot \mathbb{V}[X_{t-1}]}$$

Utilisons les quantités calculées pour calculer le t -test = $\frac{\hat{\Omega}}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\Omega}]}}$ qui suit une loi de Student à

$n - p - 1$ degrés de liberté avec $n = T - 1$ la taille de l'échantillon et p le nombre de prédicteurs excluant l'intercept ($p = k$ s'il n'y a pas d'intercept). Pour chaque coefficient, on calcule ainsi la p -value = $2 \times \mathbb{P}(Student(n - p - 1) > |t - test|)$. Si p -value $< \alpha$ avec $\alpha = 5\%$ comme valeur généralement prise, alors le coefficient est dit significatif ou pertinent, c'est-à-dire que l'erreur commise sur l'estimation est très faible comparée à l'estimation en elle-même.

On regarde également le score ou coefficient de détermination de la régression exprimé comme tel : $R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=2}^T (\Delta^2 X_t - \widehat{\Delta^2 X_t})^2}{\sum_{t=2}^T (\Delta^2 X_t - \mathbb{E}[\Delta^2 X_t])^2} \in [0; 1]$. C'est le rapport de la variance expliquée par la régression sur la variance totale. Dans le cas d'une régression linéaire simple, $R^2 = Corr(\Delta^2 X_t, \widehat{\Delta^2 X_t})^2$. Plus R^2 tend vers 1, plus la qualité de la prédiction de la régression linéaire est élevée.

Et pour finir, on s'intéresse à la significativité globale du modèle, c'est-à-dire tester si tous les coefficients β sont supposés nuls excepté la constante β_0 avec le test suivant : $H_0 : \beta_{i \neq 0} = 0$ vs $H_1 : \beta_{i \neq 0} \neq 0$. On s'intéresse à la statistique $F = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-p-1}{p} \sim Fisher(p, n-p-1)$. On calcule la p -value globale du modèle comme suit : p -value globale = $\mathbb{P}(Fisher(p, n-p-1) > \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-p-1}{p})$. A l'instar des p -value individuelles, si p -value $< \alpha$ avec $\alpha = 5\%$ alors le modèle est dit significatif.

F. Spécifications du modèle VAR(p)

On définit un modèle VAR(p) avec k variables endogènes et p le lag de cette façon :

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_t^1 \\ \vdots \\ Y_t^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^1 & \dots & \alpha_{1,k}^1 & \dots & \alpha_{1,1}^p & \dots & \alpha_{1,k}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k,1}^1 & \dots & \alpha_{k,k}^1 & \dots & \alpha_{k,1}^p & \dots & \alpha_{k,k}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1}^1 \\ \vdots \\ Y_{t-1}^k \\ \vdots \\ Y_{t-p}^1 \\ \vdots \\ Y_{t-p}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \vdots \\ \varepsilon_t^k \end{pmatrix} \quad (1)$$

On note $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^i & \dots & \alpha_{1,k}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k,1}^i & \dots & \alpha_{k,k}^i \end{pmatrix}$ une matrice $k \times k$

Et $I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice $k \times k$

À l'instar des séries temporelles univariées, ce processus doit vérifier des conditions de stabilité ou « stationnarité en covariance ». Elles le sont si les racines du polynôme caractéristique $\det(I_k - \sum_{i=1}^p z^i A_i)$ sont toutes en dehors du cercle unité, c'est-à-dire si $\det(I_k - \sum_{i=1}^p z^i A_i) \neq 0 \forall |z| \leq 1$ ou encore de manière équivalente si $\det(I_k - \sum_{i=1}^p z^i A_i) = 0 \forall |z| > 1$.

On peut également le vérifier si toutes les valeurs propres λ de $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_k & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_k & 0 \end{pmatrix}$ une

matrice $kp \times kp$ sont telles que $|\lambda| \leq 1$, c'est-à-dire si $\det(\lambda^p I_k - \sum_{i=1}^p \lambda^{p-i} A_i) = 0 \forall |\lambda| \leq 1$

Si ces conditions de stationnarité ne sont pas satisfaites alors il est nécessaire de différencier les séries. C'est le cas de la plupart de nos LoBs individuelles que l'on va étudier (excluant la LoB moyenne). Par conséquent, on ne travaille plus avec un modèle dit « VAR en niveau » mais avec un modèle « VAR en différence ».

Une fois les 5 séries différenciées, on essaie de trouver les calibrages optimaux pour le lag et les coefficients du modèle. Pour un lag donné p , afin d'estimer les coefficients, on procède par la méthode des moindres carrés ordinaires multivariés.

Si on réécrit (1) sous la forme :

$$Y = B.Z + E$$

$$\text{Avec } B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^1 & \dots & \alpha_{1,k}^1 & \dots & \alpha_{1,1}^p & \dots & \alpha_{1,k}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k,1}^1 & \dots & \alpha_{k,k}^1 & \dots & \alpha_{k,1}^p & \dots & \alpha_{k,k}^p \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} Y_{t-1}^1 \\ \vdots \\ Y_{t-1}^k \\ \vdots \\ Y_{t-p}^1 \\ \vdots \\ Y_{t-p}^k \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \vdots \\ \varepsilon_t^k \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = Y \cdot Z^T \cdot (Z \cdot Z^T)^{-1}$$

Ainsi plusieurs lag p sont testés et pour choisir l'idéal, on se réfère au critère AIC tel que pour une $LoB Y_t^i$ parmi les $k = 5$ autres, le critère $AIC(p) = \log\left(\det\left(\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T}{n}\right)\right) + \frac{2}{n} \cdot p \cdot k^2$ avec n le nombre d'observations. On choisit le lag p pour lequel le critère AIC est le plus faible et celui retenu est le lag $p = 2$. Les coefficients trouvés ne sont pas significatifs mais ce n'est pas étonnant pour un modèle avec autant de paramètres $k + k^2 p = 55$.

D'autres critères de déviance peuvent être utilisés comme :

$$HQ(p) = \log\left(\det\left(\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T}{n}\right)\right) + \frac{2 \cdot \log(\log(n))}{n} \cdot p \cdot k^2$$

$$SC(p) = \log\left(\det\left(\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T}{n}\right)\right) + \frac{\log(n)}{n} \cdot p \cdot k^2$$

G. Validation du modèle VAR(p)

Homogénéité des résidus

Pour tester l'hétéroscédasticité, nous avons effectué un test de multiplicateur de Lagrange (LM) ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*) d'Engle au lag q . Considérons le modèle de régression multivarié suivant :

$$\text{vech}(\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T) = \beta_0 + B_1 \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-1} \hat{\varepsilon}_{t-1}^T) + \dots + B_q \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-q} \hat{\varepsilon}_{t-q}^T) + \text{error}_t$$

Où $\text{vech}(X) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ pour X une matrice symétrique $n \times n$

β_0 est de dimension $\frac{1}{2}k(k+1)$ et les matrices B_j de dimension $\frac{1}{2}k(k+1) \times \frac{1}{2}k(k+1)$ avec ($j = 1, \dots, q$). Il n'y a pas d'hétéroscédasticité dans les résidus si tous les B_j sont nulles. Par conséquent, un test LM-ARCH est basé sur les hypothèses suivantes :

$$H_0: B_1 = \dots = B_q = 0 \text{ vs. } H_1: B_1 \neq 0 \cup \dots \cup B_q \neq 0$$

Soit le test statistique : $VARCH_{LM}(q) = \frac{1}{2}nk(k+1)R_m^2$

où

$$R_m^2 = 1 - \frac{2}{k(k+1)} \text{tr}(\hat{\Omega} \hat{\Omega}_0^{-1}),$$

$\hat{\Omega}$ est la matrice de covariance des résidus du modèle de régression multivarié ci-dessus et $\hat{\Omega}_0$ est la matrice correspondante avec $q = 0$. Les valeurs critiques sont données par la distribution du $\chi^2(qk^2(k+1)^2/4)$.

Absence d'autocorrélation

Supposons que les $\hat{\varepsilon}_t$ sont des résidus d'un processus VAR(p) stable. On vérifie l'absence d'autocorrélation par le test de Portemanteau dont l'hypothèse nulle est la suivante :

$$H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}^T) = 0, \forall i \in [1; h] \text{ avec } h \text{ le lag choisi}$$

$$H_1 : \exists i \in [1; h] : \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}^T) \neq 0$$

Le test prend la forme suivante :

$$Q_h = n \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{C}_i^T \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1})$$

Avec $\hat{C}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=i+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i}^T$ avec $\hat{\varepsilon}_t$ le vecteur résiduel de taille $k \times 1$. Sous H_0 , Q_h a une distribution approximative $\chi^2(k^2(h-p))$.

Comme dans le cas univarié, la distribution limite de χ^2 n'est valide que si $h \rightarrow \infty$ à un rythme approprié avec la taille croissante de l'échantillon. Une statistique ajustée avec des propriétés adaptées pour des petits échantillons potentiellement supérieures est la statistique de Portemanteau ajusté :

$$Q_h^* = n^2 \sum_{i=1}^h \frac{1}{n-i} \text{tr}(\hat{C}_i^T \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1})$$

Ce test est similaire à la statistique de Ljung-Box pour les séries univariées. Il est difficile de choisir h , ce qui est critique pour le résultat du test. Si h est trop petit, l'approximation de la distribution de H_0 par χ^2 peut s'avérer très insuffisante alors qu'un trop grand h peut entraîner une perte de puissance. Par conséquent, l'application du test nécessite d'expérimenter plusieurs valeurs de h .

Test de normalité

Voici les hypothèses de ce test :

$$H_0 : \hat{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}(\hat{\varepsilon}))$$

$$H_1 : \hat{\varepsilon}_t \text{ ne suit pas une loi normale}$$

On considère la matrice variance-covariance des résidus définie par :

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_t - \mathbb{E}[\hat{\varepsilon}_t])(\hat{\varepsilon}_t - \mathbb{E}[\hat{\varepsilon}_t])^T$$

On veut calculer la racine carrée de cette matrice : $\tilde{\Sigma}_\varepsilon^{1/2}$.

$\tilde{\Sigma}_\varepsilon^{1/2} = Q \cdot \text{diag} \left(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_K^{\frac{1}{2}} \right) Q^T$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ les valeurs propres de $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$, Q la matrice orthonormée des vecteurs propres associés aux valeurs propres.

Ensuite, le test de normalité se base sur le coefficient d'asymétrie (skewness) et le coefficient d'aplatissement (kurtosis) des résidus standardisés $\hat{\varepsilon}_t^s = (\hat{\varepsilon}_{1t}^s, \dots, \hat{\varepsilon}_{kt}^s)^T = \tilde{\Sigma}_\varepsilon^{1/2} (\hat{\varepsilon}_t - \mathbb{E}[\hat{\varepsilon}_t])$:

$$b_1 = (b_{11}, \dots, b_{1k})^T \text{ avec } b_{1k} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_{kt}^s)^3$$

$$b_2 = (b_{21}, \dots, b_{2k})^T \text{ avec } b_{2k} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_{kt}^S)^4$$

Les tests statistiques possibles sont donc :

$$s_3^2 = \frac{nb_1^T b_1}{6}$$

Et définissons le vecteur $3_k = (3, \dots, 3)^T$ de taille $k \times 1$

$$s_4^2 = \frac{T(b_2 - 3_k)^T (b_2 - 3_k)}{24}$$

Ces 2 tests ont une distribution asymptotique $\chi^2(k)$ sous H_0 . De surcroît, sous H_0 , la statistique de Jarque-Bera admettant les hypothèses formulées ci-dessus $JB_k = s_3^2 + s_4^2$ a une distribution limite de $\chi^2(2k)$.

Test de stabilité structurelle

Comme pour les modèles univariés, deux types de tests de Chow sont disponibles pour les modèles VAR, les tests de fractionnement d'échantillon (*sample-split ou SS tests*) et les tests de point de rupture (*break-point tests*) (voir Doornik & Hendry (1997)). En supposant qu'une rupture structurelle ait pu se produire à la période T_B , le modèle considéré est estimé à partir de l'échantillon complet de T observations et à partir des premières T_1 des dernières T_2 observations, où $T_1 < T_B$ et $T_2 \leq T - T_B$. Suivant Candelon & Lütkepohl (2000), les résidus résultants sont notés par $\hat{u}_t, \hat{u}_t^{(1)}$ and $\hat{u}_t^{(2)}$, respectivement.

De plus,

$$\tilde{\Sigma}_u = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t', \tilde{\Sigma}_{1,2} = T_1^{-1} \sum_{t=1}^{T_1} \hat{u}_t \hat{u}_t' + T_2^{-1} \sum_{t=T-T_2+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t', \tilde{\Sigma}_{(1)} = T_1^{-1} \sum_{t=1}^{T_1} \hat{u}_t^{(1)} \hat{u}_t^{(1)'}$$

$$\text{Et } \tilde{\Sigma}_{(2)} = T_2^{-1} \sum_{t=T-T_2+1}^T \hat{u}_t^{(2)} \hat{u}_t^{(2)'}$$

Avec cette notation, la statistique du test du fractionnement de l'échantillon (SS) peut être écrite comme suit :

$$\lambda_{SS} = (T_1 + T_2) \log \det \tilde{\Sigma}_{1,2} - T_1 \log \det \tilde{\Sigma}_{(1)} - T_2 \log \det \tilde{\Sigma}_{(2)} \approx \chi^2(k),$$

où k est le nombre de restrictions imposées par l'hypothèse d'un modèle à coefficients constants pour toute la période de l'échantillon, c'est-à-dire k est la différence entre la somme du nombre de coefficients estimés dans la première et la dernière sous-période et le nombre de coefficients dans

le modèle de l'échantillon complet. L'hypothèse de constance des paramètres est rejetée si la valeur de la statistique de test λ_{SS} est grande.

La statistique de test du point de rupture (BP) est la suivante :

$$\lambda_{BP} = \frac{1 - (1 - R_r^2)^{1/s}}{(1 - R_r^2)^{1/s}} \cdot \frac{Ns - q}{nk} \approx F(nk, Ns - q).$$

où

$$s = \left(\frac{n^2 k^2 - 4}{n^2 + k^2 - 5} \right)^{1/2}, \quad q = \frac{nk}{2} + 1, \quad N = T - k_1 - k - (n - k + 1)/2$$

avec k_1 étant le nombre de régresseurs dans le modèle restreint et invariant dans le temps et

$$R_r^2 = 1 - \left(\frac{T_1}{T} \right)^n |\hat{\Sigma}_{(1)}| (|\hat{\Sigma}_u|)^{-1}.$$

Encore une fois, l'hypothèse nulle de constance des paramètres est rejetée pour les grandes valeurs de λ_{BP} .

Candelon & Lütkepohl (2000) démontrent que les distributions des petits échantillons peuvent être très différentes des distributions asymptotiques χ^2 ou *Fisher* et proposent d'utiliser des versions bootstrap des tests. Ils procèdent comme suit. En estimant le modèle d'intérêt et en désignant les résidus de l'estimation par \hat{u}_t , les résidus centrés $\hat{u}_1 - \bar{u}, \dots, \hat{u}_T - \bar{u}$ sont obtenus. Ensuite, les résidus bootstrap u_1^*, \dots, u_T^* sont générés par tirage aléatoire avec remplacement à partir des résidus centrés. Ces quantités sont utilisées pour calculer les séries temporelles bootstrap de manière récursive à partir de valeurs de pré-échantillon données y_{-p+1}, \dots, y_0 . Le modèle d'intérêt est ensuite réestimé avec et sans prise en compte d'une rupture et une version bootstrap de la statistique d'intérêt, disons λ_{SS}^* ou λ_{BP}^* est calculée. En répétant ces étapes un grand nombre de fois, une valeur critique est obtenue comme le point de pourcentage pertinent, disons λ_{crit}^* de la distribution empirique de la statistique de test bootstrap et l'hypothèse de stabilité est rejetée SI $\lambda > \lambda_{crit}^*$. Ici, λ est la statistique d'intérêt obtenue à partir des données originales. Alternativement, la *p-value* du test peut être estimée comme la proportion de valeurs de la statistique bootstrap dépassant λ .

H. Méthode de calibration des paramètres d'un modèle VECM

Si le rang de cointégration du système considéré est connu et que l'on souhaite imposer une restriction correspondante, il est pratique de travailler avec le VECM. Pour dériver les estimateurs des paramètres, la notation supplémentaire suivante est utilisée : $\Delta Y = [\Delta y_1, \dots, \Delta y_n]$, $Y_{-1} = [y_0, \dots, y_{n-1}]$, $U = [u_1, \dots, u_n]$, $\Gamma = [\Gamma_1 : \dots : \Gamma_{p-1}]$ et $X = [X_0, \dots, X_{T-1}]$ avec $X_{t-1} = \begin{bmatrix} \Delta y_{n-1} \\ \vdots \\ \Delta y_{n-p+1} \end{bmatrix}$.

On peut réécrire le VECM comme suit :

$$\Delta Y = \Pi Y_{-1} + \Gamma X + E.$$

Pour une matrice Π , l'estimateur des moindres carrés de Γ est :

$$\hat{\Gamma} = (\Delta Y - \Pi Y_{-1}) X^T (X X^T)^{-1}.$$

$$\Delta Y M = \Pi Y_{-1} M + \hat{E}$$

où $M = I - X^T (X X^T)^{-1} X$. Ainsi, pour r , $0 < r < k$, un estimateur $\hat{\Pi}$ de Π avec $\text{rang}(\hat{\Pi}) = r$ peut être obtenu par une analyse canonique des corrélations ou, de façon équivalente, une régression de rang réduit (RR) basée sur le modèle. Selon la méthode Johansen (1995), l'estimateur peut être déterminé en définissant

$$S_{00} = \frac{1}{n} \Delta Y M \Delta Y^T, S_{01} = \frac{1}{n} \Delta Y M Y_{-1}^T, S_{11} = \frac{1}{n} Y_{-1} M Y_{-1}^T$$

Et en trouvant les vecteurs propres à partir de l'équation ci-dessous :

$$\det(\lambda S_{11} - S_{01}^T S_{00}^{-1} S_{01}) = 0.$$

Soit les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ avec la matrice correspondante de vecteurs propres $V = [v_1, \dots, v_k]$ satisfaisant $\lambda_i S_{11} v_i = S_{01}^T S_{00}^{-1} S_{01} v_i$ et normalisée de telle sorte que $V^T S_{11} V = I_k$. L'estimateur de rang réduit de $\Pi = \alpha \beta^T$ est ensuite obtenue en choisissant

$$\hat{\beta} = [v_1, \dots, v_r]$$

$\hat{\alpha}$ est obtenu par la méthode des moindres carrés à partir du modèle :

$$\Delta Y M = \alpha \hat{\beta}^T Y_{-1} M + \tilde{U}.$$

$$\hat{\alpha} = \Delta Y M Y_{-1}^T \hat{\beta} (\hat{\beta}^T Y_{-1} M Y_{-1}^T \hat{\beta})^{-1}$$

Ainsi l'estimateur de Π est $\hat{\Pi} = \hat{\alpha} \hat{\beta}^T$ qui n'est pas unique.

On en déduit celui de Γ qui est $\hat{\Gamma} = (\Delta Y - \hat{\Pi} Y_{-1}) X^T (X X^T)^{-1}$.

Ces estimations varient selon plusieurs tests de r . In fine, il convient donc de spécifier le rang optimal selon deux méthodes :

- La trace
- La valeur propre maximale

Pour la trace, voici les hypothèses : $H_0 : \text{rang}(\Pi) = r$ vs $H_1 : \text{rang}(\Pi) > r$

On définit le ratio de vraisemblance suivant : $LR_{\text{trace}}(r) = -(n - p) \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$

Pour la valeur propre maximale, voici les hypothèses :

$$H_0 : \text{rang}(\Pi) = r \text{ vs } H_1 : \text{rang}(\Pi) = r + 1$$

On définit le ratio de vraisemblance suivant $LR_{\text{max}}(r) = -(n - p) \cdot \ln(1 - \widehat{\lambda}_{r+1})$

Les valeurs critiques pour ces 2 tests sont obtenues par une simulation de Monte Carlo. On commence le test pour $r = 0$ et on incrémente r à chaque rejet de l'hypothèse H_0 jusqu'à ce que la statistique LR affiche une valeur inférieure aux valeurs critiques spécifiques à chaque rang r , ce qui aura pour effet d'accepter l'hypothèse H_0 .

I. Principe de l'ACP

Ainsi on considère le modèle ACP suivant :

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^1 & \dots & X_n^p \end{pmatrix} \text{ avec } p \text{ le nombre de prédicteurs et } n \text{ le nombre d'observations.}$$

On a pris soin de standardiser (centrer et réduire) les prédicteurs (autres *LoBs*) pour éviter qu'une variable avec une gamme de valeurs trop différente des autres variables n'influe fortement sur le modèle.

$$\text{Ainsi, on standardise les données } X \text{ en } \tilde{X} = \begin{pmatrix} \frac{X_1^1 - \mathbb{E}[X^1]}{\sigma(X^1)} & \dots & \frac{X_1^p - \mathbb{E}[X^p]}{\sigma(X^p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{X_n^1 - \mathbb{E}[X^1]}{\sigma(X^1)} & \dots & \frac{X_n^p - \mathbb{E}[X^p]}{\sigma(X^p)} \end{pmatrix} \text{ avec } \tilde{X}_j^i = \frac{X_j^i - \mathbb{E}[X^i]}{\sigma(X^i)}$$

Le principe de l'ACP est de réduire le problème à dimension \mathbb{R}^p à une dimension \mathbb{R}^k avec $k < p$. Autrement dit, il s'agit de trouver k nouveaux axes $\vec{u}_l : \forall l \in \{1, \dots, k\}$. Ces axes sont issus d'une combinaison linéaire des \tilde{X}^i tel que $\vec{u}_l = \sum_{j=1}^p \alpha_j^l \cdot \vec{\tilde{X}}^j \forall \alpha_i \in \mathbb{R}$. Autrement dit, nous cherchons les axes \vec{u}_l tels que les variances du nuage $\tilde{X}_i^j : i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$ autour de \vec{u}_l soient les plus grandes possibles. La projection de l'échantillon des \tilde{X}_i^j sur un axe \vec{u}_1 parmi les \vec{u}_l qui maximise la variance du nuage s'écrit :

$$\pi_{\vec{u}_1}(\tilde{X}) = \tilde{X} \cdot \vec{u}_1$$

Trouvons la variance de cette projection : $\mathbb{V}[\tilde{X} \cdot \vec{u}_1] = \frac{1}{n} \vec{u}_1^T \cdot \tilde{X}^T \tilde{X} \cdot \vec{u}_1$

On note $\Sigma_{\tilde{X}} = \frac{1}{n} \tilde{X}^T \tilde{X}$ la matrice de variance covariance du jeu de données \tilde{X} de taille $p \times p$ et symétrique. C'est donc une matrice diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral. On diagonalise $\Sigma_{\tilde{X}}$ et soient $\lambda_1 > \dots > \lambda_p$ ces p valeurs propres associées aux vecteurs propres v_1, \dots, v_p de la base orthonormée avec v_i un vecteur de taille $p \forall i \in \{1, \dots, p\}$. Le vecteur propre v_1 correspond au vecteur \vec{u}_1 qui maximise cette variance du nuage. Les k axes \vec{u}_l tels que $\vec{u}_l = v_l \forall l \in \{1, \dots, k\}$ sont les directions des composantes principales et les $\tilde{X} \cdot \vec{u}_l$ sont les k principales composantes retenues. Les λ_k sont leurs variances.

J. Modélisation multivariée des autres *LoBs* par la régression sur la moyenne des *LoBs*

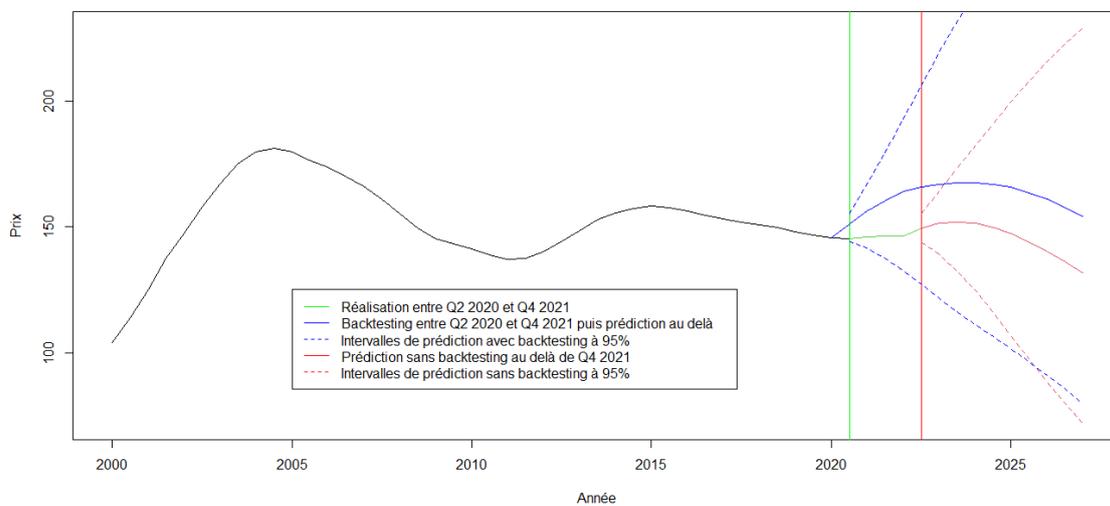
Les modèles pour les *LoBs Workers Compensation, Commercial Property et General Liability* prennent en compte prix moyen_{t-1} en plus de $\Delta \text{prix moyen}_{t-1}$.

$$\Delta \text{prix}_t = \alpha \times \Delta \text{prix moyen}_{t-1} + \beta \times \text{prix moyen}_{t-1} + \varepsilon_t$$

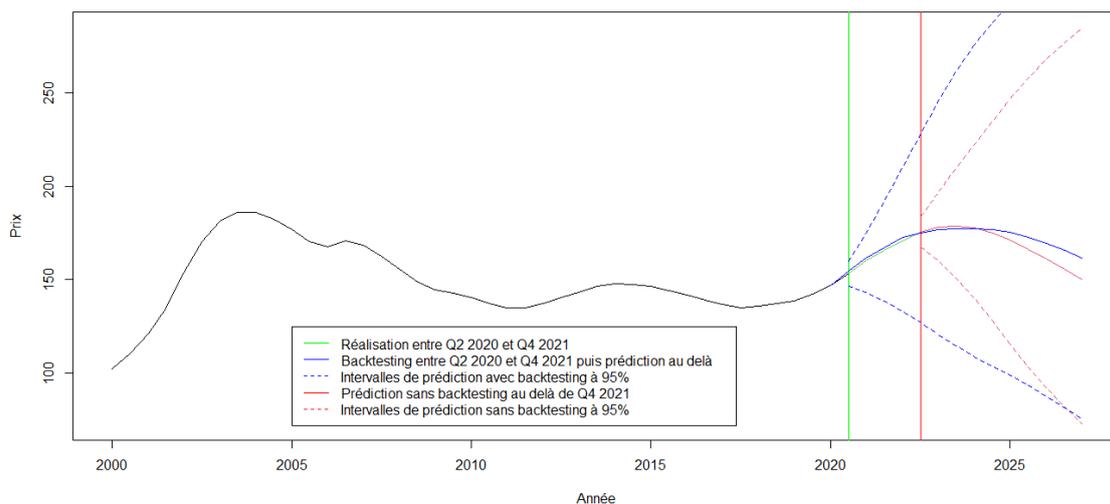
Seul le modèle pour la *LoB Umbrella* est similaire à celui de *Commercial Auto*.

$$\Delta \text{prix}_t = \alpha \times \Delta \text{prix moyen}_{t-1} + \varepsilon_t$$

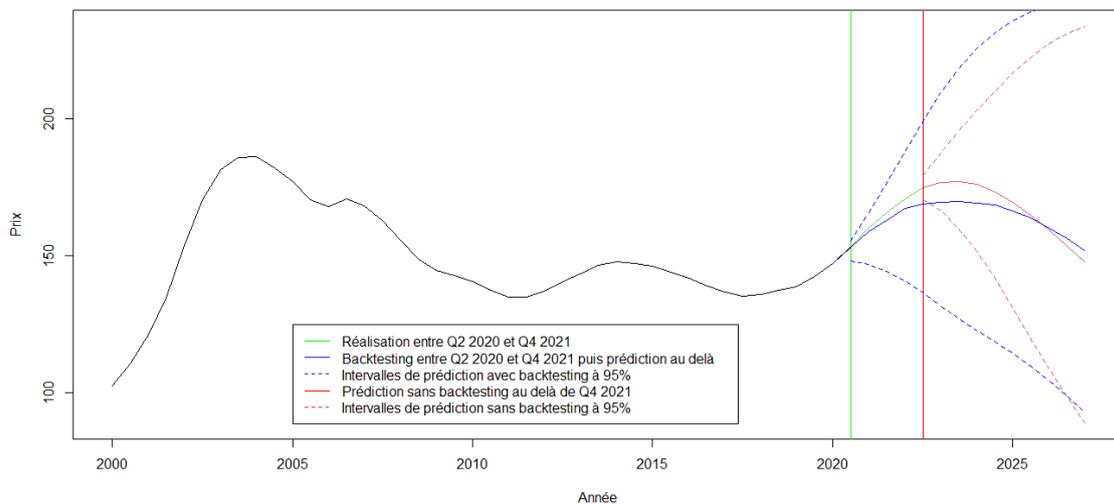
Prédiction des prix de la branche Workers Compensation



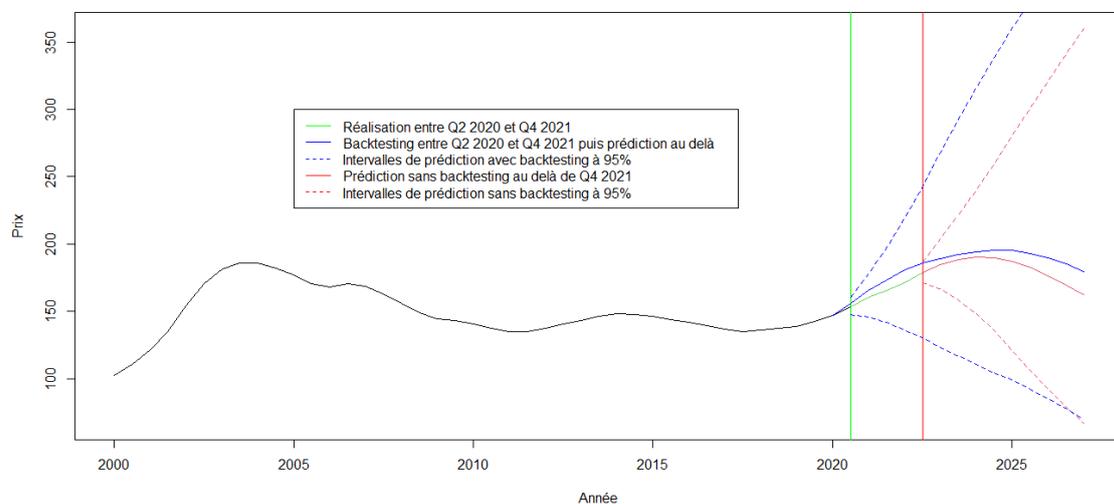
Prédiction des prix de la branche Commercial Property



Prédiction des prix de la branche General Liability



Prédiction des prix de la branche Umbrella



K. Valeurs critiques du test de Kolmogorov-Smirnov

Voilà ci-dessous la méthode par simulations de Monte Carlo qui permet de déterminer la table des valeurs critiques du test de Kolmogorov-Smirnov.

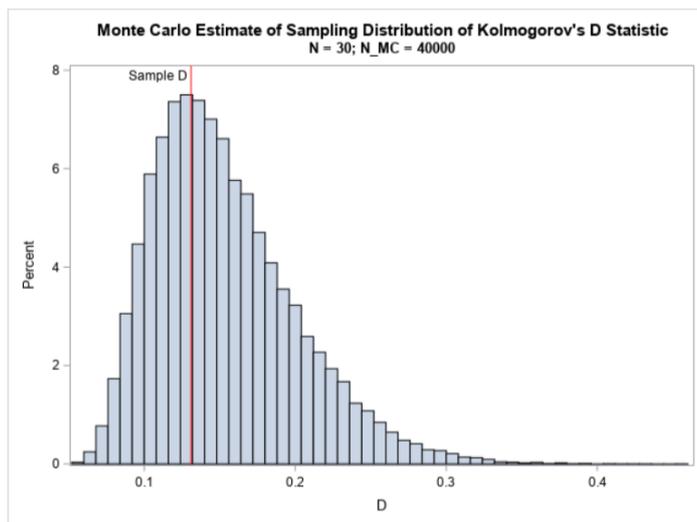
```
/* parameters of reference distribution: F = cdf("Normal", x, &mu, &sigma) */
%let mu = 59;
%let sigma = 5;
%let N = 30;
%let NumSamples = 40000;

proc iml;
call randseed(73);
N = &N;
i = T(1:N); /* ranks */
u = i/N; /* ECDF height at right-hand endpoints */
um1 = (i-1)/N; /* ECDF height at left-hand endpoints */

y = j(N, &NumSamples, .); /* columns of Y are samples of size N */
call randgen(y, "Normal", &mu, &sigma); /* fill with random N(mu, sigma) */
D = j(&NumSamples, 1, .); /* allocate vector for results */

do k = 1 to ncol(y); /* for each sample: */
x = y[,k]; /* get sample x ~ N(mu, sigma) */
call sort(x); /* sort sample */
F = cdf("Normal", x, &mu, &sigma); /* CDF of reference distribution */
D[k] = max(F - um1, u - F); /* D = max( D_minus, D_plus ) */
end;

title "Monte Carlo Estimate of Sampling Distribution of Kolmogorov's D Statistic";
title2 "N = 30; N_MC = &NumSamples";
call histogram(D) other=
"refline 0.131 / axis=x label='Sample D' labelloc=inside lineattrs=(color=red);";
```



Détermination des valeurs critiques du test de Kolmogorov-Smirnov par simulations de Monte-Carlo