

**Mémoire présenté pour l'obtention du DUAS et l'admission à l'Institut des Actuaires**

**le mercredi 27 novembre 2024**

Par : Xavier MEYER

Titre: La prise en compte de l'inflation dans les méthodes de provisionnement non-vie

Confidentialité :  NON  OUI Durée :  1 an  2 ans  3 ans  4 ans  5 ans

*Membres du jury de l'IA :*

*Entreprise : Actuelia*

*Directeur de mémoire (entreprise) :*

*Membres du jury de l'Unistra :*

*Nom : Kévin MA*

J. BERARD  
E. BIRMELE  
A. COUSIN  
P.-O. GOFFARD  
M. MAUMY-BERTRAND

Signature du responsable entreprise



*Secrétariat : Mme Stéphanie Richard*

Signature du candidat



# Résumé

La recrudescence de l'inflation, qui a récemment touché l'économie mondiale, et en particulier l'économie européenne, a rendu nécessaire pour les compagnies d'assurance non-vie et pour les superviseurs de vérifier l'adéquation des méthodes et des modèles utilisés dans le cadre de l'évaluation des provisions techniques et des risques associés.

En effet, dans le contexte inflationniste actuel, l'utilisation des méthodes de provisionnement non-vie classiques, qui projettent l'inflation passée de manière implicite dans les règlements futurs, est remise en cause, car elles peuvent conduire à une sous-estimation des provisions techniques et du risque de réserve.

Face à ce constat, l'objectif de ce mémoire est de proposer des méthodes de provisionnement non-vie prenant en compte explicitement l'inflation. Dans cette perspective, la méthode de *surinflation*, la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor sont présentées, à la fois à travers des procédures déterministes et des procédures bootstrap.

La mise en application de ces méthodes nécessite une modélisation explicite de l'inflation. À ce titre, une modélisation stochastique a été choisie pour mettre en oeuvre la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Dans cette optique, deux approches sont proposées : une approche *actuarielle* et une approche de *marché*.

Les différentes méthodes développées sont appliquées à la branche responsabilité civile automobile. L'analyse comparative des résultats numériques montre que, dans la conjoncture actuelle, la méthode intégrant implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* tendent à sous-estimer les provisions techniques et le risque de réserve par rapport à la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor.

**Mots clés :** *Provisionnement non-vie, Risque de réserve, Inflation, Bootstrap, Chain Ladder, Méthode de séparation de Taylor, As-if, Processus stochastique.*

# Abstract

The resurgence of inflation, which has recently affected the global economy, and particularly the European economy, has made it necessary for non-life insurance companies and regulators to verify the adequacy of the methods and models used in the assessment of technical reserves and associated risks.

Indeed, in the current inflationary context, the use of traditional non-life reserving methods, which implicitly project past inflation into future settlements, is being called into question, as they can lead to an underestimation of technical reserves and reserve risk.

In light of this, the objective of this thesis is to propose non-life reserving methods that explicitly take inflation into account. In this perspective, the *superimposed inflation* method, the *as-if* method, and Taylor's separation method are presented, through both deterministic procedures and bootstrap procedures.

The application of these methods requires an explicit modeling of inflation. For this purpose, a stochastic model was selected to implement the *as-if* method and Taylor's separation method. In this regard, two approaches are proposed : an *actuarial* approach and a *market* approach.

The different methods developed are applied to the motor third-party liability insurance line. The comparative analysis of numerical results shows that, in the current economic environment, the method implicitly incorporating inflation and the *superimposed inflation* method tend to underestimate technical reserves and reserve risk compared to the *as-if* method and Taylor's separation method.

**Keywords :** *Non-life reserving, Reserve risk, Inflation, Bootstrap, Chain Ladder, Taylor's separation method, As-if, Stochastic process.*

# Note de synthèse

## Contexte et problématique

Ce mémoire s'inscrit dans un contexte où le secteur de l'assurance a été fortement impacté par la récente recrudescence de l'inflation. Cet événement marquant a incité les assureurs non-vie et les régulateurs à contrôler la cohérence des techniques utilisées dans le cadre de l'évaluation des provisions techniques et des risques liés.

Jusqu'à-là, la prise en compte de l'inflation dans les méthodes de provisionnement non-vie était généralement réalisée à l'aide de méthodes projetant implicitement l'inflation passée dans l'estimation des règlements futurs. Le récent contexte inflationniste questionne l'utilisation de ces méthodes, car elles peuvent entraîner une sous-estimation des provisions techniques et du risque de réserve, comme le montrent (Brydon et Verrall, 2009) au travers de la méthode de Chain Ladder.

Ces éléments soulèvent la problématique suivante : dans quelle mesure les méthodes de provisionnement non-vie peuvent-elles être adaptées dans un contexte inflationniste instable ? Dans cette perspective, le mémoire a pour objectif d'étudier des méthodes de provisionnement non-vie modélisant de manière explicite l'inflation.

La première étape de ce mémoire s'attache à redéfinir les concepts clés du provisionnement non-vie, ainsi que les outils nécessaires pour appréhender les enjeux liés à l'inflation. Ensuite, plusieurs méthodes de provisionnement sont introduites, en détaillant pour chacune d'entre elles la manière dont l'inflation est prise en compte. Ces dernières sont ensuite appliquées sur un portefeuille couvrant la responsabilité civile automobile, dans le but d'exhiber les méthodes qui fournissent les résultats les plus pertinents dans la situation inflationniste actuelle.

## Méthodes de provisionnement proposées

Au sein de ce mémoire, quatre méthodes de provisionnement sont présentées : une méthode prenant en compte de manière implicite l'inflation, la méthode de *surinflation*, la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Ces méthodes sont schématiquement représentées à la figure 0.1.

La méthode qui intègre implicitement l'inflation, repose sur une application classique de la méthode de Chain Ladder. En d'autres termes, elle consiste à appliquer la méthode de Chain Ladder à un triangle de règlements au coût historique, sans retraiter le triangle de l'inflation

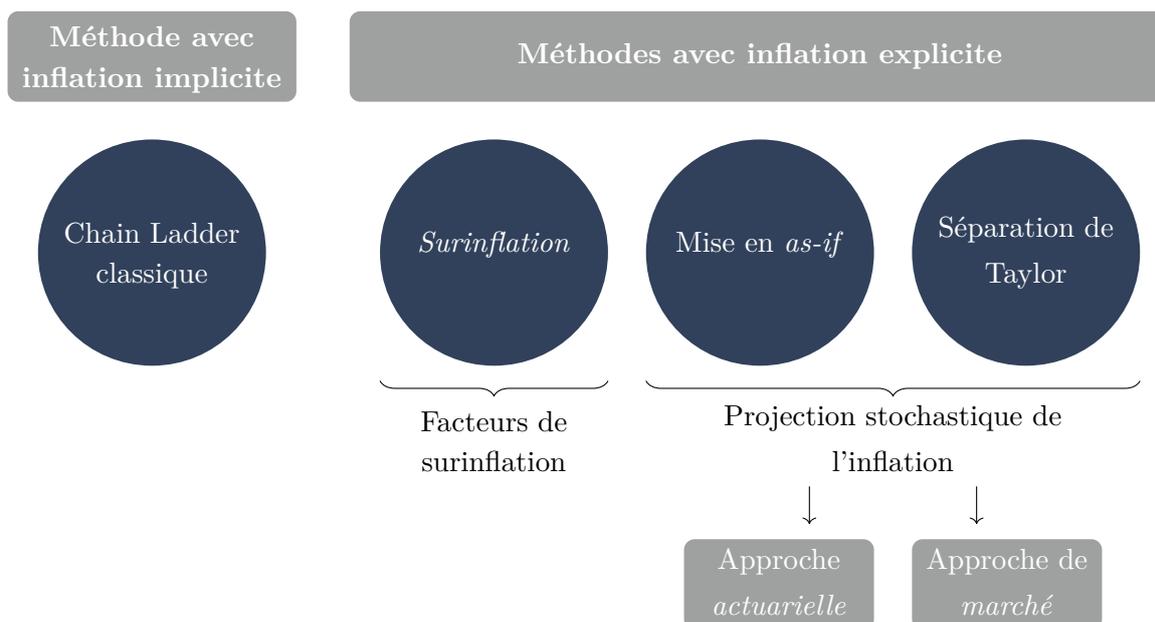


FIGURE 0.1 – Les méthodes de provisionnement proposées

passée. L'idée sous-jacente de cette approche est que l'utilisation de la méthode de Chain Ladder sur des règlements non ajustés de l'inflation passée, projette implicitement une moyenne de l'inflation passée dans les règlements futurs. Cependant, cette affirmation est valable uniquement si l'inflation passée, observée dans le triangle, reste relativement stable. Ainsi, le récent contexte inflationniste remet en question la validité de cette hypothèse.

La méthode de *surinflation* est une méthode de provisionnement, similaire à la précédente, qui vise à corriger les limites de la projection de l'inflation avec la méthode de Chain Ladder. Pour ce faire, elle consiste également à appliquer la méthode de Chain Ladder à un triangle de règlements au coût historique, mais la projection du triangle est dans un second temps ajustée en utilisant des facteurs de surinflation, destinés à surinflater les règlements futurs de la différence entre l'inflation anticipée et l'inflation projetée implicitement par la méthode de Chain Ladder. De cette manière, elle permet d'anticiper un niveau élevé d'inflation, cependant son efficacité repose sur l'hypothèse que la méthode de Chain Ladder projette une moyenne de l'inflation passée, ce qui n'est plus nécessairement vérifiée en raison de la récente volatilité de l'inflation.

La méthode de mise en *as-if* est une méthode de provisionnement conçue pour corriger l'absence de prise en compte d'effet calendaire dans la méthode de Chain Ladder, en modélisant de manière explicite l'inflation. Elle consiste à appliquer la méthode de Chain Ladder à un triangle de règlements au coût actuel, autrement dit à un triangle retraité de l'inflation passée. L'enjeu de ce retraitement est d'éliminer les effets calendaires présents dans le triangle, de sorte à ne projeter aucune inflation en utilisant la méthode de Chain Ladder. Une fois le triangle projeté, il est nécessaire d'incorporer une projection de l'inflation dans les règlements futurs, ce qui nécessite une modélisation explicite de celle-ci.

La méthode de séparation de Taylor est une méthode de provisionnement qui a été proposée par (Taylor, 1977). Elle s'utilise sur un triangle de coût moyen et consiste à séparer l'écoulement des sinistres de l'influence affectant les années calendaires. Pour ce faire, elle considère l'inflation comme une donnée endogène au triangle, en modélisant intrinséquement cette dernière à l'aide d'un facteur calendaire  $\lambda$ . Ce facteur calendaire  $\lambda$  doit être projeté afin d'obtenir une estimation du montant des provisions techniques.

Le tableau 0.1 présente une synthèse des principaux aspects de chacune de ces méthodes, dans le cadre de leur application au sein de ce mémoire.

Méthode de provisionnement	Triangle utilisé	Méthode de projection	Projection de l'inflation
Méthode prenant en compte implicitement l'inflation	Triangle de règlements cumulés	Chain Ladder	Inflation projetée implicitement par Chain Ladder
Méthode de <i>surinflation</i>	Triangle de règlements cumulés	Chain Ladder	Inflation projetée implicitement par Chain Ladder et utilisation de facteurs de surinflation
Méthode de mise en <i>as-if</i>	Triangle de règlements cumulés retraité de l'inflation passée à l'aide d'un indice des prix	Chain Ladder	Projection de manière stochastique de l'indice des prix utilisé pour retraiter le triangle
Méthode de séparation de Taylor	Triangle de coût moyen décumulé	Méthode de séparation de Taylor	Projection de manière stochastique du facteur calendaire $\lambda$

TABLE 0.1 – Les grands principes des différentes méthodes de provisionnement proposées

## Modélisation de l'inflation

En assurance non-vie, les sinistres sont soumis à l'inflation générale et à l'inflation spécifique. L'inflation générale se rapporte à l'augmentation du niveau général des prix, tandis que l'inflation spécifique est une composante supplémentaire reflétant la variation des prix des biens et des services qui affecte directement la branche étudiée.

Pour mettre en oeuvre la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, il est nécessaire de modéliser et de projeter l'inflation. Dans cette perspective, les modèles stochastiques introduits dans (De Felice et Moriconi, 2023) sont utilisés. La contribution apportée à ces approches réside dans la modélisation de l'inflation spécifique et dans l'utilisation de données en libre accès pour le calibrage des modèles de l'inflation générale. Ainsi, deux approches sont proposées pour modéliser l'inflation : l'approche *actuarielle* et l'approche de *marché*.

L'approche *actuarielle* constitue un développement naturel de l'approche qui modélise implicitement l'inflation, en modélisant cette dernière sous une probabilité historique. Elle s'appuie sur les hypothèses de futurs taux d'inflation anticipés déterministes, d'indépendance entre le risque d'inflation et le risque technique et d'absence de risque de taux d'intérêt et de prime de risque

d'inflation. Sous cette approche, les taux d'inflation générale anticipés sont obtenus à partir des anticipations de la BCE (Banque Centrale Européenne).

L'approche de *marché* essaye de s'abstenir des hypothèses d'absence de risque de taux d'intérêt et de prime de risque d'inflation. Elle modélise l'inflation sous une probabilité risque-neutre. Dans le cadre de cette approche, les taux d'inflation générale anticipés sont estimés à partir des cotations des OAT (Obligations Assimilables du Trésor) et des OAT€i. Ces changements, par rapport à l'approche *actuarielle*, visent à respecter les exigences, de la directive Solvabilité II, concernant la projection des risques financiers pour évaluer les provisions techniques.

### Application numérique à la branche responsabilité civile automobile

Les différentes méthodes proposées ont été appliquées sur un portefeuille couvrant la responsabilité civile automobile, à partir de triangles observés à fin 2023 avec un historique de 20 années de survenance.

L'application numérique des méthodes s'intéresse, d'une part au montant des provisions techniques, via la PSAP (Provision pour Sinistres A Payer) et le BE (Best Estimate), obtenus à l'aide des méthodes de provisionnement sous leur forme déterministe, et de l'autre côté au risque de réserve à l'ultime et à horizon 1 an, à travers respectivement la distribution du DUO (Discounted Ultimate Obligation) et la distribution du YEO (Year-End Obligation), obtenues à l'aide des procédures bootstrap de chacune des méthodes.

La distribution du DUO correspond à la collection de la valeur actuelle des simulations des futures diagonales, alors que la distribution du YEO correspond à la collection de la valeur actualisée des simulations des futures diagonales, vues dans 1 an.

Les résultats numériques, obtenus avec les différentes méthodes, sont synthétisés dans le tableau 0.2, où  $m_{DUO}$ ,  $\sigma_{DUO}$  et  $CV_{DUO}$  correspondent respectivement à la moyenne, à l'écart type et au coefficient de variation de la distribution du DUO et  $m_{YEO}$ , VA  $m_{YEO}$ ,  $\sigma_{YEO}$ ,  $CV_{YEO}$  et  $q_{99,5\%}$  correspondent respectivement à la moyenne, à la moyenne actualisée, à l'écart type, au coefficient de variation et au quantile à 99,5% de la distribution du YEO. Le SCR (Solvency Capital Requirement) correspond à la valeur actualisée sur 1 an, de la différence entre le quantile à 99,5% et la moyenne de la distribution du YEO.

L'analyse comparative des résultats met en évidence que, dans la situation inflationniste actuelle, la méthode modélisant de manière implicite l'inflation sous-estime le montant des provisions techniques par rapport à la méthode de *surinflation*, la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Cette sous-estimation met en exergue, dans le contexte actuel, la mauvaise projection implicite de l'inflation dans le cadre d'une application classique de la méthode de Chain Ladder.

De plus, il ressort de cette étude que la méthode intégrant implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* sous-estiment le risque de réserve par rapport à la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Cette observation s'explique par la modélisation stochastique

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche	Méthode Taylor <i>actuarielle</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche de	Méthode Taylor <i>marché</i>
Provisions	PSAP	100 000	102 981	103 026	103 004	102 687	102 584
	BE	94 142	96 943	96 874	96 926	96 548	96 526
DUO	$m_{DUO}$	94 264	97 068	97 216	97 000	96 890	96 601
	$\sigma_{DUO}$	11 351	11 686	13 874	14 875	13 825	14 813
	$CV_{DUO}$	12,04%	12,04%	14,27%	15,34%	14,27%	15,33%
YEO	$m_{YEO}$	97 390	100 288	100 300	100 184	99 953	99 767
	VA $m_{YEO}$	94 227	97 031	97 043	96 930	96 706	96 527
	$\sigma_{YEO}$	9 783	10 065	11 868	12 429	11 868	12 414
	$CV_{YEO}$	10,05%	10,04%	11,83%	12,41%	11,87%	12,44%
	$q_{99,5\%}$	123 194	126 836	132 507	136 497	132 191	135 951
	SCR	24 966	25 586	31 167	35 133	31 191	35 009

TABLE 0.2 – Résultats numériques sur le montant des provisions, la distribution du DUO (vision à l’ultime) et la distribution du YEO (vision à horizon 1 an) avec les différentes méthodes

de l’inflation dans ces deux dernières méthodes, ajoutant une volatilité supplémentaire dans l’évaluation du montant des provisions techniques.

Enfin, il est également constaté que l’approche de *marché* sous-estime légèrement les provisions par rapport à l’approche *actuarielle*, en raison des anticipations d’inflation générale issues des cotations des OAT et OAT€i, qui sont inférieures à celles de la BCE.

### Validation des méthodes

Pour tester les performances des différentes méthodes un backtesting a été effectué. Ce dernier consiste à tronquer, à fin 2022, les triangles utilisés précédemment pour l’application numérique, afin d’estimer le montant des règlements de l’année calendaire 2023, au titre des années de survenance de 2004 à 2022, et de le comparer au montant observé.

Ainsi, le backtesting s’intéresse au montant des règlements de la prochaine année, estimé à l’aide des méthodes de provisionnement proposées dans leur version déterministe, et à la distribution de ses règlements, étudiée à l’aide de la distribution du NYO (Next Year Obligation), obtenue avec les procédures bootstrap des méthodes.

Les résultats numériques du backtesting avec les différentes méthodes sont résumés dans le tableau 0.3, où  $D_{n+1}$  correspond à l’estimation du montant des règlements pour la prochaine année calendaire,  $m_{NYO}$ ,  $\sigma_{NYO}$  et  $CV_{NYO}$  correspondent respectivement à la moyenne, à l’écart type et au coefficient de variation de la distribution du NYO, et  $q_{obs}$  correspond au quantile de la distribution des règlements de la prochaine année associé au montant de règlement réellement observé pour la prochaine année.

L’analyse des résultats du backtesting révèle que les diverses méthodes présentées au sein du mémoire, sous-estiment le montant des règlements effectivement observé en 2023. Cependant,

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>	Méthode Taylor Approche de <i>marché</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche de <i>marché</i>	Méthode Taylor
$D_{n+1}$	49 942	46 311	46 716	48 018	48 651	47 764	48 364
$m_{\text{NYO}}$		46 374	46 781	48 173	48 648	47 919	48 362
NYO $\sigma_{\text{NYO}}$		7 092	7 154	8 643	9 502	8 600	9 449
$CV_{\text{NYO}}$		15,29%	15,29%	17,94%	19,53%	17,95%	19,54%
$q_{\text{obs}}$		67,97%	67,36%	60,37%	56,11%	61,38%	57,32%

TABLE 0.3 – Résultats numériques du backtesting avec les différentes méthodes

la méthode intégrant implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* sont les méthodes qui présentent les écarts les plus importants avec la valeur observée. Ainsi, le backtesting met en évidence les limites de la méthode de *surinflation* pour projeter l'inflation future dans un contexte inflationniste instable. De plus, il suggère que la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor sont les méthodes les plus fiables pour estimer les provisions techniques en présence d'une instabilité prononcée de l'inflation.

### Conclusion

Ce mémoire permet de confirmer les limites actuelles des méthodes de provisionnement non-vie qui prennent en compte de manière implicite l'inflation, en montrant que ces dernières sous-estiment le montant des provisions techniques ainsi que le risque de réserve. La méthode de *surinflation*, largement utilisée par les assureurs en pratique, constitue une première approche intéressante pour intégrer l'inflation dans le calcul des provisions. Cependant, sa faible précision et maîtrise pour projeter l'inflation dans le contexte actuel, limitent la pertinence de son application en pratique.

De cette manière, ce mémoire met en lumière les problèmes auxquels les assureurs sont confrontés dans leur processus de provisionnement. Il apparaît désormais indispensable pour les compagnies d'assurances non-vie d'intégrer l'inflation de manière explicite dans le but d'évaluer leurs provisions techniques et leur risque de réserve associé.

Dans ce cadre, la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor se révèlent être des méthodes de provisionnement pertinentes et efficaces pour prendre en compte le récent pic inflationniste.

# Executive summary

## Context and issue

This thesis is set within a context in which the insurance sector has been significantly impacted by the recent resurgence of inflation. This notable event has prompted non-life insurers and regulators to review the consistency of the techniques used in assessing technical reserves and related risks.

Until now, inflation has generally been taken into account in non-life reserving methods using methods that implicitly project past inflation in the estimation of future settlements. The recent inflationary context calls into question the use of these methods, as they can lead to an underestimation of technical reserves and reserve risk, as shown by (Brydon et Verrall, 2009) using the Chain Ladder method.

This raises the following question : to what extent can non-life reserving methods be adapted to an unstable inflationary context ? With this in mind, the aim of this thesis is to study non-life reserving methods that explicitly model inflation.

The first stage of this thesis aims to redefine the key concepts of non-life reserving, as well as the tools needed to understand the issues associated with inflation. Next, several reserving methods are introduced, with details of how inflation is taken into account for each. These are then applied to a portfolio covering motor third-party liability, with the aim of demonstrating which methods provide the most effective results in the current inflationary situation.

## Proposed reserving methods

This thesis presents four reserving methods : a method that implicitly takes account of inflation, the *superimposed inflation* method, the *as-if* method and the Taylor's separation method. These methods are schematically represented in Figure 0.2.

The method that implicitly incorporates inflation is based on a classic application of the Chain Ladder method. In other words, it involves applying the Chain Ladder method to a triangle of settlements at historical cost, without adjusting the triangle for past inflation. The idea behind this approach is that using the Chain Ladder method on settlements not adjusted for past inflation implicitly projects an average of past inflation into future settlements. However, this statement is only valid if past inflation, observed in the triangle, remains relatively stable. The recent inflationary context calls into question the validity of this assumption.

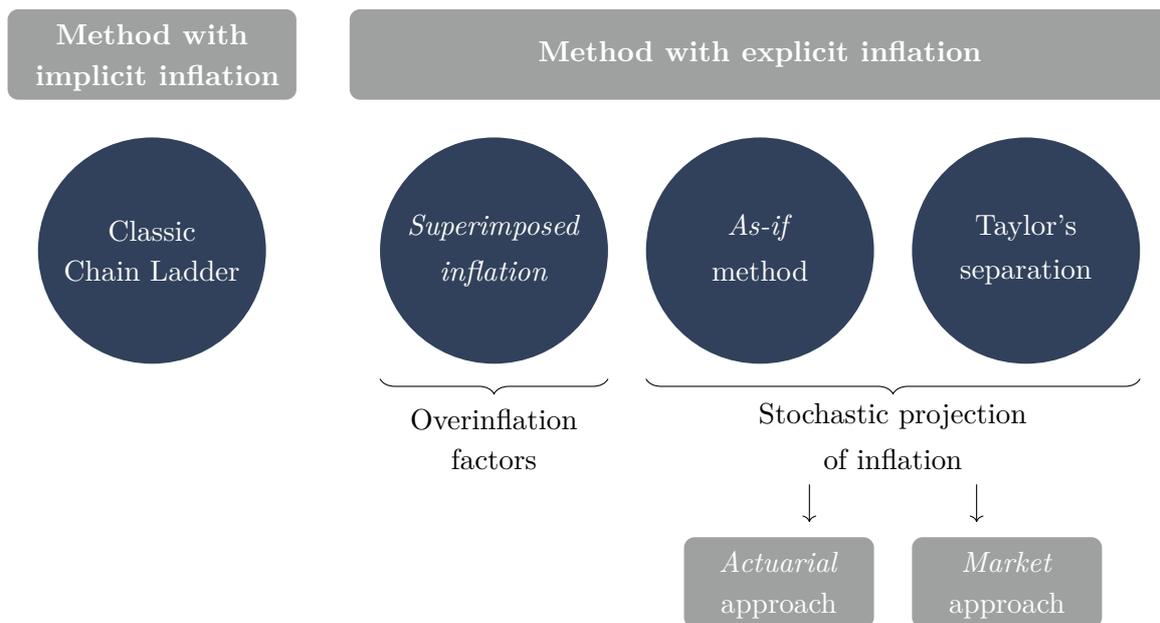


FIGURE 0.2 – The proposed reserving methods

The *superimposed inflation* method is a reserving method, similar to the previous one, which aims to correct the limitations of the inflation projection with the Chain Ladder method. To do this, it also involves applying the Chain Ladder method to a triangle of settlements at historical cost, but the projection of the triangle is then adjusted using overinflation factors, designed to overinflate future settlements by the difference between expected inflation and the inflation implicitly projected by the Chain Ladder method. In this way, it is possible to anticipate a high level of inflation. However, its effectiveness is based on the assumption that the Chain Ladder method projects an average of past inflation, which is no longer necessarily true given the recent volatility of inflation.

The *as-if* method is a reserving method designed to correct for the lack of calendar effect in the Chain Ladder method, by explicitly modelling inflation. It consists of applying the Chain Ladder method to a triangle of settlements at current cost, in other words to a triangle restated for past inflation. The aim of this adjustment is to eliminate the calendar effects present in the triangle, so that no inflation is projected using the Chain Ladder method. Once the triangle has been projected, it is necessary to incorporate a projection of inflation in future settlements, which requires explicit inflation modelling.

The Taylor's separation method is a reserving method proposed by (Taylor, 1977). It is used on an average cost triangle and consists of separating the claims development from the influence of calendar years. To do this, it considers inflation as an endogenous input to the triangle, by intrinsically modelling it using a calendar factor  $\lambda$ . This calendar factor  $\lambda$  must be projected in order to obtain an estimate of the amount of technical reserves.

The table 0.4 summarises the main aspects of each of these methods in the context of their

application within this thesis.

Reserving method	Triangle used	Projection method	Inflation projection
Method that implicitly incorporates inflation	Triangle of cumulative settlements	Chain Ladder	Inflation implicitly projected by Chain Ladder
<i>Superimposed inflation</i> method	Triangle of cumulative settlements	Chain Ladder	Inflation implicitly projected by Chain Ladder and use of overinflation factors
<i>As-if</i> method	Triangle of cumulative settlements adjusted for past inflation using a price index	Chain Ladder	Stochastic projection of the price index used to adjust the triangle
Taylor's separation method	Decumulated average cost triangle	Taylor's separation method	Stochastic projection of the $\lambda$ calendar factor

TABLE 0.4 – The key principles of the different reserving methods proposed

### Inflation modeling

In non-life insurance, claims are subject to both general inflation and specific inflation. General inflation refers to the increase in the overall price level, while specific inflation is an additional component reflecting price changes in goods and services that directly impact the line of business under study.

To implement the *as-if* method and the Taylor's separation method, it is necessary to model and project inflation. From this perspective, the stochastic models introduced in (De Felice et Moriconi, 2023) are used. The contribution of these approaches lies in the modeling of specific inflation and in the use of open-access data to calibrate general inflation models. Thus, two approaches are proposed for modeling inflation : the *actuarial* approach and the *market* approach.

The *actuarial* approach is a natural development of the approach that implicitly models inflation, as it models inflation under a historical probability. This approach relies on assumptions of deterministic expected future inflation rates, independence between inflation risk and technical risk, and the absence of interest rate risk and inflation risk premium. Under this approach, expected general inflation rates are derived from the ECB's projections (European Central Bank).

The *market* approach seeks to avoid the assumptions regarding the absence of interest rate risk and inflation risk premium. It models inflation under a risk-neutral probability. Within this framework, expected general inflation rates are estimated from the prices of OAT (Obligations Assimilables du Trésor) and OAT€i bonds. These adjustments, compared to the actuarial approach, aim to meet the requirements of the Solvency II directive regarding the projection of financial risks to assess technical reserves.

### Numerical application to the motor third-party liability insurance line

The different proposed methods were applied to a portfolio covering motor third-party liability insurance, based on triangles observed at the end of 2023 with a 20-year occurrence history.

The numerical application of the methods focuses, on the one hand, on the amount of technical reserves, through the OCR (Outstanding Claims Reserves) and the BE (Best Estimate), obtained using reserving methods in their deterministic form, and on the other hand, on the ultimate and one-year reserve risk, through the distribution of the DUO (Discounted Ultimate Obligation) and the YEO (Year-End Obligation), respectively, obtained using the bootstrap procedures for each method.

The DUO distribution corresponds to the collection of the present value of simulations of future diagonals, whereas the YEO distribution corresponds to the collection of the discounted value of simulations of future diagonals as seen one year from now.

The numerical results obtained with the different methods are summarized in Table 0.5, where  $m_{\text{DUO}}$ ,  $\sigma_{\text{DUO}}$ , and  $CV_{\text{DUO}}$  correspond to the mean, standard deviation, and coefficient of variation of the DUO distribution, respectively, and  $m_{\text{YEO}}$ , VA  $m_{\text{YEO}}$ ,  $\sigma_{\text{YEO}}$ ,  $CV_{\text{YEO}}$ , and  $q_{99.5\%}$  correspond to the mean, the discounted mean, the standard deviation, the coefficient of variation, and the 99.5% quantile of the YEO distribution, respectively. The SCR (Solvency Capital Requirement) corresponds to the one-year discounted value of the difference between the 99.5% quantile and the mean of the YEO distribution.

		Implicit inflation	<i>Superimposed inflation</i> method	<i>As-if</i> method <i>Actuarial</i>	Taylor's method approach	<i>As-if</i> method <i>Market</i>	Taylor's method approach
Reserves	OCR	100,000	102,981	103,026	103,004	102,687	102,584
	BE	94,142	96,943	96,874	96,926	96,548	96,526
DUO	$m_{\text{DUO}}$	94,264	97,068	97,216	97,000	96,890	96,601
	$\sigma_{\text{DUO}}$	11,351	11,686	13,874	14,875	13,825	14,813
	$CV_{\text{DUO}}$	12.04%	12.04%	14.27%	15.34%	14.27%	15.33%
YEO	$m_{\text{YEO}}$	97,390	100,288	100,300	100,184	99,953	99,767
	VA $m_{\text{YEO}}$	94,227	97,031	97,043	96,930	96,706	96,527
	$\sigma_{\text{YEO}}$	9,783	10,065	11,868	12,429	11,868	12,414
	$CV_{\text{YEO}}$	10.05%	10.04%	11.83%	12.41%	11.87%	12.44%
	$q_{99.5\%}$	123,194	126,836	132,507	136,497	132,191	135,951
	SCR	24,966	25,586	31,167	35,133	31,191	35,009

TABLE 0.5 – Numerical results on the amount of reserves, the DUO distribution (ultimate view), and the YEO distribution (one-year horizon view) with the different methods

The comparative analysis of the results highlights that, in the current inflationary situation, the method implicitly modeling inflation underestimates the amount of technical reserves compared to the *superimposed inflation* method, the *as-if* method, and the Taylor's separation method. This underestimation underscores, in the current context, the poor implicit projection of inflation

within the standard application of the Chain Ladder method.

Furthermore, this study reveals that the method implicitly incorporating inflation and the *superimposed inflation* method underestimate reserve risk compared to the *as-if* method and the Taylor's separation method. This observation is explained by the stochastic modeling of inflation in these latter two methods, which adds additional volatility to the assessment of technical reserves.

Finally, it is also observed that the *market* approach slightly underestimates reserves compared to the *actuarial* approach, due to general inflation expectations derived from OAT and OAT€i quotations, which are lower than those of the ECB.

### Method validation

In order to test the performance of the different methods, a backtesting was conducted. This process involves truncating, as of the end of 2022, the triangles previously used for the numerical application in order to estimate the amount of payments for the 2023 calendar year, for occurrence years 2004 to 2022, and comparing it to the observed amount.

Thus, the backtesting focuses on the amount of next year's payments, estimated using the proposed reserving methods in their deterministic form, and on the distribution of these payments, analyzed through the NYO (Next Year Obligation) distribution obtained via the methods' bootstrap procedures.

The numerical results of the backtesting with the different methods are summarized in Table 0.6, where  $D_{n+1}$  corresponds to the estimate of the payment amount for the next calendar year,  $m_{\text{NYO}}$ ,  $\sigma_{\text{NYO}}$ , and  $CV_{\text{NYO}}$  correspond to the mean, standard deviation, and coefficient of variation of the NYO distribution, respectively, and  $q_{\text{obs}}$  corresponds to the quantile of next year's settlement distribution associated with the observed settlement amount for the next year.

	Observed	Implicit inflation	<i>Superimposed inflation</i> method	<i>As-if</i> method	Taylor's method	<i>As-if</i> method	Taylor's method
				<i>Actuarial</i> approach		<i>Market</i> approach	
$D_{n+1}$	49,942	46,311	46,716	48,018	48,651	47,764	48,364
$m_{\text{NYO}}$		46,374	46,781	48,173	48,648	47,919	48,362
NYO $\sigma_{\text{NYO}}$		7,092	7,154	8,643	9,502	8,600	9,449
$CV_{\text{NYO}}$		15.29%	15.29%	17.94%	19.53%	17.95%	19.54%
$q_{\text{obs}}$		67.97%	67.36%	60.37%	56.11%	61.38%	57.32%

TABLE 0.6 – Numerical backtesting results with the different methods

The analysis of the backtesting results reveals that the various methods presented in this thesis underestimate the amount of payments actually observed in 2023. However, the method implicitly incorporating inflation and the *superimposed inflation* method show the largest deviations from the observed value. Thus, the backtesting highlights the limitations of the *superimposed*

*inflation* method for projecting future inflation in an unstable inflationary environment. Furthermore, it suggests that the *as-if* method and the Taylor's separation method are the most reliable methods for estimating technical reserves in the presence of pronounced inflation instability.

### **Conclusion**

This thesis confirms the current limitations of non-life reserving methods that implicitly account for inflation, showing that these methods underestimate both the amount of technical reserves and reserve risk. The *superimposed inflation* method, widely used by insurers in practice, represents an interesting initial approach to incorporating inflation in reserve calculations. However, its limited accuracy and control in projecting inflation in the current context limit the relevance of its practical application.

In this way, this thesis highlights the challenges insurers face in their reserving process. It has now become essential for non-life insurance companies to explicitly incorporate inflation in order to assess their technical reserves and associated reserve risk.

In this context, the *as-if* method and the Taylor's separation method prove to be relevant and effective reserving methods for accounting for the recent inflation spike.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le cabinet Actuelia et plus précisément messieurs Frank BOUKOBZA, David FITOUCHI, Louis-Anselme DE LAMAZE et madame Camille BLANC-VANNET, de m'avoir accueilli au sein de leur entreprise et de m'avoir donné l'opportunité de rédiger ce mémoire.

Je tiens ensuite à exprimer ma reconnaissance à Kévin MA, mon tuteur professionnel, qui m'a accordé sa confiance et qui a été disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire. Mes remerciements s'adressent également auprès de Jean-Noël RAMET et de Killian RAVOALAVOSON pour la qualité de nos nombreux échanges. Merci aussi à tous les consultants du cabinet pour leur bienveillance et leur sympathie.

Je remercie également tout particulièrement monsieur Jean BERARD, mon tuteur académique, pour nos différents échanges et ses précieux conseils techniques. Je remercie par la même occasion l'ensemble des professeurs de la formation du DUAS pour leur disponibilité et leur expertise, témoignant de la qualité de l'enseignement prodigué.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leurs encouragements, leur compréhension et leur soutien inconditionnel.

# Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Note de synthèse	iii
Executive summary	ix
Remerciements	xv
Table des matières	xviii
Table des figures	xx
Liste des tableaux	xxii
Introduction	1
<b>1 Contexte de l'étude et enjeux</b>	<b>3</b>
1.1 Le provisionnement en assurance non-vie . . . . .	3
1.1.1 Généralités sur l'assurance non-vie . . . . .	3
1.1.2 Les provisions en assurance non-vie . . . . .	5
1.1.3 Le provisionnement non-vie sous Solvabilité II . . . . .	6
1.1.4 Les méthodes classiques de provisionnement non-vie . . . . .	7
1.1.4.1 Introduction aux notations et aux triangles de développement . . . . .	7
1.1.4.2 La méthode de Chain Ladder . . . . .	9
1.1.4.3 Les méthodes de provisionnement GLM . . . . .	10
1.1.4.4 Les méthodes de provisionnement bootstrap . . . . .	13
1.1.5 La problématique de l'inflation dans la méthode de Chain Ladder . . . . .	14
1.2 Etat de l'art sur l'inflation . . . . .	16
1.2.1 Définition de l'inflation et de concepts connexes . . . . .	17
1.2.2 Les grandes théories de l'inflation . . . . .	18
1.2.2.1 L'inflation par la monnaie . . . . .	18
1.2.2.2 L'inflation par la demande . . . . .	20

1.2.2.3	L'inflation par les coûts . . . . .	22
1.2.3	Les mesures de l'inflation . . . . .	23
1.2.3.1	Les indices des prix . . . . .	23
1.2.3.2	L'indice des prix à la consommation . . . . .	26
1.2.4	L'inflation en assurance . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Cadre théorique de l'étude</b>	<b>30</b>
2.1	Prise en compte implicite de l'inflation dans le provisionnement non-vie . . . . .	31
2.2	Prise en compte explicite de l'inflation dans le provisionnement non-vie . . . . .	33
2.2.1	Présentation de méthodes de provisionnement non-vie prenant en compte explicitement l'inflation . . . . .	33
2.2.1.1	La méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	33
2.2.1.2	La méthode de mise en <i>as-if</i> . . . . .	35
2.2.1.3	La méthode de séparation de Taylor . . . . .	35
2.2.2	Présentation de deux approches pour modéliser l'inflation dans le cadre de l'évaluation des provisions techniques non-vie . . . . .	41
2.2.2.1	Approche <i>actuarielle</i> . . . . .	41
2.2.2.2	Approche de <i>marché</i> . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Application des méthodes à la branche responsabilité civile automobile</b>	<b>55</b>
3.1	Application de la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et de la méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	56
3.1.1	Etude des résidus . . . . .	56
3.1.2	Application numérique de la méthode prenant en compte implicitement l'inflation . . . . .	60
3.1.3	Application numérique de la méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	62
3.2	Application de la méthode de mise en <i>as-if</i> et de la méthode de séparation de Taylor . . . . .	65
3.2.1	Approche <i>actuarielle</i> . . . . .	65
3.2.1.1	Estimation des paramètres du modèle . . . . .	65
3.2.1.2	Application numérique des méthodes au provisionnement . . . . .	74
3.2.2	Approche de <i>marché</i> . . . . .	85
3.2.2.1	Estimation des paramètres du modèle . . . . .	85
3.2.2.2	Application numérique des méthodes au provisionnement . . . . .	96
3.3	Validation des méthodes . . . . .	99
3.3.1	Méthode prenant en compte implicitement l'inflation et méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	100
3.3.2	Méthode de mise en <i>as-if</i> et méthode de séparation de Taylor . . . . .	102
3.3.2.1	Approche <i>actuarielle</i> . . . . .	102
3.3.2.2	Approche de <i>marché</i> . . . . .	105
3.4	Synthèse de l'application des méthodes . . . . .	107

---

<b>Conclusion</b>	<b>109</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>
<b>A Les modèles linéaires généralisés</b>	<b>I</b>
A.1 Les résidus de Pearson standardisés . . . . .	I
A.2 La Mean Spread Error of Prediction . . . . .	II
<b>B Procédures bootstrap</b>	<b>III</b>
B.1 Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque de réserve à l'ultime . . . . .	III
B.2 Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque de réserve à horizon 1 an . . . . .	IV
B.3 Procédure bootstrap de la méthode de séparation de Taylor pour le risque de réserve à horizon 1 an . . . . .	V
<b>C Anticipation de l'inflation dans les cotations des OAT et des OAT€i sous l'approche de <i>marché</i></b>	<b>VI</b>

# Table des figures

0.1	Les méthodes de provisionnement proposées . . . . .	iv
0.2	The proposed reserving methods . . . . .	x
1.1	Représentation de la vie d'un sinistre . . . . .	4
1.2	Projection de l'inflation par la méthode de Chain Ladder dans le cas d'une inflation passée constante . . . . .	15
1.3	Evolution de l'indice des prix à la consommation en France . . . . .	16
1.4	Projection de l'inflation par la méthode de Chain Ladder dans le cas d'une récente forte augmentation de l'inflation . . . . .	17
1.5	Courbe de Phillips . . . . .	23
1.6	Répartition des placements obligataires des assureurs . . . . .	28
2.1	Les méthodes de provisionnement proposées . . . . .	30
3.1	Représentations graphiques des résidus de Pearson standardisés du triangle des règlements au coût historique, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) avant ajustement de l'hétéroscédasticité . . . . .	57
3.2	Ecart type des résidus standardisés par année de développement . . . . .	59
3.3	Représentations graphiques des résidus de Pearson ajustés du triangle des règlements au coût historique, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) après ajustement de l'hétéroscédasticité . . . . .	60
3.4	Histogramme de la distribution du YEO obtenu avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation . . . . .	62
3.5	Evolution de l'IPCH de la zone euro . . . . .	66
3.6	Evolution de l'indice d'inflation spécifique (moyenne entre l'indice des services hospitaliers et l'indice de l'entretien et de la réparation des véhicules des particuliers) . . . . .	67
3.7	Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro . . . . .	68
3.8	Nuage de points des logarithmes du rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro pour deux mois consécutifs . . . . .	69
3.9	Comparaison de l'évolution entre l'IPCH de la zone euro et le rapport entre l'indice d'inflation générale et l'indice d'inflation spécifique . . . . .	70
3.10	Evolution de l'indice d'inflation spécifique au triangle . . . . .	71
3.11	Rapport entre l'indice d'inflation spécifique du triangle et l'IPCH de la zone euro . . . . .	71

3.12	Comparaison entre les taux d'inflation spécifique obtenus à partir des indices et ceux déduits du triangle de coût moyen . . . . .	72
3.13	Nuage de points des logarithmes du rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro pour deux mois consécutifs . . . . .	73
3.14	Comparaison des taux d'inflation spécifique anticipés avec la méthode de mise en <i>as-if</i> et la méthode de séparation de Taylor sous l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	74
3.15	Représentations graphiques des résidus de Pearson standardisés du triangle de règlements au coût actuel, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) avant ajustement de l'hétéroscédasticité . . . . .	75
3.16	Représentations graphiques des résidus de Pearson ajustés du triangle de règlements au coût actuel, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) après ajustement de l'hétéroscédasticité . . . . .	76
3.17	Histogramme de la distribution du YEO obtenu avec la méthode de mise en <i>as-if</i> sous l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	78
3.18	Représentations graphiques des résidus de Pearson standardisés pour la méthode de séparation de Taylor, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) avant ajustement de l'hétéroscédasticité . . . . .	80
3.19	Représentations graphiques des résidus de Pearson ajustés pour la méthode de séparation de Taylor, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) après ajustement de l'hétéroscédasticité . . . . .	81
3.20	Ecart dans l'estimation de la PSAP par années calendaires entre la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de <i>surinflation</i> , la méthode de mise en <i>as-if</i> , et la méthode de séparation de Taylor . . . . .	82
3.21	Coefficient de variation du DUO par année de survenance . . . . .	84
3.22	Histogramme de la distribution du YEO obtenu avec la méthode de séparation de Taylor sous l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	85
3.23	Evolution de l'IPCH hors tabac de la zone euro . . . . .	86
3.24	Courbe des taux d'intérêt nominaux calibrée sur les OAT au 31/12/2023 . . . . .	88
3.25	Courbe des taux d'intérêt réels calibrée sur les OAT€i au 31/12/2023 . . . . .	89
3.26	Courbe des taux d'inflation anticipés par le marché au 31/12/2023 . . . . .	89
3.27	Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH hors tabac de la zone euro . . . . .	90
3.28	Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro . . . . .	91
3.29	Rapport entre l'indice d'inflation spécifique du triangle et l'IPCH hors tabac de la zone euro . . . . .	92
3.30	Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro . . . . .	93
3.31	Comparaison des taux d'inflation spécifique anticipés avec la méthode de mise en <i>as-if</i> et la méthode de séparation de Taylor sous l'approche de <i>marché</i> . . . . .	94
3.32	Evolution du taux court entre le 1er janvier 2005 et le 31 décembre 2023 . . . . .	95
3.33	Nuage de points des taux courts pour deux jours de bourse consécutifs . . . . .	96

# Liste des tableaux

0.1	Les grands principes des différentes méthodes de provisionnement proposées . . .	v
0.2	Résultats numériques sur le montant des provisions, la distribution du DUO (vision à l'ultime) et la distribution du YEO (vision à horizon 1 an) avec les différentes méthodes . . . . .	vii
0.3	Résultats numériques du backtesting avec les différentes méthodes . . . . .	viii
0.4	The key principles of the different reserving methods proposed . . . . .	xi
0.5	Numerical results on the amount of reserves, the DUO distribution (ultimate view), and the YEO distribution (one-year horizon view) with the different methods	xii
0.6	Numerical backtesting results with the different methods . . . . .	xiii
1.1	Le triangle $\nabla$ des montants incrémentaux observés . . . . .	8
1.2	Le triangle $\Delta$ des montants incrémentaux non observés . . . . .	8
1.3	Procédure bootstrap GLM . . . . .	14
1.4	Les grands principes des théories de l'inflation . . . . .	18
1.5	Comparaison entre l'écart inflationniste et l'inflation . . . . .	21
2.1	Le triangle $\nabla$ de coût moyen avec la méthode de séparation de Taylor . . . . .	36
2.2	Procédure bootstrap de la méthode de séparation de Taylor . . . . .	40
2.3	Les grands principes des différentes méthodes de provisionnement proposées . . .	41
3.1	Résultats numériques sur le montant des provisions, la distribution du DUO (vision à l'ultime) et la distribution du YEO (vision à horizon 1 an) avec les différentes méthodes . . . . .	56
3.2	Composition des groupes d'écart type homogène . . . . .	59
3.3	Résultats numériques des provisions avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation . . . . .	60
3.4	Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation	61
3.5	Facteurs de surinflation . . . . .	63
3.6	Résultats numériques des provisions avec la méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	64
3.7	Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	64
3.8	Taux d'inflation générale anticipés par la BCE en décembre 2023 . . . . .	66

3.9	Résultats numériques des provisions avec la méthode de mise en <i>as-if</i> dans le cadre de l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	76
3.10	Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de mise en <i>as-if</i> dans le cadre de l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	77
3.11	Résultats numériques des provisions pour la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	81
3.12	Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	83
3.13	Taux d'inflation générale anticipés par le marché au 31/12/2023 . . . . .	88
3.14	Résultats numériques des provisions avec la méthode de mise en <i>as-if</i> dans le cadre de l'approche de <i>marché</i> . . . . .	97
3.15	Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de mise en <i>as-if</i> dans le cadre de l'approche de <i>marché</i> . . . . .	97
3.16	Résultats numériques des provisions avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche de <i>marché</i> . . . . .	98
3.17	Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche de <i>marché</i> . . . . .	99
3.18	Résultats numériques du backtesting avec les différentes méthodes . . . . .	100
3.19	Résultats numériques du backtesting avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation . . . . .	101
3.20	Résultats numériques du backtesting avec la méthode de <i>surinflation</i> . . . . .	102
3.21	Résultats numériques du backtesting avec la méthode de mise en <i>as-if</i> dans le cadre de l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	103
3.22	Résultats numériques du backtesting avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche <i>actuarielle</i> . . . . .	104
3.23	Résultats numériques du backtesting avec la méthode de mise en <i>as-if</i> dans le cadre de l'approche de <i>marché</i> . . . . .	105
3.24	Résultats numériques du backtesting avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche de <i>marché</i> . . . . .	106
B.1	Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque à l'ultime . . .	III
B.2	Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque à horizon 1 an	IV
B.3	Procédure bootstrap de la méthode de séparation de Taylor pour le risque à horizon 1 an . . . . .	V

# Introduction

Depuis la fin de la première décennie du XXI<sup>e</sup> siècle, les assureurs sont marqués par une évolution permanente de leur environnement de travail : instabilité économique, réformes réglementaires, changement climatique, guerres géopolitiques. . . Ces bouleversements ont tendance à faire évoluer les comportements de consommations ou encore l'exposition aux risques des entités, poussant les organismes à être toujours plus en alerte.

Récemment l'inflation est devenue un sujet d'intérêt majeur, pour l'économie mondiale, mais aussi pour les assureurs. En effet, alors que les années 1990 à 2020 étaient caractérisées par une inflation relativement stable et faible, la relance de l'économie post Covid-19 et la guerre en Ukraine ont engendré une brusque hausse du niveau général des prix des biens et des services. L'inflation à l'échelle européenne a enregistré un pic à 10,6% en octobre 2022 constituant un niveau sans précédent au cours des 4 dernières décennies. Pour observer un tel niveau inflationniste, il est nécessaire de remonter jusqu'aux années 1970 marquées par les chocs pétroliers.

Ainsi, le dernier regain d'inflation, qui a récemment touché l'économie à l'échelle internationale, a contraint les compagnies d'assurance ainsi que les autorités de contrôle à vérifier la cohérence des méthodes et des modèles utilisés dans le cadre de l'évaluation des coûts des sinistres et du provisionnement technique lié, ainsi que les risques associés.

Historiquement, la problématique de la prise en compte de l'inflation dans l'évaluation des provisions était typiquement traitée de manière implicite à l'aide de méthodes qui sont supposées intrinsèquement projeter l'inflation passée dans l'estimation des paiements futurs. C'est notamment le cas dans le cadre de l'utilisation classique de la méthode de Chain Ladder. ([Brydon et Verrall, 2009](#)) montrent dans leur article que cette approche peut être considérée comme acceptable si l'inflation passée est stable et si l'inflation future espérée est approximativement la même que l'inflation passée. En revanche, ils montrent que dans le cas d'une récente brusque augmentation de l'inflation, l'application de telles méthodes pourrait être remise en cause puisqu'elles peuvent mener à une sous-estimation des provisions techniques.

Ces observations amènent à la problématique suivante, dans quelle mesure les méthodes de provisionnement non-vie peuvent-elle être adaptées dans un contexte inflationniste instable ? Dans la réflexion proposée, deux approches seront principalement analysées : les méthodologies de provisionnement non-vie prenant en compte de manière implicite l'inflation, ainsi que les méthodes consistant à modéliser et projeter directement l'inflation future.

Une première étape au sein de ce mémoire, consistera à redéfinir les éléments clés sur le provisionnement non-vie ainsi que les outils pour comprendre les enjeux liés à l'inflation. Dans un second temps, une présentation des méthodes de *surinflation*, de mise en *as-if* et de séparation de Taylor sera proposée et des modélisations stochastiques de l'inflation seront suggérées dans le but de projeter cette dernière. Les modèles utilisés seront inspirés de (De Felice et Moriconi, 2023) mais s'attacheront à modéliser l'inflation spécifique en plus de l'inflation générale. Enfin, les différentes approches proposées seront appliquées sur un portefeuille couvrant la responsabilité civile automobile. Une analyse comparative des résultats obtenus sera réalisée de manière à déterminer les méthodes fournissant les estimations les plus fiables dans le contexte actuel.

# Chapitre 1

## Contexte de l'étude et enjeux

L'objet de ce premier chapitre est d'introduire au travers de deux sections le contexte et les enjeux de ce mémoire. La première partie, consacrée au provisionnement en assurance non-vie, expose des méthodes de calcul des réserves avant de mettre en exergue la problématique posée par l'inflation à ce sujet. La deuxième partie présente le phénomène d'inflation pour en comprendre ses causes, ses mesures et son impact en assurance.

### 1.1 Le provisionnement en assurance non-vie

Cette section présente le provisionnement en assurance non-vie aussi bien sous son aspect règlementaire que calculatoire. Le premier paragraphe rappelle brièvement les caractéristiques principales de l'assurance non-vie tandis que le second expose les provisions à constituer dans le cadre de cette activité. Une troisième section vient compléter les deux premières en détaillant les grands principes du provisionnement non-vie dans le cadre de la directive Solvabilité II. La suite de cette partie vise à présenter des méthodes classiques de provisionnement non-vie avant d'en expliquer les limites en lien avec l'inflation.

#### 1.1.1 Généralités sur l'assurance non-vie

L'assurance non-vie, également appelée assurance IARD (Incendies, Accidents et Risques divers) vise à protéger les particuliers, les entreprises et les autres entités contre les risques non liés à la vie humaine.

Les différentes garanties d'assurance non-vie sont classées en branches et en sous branches dans l'article R.321-1 du Code des assurances. Elles peuvent être regroupées en trois grandes catégories :

- L'assurance de choses ou de biens qui dédommage les coûts des réparations ou de remise en état du bien assuré. Les assurances automobiles, dommages aux biens, transports, construction et catastrophes naturelles sont des exemples de cette catégorie.
- L'assurance de responsabilité qui couvre les dommages matériels et immatériels causés aux tiers. L'assurance responsabilité civile générale fait partie de cette catégorie.

- L'assurance de revenus ou de personnes qui prend en charge les coûts pour remettre la personne, partiellement ou totalement, dans la situation antérieure au sinistre.

Il est fréquent qu'un contrat soit composé de garanties relevant de différentes branches.

Les contrats sont la plupart du temps à horizon court, le plus souvent à durée annuelle, et les primes d'une année paient les sinistres de cette même année selon le principe de la répartition. Un contrat peut donner lieu à plusieurs sinistres.

Les garanties sont majoritairement de type indemnitaire, ce qui signifie que l'indemnité accordée à un assuré à la suite d'un sinistre n'est déterminée que postérieurement à ce dernier.

Il est essentiel de garder à l'esprit le déroulé de la vie d'un sinistre, illustrée par la figure 1.1.

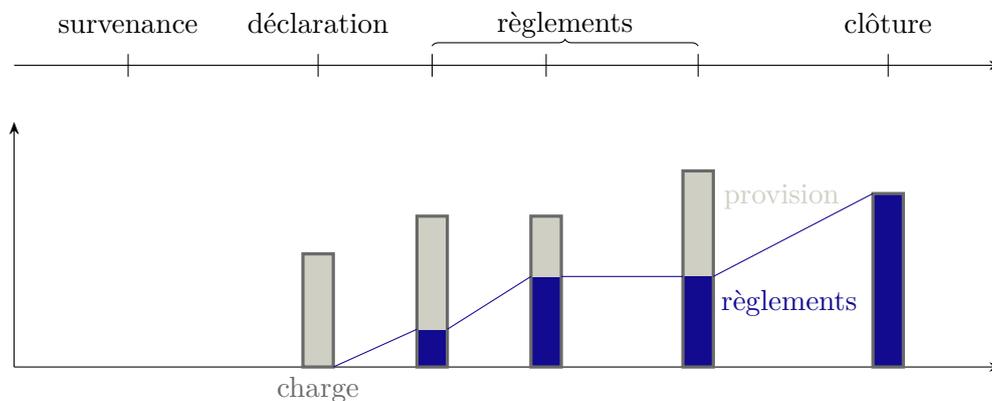


FIGURE 1.1 – Représentation de la vie d'un sinistre

Son origine correspond de manière naturelle à la survenance du sinistre. Celui-ci fait ensuite l'objet d'une déclaration auprès de l'assureur. Le délai entre ces deux événements n'est pas nécessairement court et peut parfois s'étendre sur plusieurs années.

À la suite de cette déclaration, une provision, appelée provision Dossier/Dossier, est constituée par l'assureur. Cette dernière est régulièrement actualisée de sorte à prendre en compte les paiements effectués et les nouvelles informations au sujet du sinistre. Ce processus peut s'étaler dans le temps, ainsi le règlement d'un sinistre peut se dérouler sur de nombreuses années.

Cette observation permet de distinguer les assurances non-vie à risque court des assurances non-vie à risque long pour lesquelles l'écoulement des provisions techniques s'effectue sur un grand nombre d'années. C'est le cas de l'assurance construction, des contrats d'assistance et de responsabilité civile, et des couvertures en cas d'incapacité, d'invalidité et de dépendance.

De plus, le sinistre peut faire l'objet de recours. Ces derniers désignent les actions menées par la compagnie d'assurance pour récupérer tout ou partie des indemnités versées à un assuré, lorsque la responsabilité d'un tiers est engagée dans le sinistre.

A l'issue des règlements, le sinistre est clôturé et la provision est alors nulle. Le montant total des paiements réalisés est appelé charge ultime. Ce développement met en lumière le rôle central joué par les provisions tout au long de la vie du sinistre.

### 1.1.2 Les provisions en assurance non-vie

L'activité d'assurance est caractérisée par le cycle inversé de production. L'assureur demande une prime à l'assuré avant même de savoir le montant qu'il devra lui indemniser. Il convient donc pour l'assureur d'anticiper à tout instant la charge de sinistre afférente à la couverture des garanties en constituant des provisions.

La réglementation définit les provisions techniques qui doivent être constituées en assurance non-vie au travers de l'article R.343-7 du Code des assurances. Ces dernières sont les suivantes :

- La provision mathématique des rentes ;
- La provision pour primes non acquises ;
- La provision pour risques en cours ;
- La provision pour sinistres à payer ;
- La provision pour risques croissants ;
- La provision pour égalisation ;
- La provision pour risque d'exigibilité.

Ce mémoire se concentrera sur la PSAP (Provision pour Sinistres À Payer), définie dans le Code des assurances comme la « valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise. »

Elle représente, dans la plupart des branches, la majorité du montant des provisions techniques en assurance non-vie. Ce qui justifie toute l'attention portée par les actuaires pour être le plus précis dans son évaluation.

La PSAP est composée des provisions Dossier/Dossier et des IBNR.

Les provisions Dossier/Dossier, qui sont calculées comme leur nom l'indique dossier par dossier, estiment la charge des sinistres survenus et déclarés. Elles sont constituées dès la déclaration du sinistre et sont régulièrement ajustées à l'aide des informations et des délais nécessités par la gestion du sinistre jusqu'à sa fixation et son règlement final.

Les IBNR (Incurred But Not Reported) sont composés des IBNYR (Incurred But Not Yet Reported) et IBNER (Incurred But Not Enough Reserved). Les IBNYR ont pour but de couvrir les sinistres survenus mais non encore déclarés, il s'agit de déclaration tardive, tandis que les IBNER ont pour vocation d'anticiper une erreur d'estimation dans les provisions, il s'agit alors d'aggravation tardive. Les IBNR sont généralement positifs, cependant ils peuvent réduire la provision Dossier/Dossier en cas de gestion excessivement prudente.

### 1.1.3 Le provisionnement non-vie sous Solvabilité II

La directive Solvabilité II est une réglementation européenne, adoptée en 2009 et entrée en application le 1er janvier 2016, qui s'applique à l'ensemble des organismes d'assurance exerçant dans l'Union européenne.

Elle a pour objectif d'homogénéiser la mesure des fonds propres et du capital requis dans une vision économique entre les pays européens, d'évaluer la solvabilité globale en considérant la majorité des risques auxquels sont confrontés les assureurs et d'inciter ces derniers à mesurer et contrôler leurs risques.

Elle se décompose en 3 piliers. Le premier pilier correspond aux exigences quantitatives et vise à estimer les richesses et mesurer les risques des organismes. Le deuxième pilier correspond aux exigences qualitatives, son objectif pour les assureurs est de connaître, maîtriser et piloter leurs risques. Le troisième pilier concerne le reporting du risque auprès du public et du superviseur.

Dans le cadre du premier pilier, l'objectif est de déterminer le montant des fonds propres économiques et le capital de solvabilité requis représentant le risque pris par l'assureur.

Les fonds propres économiques sont estimés à l'aide du bilan prudentiel obtenu après le passage du bilan comptable dans une vision économique. A ce titre, la directive impose au travers de l'article 77 de calculer les provisions techniques comme la somme de la meilleure estimation (Best Estimate) et de la marge de risque.

Elle définit la meilleure estimation comme : « la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. ». Autrement dit, c'est une vision économique des flux futurs reflétant la réalité des engagements compte tenu de la valeur temps de l'argent.

Les calculs effectués dans ce mémoire se focaliseront uniquement sur l'aspect purement technique des flux futurs, en excluant les frais. Ces derniers incluent généralement les frais administratifs, les frais de gestion et les frais d'acquisition. Les hypothèses, sous-tendant la projection de ces frais, doivent être alignées avec la stratégie de l'entité, ce qui dépasse le cadre de cette étude.

Il est important de remarquer que l'article 30 du règlement délégué précise que cette estimation doit prendre en compte : « l'incertitude quant au montant des sinistres, notamment en ce qui concerne l'inflation de ces montants », ce qui démontre la nécessité de prendre en compte l'inflation, de manière implicite ou explicite, dans le cadre de l'évaluation de la meilleure estimation.

L'article 36 du règlement délégué précise que le Best Estimate est composé du Best Estimate de prime et du Best Estimate de sinistre. Le premier se rapporte à des sinistres futurs couverts par les engagements d'assurances dans la limite de la frontière des contrats, tandis que le deuxième se rapporte à des sinistres déjà survenus indépendamment de la connaissance de leur déclaration.

Enfin, dans la perspective du calcul du capital de solvabilité requis, la directive impose aux

assureurs de déterminer leur risque de réserve sous un horizon d'un an. Le but est de mesurer la variabilité de l'estimation de la charge ultime au cours de la prochaine année.

Ce mémoire s'intéressera particulièrement au Best Estimate de sinistre, qui correspond au pendant de la PSAP sous la norme Solvabilité II, et au risque de réserve à horizon 1 an.

#### 1.1.4 Les méthodes classiques de provisionnement non-vie

En assurance non-vie, l'estimation de la PSAP et du Best Estimate de sinistre est basée sur l'expérience passée. Dans ce but, il est courant d'utiliser des méthodes agrégées qui reposent sur la manipulation de triangles de développement. C'est pourquoi, le premier paragraphe de cette partie s'attache à introduire l'utilisation de ces derniers. Subséquemment, l'intention sera de présenter des méthodes de provisionnement non-vie qui seront utilisées dans la suite des développements.

##### 1.1.4.1 Introduction aux notations et aux triangles de développement

Les triangles de développement (aussi appelés triangles de liquidation ou triangles de run-off) correspondent à des tableaux à double entrée. Ils sont organisés avec en ligne les années de survénance indexées par  $i$  pour  $0 \leq i \leq I$  et en colonne les années de développement indexées par  $j$  pour  $0 \leq j \leq J$ . En général, dans ces triangles un même nombre d'année de développement et de survénance est considéré ce qui signifie que  $I = J = n$ . Les diagonales correspondent aux années calendaires qui sont indexées par  $l = i + j$  pour  $0 \leq l \leq 2n$ . L'année calendaire  $n$  est l'année d'observation des données.

Ils permettent de représenter l'écoulement d'une variable d'intérêt par année de survénance et année de développement en agrégeant de manière appropriée les montants de cette dernière. Elle correspond typiquement au montant des règlements ou au montant de la charge des sinistres. Elle peut aussi désigner le montant des provisions ou le nombre de sinistres. Dans la suite, sauf mention contraire la variable considérée sera les règlements.

L'incrément des règlements pour l'année de survénance  $i$  et l'année de développement  $j$  sera noté  $C_{i,j}$ . Le montant cumulé des règlements pour l'année de survénance  $i$  et l'année de développement  $j$  sera noté  $D_{i,j}$  de sorte que :

$$D_{i,j} = \sum_{k=0}^j C_{i,k}.$$

Le tableau peut être décomposé en deux triangles, à savoir le triangle supérieur et le triangle inférieur.

Le triangle supérieur, illustré au tableau 1.1 avec les incréments, représente l'ensemble des règlements passés qui sont observés  $\{C_{i,j}, (i,j) \in \nabla\}$  où  $\nabla = \{(i,j), 0 \leq i \leq n \text{ et } 0 \leq j \leq n - i\}$ .

Année de survenance	Année de développement					
	0	1	2	...	$n - 1$	$n$
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,n-1}$	
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...		
⋮	⋮	⋮	⋮			
$n - 1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$				
$n$	$C_{n,0}$					

TABLE 1.1 – Le triangle  $\nabla$  des montants incrémentaux observés

Le triangle inférieur, illustré au tableau 1.2 avec les incréments, représente l'ensemble des règlements futurs estimés, qui ne sont pas encore observés, ce qui correspond à  $\{C_{i,j}, (i,j) \in \Delta\}$  où  $\Delta = \{(i,j), 1 \leq i \leq n \text{ et } n - i + 1 \leq j \leq n\}$ .

Année de survenance	Année de développement					
	0	1	2	...	$n - 1$	$n$
0						
1						$C_{1,n}$
2					$C_{2,n-1}$	$C_{2,n}$
⋮					⋮	⋮
$n - 1$			$C_{n-1,2}$	...	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$
$n$		$C_{n,1}$	$C_{n,2}$	...	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$

TABLE 1.2 – Le triangle  $\Delta$  des montants incrémentaux non observés

Par la suite, l'intersection du triangle inférieur avec la ligne  $i$ , sera notée comme  $\{C_{i,j}, (i,j) \in \Delta_i\}$  où  $\Delta_i = \{(i,j), n - i + 1 \leq j \leq n\}$ . Ce qui s'interprète comme les règlements futurs pour l'année de survenance  $i$ .

De plus,  $D_l$  désignera le montant total des règlements de l'année calendaire  $l$  à savoir :

$$D_l = \sum_{i=\max(l-n,0)}^{\min(l,n)} C_{i,l-i}, \quad \forall l \in \llbracket 0, 2n \rrbracket.$$

L'objectif final est de calculer une estimation du triangle inférieur  $\{\widehat{C}_{i,j}, (i,j) \in \Delta\}$  à partir du triangle supérieur. La projection d'un triangle de règlements permet donc d'estimer le montant des règlements futurs, correspondant au montant de réserve  $R$  à constituer. L'estimation des réserves obtenue est donnée par :

$$\widehat{R} = \sum_{(i,j) \in \Delta} \widehat{C}_{i,j}.$$

De nombreuses méthodes de provisionnement ont alors été développées dans le but de projeter le triangle supérieur. Elles se décomposent en deux grandes familles : les méthodes déterministes qui permettent d'obtenir une estimation des provisions et les méthodes stochastiques qui permettent en plus d'avoir une mesure de la précision de cette estimation. Parmi ces méthodes, la plus connue est sans doute celle de Chain Ladder.

#### 1.1.4.2 La méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain-Ladder est historiquement l'une des premières méthodes de provisionnement à avoir été suggérée. C'est une méthode de provisionnement déterministe. Elle est en pratique la méthode de provisionnement la plus utilisée et sert de méthode de référence pour comparer les différentes méthodes de provisionnement.

La méthode est utilisée sur des triangles de montants cumulés et son principe repose sur l'utilisation de facteurs de développement. Elle admet deux hypothèses :

- Les montants cumulés  $D_{i,j}$  des années de survenance  $i$  sont indépendants, autrement dit  $\forall (i, i') \in \{(k, k') \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq k'\}$ ,  $(D_{i,j})_{0 \leq j \leq n}$  est indépendant de  $(D_{i',j})_{0 \leq j \leq n}$ .
- Il existe des facteurs de développement  $f_j$  pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  de sorte que pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{E}(D_{i,j+1} \mid D_{i,1} \dots D_{i,j}) = f_j D_{i,j}$ .

Le modèle suppose ainsi une relation linéaire entre les montants cumulés de deux années de développement successives indépendamment de l'année de survenance. En d'autres termes pour une année de survenance donnée, le développement des sinistres au cours d'une année de développement se fait de manière proportionnelle à l'année de développement précédente. Le coefficient de proportionnalité étant indépendant de l'année de survenance.

Sous ces hypothèses, les facteurs de développement sont estimés à l'aide du triangle supérieur de la manière suivante :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j}}.$$

Ces facteurs de développement  $\widehat{f}_j$  sont ensuite utilisés pour estimer le triangle inférieur :

$$\forall (i, j) \in \Delta, \widehat{D}_{i,j} = D_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{j-1} \widehat{f}_k.$$

La provision pour chaque année de survenance  $i$  est alors estimée par :

$$\widehat{R}_i = \sum_{(i,j) \in \Delta_i} \widehat{C}_{i,j},$$

et la provision totale est estimée par :

$$\widehat{R} = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i.$$

Les estimateurs de la méthode de Chain Ladder peuvent être justifiés par des régressions linéaires (Barnett et Zehnwirth, 2000) ou par la théorie des GLM (Generalized Linear Model) (Renshaw et Verrall, 1998).

Le principal avantage de cette méthode est que son implémentation est très facile. De plus, elle ne possède pas de restriction particulière sur la valeur des données du triangle supérieur et peut notamment être utilisée lorsque les incréments sont négatifs. Ce qui se révèle particulièrement intéressant pour utiliser des triangles de paiements nets de recours.

En revanche, elle possède un certain nombre de limites en lien notamment avec ces hypothèses. En effet, l'hypothèse d'indépendance des années de survénance est une hypothèse forte. Elle peut être remise en cause en cas de changement de jurisprudence, de changement dans la politique de souscription et dans la gestion des sinistres ou encore en cas d'inflation.

De plus, une autre limite concerne l'hypothèse de linéarité entre deux années de développement successives qui peut se révéler contestable en cas de changements contractuels ou d'évolutions dans la composition du portefeuille et du profil de risque.

Cette hypothèse peut néanmoins être vérifiée graphiquement en réalisant pour chaque année de développement  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  le nuage des points  $(D_{i,j}; D_{i,j+1})_{0 \leq i \leq n-j-1}$ . Sous la deuxième hypothèse, les couples  $(D_{i,j}; D_{i,j+1})_{0 \leq i \leq n-j-1}$  doivent être approximativement alignés sur une droite passant par l'origine. Ce graphique peut notamment suggérer le retraitement de certains coefficients.

La méthode est sensible aux valeurs extrêmes et il peut être parfois nécessaire de distinguer les sinistres attritionnels des sinistres graves pour utiliser Chain Ladder.

Le coefficient  $f_{n-1}$  n'est estimé que sur la base d'une seule observation ce qui rend son estimation peu fiable. En outre, l'incertitude de l'estimation augmente avec l'année de survénance, à titre illustratif l'estimation de  $D_{n,n}$  est basée sur l'estimation de tous les facteurs de développement.

Cette observation est d'autant plus importante que la méthode de Chain Ladder est une méthode déterministe et ne fournit donc aucune mesure de précision sur l'estimation. Les méthodes stochastiques permettent de pallier ce problème.

### 1.1.4.3 Les méthodes de provisionnement GLM

Selon (Renshaw et Verrall, 1998), la plupart des méthodes de provisionnement stochastique peuvent se formuler à l'aide d'un modèle linéaire généralisé. Ces modèles sont constitués par les 3 composantes suivantes :

- La composante aléatoire qui définit la loi de la variable expliquée  $Y_{i,j}$  au sein de la famille exponentielle, de sorte que  $Y_{i,j} \sim \mathcal{L}_v(\mu_{i,j}, \phi)$ ,  $\mathbb{E}(Y_{i,j}) = \mu_{i,j}$  et  $\mathbb{V}(Y_{i,j}) = \phi v(\mu_{i,j})$ , avec  $\phi$

le paramètre de dispersion et  $v$  la fonction de variance.

- La composante systématique  $\eta_{i,j}$  qui est une fonction affine d'un encodage des variables explicatives, à savoir les années de survenance  $i$  et les années de développement  $j$ , de sorte que  $\eta_{i,j} = c + \alpha_i + \beta_j$ , avec  $\alpha_0 = 0$  et  $\beta_0 = 0$  pour éviter la sur-paramétrisation.
- La fonction de lien  $g$  qui spécifie la relation entre  $\eta_{i,j}$  et  $\mu_{i,j}$ , de sorte que  $\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j})$ .

En provisionnement non-vie, il est courant de spécifier une loi Lognormale, une loi Gamma ou une loi de Poisson pour les montants incrémentaux de règlements  $C_{i,j}$ .

Pour les modèles basés sur une loi Gamma ou une loi de Poisson, les composantes précédentes définissent un modèle GLM en posant  $Y_{i,j} = C_{i,j}$  et  $\eta_{i,j} = \ln \mu_{i,j}$ .

Lorsqu'il est supposé que les montants incrémentaux  $C_{i,j}$  suivent une loi Lognormale, les composantes continuent de définir un modèle GLM en spécifiant  $Y_{i,j} = \ln C_{i,j}$ , qui suit par définition une loi normale, et une fonction de lien identité autrement dit  $\eta_{i,j} = \mu_{i,j}$ .

Les estimations  $\hat{c}$ ,  $\hat{\alpha}_i$  et  $\hat{\beta}_j$ , des paramètres  $c$ ,  $\alpha_i$ , et  $\beta_j$ , sont obtenues par maximum de vraisemblance à partir des observations  $(y_{i,j})_{(i,j) \in \nabla}$  supposées indépendantes. Le paramètre de dispersion  $\phi$  peut être estimé soit par maximum de vraisemblance, soit à l'aide de la statistique de Pearson  $\chi^2$  par :  $\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{|\nabla| - p} = \frac{\chi^2}{\frac{n(n-1)}{2}}$ , avec  $|\nabla| = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  le nombre de données dans le triangle supérieur  $\nabla$ ,  $p = 2n + 1$  le nombre de paramètres estimés et  $\chi^2 = \sum_{(i,j) \in \nabla} (r_{i,j}^P)^2$  où  $r_{i,j}^P$  correspond au résidu de Pearson introduit à l'équation (1.1).

En provisionnement non-vie, les montants d'intérêts du modèle GLM sont les valeurs cumulées suivantes :  $Y_{i\bullet} = \sum_{(i,j) \in \Delta_i} Y_{i,j}$  et  $Y_{\bullet\bullet} = \sum_{(i,j) \in \Delta} Y_{i,j}$  qui permettent ensuite de faire le lien avec le montant des provisions. Elles sont respectivement estimées par  $\hat{\mu}_{i\bullet} = \sum_{(i,j) \in \Delta_i} \hat{\mu}_{i,j}$  et  $\hat{\mu}_{\bullet\bullet} = \sum_{(i,j) \in \Delta} \hat{\mu}_{i,j}$ , où  $\hat{\mu}_{i,j} = g^{-1}(\hat{\eta}_{i,j}) = g^{-1}(\hat{c} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$ .

L'adéquation du modèle peut être vérifiée à l'aide de résidus qui correspondent en une mesure de l'écart entre la valeur estimée par le modèle  $\hat{\mu}_{i,j}$  et la valeur observée  $y_{i,j}$ . Dans ce cadre, les résidus de Pearson sont souvent utilisés. Ils sont définis comme :

$$r_{i,j}^P = \frac{Y_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{v(\hat{\mu}_{i,j})}}. \quad (1.1)$$

Si le modèle est valide, ces derniers doivent approximativement se comporter comme des variables aléatoires centrées, indépendantes et de variance constante.

Pour se rapprocher au plus de cette situation, les résidus de Pearson sont souvent standardisés. Ce sujet est détaillé en annexe A.1.

Il est facile de remarquer que  $\mu_{1,n} = y_{1,n}$  et  $\mu_{n,1} = y_{n,1}$ , ce qui a pour conséquence la nullité des résidus associés à ces valeurs. Ces résidus ne doivent donc pas être considérés comme des observations de la variable aléatoire sous-jacente.

Le centrage et l'homoscédasticité des résidus peuvent être approximativement vérifiés graphi-

quement en représentant la valeur des résidus en fonction d'une variable explicative (année de survenance ou année de développement), de la valeur moyenne prédite ou d'un indice que l'on peut attribuer de manière aléatoire à chaque résidu.

En provisionnement non-vie pour mesurer la précision des estimations, il est traditionnel d'utiliser la Mean Square Error of Prediction (MSEP) défini par :

$$\forall (i, j) \in \Delta, \text{MSEP}(\widehat{C}_{i,j}) = \mathbb{E} \left( (C_{i,j} - \widehat{C}_{i,j})^2 \mid \mathcal{C}_{\nabla} \right),$$

où  $\mathcal{C}_{\nabla} = \{C_{i,j}, (i, j) \in \nabla\}$  correspond à l'ensemble de l'information connue au moment du calcul.

Elle peut être décomposée de la manière suivante :

$$\text{MSEP}(\widehat{C}_{i,j}) = \mathbb{V}(C_{i,j} \mid \mathcal{C}_{\nabla}) + \left( \widehat{C}_{i,j} - \mathbb{E}(C_{i,j} \mid \mathcal{C}_{\nabla}) \right)^2,$$

où le premier terme correspond à l'erreur de processus et le deuxième terme correspond à l'erreur d'estimation.

Il ressort de cette décomposition que le risque de réserve provient de deux sources. D'un côté, le montant des provisions peut être mal estimé, c'est l'erreur d'estimation mesurée par l'écart entre les paiements espérés et l'estimation des paiements espérés. De l'autre côté, en raison du caractère stochastique des futurs paiements, le véritable montant des règlements va fluctuer autour de sa valeur moyenne. C'est l'erreur de processus qui est mesurée par l'écart entre les réels paiements et les paiements espérés.

(Renshaw et Verrall, 2002) proposent des estimateurs de la MSEP sous la forme de formules fermées dans le cadre des méthodes de provisionnement GLM. Ces formules sont précisées en annexe A.2.

Enfin, dans la définition d'un modèle GLM il est possible de se permettre d'omettre la composante aléatoire et de spécifier à la place uniquement la fonction de variance. Dans ce cas, l'hypothèse sur la distribution de  $Y_{i,j}$  est remplacée par  $\mathbb{V}(Y_{i,j}) = \phi v(\mu_{i,j})$ . La fonction de variance est souvent spécifiée sous la forme suivante  $v(\mu_{i,j}) = \mu_{i,j}^k$  avec  $k \geq 0$ . Les cas avec  $k = 0$ ,  $k = 1$  et  $k = 2$  font respectivement référence à la loi normale, la loi de Poisson et la loi Gamma. L'estimation des paramètres ne se fait plus en maximisant la vraisemblance mais en maximisant la quasi-vraisemblance.

Un modèle GLM classique est le modèle de Poisson surdispersé. Il est défini par les composantes suivantes :

- $\mathbb{V}(Y_{i,j}) = \phi \mu_{i,j}$  ;
- $\eta_{i,j} = c + \alpha_i + \beta_j$ , avec  $\alpha_0 = 0$  et  $\beta_0 = 0$  ;
- $\eta_{i,j} = \ln \mu_{i,j}$ .

Ce modèle est connu car il donne les mêmes estimations que la méthode de Chain Ladder.

Les méthodes GLM ne sont pas beaucoup utilisées en pratique ce qui s'explique notamment

par la complexité des formules pour mesurer l'erreur d'estimation qui ne sont en plus que des formules approchées même lorsque que le modèle est correctement spécifié. Cependant, elles forment les fondements des méthodes de provisionnement bootstrap appréciées par les actuaires puisqu'elles permettent d'obtenir une distribution des réserves.

#### 1.1.4.4 Les méthodes de provisionnement bootstrap

La technique du bootstrap est une méthode particulière de rééchantillonnage utilisée pour estimer de manière consistante la variabilité d'un paramètre. Cette méthode de rééchantillonnage remplace les résultats classiques d'analyse statistique en rééchantillonnant les données et réalisant de l'inférence statistique sur ces rééchantillonnages.

Cette méthode doit être adaptée à chaque situation, en l'occurrence dans le cadre des GLM il existe deux grandes méthodes bootstrap :

- Le bootstrap empirique où le rééchantillonnage est réalisé directement sur les observations.
- Le bootstrap résiduel où le rééchantillonnage est réalisé sur les résidus du modèle.

Le bootstrap empirique est plus robuste que le bootstrap résiduel mais en provisionnement non-vie seul ce dernier peut être implémenté. En effet, le rééchantillonnage doit être réalisé sur des données indépendantes et identiquement distribuées. Cette situation est loin d'être vérifiée avec les observations tandis que l'utilisation de résidus appropriés comme les résidus de Pearson standardisés tend à s'en rapprocher le plus possible sous l'hypothèse de validité du modèle.

Ainsi, après avoir choisi un modèle GLM, la procédure bootstrap semi-paramétrique suivante peut être mis en place. La première étape consiste à ajuster le modèle GLM choisi sur le triangle de règlements décumulés  $\nabla C$ . L'objectif de cet ajustement est de calculer les valeurs prédites par le modèle  $\hat{\mu}_{i,j}$   $(i, j) \in \nabla$  et les résidus de Pearson standardisés  $r_{i,j}^{PS}$   $\forall (i, j) \in \nabla$ .

L'obtention de ces résultats permet de mettre en place la boucle bootstrap. Cette dernière commence par le rééchantillonnage du triangle supérieur  $\nabla C$  à l'aide des résidus obtenus au cours de la première étape, ce qui permet d'introduire l'erreur d'estimation aux réserves. Le modèle GLM est alors ajusté sur ce pseudo triangle avant d'être projeté pour obtenir le triangle inférieur. Enfin ce dernier est ensuite rééchantillonné en utilisant la loi sous jacente au modèle pour incorporer l'erreur de processus aux réserves.

La réalisation de cette boucle bootstrap un grand nombre de fois permet d'obtenir une distribution des réserves. La procédure bootstrap est résumée dans le tableau 1.3.

Dans la suite de ce mémoire, cette procédure sera implémentée avec le modèle GLM Poisson surdispersé. Comme évoqué précédemment, ce choix revient en réalité à réaliser un bootstrap de la méthode de Chain Ladder, ce qui permet d'obtenir une mesure de précision sur l'estimation et une distribution des réserves sous ce modèle. En raison de l'équivalence entre l'application du modèle GLM Poisson surdispersé et de la méthode de Chain Ladder, la procédure bootstrap

### Détail de la procédure bootstrap

#### Etape 1 : Les préliminaires

- Estimer les paramètres du modèle  $c$ ,  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ ,  $(\beta_j)_{0 \leq j \leq n}$  et  $\phi$  à partir des observations  $y_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Calculer les valeurs prédites par le modèle  $\hat{\mu}_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Calculer les résidus de Pearson standardisés  $r_{i,j}^{PS} \forall (i,j) \in \nabla$ .

#### Etape 2 : Boucle bootstrap (pour b allant de 1 à B)

- Rééchantillonner les résidus obtenus à l'étape 1 (tirage avec remise) pour obtenir  $r_{i,j}^{(b)}$  (erreur d'estimation).
- Reconstruire des pseudo données  $y_{i,j}^{(b)} = \hat{\mu}_{i,j} + v(\hat{\mu}_{i,j})r_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Estimer les paramètres du modèle sur les pseudo données et projeter le triangle inférieur afin d'obtenir  $\hat{\mu}_{i,j}^* \forall (i,j) \in \Delta$ .
- Simuler le triangle inférieur selon la distribution associée au modèle sous-jacent avec pour espérance  $\hat{\mu}_{i,j}^*$  et pour variance  $\hat{\phi}\hat{\mu}_{i,j}^*$  pour obtenir  $\hat{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$  (erreur de processus).
- Stocker les résultats obtenus  $\hat{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$ .

#### Etape 3 : Analyse des résultats

- Calculer une estimation de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .
- Calculer une mesure de l'erreur dans l'estimation de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .
- Déterminer la distribution empirique de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .

TABLE 1.3 – Procédure bootstrap GLM

peut être modifiée de sorte à utiliser la méthode de Chain Ladder à la place des ajustements GLM. Cette procédure est détaillée en annexe B.1.

### 1.1.5 La problématique de l'inflation dans la méthode de Chain Ladder

L'inflation pose un problème dans la plupart des méthodes classiques de provisionnement agrégées et en particulier dans la méthode de Chain Ladder. Cette difficulté provient de l'absence de modélisation d'effet calendaire dans ces méthodes.

Il existe cependant l'idée généralement acceptée que la méthode de Chain Ladder projette dans le futur une moyenne pondérée de l'inflation passée. Cette affirmation n'est en réalité pas nécessairement vérifiée. Cela peut être observé en adoptant une méthodologie tirée de l'article de (Brydon et Verrall, 2009) dont le but est de déterminer de quelle manière l'inflation passée, contenue dans le triangle supérieur, est projetée par la méthode Chain Ladder dans le triangle inférieur.

Pour ce faire, un modèle APC (Age-Period-Cohort) est utilisé avec une hypothèse de loi de Poisson surdispersée. Ce modèle est introduit dans (Kuang *et al.*, 2008a; Kuang *et al.*, 2008b). Il suppose que les montants incrémentaux  $C_{i,j}$  sont indépendants et identiquement distribués selon une loi de Poisson surdispersée avec  $\mathbb{E}(C_{i,j}) = \exp(c + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i+j})$ . Le terme  $\frac{\exp(\gamma_{i+j+1})}{\exp(\gamma_{i+j})}$  peut s'interpréter comme l'inflation durant l'année calendaire  $i + j + 1$ .

L'idée de la méthode se décompose en 3 étapes :

1. La construction d'un triangle supérieur de montant incréments à l'aide de paramètres  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  supposés connus et d'une hypothèse d'inflation passée qui permet de déduire la valeur des coefficients  $\gamma_{i+j}$  en posant  $\gamma_0 = 0$ .
2. La projection du triangle obtenu selon la méthode de Chain Ladder.
3. La maximisation de la vraisemblance du modèle en fonction des paramètres  $\gamma_l$  sur le triangle inférieur des montants incréments obtenus après avoir appliqué Chain Ladder. Ce qui revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\arg \max_{\gamma_l} \sum_{(i,j) \in \Delta} (C_{i,j}(c + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i+j}) - \exp(c + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i+j})).$$

La solution obtenue permet de déduire l'inflation future projetée implicitement par Chain Ladder à l'aide des termes  $\frac{\exp(\widehat{\gamma}_{i+j+1})}{\exp(\widehat{\gamma}_{i+j})}$ .

Pour l'application de la méthode, un triangle composé de 10 années de survenance et de développement est considéré avec comme hypothèses  $\alpha_i = 0$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\beta_j = 0$ ,  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Deux hypothèses d'inflation simplifiées sont étudiées. La première consiste à supposer l'inflation passée constante à 2%. Les résultats obtenus à la suite de l'application de la procédure sont illustrés à la figure 1.2.

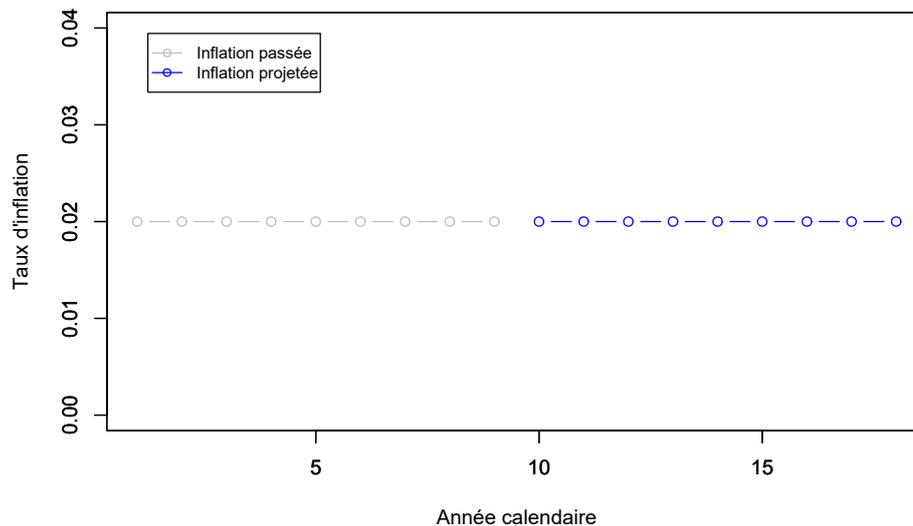


FIGURE 1.2 – Projection de l'inflation par la méthode de Chain Ladder dans le cas d'une inflation passée constante

Dans ce cas, l'inflation projetée implicitement par Chain Ladder est bien la moyenne de l'inflation passée. Des résultats similaires sont observés en rendant l'inflation passée un peu plus volatile.

Cette situation est une caricature de l'inflation qui a pendant longtemps été observée en France, à savoir une inflation relativement stable oscillant entre 0% et 3%, comme illustré à la figure 1.3 représentant l'évolution de l'IPC en France. Les résultats obtenus sont en adéquation avec l'assertion initiale et justifient l'utilisation de Chain Ladder dans un tel contexte.

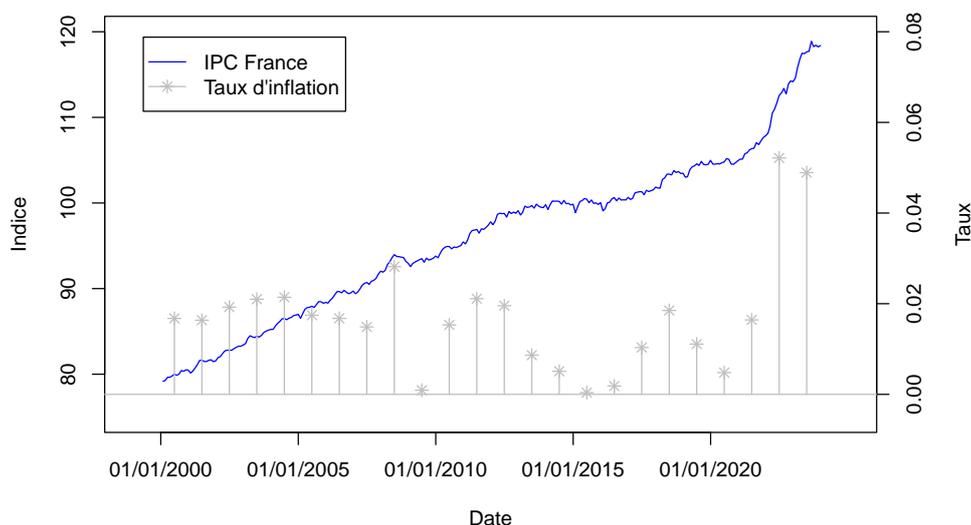


FIGURE 1.3 – Evolution de l'indice des prix à la consommation en France

La deuxième hypothèse d'inflation considère une inflation constante à 2% et une augmentation de l'inflation à 6% pour les deux dernières années calendaires observées. Les résultats obtenus à la suite de l'application de la procédure sont illustrés à la figure 1.4.

Dans ce cas, il est observé que l'inflation projetée implicitement par Chain Ladder diminue brusquement au cours de la première année de projection. A nouveau des résultats similaires sont obtenus en considérant une inflation passée un peu plus volatile avant son augmentation.

Cette situation correspond à l'inflation actuellement observée en France, comme illustré à la figure 1.3. Les résultats obtenus contredisent l'affirmation initiale et mettent en lumière les limites de l'utilisation de Chain Ladder dans le contexte actuel. Son utilisation est remise en cause puisqu'elle peut conduire à la fois à une sous-estimation des provisions techniques et du risque de réserve à horizon 1 an.

## 1.2 Etat de l'art sur l'inflation

Cette section introduit le phénomène d'inflation. Elle commence par définir ce concept avant d'en exposer les différentes théories expliquant sa cause. Par la suite, une partie explique comment l'inflation est mesurée et un dernier paragraphe s'attache à préciser son impact en assurance.

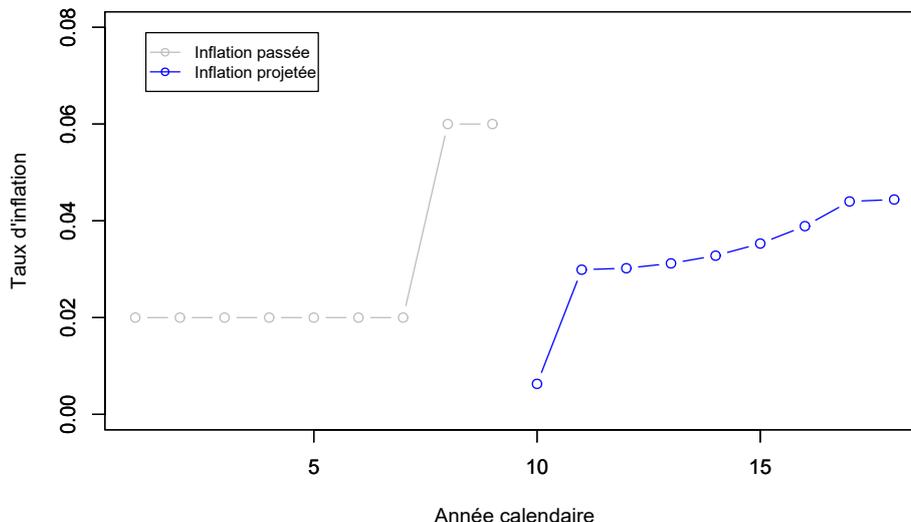


FIGURE 1.4 – Projection de l'inflation par la méthode de Chain Ladder dans le cas d'une récente forte augmentation de l'inflation

### 1.2.1 Définition de l'inflation et de concepts connexes

L'inflation peut se définir comme un processus de hausse cumulative et auto-entretenu de niveau général des prix (Bezbakh, 2019). Cette définition souligne le caractère plurifactoriel de ce mécanisme qui génère lui-même les causes de sa durabilité. La manifestation de ce phénomène se traduit par l'augmentation de la plus grande partie des prix.

Il convient de distinguer l'inflation des hausses sectorielles de certains prix, même si ces dernières sont fortes, et des hausses de prix touchant l'ensemble de l'économie mais qui restent sans lendemain car elles ne provoquent pas de rétroaction.

A l'inverse, la déflation correspond à la baisse générale du niveau des prix. En cas d'essoufflement de la hausse des prix on parle de désinflation. Cette dernière correspond donc au processus de ralentissement de la hausse des prix.

La stagflation correspond à une situation économique caractérisée par une forte inflation et une faible croissance économique. Cette situation est souvent accompagnée d'un taux de chômage élevé.

L'inflation est un phénomène existant depuis la nuit des temps, en effet l'Antiquité romaine était déjà touchée par des hausses de prix plus ou moins longues et plus ou moins importantes. Les économistes se sont alors pendant longtemps penchés sur le sujet pour essayer d'en expliquer les causes. Ce qui a donné naissance à de nombreuses théories de l'inflation.

### 1.2.2 Les grandes théories de l'inflation

Les premiers économistes à s'intéresser à ce sujet se sont tournés vers une explication monétaire, donnant lieu à la théorie quantitative de la monnaie. D'autres, comme John Maynard Keynes, tentent d'expliquer l'inflation au travers d'une inadéquation entre l'offre et la demande. Tandis qu'une troisième approche, considère que l'inflation apparaît par suite d'une hausse des coûts de production engendrant une spirale prix-salaires. Les fondements de ces théories sont résumés dans le tableau 1.4.

Théorie	Points clés
Par la monnaie	Théorie quantitative de la monnaie ( $MV = PT$ ) Rôle de la vitesse de circulation de la monnaie
Par la demande	Demande supérieur à l'offre Insuffisance de la capacité de production
Par les coûts	Croissance des salaires plus rapide que celle de la productivité Charges sociales

TABLE 1.4 – Les grands principes des théories de l'inflation

#### 1.2.2.1 L'inflation par la monnaie

La conception de l'inflation par la monnaie repose sur la théorie quantitative de la monnaie qui s'est formalisée au début du  $xx^e$  siècle. La formalisation la plus répandue de cette dernière est celle donnée par Irving Fisher à l'aide de l'équation suivante :

$$MV = PT,$$

où  $M$  représente la masse monétaire en circulation,  $V$  la vitesse de circulation de la monnaie,  $P$  le niveau général des prix et  $T$  le volume des transactions à assurer.

Une définition plus générale de la masse monétaire découle sur l'équation suivante :

$$MV + M'V' = PT.$$

Elle se distingue de l'équation précédente en différenciant les espèces en circulation  $M$  des dépôts  $M'$ . Chaque composante de la masse monétaire possède alors sa propre vitesse de circulation, à savoir  $V$  pour les espèces en circulation et  $V'$  pour les dépôts.

Le membre de gauche dans ces égalités correspond au volume total de monnaie en circulation, tandis que le membre de droite correspond à la valeur globale des échanges.

L'interprétation de ces formules se résume à dire que, pour une vitesse de circulation de la monnaie constante, toute hausse de la masse monétaire plus importante que celle de la production réelle aura pour conséquence une augmentation de l'ensemble des prix, de sorte que la valeur

globale des échanges soit toujours égale à quantité de monnaie en circulation. Dans l'hypothèse où la production n'arrive pas à suivre la demande, la variation des prix serait proportionnelle à celle de la masse monétaire.

Cette démarche scinde l'économie en opposant deux mondes distincts. D'une part celui où s'effectue la production et où se déterminent les prix des marchandises et les revenus des agents. D'autre part, le monde des phénomènes monétaires. Il en ressort que la monnaie n'est qu'un « voile » se superposant à l'économie réelle qui fonctionne comme si la monnaie n'existe pas, comme le proclamait Jean-Baptiste Say. C'est la théorie de la neutralité de la monnaie.

Cette approche repose également sur le postulat que l'offre et la demande de monnaie dépendent de facteurs distincts, ou même qu'il n'existe pas réellement de demande de monnaie. Cette dernière étant automatiquement transformée en demande de biens ou de services.

D'autres relations quantitativistes ont été développées en s'intéressant à la demande de monnaie plutôt qu'à l'offre de monnaie. C'est le cas de l'équation de Cambridge proposée par Alfred Marshall :

$$M = kPY.$$

Il considère la création monétaire en tant que demande de monnaie. Cette dernière dépend du revenu national  $Y$ , du niveau général des prix  $P$  et d'un coefficient  $k$ . Ce coefficient peut être interprété de plusieurs façons. Il peut être vu comme le rapport entre la masse monétaire et le revenu ou comme l'inverse de la vitesse de circulation de la monnaie ou encore comme une variable de comportement des agents.

Cette formule ne stipule plus seulement que la masse monétaire détermine la valeur des transactions, mais aussi que la quantité de monnaie demandée influence la masse monétaire en circulation. Elle en reste pour autant quantitativiste puisque c'est toujours la masse monétaire qui détermine le revenu national  $PY$ .

Milton Friedman propose quant à lui de spécifier la demande de monnaie à l'aide de la fonction suivante :

$$\frac{M^d}{P} = f(y, w; RM, RB, RE, GP, ; u),$$

où  $M^d$  représente la demande de monnaie,  $P$  le niveau général des prix,  $y$  le revenu permanent,  $w$  le rapport du revenu du capital non humain au revenu du capital humain (salaires),  $RM$ ,  $RB$ ,  $RE$  les taux de rendement anticipés de la monnaie, des obligations et des actions,  $GP$  le taux d'inflation anticipé et  $u$  une variable représentant tous les autres facteurs pouvant influencer la demande individuelle de monnaie. Le revenu permanent correspond au revenu anticipé et est calculé comme une moyenne pondérée des revenus réels actuels et passés.

Milton Friedman est convaincu que « l'inflation est toujours et partout un phénomène monétaire » dont la responsabilité repose sur la politique de l'état. En effet, selon lui la création monétaire

relève de décisions ou d'un contrôle des gouvernements, ces derniers étant sans cesse mis sous pression par les différents agents ou le système bancaire.

Finalement, l'approche quantitativiste la plus convaincante reste souvent celle de Richard Cantillon développé en 1755. Ce dernier se différencie du futur courant monétariste en distinguant plusieurs origines à la création monétaire et en expliquant la hausse des prix non pas simplement par l'accroissement de la quantité de monnaie, mais par l'augmentation de la demande que celui-ci permet. Son analyse est jugée comme plus réaliste car elle admet que la monnaie exerce une action sur l'économie réelle et que la création monétaire ne participe à l'inflation que sous certaines conditions. Ce sont ces dernières qui se manifestent en étudiant le rapport entre la monnaie et la demande.

### 1.2.2.2 L'inflation par la demande

La théorie de l'inflation par la demande vise à expliquer l'inflation par une demande supérieure à l'offre. Le père fondateur de ce concept d'excès de demande est John Maynard Keynes au travers de ses travaux sur les conditions de financement d'une économie de guerre où il a étudié les conséquences d'un accroissement des dépenses dans le but d'augmenter la production d'armement. Cette situation engendre un supplément de revenu en inadéquation avec la production de biens et de consommation, donnant lieu à une hausse des prix.

La spécificité dans l'explication de l'inflation par la demande, par rapport aux arguments des monétaristes, émane du fait que la création monétaire, indifféremment de son importance, sera inflationniste uniquement dans le cas où l'appareil de production n'est pas en mesure de satisfaire l'augmentation de la demande. Dans cette situation pour respecter l'égalité entre l'offre et la demande, l'ajustement se réalisera par les prix à défaut de se faire par les quantités.

Par conséquent, la hausse des prix se manifesterà seulement dans le cas où les capacités de production sont utilisées au maximum de leur potentiel, où les stocks sont insuffisants et où l'importation ne permet pas de combler les carences de l'offre intérieure. Cependant cette situation donnera lieu à de l'inflation uniquement si l'excès de demande persiste et qu'aucune action permettrait d'augmenter l'offre dans des proportions suffisantes.

Dans un article paru en 1977, Jean Marczewski cherche à quantifier l'influence des différents types de revenus et de dépenses dans la hausse de l'inflation en France entre 1966 et 1976 (Marczewski, 1977). Il introduit dans ce but deux notions : « l'écart inflationniste » et le « circuit inflationniste ».

Pour ce faire, il considère un facteur utilisé dans la production d'un secteur quelconque. Il note  $X$  la valeur nominale de ce facteur dans la production en année  $n - 1$ ,  $\Delta X$  l'accroissement total en valeur nominale de ce facteur durant l'année  $n$ ,  $c$  le taux d'accroissement du coût par unité produite de ce facteur et  $r$  le taux d'accroissement en volume de la production du secteur pendant l'année  $n$ .

Il énonce alors que la valeur nominale du facteur en année  $n$  est égale à sa valeur nominale en année  $n - 1$  multipliée par le coefficient d'accroissement en volume de la production et par le coefficient d'accroissement du coût du facteur par unité produite. Autrement dit :

$$X + \Delta X = X(1 + r)(1 + c).$$

Le terme  $\Delta X - Xr$  représente la différence entre l'accroissement nominal du facteur  $X$  et son accroissement réel exprimé en prix de l'année précédente. C'est cette différence qu'il appelle « écart inflationniste ». Il en déduit que ce dernier est égal au produit entre la valeur nominale du facteur en question au cours l'année précédente, le taux d'accroissement de son coût par unité produite et le coefficient d'accroissement du volume de la production.

Les ressources totales sont par définition égales à la somme du produit intérieur brut  $Y$  et des importations  $M$ . L'écart inflationniste total est égal à l'écart inflationniste des ressources totales. Avec les notations précédentes cela s'écrit :

$$(\Delta Y - Y\Gamma_y) + (\Delta M - M\Gamma_m) = c_y Y(1 + \Gamma_y) + c_m(1 + \Gamma_m)$$

où  $\Gamma_y$ ,  $\Gamma_m$ ,  $c_y$ ,  $c_m$  correspondent respectivement aux taux de croissance et aux coûts par unité produite du produit intérieur brut et des importations. En exprimant l'écart inflationniste total en pourcentage des ressources totales, on obtient en réalité une mesure très proche de l'inflation calculé par l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques (INSEE). En effet le tableau 1.5, issu de l'article, compare cette quantité à l'Indice des Prix à la Consommation (IPC) sur la période 1966-1975.

*Écart inflationniste total en milliards de francs et en pourcentage des ressources totales, France 1966-1975*

	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Écart inflationniste :										
— en milliards de francs : . . . . .	16,3	15,8	27,7	51,4	52,9	51,6	54,8	87,1	219,1	179,0
— en % des ressources totales . . . . .	2,7	2,4	3,9	6,1	5,6	4,9	4,7	6,4	13,2	10,4
Taux de croissance de l'indice des prix à la consommation de l'INSEE . . . . .	2,7	2,6	4,5	6,4	5,3	5,5	5,9	7,3	13,7	11,7

TABLE 1.5 – Comparaison entre l'écart inflationniste et l'inflation

Il apparaît en comparant les deux dernières lignes que ces deux quantités sont effectivement très proches et possèdent un coefficient de corrélation linéaire de 0,99.

De plus, Marczewski définit qu'il y a « circuit inflationniste » : « lorsqu'un écart engendré par l'augmentation d'un coût ou d'une dépense est répercuté sur d'autres coûts ou dépenses en formant un flux inflationniste qui, après avoir alimenté un nombre plus ou moins important d'opérations, revient à son point de départ pour reprendre aussitôt le même périple. »

Dans son article, il met en évidence un circuit prédominant, celui reliant les salaires à l'inflation.

Ce circuit serait responsable de plus de 45% de l'écart inflationniste total (définie comme l'écart inflationniste des ressources totales, à savoir la somme du produit intérieur brut et des importations). Ce qui s'explique par le fait que la hausse des rémunérations salariales se fait suivre d'une hausse de la demande de consommation.

Ce circuit montre le lien étroit existant entre les salaires et l'inflation que tente d'expliquer la théorie de l'inflation par les coûts.

### 1.2.2.3 L'inflation par les coûts

La théorie de l'inflation par les coûts de production explique celle-ci par un accroissement de la rémunération des facteurs de production supérieur à celle de leur productivité. Cette augmentation pousse les entreprises à rehausser les prix des biens ou des services qu'ils proposent auprès des entreprises ou des ménages. Ce qui incitera alors les entreprises, victimes de cette hausse des prix, à augmenter à leur tour leurs prix et qui encouragera également les ménages, victimes de cette même hausse, à revendiquer une nouvelle augmentation de rémunération. C'est ainsi que progressivement l'inflation s'installe et s'entretient. Cette dernière est permise par une augmentation de la demande initialement causée par l'accroissement des revenus, qui peut en plus être favorisée par la création monétaire et l'accès au crédit. Cependant, l'origine du problème se situe bien au niveau de la création des coûts et de l'offre.

Le rôle porté par l'augmentation des coûts salariaux semble indéniable. En effet, selon une étude menée par l'INSEE le coût du travail occupe une place prépondérante dans le coût total de production des entreprises, puisqu'il représente en moyenne pas loin de la moitié de la production de valeur de ces dernières.

Dans un article publié en 1958, Alban William Phillips établit de manière empirique une corrélation négative entre le taux de variation des salaires nominaux et le taux de chômage en Grande Bretagne entre les années 1861 et 1957 (Phillips, 1958). Pour ce faire, il trace des nuages de points correspondant aux années d'une certaine période, avec en abscisse le taux de chômage et en ordonnée le taux de variation des salaires nominaux. Comme dans la figure 1.5, tirée de son article, où il réalise ce nuage de points sur la période 1913-1948.

Il se dégage du nuage de points que les salaires nominaux tendent à augmenter d'autant plus vite que l'on se rapproche du plein emploi, qu'ils restent stables lorsque le taux de chômage est d'environ 5% et qu'ils tendent à baisser quand le taux de chômage augmente.

Il est également tracé une courbe estimée à partir du nuage de points entre 1861 et 1913. Cette dernière est ajustée sur une équation de la forme suivante :

$$y + a = bx^c,$$

avec  $y$  le taux de variation du salaire nominal et  $x$  le taux de chômage. Elle semble graphiquement plutôt bien prédire les points de la période 1913-1948. Cette courbe porte aujourd'hui le nom

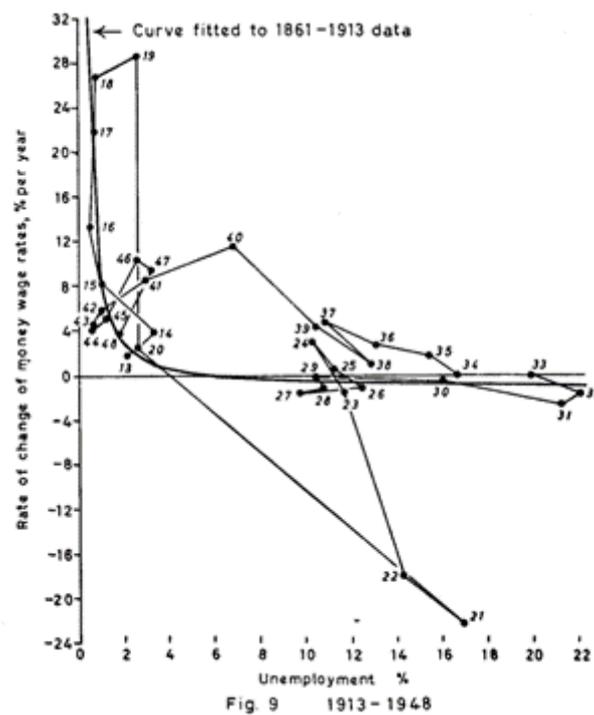


FIGURE 1.5 – Courbe de Phillips

de « courbe de Phillips ».

Une analyse de Robert Lipsey en 1960, basée sur les travaux de Phillips, montre que l'inflation est d'autant plus forte que la tension est grande sur le marché du travail. Il en découle que la création monétaire et l'excès de demande ne sont inflationnistes que si les capacités de production sont employées au maximum de leur potentiel, l'inflation venant alors de la hausse du coût des facteurs.

### 1.2.3 Les mesures de l'inflation

L'intention de cette partie est d'introduire de manière générale les indices des prix afin de comprendre comment est mesurée l'inflation.

#### 1.2.3.1 Les indices des prix

Soit  $X_t$  une variable fonction du temps, l'indice élémentaire d'évolution de cette variable  $X$  entre une date  $t$  et une date  $T$  est défini par :

$$I(t, T) = \frac{X_T}{X_t}.$$

Pour définir un indice des prix il faut tout d'abord spécifier un ensemble de ménages et un ensemble de produits  $\mathcal{P}$ . L'idée est d'étudier entre deux instants la variation des prix des produits de  $\mathcal{P}$  dans la consommation de ces ménages. Pour ce faire, l'indice élémentaire d'une variable est calculé en prenant en compte l'évolution des prix et en neutralisant l'évolution des quantités.

Il existe 3 principaux indices utilisés en pratique : l'indice de Laspeyres, l'indice de Paasche et l'indice de Fisher.

L'indice de Laspeyres des prix  $L_p$  est défini comme l'indice qui fige la valeur des quantités à sa date initiale. Cet indice s'exprime entre deux instants  $t$  et  $T$  de la manière suivante :

$$L_p(t, T) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}} q_t^{(i)} p_T^{(i)}}{\sum_{i \in \mathcal{P}} q_t^{(i)} p_t^{(i)}},$$

où  $\mathcal{P}$  correspond à un ensemble de produit,  $q_t^{(i)}$  correspond à la quantité du produit  $i$  dans la consommation des ménages à l'instant  $t$  et  $p_t^{(i)}$  correspond au prix du produit  $i$  à l'instant  $t$ .

Il peut se réécrire sous la forme suivante :

$$L_p(t, T) = \sum_{i \in \mathcal{P}} \frac{q_t^{(i)} p_t^{(i)} p_T^{(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{P}} q_t^{(j)} p_t^{(j)} p_t^{(i)}},$$

et peut donc être interprété comme la moyenne arithmétique des indices élémentaires des prix pondérée par les valeurs de la période initiale.

L'indice de Paasche des prix  $P_p$  est défini comme l'indice qui fige la valeur des quantités à sa date finale. Cet indice s'exprime entre deux instants  $t$  et  $T$  de la manière suivante :

$$P_p(t, T) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}} q_T^{(i)} p_T^{(i)}}{\sum_{i \in \mathcal{P}} q_T^{(i)} p_t^{(i)}},$$

Il peut se réécrire sous la forme suivante :

$$P_p(t, T) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}} q_T^{(i)} p_T^{(i)}}{\sum_{i \in \mathcal{P}} q_T^{(i)} p_T^{(i)} \frac{p_t^{(i)}}{p_T^{(i)}}},$$

et peut donc être interprété comme la moyenne harmonique des indices élémentaires des prix pondérée par les valeurs de la période finale.

L'indice de Fisher  $F_p$  est défini comme la moyenne géométrique de l'indice de Laspeyres et de Paasche, soit :

$$F_p(t, T) = \sqrt{L_p(t, T) P_p(t, T)}.$$

Les indices de Laspeyres et de Paasche possèdent la propriété intéressante d'agrégation. Soit un ensemble de produit  $\mathcal{P}$  partitionné en deux sous ensemble de produits  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , associés respectivement à une valeur totale à l'instant  $t$ ,  $V_t^1 = \sum_{i \in \mathcal{P}_1} q_t^{(i)} p_t^{(i)}$  et  $V_t^2 = \sum_{i \in \mathcal{P}_2} q_t^{(i)} p_t^{(i)}$ , de sorte que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  et que  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ .

Pour calculer l'indice de Laspeyres ou de Paasche sur  $\mathcal{P}$ , il est possible de le calculer d'abord pour chaque ensemble de produits  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  et d'en calculer ensuite la moyenne pondérée. Ce qui s'écrit :

$$L_p(t, T) = \frac{V_t^1}{V_t^1 + V_t^2} L_p^1(t, T) + \frac{V_t^2}{V_t^1 + V_t^2} L_p^2(t, T),$$

et

$$P_p(t, T) = \frac{V_T^1 + V_T^2}{\frac{V_T^1}{P_p^1(t, T)} + \frac{V_T^2}{P_p^2(t, T)}},$$

où  $L_p^1(t, T)$ ,  $P_p^1(t, T)$ ,  $L_p^2(t, T)$  et  $P_p^2(t, T)$  correspondent respectivement aux indices des Laspeyres et de Paasches des ensembles de produits  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

Cette propriété découle naturellement de l'interprétation de ces indices en tant que moyenne pondérée d'indices élémentaires.

Elle permet de détailler le calcul des indices, en le réalisant en plusieurs étapes intermédiaires aboutissant chacune à des « sous-indices » qu'il convient ensuite d'agréer pour obtenir l'indice total.

De plus, une propriété qui semble naturelle de demander à un indice est la transitivité. Ce qui s'énonce, en considérant trois dates  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , de la manière suivante :

$$I(t_1, t_3) = I(t_1, t_2)I(t_2, t_3).$$

Cependant les indices de Laspeyres et de Paasche ne vérifient pas cette propriété. Une approche classique afin de contourner ce problème est de « chaîner » les indices. Les indices de Laspeyres chaînés  $L_p^{ch}$  et de Paasche chaînés  $P_p^{ch}$  sont ainsi définis de manière récursive de sorte à forcer la transitivité :

$$L_p^{ch}(t, T + 1) = L_p^{ch}(t, T)L_p(T, T + 1),$$

$$P_p^{ch}(t, T + 1) = P_p^{ch}(t, T)P_p(T, T + 1).$$

Les indices ainsi définis possèdent la propriété de transitivité.

Enfin pour définir totalement un indice, il est nécessaire d'établir une période de base, c'est-à-dire de déterminer une date pour laquelle tous les indices élémentaires valent 1. Cela revient à fixer  $t$  dans le calcul de  $I(t, T)$  et d'ensuite faire varier  $T$  pour observer l'évolution de l'indice. La valeur  $I(t, t)$  étant égale à 1. L'évolution de l'indice dépend du choix de la période de base.

Plus on s'éloigne de la période de base, plus l'indice calculé peut perdre en pertinence à cause de changements structurels. Pour un indice des prix de Laspeyres par exemple, les quantités utilisées dans le calcul sont fixées à leur valeur pour la période de base et peuvent ainsi grandement évoluées au cours du temps. Il convient dans ces cas-là, de réaliser un changement de base en redéfinissant la période de base, ce qui dans le cas de l'indice de Laspeyres des prix équivaut à actualiser les quantités. A noter que le chaînage peut se voir comme un changement de base à

chaque période, où la période de base correspond à chaque fois à la période précédente.

### 1.2.3.2 L'indice des prix à la consommation

L'Indice des Prix à la Consommation (IPC) est l'instrument de mesure de l'inflation en France. Il est calculé mensuellement par l'INSEE. Son objectif est d'estimer la variation du niveau général des prix des biens et des services marchands (à qualité constante) consommés par les ménages résidents et non-résidents (comme les touristes) sur l'ensemble du territoire national de la France y compris les départements d'outre-mer (hors Mayotte). Certains biens et services marchands comme les services hospitaliers et les assurances vie ne sont pas conservés pour déterminer la valeur de l'indice.

Le calcul de cet indice repose sur la nomenclature des fonctions de consommations des ménages internationale, COICOP pour Classification of Individual Consumption according to Purpose. Cette nomenclature est décomposée selon 5 niveaux emboîtés les uns dans les autres, à savoir :

1. Divisions
2. Groupes
3. Classes
4. Sous-classes
5. Postes

A titre illustratif le premier niveau est composé des 12 divisions suivantes :

1. Produits alimentaires et boissons non alcoolisées
2. Boissons alcoolisées et tabac
3. Habillement et chaussures
4. Logement, eau, gaz, électricité et autres combustibles
5. Ameublement, équipement ménager et entretien courant de la maison
6. Santé
7. Transport
8. Communications
9. Loisirs et culture
10. Education
11. Hôtellerie, cafés, restauration
12. Autres biens et services

Chacune de ces divisions est divisée en un certain nombre de groupes représentant chacun des biens ou des services de la division correspondante. Puis chaque groupe est à son tour divisé en un ensemble de biens et de services. Cette procédure continue de sorte que chaque élément de chaque niveau soit divisé en un ensemble de biens et de services à une maille plus fine. Ce qui

donne lieu à terme à une décomposition précise des biens et des services consommés par les ménages. La nomenclature possède au total 305 postes.

Un indice est calculé pour chaque poste à la suite d'un sondage réalisé par l'INSEE. Ce dernier est stratifié selon des critères géographiques, selon le type de produit et le type de point de vente. Un indice de Laspeyres est alors calculé pour chaque poste et ces indices sont ensuite agrégés en remontant progressivement l'arbre de sorte à finalement obtenir l'IPC. L'agrégation est réalisée à l'aide de pondérations représentant la part des dépenses associées au poste au sein de l'ensemble des dépenses de consommation des ménages couvertes par l'IPC.

Le calcul de l'IPC définit au final un indice de Laspeyres chaîné annuellement. Le chaînage annuel permet de mettre à jour les pondérations chaque année. Actuellement la période de base est l'année 2015.

C'est un indice qui joue plusieurs rôles importants.

D'un point de vue économique, il sert à déterminer l'inflation en France et permet ainsi de calculer des évolutions « réelles » de variables.

D'un point de vue socio-économique, il est utilisé par exemple pour indexer le Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance (SMIC), des rentes viagères ou encore le taux de rendement du Livret A.

D'un point de vue monétaire et financier, à la suite du traité de Maastricht en 1992, les indices des prix ont été harmonisés à l'échelle européenne par Eurostat. Ainsi, les instituts statistiques nationaux calculent un Indice des Prix à la Consommation Harmonisés (IPCH). Son calcul est basé sur la nomenclature ECOICOP (European Classification of Individual Consumption according to Purpose). Pour la France, l'IPC et l'IPCH sont assez proche, ce qui s'explique par la proximité entre les nomenclatures COICOP et ECOICOP et par une méthodologie de calcul similaire. Eurostat calcul ensuite un IPCH à l'échelle de l'union européenne. Il permet de vérifier le critère de convergence sur la stabilité des prix dans le cadre du traité de Maastricht. C'est l'indicateur majeur influençant la politique monétaire de la Banque Centrale Européenne (BCE) qui a pour objectif un taux d'inflation restant faible, stable et prévisible aux alentours des 2%. En outre, le Trésor français émet depuis 1998 des obligations indexées sur l'IPC, les OATi. Il émet également des obligations indexées sur l'IPCH de la zone euro, les OAT€i.

#### 1.2.4 L'inflation en assurance

Au regard de l'actualité, l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) a publié le 15 janvier 2024 son programme de travail pour l'année 2024, ([ACPR, 2024](#)). Elle y présente quatre grands axes de travail. Le premier de ces axes est de « Maintenir et renforcer la sécurité et la solidité des secteurs de la banque et de l'assurance face aux risques macroéconomiques, financiers et géopolitiques », dans lequel il est énoncé qu'« en assurance non-vie, l'ACPR s'intéressera à la prise en compte de l'inflation dans les modélisations des engagements ». Ce qui

témoigne de la nécessité actuelle de pouvoir modéliser au mieux l'inflation pour les assureurs non-vie.

L'importance accordée à ce sujet s'explique par les nombreux impacts de cette dernière en assurance non-vie. Elle impacte l'assureur aussi bien au niveau de son compte de résultat que de son bilan.

Son impact est évident au niveau de la charge de l'assureur en augmentant le montant des prestations que ce dernier doit fournir auprès de ses assurés sinistrés. En effet, dans son analyse et synthèse intitulé *La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France fin 2022*, (ACPR, 2023), l'ACPR constate qu'« En 2022, l'activité d'assurance non vie a progressé mais l'inflation [...] ont pesé sur la sinistralité de certaines activités. » Elle illustre ce point en affirmant que « Les sinistres d'assurance non-vie en affaires directes ont pour leur part connu une forte progression en 2022, à hauteur de 13,6% entre 2021 et 2022 ». En plus d'augmenter les prestations, l'inflation augmente aussi les frais de l'assureur associés à son activité. Ainsi les frais administratifs, les frais d'acquisitions et les frais de gestion des sinistres augmentent en lien par exemple avec l'augmentation des salaires ou des loyers.

Elle impacte également les produits de l'assureur. Chaque année la tarification prend naturellement en compte l'inflation, ce qui tend à augmenter les primes demandées aux assurés, surtout en période de forte inflation comme ce fut le cas lors des deux dernières années. D'autre part, le contexte inflationniste agit également sur les revenus financiers de l'assureur. Les rendements des actifs comme les actions, les comptes à termes, les organismes de placements collectifs et l'immobilier évoluent en fonction de l'inflation. Les revenus des actifs obligataires sont quant à eux pour la plupart fixes. En témoigne la figure 1.6, tirée de l'analyse et synthèse de l'ACPR, représentant la répartition des investissements obligataires des assureurs après transparence des organismes de placements collectifs.

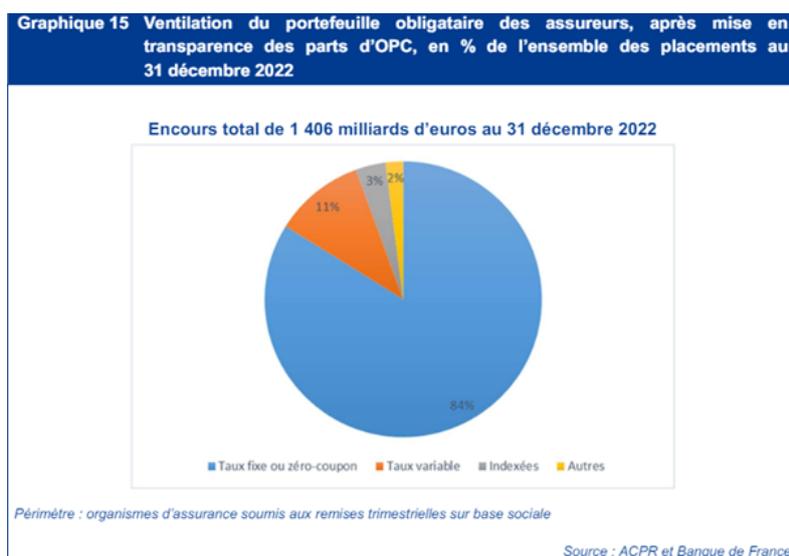


FIGURE 1.6 – Répartition des placements obligataires des assureurs

Il ressort de ce graphique que la grande majorité (84%) des obligations détenues par les assureurs sont à taux fixe, et possèdent donc des revenus indépendants de l'inflation. Tandis que les obligations à taux variables et les obligations indexées, qui suivent un certain indice comme un indice des prix, représentent respectivement 11% et 3% de l'encours obligataire total des assureurs. L'impact de l'inflation sur les revenus obligataires reste donc modéré.

De même, la valorisation des actifs est influencée par l'inflation en particulier celle des obligations. En effet, l'inflation possède un lien étroit avec les taux d'intérêt ayant une incidence directe sur la valeur des obligations.

Le passif du bilan de l'assureur se voit également touché par l'inflation à travers l'augmentation des provisions techniques en lien avec l'augmentation des prestations. Cette dernière va inévitablement aussi concerner les sinistres à indemniser dans le futur. L'assureur doit alors prendre en compte et anticiper ce phénomène en essayant d'estimer de la manière la plus juste ces prestations futures conformément aux différentes contraintes réglementaires qui lui sont imposées. C'est tout l'enjeu de ce mémoire et de la partie suivante dont le but est de proposer des méthodes pour prendre en compte l'inflation dans les méthodes de provisionnement non-vie.

## Chapitre 2

# Cadre théorique de l'étude

L'intention de ce deuxième chapitre est d'exposer le cadre théorique de l'étude pour répondre à la problématique par le biais de deux sections. La première section s'attache à évoquer brièvement le provisionnement dans le cas où l'inflation n'est pas modélisée. Tandis que la deuxième partie présente dans un premier temps des méthodes de provisionnement non-vie prenant en compte explicitement l'inflation, avant de proposer deux approches pour modéliser et projeter cette dernière. Les différentes méthodes de provisionnement présentées dans la suite du mémoire sont schématiquement représentées à la figure 2.1.

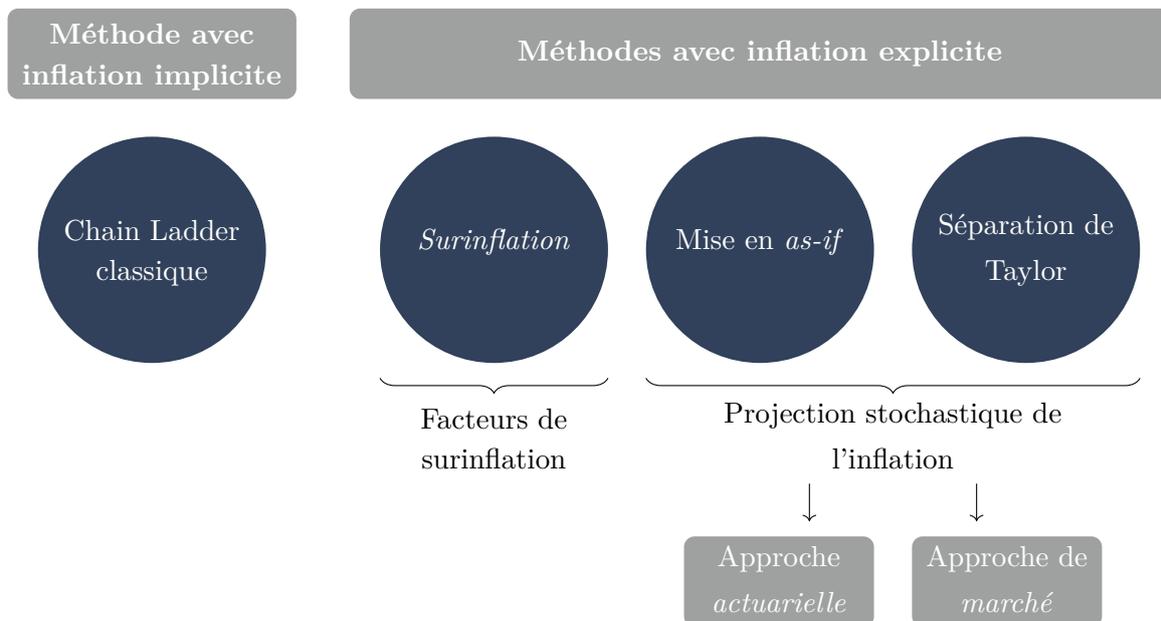


FIGURE 2.1 – Les méthodes de provisionnement proposées

## 2.1 Prise en compte implicite de l'inflation dans le provisionnement non-vie

Durant les dernières années, caractérisées par une faible et stable inflation, la problématique de l'incorporation de l'inflation dans l'estimation des réserves était généralement traitée de manière implicite à l'aide de méthodes qui sont supposées automatiquement projeter l'inflation passée dans l'estimation des règlements futurs.

Pour pouvoir faciliter la comparaison entre les méthodes de provisionnement qui modélisent de manière implicite et de manière explicite l'inflation, il est proposé de commencer par décrire rapidement l'utilisation de la méthode de Chain Ladder dans le cas où l'inflation n'est pas modélisée.

Dans ce cas, la méthode de Chain Ladder est appliquée au triangle des règlements passés exprimés au coût historique. Autrement dit, elle est appliquée aux règlements observés sans les retraiter de l'inflation passée. Cette approche est motivée par l'idée que l'application de la méthode de Chain Ladder à des règlements non ajustés, projette implicitement dans le futur une moyenne pondérée de l'inflation passée.

Dans le cadre de cette approche, l'estimation de la PSAP se fait par :

$$R_n^{hc} = \sum_{l=1}^n CL_n \left( D_{n+l}^{hc} \right),$$

où  $CL_n \left( D_{n+l}^{hc} \right)$  est l'estimation du montant total des paiements pour l'année calendaire  $n + l$  par la méthode de Chain Ladder. L'indice  $hc$  rappelle que la projection est obtenue en utilisant un triangle exprimé au coût historique.

Le Best Estimate est obtenu en actualisant de manière appropriée les flux futurs espérés, de sorte que :

$$BE_n^{hc} = \sum_{l=1}^n CL_n \left( D_{n+l}^{hc} \right) v(n, n + l),$$

où  $v(n, n+l)$  est le facteur d'actualisation observé en date  $n$  pour la maturité  $n+l$ , obtenu à l'aide de la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority).

L'utilisation de la procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder permet d'étudier le risque de réserve à l'ultime. Il correspond à l'incertitude sur le montant de la charge ultime jusqu'à la clôture de tous les sinistres. Il peut être étudié à l'aide de la distribution du DUO (Discounted Ultimate Obligation), qui correspond à la collection de la valeur actuelle des simulations des futures diagonales. Pour  $S$  simulations bootstrap :

$$\text{DUO} = \left\{ {}_s\tilde{U}_n^{hc} = \sum_{l=1}^n {}_s\tilde{D}_{n+l}^{hc} v(n, n+l), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où  ${}_s\tilde{D}_{n+l}^{hc}$  dénote la  $s$ -ième simulation de la variable aléatoire  $D_{n+l}^{hc}$ , représentant la somme de la future diagonale pour l'année calendaire  $n+l$ , obtenue dans la procédure bootstrap et incluant à la fois l'erreur d'estimation et l'erreur de processus.

Cependant dans le cadre de la directive Solvabilité II, le risque de réserve sous un horizon de 1 an est préféré. Il correspond à l'incertitude du montant de la charge ultime sur la prochaine année. Ce risque peut être évalué à l'aide de la distribution du YEO (Year-End Obligation), qui correspond à la collection de la valeur actualisée des simulations des futures diagonales, vues dans 1 an. Il est représenté par les  $S$  simulations :

$$\text{YEO} = \left\{ {}_s\tilde{Y}_{n+1}^{hc} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{hc} + {}_s\tilde{B}E_{n+1}^{hc}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où  ${}_s\tilde{B}E_{n+1}^{hc}$  correspond, pour la  $s$ -ième simulation, à l'estimation du Best Estimate à la fin de l'année  $n+1$  par la méthode de Chain Ladder :

$${}_s\tilde{B}E_{n+1}^{hc} = \sum_{l=2}^n {}_s\tilde{C}L_{n+1} \left( D_{n+l}^{hc} \right) v(n+1, n+l).$$

Le Best Estimate à la fin de l'année  $n+1$  est obtenu en appliquant Chain Ladder au triangle original augmenté de la prochaine diagonale, à savoir les règlements  $\left\{ {}_s\tilde{C}_{i, n-i+1}^{hc}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$ . Ces paiements incorporent à la fois l'erreur d'estimation et l'erreur de processus. Une procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder adaptée à l'estimation du risque de réserve à horizon 1 an est fournie en annexe B.2. Les sinistres de l'année de souscription  $n+1$  ne sont pas inclus dans le calcul de ces provisions.

Un point important est que le calcul de ces réserves est réalisé en actualisant les diagonales futures à l'aide des facteurs d'actualisation  $v(n+1, n+l)$ ,  $l \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Cependant ces facteurs d'actualisation ne sont pas connus au temps  $n$  et les facteurs d'actualisation forward correspondant,  $v(n+1, n+l) = v(n, n+l)/v(n, n+1)$ , sont utilisés à la place. Ce choix est correct uniquement si les taux d'intérêt sont déterministes. Cette approche considère donc qu'il n'y a pas de risque de taux d'intérêt, en d'autres termes les prix futurs des zéro coupons sont connus avec certitude.

Sous solvabilité II, la détermination de la distribution du YEO est nécessaire pour la mise en place d'un modèle interne afin d'estimer le risque de réserve. Dans ce cadre, le SCR (Solvency Capital Requirement) est défini avec une approche de VaR (Value At Risk) à 99,5%. Il est calculé en actualisant, avec le facteur  $v(n, n+1)$ , la différence entre le quantile 99,5% et la moyenne du YEO. En effet, il est essentiel de remarquer que le YEO est un montant de paiement nécessaire au temps  $n+1$ , d'où la nécessité d'actualiser sur 1 an ce dernier de manière à obtenir un montant de capital requis en année  $n$ .

Cette méthode, qui repose sur une application classique de la méthode de Chain Ladder, conserve les mêmes avantages et inconvénients de cette dernière. De plus, en lien avec l'intérêt porté à l'inflation, le principal avantage de cette méthode de prise en compte implicite de l'inflation est sa facilité de mise en oeuvre opérationnelle puisque aucune modélisation de l'inflation n'est requise. Cependant, comme évoqué dans la partie 1.1.5, le récent contexte inflationniste remet en cause son utilisation et oblige les assureurs à porter une attention particulière à la modélisation de l'inflation.

## 2.2 Prise en compte explicite de l'inflation dans le provisionnement non-vie

Cette section vise à présenter des méthodes de provisionnement permettant une modélisation exogène de l'inflation pour pallier les difficultés des méthodes modélisant implicitement cette dernière. Une première partie présente de manière intrinsèque ces méthodes tandis qu'une deuxième partie se concentre sur la modélisation de l'inflation.

### 2.2.1 Présentation de méthodes de provisionnement non-vie prenant en compte explicitement l'inflation

L'objectif de cette partie est de présenter des méthodes de provisionnement non-vie qui modélisent de manière explicite l'inflation. Au total 3 méthodes sont proposées : la méthode de *surinflation*, la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor.

#### 2.2.1.1 La méthode de *surinflation*

La méthode de *surinflation* est une méthode de provisionnement qui essaye de corriger la limite observée dans la projection de l'inflation par la méthode de Chain Ladder. Elle s'appuie sur une approche similaire à celle précédemment décrite, en reposant à nouveau sur l'hypothèse que la méthode de Chain Ladder projette implicitement une moyenne de l'inflation passée dans les règlements futurs.

Elle consiste, à l'instar de la méthode prenant en compte implicitement l'inflation, à projeter un triangle de règlements exprimés au coût historique. Cependant, la projection du triangle est ensuite corrigée à l'aide de facteurs de surinflation. Ces facteurs visent à surinflater les règlements futurs de la différence entre l'inflation anticipée et l'inflation projetée implicitement par la méthode de Chain Ladder. Ils sont généralement spécifiés par jugement d'expert en s'appuyant sur les anticipations des banques centrales.

En appliquant cette méthode, l'estimation de la PSAP est réalisée à l'aide de :

$$R_n^{hc} = \sum_{l=1}^n CL_n \left( D_{n+l}^{hc} \right) (1 + I_{n+l}),$$

où  $I_{n+l}$  est le facteur de surinflation cumulé pour l'année calendaire  $n + l$ .

L'actualisation de l'estimation des paiements futurs permet de déduire le Best Estimate :

$$BE_n^{hc} = \sum_{l=1}^n CL_n \left( D_{n+l}^{hc} \right) (1 + I_{n+l}) v(n, n+l).$$

Il est important de remarquer que comme les facteurs de surinflation sont positifs, la PSAP et le BE estimés à l'aide de la méthode de *surinflation* sont supérieurs à ceux estimés par la méthode projetant implicitement l'inflation.

Le risque de réserve à l'ultime est quantifié à l'aide de la distribution du DUO, obtenue par la collection des  $S$  simulations :

$$\text{DUO} = \left\{ {}_s\tilde{U}_n^{hc} = \sum_{l=1}^n {}_s\tilde{D}_{n+l}^{hc} (1 + I_{n+l}) v(n, n+l), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\}.$$

La distribution du YEO permet de mesurer le risque de réserve à horizon 1 an. Pour  $S$  simulations bootstrap :

$$\text{YEO} = \left\{ {}_s\tilde{Y}_{n+1}^{hc} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{hc} (1 + I_{n+1}) + {}_s\tilde{BE}_{n+1}^{hc}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où  ${}_s\tilde{BE}_{n+1}^{hc}$  correspond, pour la  $s$ -ième simulation, à l'estimation du Best Estimate à la fin de l'année  $n + 1$  par la méthode de *surinflation* :

$${}_s\tilde{BE}_{n+1}^{hc} = \sum_{l=2}^n {}_s\tilde{C}L_{n+1} \left( D_{n+l}^{hc} \right) (1 + I_{n+l}) v(n+1, n+l).$$

Cette méthode conserve également les mêmes avantages et inconvénients que la méthode de Chain Ladder. Par ailleurs, en lien avec l'attention portée à l'inflation, c'est en pratique une méthode très utilisée par les assureurs de par la simplicité de son implémentation. En effet, elle correspond à une extension naturelle de la méthode de Chain Ladder, n'exigeant en supplément que la spécification des facteurs de surinflation. Ces derniers offrent la possibilité de compenser une éventuelle projection insuffisante de l'inflation par la méthode de Chain Ladder. De cette manière, la méthode de *surinflation* permet d'estimer les provisions de manière plus prudente ce qui peut s'avérer particulièrement utile dans un contexte d'incertitude économique comme c'est le cas actuellement.

Cependant, comme pour la méthode de prise en compte implicite de l'inflation son utilisation est remise en cause dans le contexte actuel puisque l'hypothèse centrale de la méthode spécifiant qu'une moyenne de l'inflation passée est projetée implicitement dans les règlements futurs n'est plus forcément vérifiée. C'est pourquoi, la méthode de mise en *as-if* essaye de s'affranchir de cette limite en retraçant au préalable le triangle des effets calendaires.

### 2.2.1.2 La méthode de mise en *as-if*

La méthode de mise en *as-if* est une méthode de provisionnement destinée à compenser l'absence de prise en compte d'effet calendaire dans la méthode de Chain Ladder, en intégrant une modélisation exogène de l'inflation.

L'application de cette méthode nécessite de retraiter le triangle supérieur des règlements de l'inflation passée. L'idée est d'exprimer tous les règlements en euro de l'année d'observation des données, pour obtenir un triangle de règlement au coût actuel. Ce retraitement est réalisé à l'aide d'un indice  $p_s$  mesurant l'évolution des prix spécifique à la branche étudiée. Ainsi, à partir des observations de cet indice pour les années calendaires présentes dans le triangle, à savoir  $p_s(l) \forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les données peuvent être ajustées de l'inflation passée de la manière suivante :

$$C_{i,j}^{ac} = C_{i,j}^{hc} \frac{p_s(n)}{p_s(i+j)}, \quad \forall (i, j) \in \nabla,$$

où l'indice *ac* indique que le règlement est exprimé au coût actuel.

L'objectif de ce retraitement est d'essayer de neutraliser les effets calendaires présents dans le triangle observé. En effet, l'élimination de ces effets calendaires permet ensuite d'appliquer la méthode de Chain Ladder au triangle exprimé au coût actuel, de manière à ne projeter aucune inflation dans les règlements futurs. Une projection de l'indice des prix spécifique pour les années calendaires futures,  $p_s(l) \forall l \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , est alors nécessaire afin de pouvoir inflater les règlements futurs.

A l'instar des deux méthodes précédemment évoquées, cette approche présente les mêmes avantages et inconvénients que la méthode de Chain Ladder. De plus, en rapport avec la prise en compte de l'inflation, l'atout majeur de cette méthode est qu'elle permet théoriquement de s'affranchir de tout problème dans la projection de l'inflation en retraitant au préalable le triangle de l'inflation passée puis en projetant cette dernière de manière exogène.

Cependant, ces points rendent son implémentation plus complexe. En effet, il est dans un premier temps nécessaire de trouver ou de construire un indice permettant d'annuler les effets calendaires présents dans le triangle, ce qui peut s'avérer complexe en l'absence d'indices reflétant l'inflation spécifique à la branche étudiée. Une fois ce retraitement effectué, il est également nécessaire de modéliser l'inflation, dans le but de projeter cette dernière. Ce sujet sera traité dans la partie suivante. Par ailleurs, cette modélisation de l'inflation augmente l'incertitude dans l'estimation des provisions.

La façon dont la PSAP, le Best Estimate et le risque de réserve sont estimés avec cette méthode sera exposée dans la partie [2.2.2](#).

### 2.2.1.3 La méthode de séparation de Taylor

La méthode de séparation de Taylor est une méthode de provisionnement déterministe qui a été introduite pour la première fois par ([Verbeek, 1972](#)) dans un contexte de réassurance. Cette

méthode a ensuite été développée par (Taylor, 1977) pour être applicable au coût moyen des sinistres dans un contexte plus général.

Alors que la méthode de Chain Ladder suppose uniquement une proportionnalité dans l'écoulement des sinistres par année de développement, la méthode de séparation de Taylor sépare l'écoulement des sinistres de l'influence affectant les années calendaires. L'idée de la méthode est de considérer l'inflation comme un facteur endogène aux triangles.

De plus à la différence de la méthode de Chain Ladder qui s'applique sur un triangle de montants cumulés, la méthode de séparation de Taylor s'applique sur un triangle de coût moyen décumulé.

La méthode est basée sur l'hypothèse que  $N_i$ , le nombre de sinistres pour l'année de survenance  $i$ , est considéré comme connu. En effet, comme le nombre de sinistres total d'une année de survenance est souvent connu assez rapidement, même pour les branches longues,  $N_i$  peut facilement être estimé séparément, et donc être considéré comme connu. Il peut par exemple être estimé par la méthode de Chain Ladder si un triangle de nombres de sinistres est disponible.

En outre, la méthode de séparation suppose que la proportion du montant de sinistre moyen payé en année de développement  $j$  est constante suivant les années de développement  $i$ . Cette proportion est notée  $r_j \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

En considérant que tous les sinistres sont réglés à la fin de l'année de développement  $n$ , les proportions  $r_j$  doivent respecter la contrainte suivante :

$$\sum_{j=0}^n r_j = 1. \quad (2.1)$$

Enfin, il est également supposé que le montant moyen de sinistre est proportionnel à un certain indice noté  $\lambda_l \forall l \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , qui concerne les années calendaires durant lesquelles les sinistres sont payés.

Année de survenance	Année de développement					
	0	1	2	...	$n-1$	$n$
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$	$r_2\lambda_2$	...	$r_{n-1}\lambda_{n-1}$	$r_n\lambda_n$
1	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	$r_2\lambda_3$	...	$r_{n-1}\lambda_n$	
2	$r_0\lambda_2$	$r_1\lambda_3$	$r_2\lambda_4$	...		
⋮	⋮	⋮	⋮			
$n-1$	$r_0\lambda_{n-1}$	$r_1\lambda_n$				
$n$	$r_0\lambda_n$					

TABLE 2.1 – Le triangle  $\nabla$  de coût moyen avec la méthode de séparation de Taylor

Les estimations  $\hat{r}_j \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\hat{\lambda}_l \forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , des paramètres  $r_j$  et  $\lambda_l$  du triangle 2.1, sont obtenues par une récursion de somme à partir du triangle  $\nabla_s$  des valeurs observées des coûts

moyens :

$$s_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{\widehat{N}_i},$$

et des équations :

$$\sum_{k=0}^l s_{l,l-k} = \widehat{\lambda}_l \sum_{j=0}^l \widehat{r}_j, \quad \forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (2.2)$$

portant sur la somme de la  $l$ -ième diagonale de  $\nabla s$  et :

$$\sum_{i=0}^j s_{i,j} = \widehat{r}_j \sum_{l=j}^n \widehat{\lambda}_l, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (2.3)$$

portant sur la somme de la  $j$ -ième colonne de  $\nabla s$ .

(Taylor, 1977) montre que les équations (2.2) et (2.3) avec la contrainte (2.1) possèdent une unique solution qui peut être obtenue de manière récursive.

La procédure commence par l'estimation du paramètre  $\lambda_n$ . L'équation (2.2) avec  $l = n$  et la contrainte (2.1) permettent d'obtenir que :

$$\widehat{\lambda}_n = \sum_{k=0}^n s_{n,n-k}.$$

Cette estimation permet ensuite d'obtenir une estimation du paramètre  $r_n$  à l'aide de l'équation (2.3) avec  $j = n$  :

$$\widehat{r}_n = \frac{s_{0,n}}{\widehat{\lambda}_n}.$$

Ce qui permet ensuite d'estimer  $\widehat{\lambda}_{n-1}$  puis  $\widehat{r}_{n-1}$  et ainsi de suite.

La poursuite de cette procédure donne lieu aux estimateurs suivants :

$$\widehat{\lambda}_l = \frac{\sum_{k=0}^l s_{k,l-k}}{1 - \sum_{j=l+1}^n \widehat{r}_j}, \quad \forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket,$$

$$\widehat{r}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} s_{i,j}}{\sum_{l=j}^n \widehat{\lambda}_l}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Il est intéressant de noter que l'évolution des coefficients  $\widehat{\lambda}$  estimés, à savoir :

$$\frac{\widehat{\lambda}_{l+1}}{\widehat{\lambda}_l} - 1, \quad (2.4)$$

permet d'estimer une inflation spécifique, incluse dans le triangle supérieur, pour l'année calendaire  $l + 1$ . Cette observation se révélera utile pour déduire une inflation spécifique au triangle étudié, lors de l'application de la méthode de séparation de Taylor.

L'estimation du montant incrémental des règlements passés du triangle  $\nabla$  est alors donnée par  $\hat{m}_{i,j} = \hat{N}_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_l \forall (i, j) \in \nabla$  et le montant des réserves est estimé par :

$$\hat{R} = \sum_{(i,j) \in \Delta} \hat{m}_{i,j}.$$

Cependant, il est important de remarquer que pour estimer le montant des règlements futurs dans le triangle  $\Delta$ , il est nécessaire de projeter le paramètre  $\lambda_l \forall l \in \llbracket n + 1, 2n \rrbracket$ , ce qui nécessite une modélisation de l'inflation, qui sera abordée dans la partie suivante.

Cette méthode possède l'avantage de considérer l'inflation comme un facteur endogène au triangle et de directement utiliser ce dernier pour projeter le triangle. Par conséquent, elle ne nécessite pas l'utilisation d'indices. En revanche, l'inflation spécifique estimée à l'aide des paramètres  $\hat{\lambda}$  peut se révéler volatile. Pour remédier à cette difficulté, il peut être nécessaire de retraiter le triangle des sinistres graves pour obtenir une inflation plus stable.

Dans le but d'obtenir une distribution des réserves, il est proposé d'appliquer cette méthode au travers d'une procédure bootstrap décrite dans (Björkwall *et al.*, 2010). La procédure bootstrap fournie dans cet article s'appuie sur des techniques de provisionnement bootstrap développées dans (Björkwall *et al.*, 2009). (Björkwall *et al.*, 2010) propose deux procédures bootstrap de la méthode de séparation de Taylor l'une considérant le nombre de sinistres comme stochastique et l'autre le nombre de sinistres comme déterministe. L'approche considérant le nombre de sinistre comme déterministe est conservé dans le cadre de ce mémoire, ce qui permet de rester en adéquation avec les hypothèses initiales de la méthode de séparation de Taylor.

Cette procédure suppose que les incréments des règlements conditionnellement au nombre de sinistres sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon des lois Gamma à savoir :

$$C_{i,j} | N_i \sim \Gamma \left( \frac{N_i}{\phi}, r_j \lambda_l \phi \right),$$

où  $\frac{N_i}{\phi}$  correspond au paramètre de forme et  $r_j \lambda_l \phi$  au paramètre d'échelle.

Il découle de cette hypothèse que l'espérance du montant des règlements conditionnellement au nombre de sinistres est donnée par :

$$\mathbb{E}(C_{i,j} | N_i) = N_i r_j \lambda_l,$$

et la variance par :

$$\mathbb{V}(C_{i,j} | N_i) = \phi N_i (r_j \lambda_l)^2 = \phi \frac{\mathbb{E}^2(C_{i,j} | N_i)}{N_i},$$

ce qui correspond aux composantes d'un modèle GLM pondéré par les nombres de sinistres avec une fonction de lien logarithmique et une distribution Gamma.

Le paramètre  $\phi$  est estimé à l'aide de la statistique de Pearson par :

$$\hat{\phi} = \frac{1}{|\nabla| - p} \sum_{(i,j) \in \nabla} \hat{N}_i \frac{(C_{i,j} - \hat{\mathbb{E}}(C_{i,j} | N_i))^2}{\hat{\mathbb{E}}^2(C_{i,j} | N_i)} = \frac{1}{|\nabla| - p} \sum_{(i,j) \in \nabla} \hat{N}_i \frac{(C_{i,j} - \hat{N}_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_l)^2}{(\hat{N}_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_l)^2},$$

où  $|\nabla| = \frac{n(n+1)}{2}$  correspond au nombre d'observations dans le triangle  $\nabla C$  et  $p = 2n + 1$  correspond au nombre de paramètres estimés.

La procédure bootstrap employée correspond à la procédure bootstrap paramétrique présentée dans (Björkwall *et al.*, 2009). La relation entre le vrai montant des réserves dans le monde réel  $R$  et son estimateur  $\hat{R}$  dans le monde réel, est par le principe du plug-in, remplacé dans le monde bootstrap par leur homologue dans ce monde. Ainsi, l'erreur de processus est incluse dans  $R^{**}$ , le vrai montant des réserves dans le monde bootstrap, tandis que l'erreur d'estimation est incluse dans  $\hat{R}^*$ , l'estimateur des réserves dans le monde bootstrap. L'indice \* est utilisé pour les variables aléatoires ou les estimateurs dans le monde bootstrap qui correspondent à des observations ou des estimateurs du monde réel, tandis que l'indice \*\* est utilisé pour des variables aléatoires dans le monde bootstrap quand leurs homologues du monde réel ne sont pas observés.

La procédure bootstrap peut alors être implémentée de la manière suivante. Elle débute par l'estimation du nombre de sinistres total par année de survenance  $N_i \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  à l'aide de l'application de la méthode Chain Ladder sur le triangle de nombre cumulé.

La méthode de séparation de Taylor peut ensuite être appliquée sur le triangle de coût moyen et permet de déterminer les estimateurs  $\hat{r}_j \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\hat{\lambda}_l \forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\hat{\phi}$ .

Ces étapes permettent ensuite de rééchantillonner  $B$  fois les incréments des règlements :

$$C_{i,j}^* | N_i \sim \Gamma \left( \frac{N_i}{\hat{\phi}}, \hat{r}_j \hat{\lambda}_l \hat{\phi} \right), \quad (2.5)$$

$\forall (i,j) \in \nabla$  donnant lieu à  $B$  pseudo triangle  $\nabla C^*$ .

La méthode de séparation de Taylor est ensuite appliquée sur chacun des  $B$  triangles rééchantillonnés ce qui permet de projeter chacun des pseudo triangles. Les estimateurs des réserves dans le monde bootstrap sont alors obtenus par  $\hat{R}^* = \sum_{\Delta} \hat{m}_{i,j}^*$ .

Enfin pour générer un résultat aléatoire des vraies réserves dans le monde bootstrap, le triangle inférieur est aussi rééchantillonné  $B$  fois en utilisant l'équation (2.5)  $\forall (i,j) \in \Delta C^{**}$ , ce qui donne lieu à  $B$  triangles inférieurs simulés  $\Delta m^{**}$ .

La dernière étape consiste à calculer les  $B$  erreurs de prédiction non standardisées<sup>1</sup> par la formule suivante :

$$pe_{i,j}^{**} = m_{i,j}^{**} - \widehat{m}_{i,j}^*. \quad (2.6)$$

La distribution des réserves  $R$  est alors obtenue par les  $B$  quantités :

$$\widetilde{R}^{**} = \widehat{R} + pe^{**},$$

où  $pe^{**} = \sum_{(i,j) \in \Delta} pe_{i,j}^{**}$ . La procédure bootstrap est résumée dans le tableau 2.2. De plus, la méthode d'estimation de la PSAP, du Best Estimate et du risque de réserve sera détaillée dans la partie suivante.

### Détail de la procédure bootstrap

#### Etape 1 : Monde réel

**Sous-étape 1.1 :** Le triangle de nombre de sinistres  $\nabla N$

- Projeter les futures valeurs espérées  $\nabla n$  par Chain Ladder.
- Calculer le nombre de sinistres ultime par année de survenance  $\widehat{N}_i$ .

**Sous-étape 1.2 :** Le triangle de règlements  $\nabla C$

- Utiliser  $\widehat{N}_i$  de la sous-étape 1.1 dans le but de projeter les futures valeurs espérées  $\Delta \widehat{m}$  et calculer les valeurs prédites  $\nabla \widehat{m}$  par la méthode de séparation de Taylor.
- Calculer  $\widehat{\phi}$  pour le rééchantillonnage.
- Calculer les réserves  $\widehat{R}_i = \sum_{j \in \Delta_i} \widehat{m}_{i,j}$  et  $\widehat{R} = \sum_{\Delta} \widehat{m}_{i,j}$ .

#### Etape 2 : Monde bootstrap

- Simuler une trajectoire de l'inflation future à l'aide d'une approche présentée dans la partie 2.2.2.

**Sous-étape 2.1 :** L'estimation des réserves

- Rééchantillonner les règlements à partir de l'équation (2.5) pour obtenir la pseudo réalité dans  $\nabla C^*$ .
- Utiliser  $\widehat{N}_i$  et la simulation de l'inflation future obtenue au début de l'étape 2 dans le but d'estimer les futures valeurs espérées  $\Delta \widehat{m}^*$  par la méthode de séparation de Taylor.
- Calculer les estimateurs des réserves  $\widehat{R}_i^* = \sum_{j \in \Delta_i} \widehat{m}_{i,j}^*$  et  $\widehat{R}^* = \sum_{\Delta} \widehat{m}_{i,j}^*$ .

**Sous-étape 2.2 :** Les vraies réserves

- Rééchantillonner les règlements à partir de l'équation (2.5) pour obtenir la pseudo réalité dans  $\Delta C^*$ .
- Calculer les vraies réserves  $\widehat{R}_i^{**} = \sum_{j \in \Delta_i} \widehat{C}_{i,j}^{**}$  et  $\widehat{R}^{**} = \sum_{\Delta} \widehat{C}_{i,j}^{**}$ .
- Stocker l'erreur de prédiction non-standardisée (2.6).
- Retourner au début de la boucle bootstrap dans l'étape 2 et répéter  $B$  fois.

#### Etape 3 : Analyse des simulations

- Obtenir la distribution des vraies réserves dans le monde réel  $R_i$  et  $R$ .

TABLE 2.2 – Procédure bootstrap de la méthode de séparation de Taylor

1. (Björkwall *et al.*, 2010) propose l'utilisation de deux erreurs de prédiction : une standardisée et une autre non-standardisée. L'erreur de prédiction standardisée possède l'avantage de souvent augmenter la précision d'estimation par rapport à l'erreur de prédiction non standardisée. En revanche, l'erreur de prédiction non-standardisée a été choisie car elle est tout le temps définie, en particulier même lorsque  $n_{i,j}$  est nul.

Finalement, pour synthétiser les différentes méthodes de provisionnement proposées dans ce mémoire, le tableau 2.3 récapitule les principaux aspects de chacune de ces méthodes.

Méthode de provisionnement	Triangle utilisé	Méthode de projection	Projection de l'inflation
Méthode prenant en compte implicitement l'inflation	Triangle de règlements cumulés	Chain Ladder	Inflation projetée implicitement par Chain Ladder
Méthode de <i>surinflation</i>	Triangle de règlements cumulés	Chain Ladder	Inflation projetée implicitement par Chain Ladder et utilisation de facteurs de surinflation
Méthode de mise en <i>as-if</i>	Triangle de règlements cumulés retraité de l'inflation passée à l'aide d'un indice des prix	Chain Ladder	Projection de manière stochastique de l'indice des prix utilisé pour retraiter le triangle
Méthode de séparation de Taylor	Triangle de coût moyen décumulé	Méthode de séparation de Taylor	Projection de manière stochastique du facteur calendaire $\lambda$

TABLE 2.3 – Les grands principes des différentes méthodes de provisionnement proposées

## 2.2.2 Présentation de deux approches pour modéliser l'inflation dans le cadre de l'évaluation des provisions techniques non-vie

Les sinistres en assurance non-vie sont exposés à la fois à l'inflation générale et à l'inflation spécifique. L'inflation générale est liée à l'évolution du niveau général des prix et est mesurée par la variation d'un indice des prix à la consommation. L'inflation spécifique est une composante additionnelle déterminée par le changement des prix de biens et de services ayant un impact direct sur la branche étudiée. L'objectif de cette partie est de présenter deux approches pour pouvoir projeter ces deux composantes. Les modèles présentés seront utilisés dans la suite de l'étude pour appliquer la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Ces derniers sont inspirés de (De Felice et Moriconi, 2023), la contribution apportée à ces approches est la modélisation de l'inflation spécifique et l'utilisation de données libre d'accès pour calibrer les modèles de l'inflation générale. Cette partie se concentre uniquement sur la présentation théorique des modèles, leur calibration sera conservée pour la partie 3.2.

### 2.2.2.1 Approche *actuarielle*

La première approche proposée, appelée approche *actuarielle*, est une extension naturelle de celle modélisant implicitement l'inflation. Dans cette approche, l'inflation générale et l'inflation spécifique sont modélisées à l'aide de processus stochastiques, qui sont calibrés à partir d'indices qui expliquent au mieux chacune de ces composantes. De plus, les hypothèses suivantes sont posées :

- Le risque d'inflation est indépendant du risque technique.

- Il n'y a pas de risque de taux d'intérêt.
- Les futurs taux anticipés d'inflation générale sont déterministes.
- Les primes de risque ne sont pas prises en compte dans l'évaluation des provisions, en particulier une prime de risque pour l'inflation générale n'est pas incluse.

### Modélisation de l'inflation générale

L'inflation générale est modélisée par le biais d'un modèle stochastique modélisant l'évolution d'un indice des prix à la consommation  $p_g$ . La dynamique de cet indice est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dp_g(t) = f_{p_g}(p_g(t), t)dt + g_{p_g}(p_g(t), t)dW_{p_g}(t),$$

où  $W_{p_g}(t)$  est un mouvement brownien standard, et les fonctions  $f_{p_g}(p_g(t), t)$  et  $g_{p_g}(p_g(t), t)$  sont respectivement les termes de *drift* et de *diffusion* du processus  $p_g(t)$ . Ces termes sont spécifiés simplement de la manière suivante :

$$f_{p_g}(p_g(t), t) = y_{p_g}(t)p_g(t), \quad g_{p_g}(p_g(t), t) = \sigma_{p_g}p_g(t),$$

où  $\sigma_{p_g}$  est une constante positive représentant le paramètre de volatilité et la fonction  $y_{p_g}(t)$  est l'espérance du taux d'inflation instantané au temps  $t$ . En effet, comme<sup>2</sup>  $\mathbb{E}_t(dW_{p_g}(t)) = 0$ , il vient que :

$$\mathbb{E}_t \left( \frac{dp_g(t)}{p_g(t)dt} \right) = y_{p_g}(t).$$

Comme précisé dans les hypothèses de cette approche, la fonction  $y_{p_g}(t)$  est considérée comme déterministe. La dynamique de  $p_g$  est finalement donnée par :

$$dp_g(t) = y_{p_g}(t)p_g(t)dt + \sigma_{p_g}p_g(t)dW_{p_g}(t), \quad (2.7)$$

ce qui correspond à un mouvement brownien géométrique avec un terme de *drift* dépendant du temps.

Pour  $T \geq t$ , il est utile de considérer le logarithme du rapport de l'indice des prix  $p_g(T)/p_g(t)$  :

$$L_{p_g}(t, T) = \log \left( \frac{p_g(T)}{p_g(t)} \right).$$

En utilisant le lemme d'Ito, il est possible de montrer que  $L_{p_g}(t, T)$  suit une loi normale d'espérance :

$$\mu_{L_{p_g}}(t, T) = \mathbb{E}_t(L_{p_g}(t, T)) = \int_t^T y(s)ds - \frac{1}{2}(T-t)\sigma_{p_g}^2,$$

et de variance :

---

2.  $\mathbb{E}_t$  désigne l'espérance conditionnelle sachant  $\mathcal{F}_t$ , avec  $\mathcal{F}_t$  qui représente l'information disponible au temps  $t$ .

$$\sigma_{L_{p_g}}^2(t, T) = \mathbb{V}_t(L_{p_g}(t, T)) = (T - t)\sigma_{p_g}^2. \quad (2.8)$$

Ainsi, au temps  $t$  le rapport  $p_g(T)/p_g(t)$  est une variable aléatoire log-normale qui peut être simulée comme :

$$\frac{\tilde{p}_g(T)}{p_g(t)} = e^{\mu_{L_{p_g}}(t, T) + \sigma_{L_{p_g}}(t, T)\tilde{\varepsilon}_T},$$

avec  $\tilde{\varepsilon}_T$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

La spécification de l'anticipation de l'évolution future de l'indice  $p_g$  sera donnée par le facteur d'inflation  $m_{p_g}$  entre le temps  $t$  et  $T$ , défini par :

$$m_{p_g}(t, T) = \mathbb{E}_t \left( \frac{p_g(T)}{p_g(t)} \right).$$

En remarquant que  $m_{p_g}(t, T) = \mathbb{E}_t \left( e^{L_{p_g}(t, T)} \right)$  et en utilisant la normalité de  $L_{p_g}(t, T)$ , il vient que :

$$m_{p_g}(t, T) = e^{\mu_{L_{p_g}}(t, T) + \frac{1}{2}\sigma_{L_{p_g}}^2(t, T)} = e^{\int_t^T y_{p_g}(s) ds}.$$

Dans cette approche, il est proposé d'utiliser les anticipations d'inflation communiquées par la BCE (Banque Centrale Européenne) dans le cadre de leurs projections macroéconomiques publiées de manière trimestrielle. En effet, dans la situation inflationniste actuelle, caractérisée par la récente forte augmentation de l'inflation, il n'est pas jugé pertinent d'estimer la fonction  $y(t)$  à l'aide des données historiques d'un indice des prix à la consommation puisque cette estimation pourrait être biaisée par cette récente instabilité. C'est pourquoi, il semble préférable de considérer l'anticipation de l'inflation comme une donnée exogène.

Ces projections macroéconomiques jouent un rôle important dans l'analyse économique de la stratégie de la politique monétaire de la BCE. Elles prévoient l'évolution de l'IPCH, du PIB et d'autres variables macroéconomiques et fiscales importantes sur un horizon de 2 à 3 ans. Ces projections se basent sur des modèles économétriques, notamment le New Area-Wide Model (NAWM), un modèle d'équilibre général dynamique stochastique, ainsi que sur des hypothèses concernant les prix des matières premières, les taux d'intérêt et les taux de change, obtenues à partir de données de marché.

Plus spécifiquement, dans le cadre de la projection de l'évolution des prix à court terme, des modèles de régressions et des modèles vectoriels autorégressifs (VAR) sont utilisés. Ces modèles sont souvent combinés à des séries temporelles ARIMA et complétés par d'autres informations, telles que des mesures gouvernementales ou des jugements d'experts. Pour plus d'informations à ce sujet, le lecteur pourra se référer au document (BCE, 2016), qui présente en détail la méthodologie des projections macroéconomiques de la BCE.

Les anticipations de la BCE permettent d'obtenir au temps  $t$  les taux forward annuels d'inflation

anticipés  $\mu_k$  au temps  $t + k$  avec  $k > 0$  :

$$\mu_k = \int_{t+k-1}^{t+k} y_{p_g}(s) ds = \log \frac{m_{p_g}(t, t+k)}{m_{p_g}(t, t+k-1)}.$$

Cette observation permet de simuler l'évolution de l'indice des prix de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}_g(t+k)}{p_g(t)} &= m_{p_g}(t, t+k) e^{-\frac{1}{2}\sigma_{p_g}^2 k + \sigma_{p_g} \sqrt{k} \tilde{\varepsilon}_k} \\ &= e^{\sum_{h=1}^k \mu_h - \frac{1}{2}\sigma_{p_g}^2 k + \sigma_{p_g} \sqrt{k} \tilde{\varepsilon}_k}. \end{aligned}$$

où il est uniquement nécessaire d'estimer le paramètre de volatilité  $\sigma_{p_g}$  pour implémenter le modèle.

### Modélisation de l'inflation spécifique

L'inflation spécifique est modélisée à l'aide du rapport, noté  $w$ , entre un indice des prix  $p_s$ , reflétant l'évolution des prix spécifique à la branche d'assurance étudiée, et l'indice général des prix  $p_g$ , choisi pour modéliser l'inflation générale. Ainsi  $w(t) = p_s(t)/p_g(t)$ .

La dynamique de  $w(t)$  est spécifiée à l'aide d'un mouvement brownien géométrique, de sorte que :

$$dw(t) = \mu_w w(t) dt + \sigma_w w(t) dW_w(t). \quad (2.9)$$

Ainsi, tous les résultats énoncés pour le processus  $p_g(t)$  sont encore valables pour le processus  $w(t)$ , en remplaçant la fonction déterministe  $y_{p_g}(t)$  par  $\mu_w$ . Il est en plus supposé que les mouvements browniens  $dW_{p_g}(t)$  et  $dW_w(t)$  possèdent un coefficient de corrélation instantané  $\rho$ , c'est à dire que :

$$\mathbb{C}_t(dW_{p_g}(t), dW_w(t)) = \rho dt,$$

où  $\rho$  est une constante entre -1 et 1.

Cependant contrairement à l'inflation générale, la spécification de l'espérance des futures valeurs de  $w(t)$  et donc du paramètre  $\mu_w$  sera réalisée à partir de l'observation de données historiques. En effet, cette dernière ne peut pas être considérée comme une donnée exogène puisque aucune anticipation n'est disponible pour l'indice  $p_s$ . Ainsi après avoir estimé  $\mu_w$  et  $\sigma_w$ , le processus  $w(t)$  pourra être simulé de la manière suivante :

$$\frac{\tilde{w}(t+k)}{w(t)} = m_w(t, t+k) e^{-\frac{1}{2}\sigma_w^2 k + \sigma_w \sqrt{k} \tilde{\eta}_k}$$

où  $m_w(t, T) = e^{(T-t)\mu_w}$  et  $\tilde{\eta}_k$  est variable aléatoire de loi normale centrée réduite possédant un coefficient de corrélation  $\rho$  avec  $\tilde{\varepsilon}_k$ .

Finalement, l'évolution de l'indice spécifique attendue est donnée par :

$$\begin{aligned} m_{p_s}(t, t+k) &= \mathbb{E}_t \left( \frac{p_s(t+k)}{p_s(t)} \right) = \mathbb{E}_t \left( \frac{p_g(t+k)}{p_g(t)} \frac{w(t+k)}{w(t)} \right) \\ &= m_{p_s}(t, t+k) m_w(t, t+k) e^{\sigma_w \sigma_{p_s} \rho k}, \end{aligned}$$

et la projection de l'inflation globale est obtenue en multipliant les simulations de  $p_g(t)$  et de  $w(t)$  de sorte :

$$\frac{\tilde{p}_g(t+k) \tilde{w}(t+k)}{p_g(t) w(t)} = \frac{\tilde{p}_g(t+k)}{p_g(t)} \frac{\left( \frac{\tilde{p}_s}{p_g} \right)(t+k)}{\frac{p_s(t)}{p_g(t)}} \approx \frac{\tilde{p}_s(t+k)}{p_s(t)},$$

ce qui permet de simuler l'évolution de l'inflation spécifique tout en restant en conformité avec les anticipations de l'inflation générale.

### Provisionnement avec l'approche *actuarielle*

#### La méthode de mise en *as-if*

En appliquant la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*, la PSAP est estimée par :

$$R_n^{ac|A} = \sum_{l=1}^n CL_n(D_{n+l}^{ac}) m_{p_s}(n, n+l)$$

où  $CL_n(D_{n+l}^{ac})$  est l'estimation en année  $n$ , du total des paiements pour l'année calendaire  $n+l$  par l'application de la méthode de Chain Ladder au triangle exprimé au coût actuel et  $m_{p_s}(n, n+l)$  correspond à l'évolution espérée de l'indice des prix spécifique  $p_s$  entre l'année calendaire  $n$  et  $n+l$ .

Le Best Estimate est calculé en actualisant les flux futurs estimés :

$$BE_n^{ac|A} = \sum_{l=1}^n CL_n(D_{n+l}^{ac}) m_{p_s}(n, n+l) v(n, n+l).$$

Le risque de réserve à l'ultime est mesuré à l'aide de la distribution du DUO, obtenue par la collection des  $S$  simulations :

$$\text{DUO} = \left\{ {}_s\tilde{U}_n^{ac|A} = \sum_{l=1}^n {}_s\tilde{D}_{n+l}^{ac} \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+l)}{p_s(n)} v(n, n+l), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où la somme des futures diagonales  ${}_s\tilde{D}_{n+l}^{ac}$  sont des simulations bootstrap à partir du triangle au coût actuel et  $\frac{{}_s\tilde{p}_s(n+l)}{p_s(n)}$  est une simulation de l'évolution de l'indice des prix spécifique  $p_s$  conformément aux modèles présentés dans l'approche *actuarielle*.

La distribution du YEO permet d'évaluer le risque de réserve à horizon 1 an. Elle est définie par les  $S$  simulations :

$$\text{YEO} = \left\{ {}_s\tilde{Y}_{n+1}^{ac|A} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{ac} \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+1)}{p_s(n)} + {}_s\tilde{BE}_{n+1}^{ac|A}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où :

$${}_s\tilde{B}E_{n+1}^{ac|A} = \sum_{l=2}^n {}_s\tilde{C}L_{n+1}(D_{n+l}^{ac}) \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+1)}{p_s(n)} m_{p_s}(n+1, n+l) v(n+1, n+l).$$

Le facteur d'inflation  $m_{p_s}(n+1, n+l)$  est un montant observé à la date  $n+1$ , cependant comme les taux d'inflation futurs anticipés sont considérés comme déterministes, il est égal au taux forward :

$$m_{p_s}(n+1, n+l) = \mathbb{E}_{n+1} \left( \frac{p_s(n+l)}{p_s(n+1)} \right) = \frac{m_{p_s}(n, n+l)}{m_{p_s}(n, n+1)}.$$

### La méthode de séparation de Taylor

De la même manière, dans le cadre de l'utilisation de la méthode de séparation de Taylor avec l'approche *actuarielle*, la PSAP est donnée par :

$$R_n^{Taylor|A} = \sum_{l=1}^n Taylor_n(D_{n+l}^{hc}),$$

où  $Taylor_n(D_{n+l}^{hc})$  correspond à l'estimation en année  $n$ , du total des paiements pour l'année calendaire  $n+l$  par l'application de la méthode de séparation de Taylor en projetant les facteurs calendaires  $\lambda$  à l'aide de  $m_{p_s}$ .

L'estimation du Best Estimate se fait par l'actualisation des flux futurs estimés :

$$BE_n^{Taylor|A} = \sum_{l=1}^n Taylor_n(D_{n+l}^{hc}) v(n, n+l).$$

Le risque de réserve à l'ultime est déterminé à l'aide de la distribution du DUO, spécifiée par les  $S$  simulations :

$$DUO = \left\{ {}_s\tilde{U}_n^{Taylor|A} = \sum_{l=1}^n {}_s\tilde{D}_{n+l}^{Taylor} v(n, n+l), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où la somme des futures diagonales  ${}_s\tilde{D}_{n+l}^{Taylor}$  est obtenue par des simulations bootstrap de la méthode de Taylor dans lesquelles les facteurs calendaires  $\lambda$  sont projetés à l'aide de simulations de l'indice  $p_s$ .

Finalement, le risque de réserve à horizon 1 an est mesuré par la distribution du YEO. Pour  $S$  simulations bootstrap :

$$YEO = \left\{ {}_s\tilde{Y}_{n+1}^{Taylor|A} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{Taylor} + {}_s\tilde{B}E_{n+1}^{Taylor|A}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où :

$${}_s\tilde{B}E_{n+1}^{Taylor|A} = \sum_{l=2}^n {}_s\tilde{Taylor}_{n+1} \left( D_{n+l}^{hc} \right) v(n+1, n+l),$$

est obtenu en adaptant la procédure bootstrap de la méthode de Taylor de sorte à appliquer la méthode de Taylor sur des triangles augmentés par les simulations des règlements de la prochaine année. Le détail de la procédure est fourni en annexe B.3.

### Défauts de l'approche *actuarielle*

L'hypothèse d'indépendance entre le risque technique et le risque d'inflation est raisonnable. En effet, il semble compliqué d'imaginer qu'il puisse avoir une relation entre l'inflation, qu'elle soit générale ou spécifique, et la nature, la survenance et le développement des sinistres d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance.

Une critique possible de l'approche *actuarielle* est l'hypothèse de taux d'intérêt déterministes qui est une évidente simplification de la réalité. Cette hypothèse a un impact pour l'estimation du risque de réserve à horizon 1 an puisque l'incertitude liée aux taux d'intérêt n'est pas prise en compte. Cependant, cette hypothèse peut être considérée comme une première bonne approximation puisque les taux d'inflation anticipés sont également considérés comme déterministes.

L'hypothèse considérant les futurs taux anticipés d'inflation générale comme déterministes est une très nette simplification de ce qui est observée sur le marché. Ces taux vont naturellement évoluer avec le temps de manière à intégrer de nouvelles informations. Cependant, elle permet de simplifier la projection de l'inflation ainsi que la collecte des données nécessaires pour calibrer le modèle. Effectivement, la calibration d'un modèle considérant les futurs taux anticipés d'inflation générale comme stochastiques nécessite un historique d'anticipations des taux d'inflation conséquent, ce qui peut être obtenu à partir des taux swap d'inflation observés sur le marché. Néanmoins, l'obtention de ces données nécessite un accès à un fournisseur de données financières comme Bloomberg, ce qui n'a pas été possible dans le cadre de ce mémoire. Il est également important de noter que cette hypothèse sous-estime l'incertitude liée à l'inflation.

Un autre défaut pourrait concerner l'absence de prime de risque d'inflation. En effet, les projections macroéconomiques de la BCE reposent en partie sur des hypothèses découlant de données de marché. Il serait donc pertinent d'inclure une prime de risque d'inflation, ce qui sera réalisé dans l'approche suivante, où les anticipations de l'inflation seront déterminées à partir de données de marché sur les cotations de la dette française.

L'approche *actuarielle* constitue une solution simplifiée pour l'incorporation de manière explicite de l'inflation dans l'estimation des réserves, et en particulier dans l'estimation du risque de réserve sous l'horizon de 1 an. Même si les approximations réalisées dans cette approche sont acceptables d'un point de vue pratique, il est proposé d'essayer de les corriger dans une approche plus complexe.

### 2.2.2.2 Approche de *marché*

Dans cette approche, appelée approche de *marché*, les mêmes hypothèses que pour l'approche *actuarielle* sont conservées à la différence que les taux d'intérêt sont cette fois-ci supposés stochastiques et qu'une prime de risque d'inflation sera incorporée dans l'évaluation des provisions. Les facteurs de risques financiers seront projetés sous une probabilité risque-neutre. Cette modélisation permet de respecter les exigences exposées dans le point 3 de l'article 22 du règlement délégué de la directive Solvabilité II, concernant les projections des risques financiers dans le cadre de l'évaluation des provisions techniques. En effet, cet article impose que la projection de ces facteurs de risques :

- génère des prix d'actifs cohérents avec les prix des actifs observés sur les marchés financiers ;
- ne suppose aucune opportunité d'arbitrage ;
- soit cohérente avec la courbe des taux sans risque utilisée pour le calcul du Best Estimate.

Dans ce cadre, un résultat important est la relation de Fisher qui, en absence d'opportunité d'arbitrage, peut s'exprimer de la manière suivante :

$$(1 + r(t, T)) = (1 + \bar{r}(t, T))(1 + \check{i}(t, T)),$$

où :

- $r(t, T)$  est le taux d'intérêt nominal entre  $t$  et  $T$  ;
- $\bar{r}(t, T)$  est le taux d'intérêt réel entre  $t$  et  $T$  ;
- $\check{i}(t, T)$  est le taux d'inflation générale anticipé entre  $t$  et  $T$ .

Dans la limite de taux d'intérêt et de taux d'inflation faibles, il découle de cette relation que :

$$r(t, T) \approx \bar{r}(t, T) + \check{i}(t, T),$$

en d'autres termes le taux d'intérêt nominal est égal à la somme du taux d'intérêt réel et du taux d'inflation anticipé. Cette relation permettra de déduire les taux d'inflation générale anticipés par le marché à l'aide des obligations de l'état français.

### Modélisation de l'inflation générale

La modélisation de l'inflation générale sous la probabilité historique est réalisée à l'aide de la même équation différentielle stochastique (2.7) qui est utilisée dans l'approche *actuarielle*.

Dans le but d'obtenir la probabilité risque-neutre  $\check{\mathbb{P}}_{p_g}$ , il est nécessaire de spécifier la forme de la fonction  $q_{p_g}(p_g(t), t)$ , correspondant au prix du marché du risque d'inflation. (De Felice et Moriconi, 2023) explique que sous des considérations techniques combinées à des arguments d'équilibre économique général, il est judicieux de la choisir de la manière suivante :

$$q_{p_g}(p_g(t), t) = \sigma_{p_g}. \quad (2.10)$$

Cette fonction permet de faire le lien entre la probabilité historique et la probabilité risque-neutre de sorte que le mouvement brownien de la dynamique de  $p_g$  sous la probabilité historique  $dW_{p_g}(t)$  soit relié au mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre  $d\check{W}_{p_g}(t)$  à l'aide de formule suivante :

$$dW_{p_g}(t) = d\check{W}_{p_g}(t) - \sigma_{p_g} dt.$$

La dynamique risque-neutre de  $p_g$  est alors donnée par :

$$dp_g(t) = \check{y}_{p_g}(t)p_g(t)dt + \sigma_{p_g}p_g(t)d\check{W}_{p_g}(t),$$

où  $\check{y}_{p_g}(t) = y_{p_g}(t) - \sigma_{p_g}^2$ . Cette nouvelle équation différentielle stochastique implique que :

$$\check{y}_{p_g}(t) = \check{\mathbb{E}}_t^{p_g} \left( \frac{dp_g(t)}{p_g(t)dt} \right),$$

et donc  $\check{y}_{p_g}(t)$  correspond au taux d'inflation instantané anticipé par le marché sous la probabilité risque-neutre.

La spécification de l'anticipation de l'évolution future de l'indice  $p_g$  dans le monde risque-neutre sera donnée par la facteur d'inflation :

$$\check{m}_{p_g}(t, T) = \check{\mathbb{E}}_t^{p_g} \left( \frac{p_g(T)}{p_g(t)} \right) = e^{\int_t^T \check{y}_{p_g}(s)ds} = m(t, T)e^{-\sigma_{p_g}^2(T-t)},$$

ou par le taux d'inflation forward annuelle espérée :

$$\check{\mu}_k = \int_{t+k-1}^{t+k} \check{y}_{p_g}(s)ds = \log \frac{\check{m}_{p_g}(t, t+k)}{\check{m}_{p_g}(t, t+k-1)} = \mu_k - \sigma_{p_g}^2.$$

Dans le cadre de cette approche, ces anticipations seront estimées à l'aide de données de marché et plus précisément à partir de cotations des OAT (Obligations Assimilables du Trésor) et des OAT€i. Il ressort de ces formules que les anticipations d'inflation générale sous la probabilité risque-neutre sont inférieures à celle du monde réel. De plus, il est important de remarquer que les formules précédentes permettent de déduire les anticipations d'inflation générale du monde réel à partir de celles du monde risque-neutre ce qui se révélera utile au cours de l'application de cette approche.

### Modélisation de l'inflation spécifique

L'inflation spécifique est modélisée de la même manière que dans l'approche *actuarielle*, à savoir en modélisant le rapport entre un indice des prix spécifique  $p_s$  et l'indice des prix général  $p_g$  à l'aide de la dynamique (2.9) dans le monde réel.

Il est également à nouveau supposé que les mouvements browniens  $dW_{p_g}(t)$  et  $dW_w(t)$  possèdent un coefficient de corrélation instantanée  $\rho$  dans le monde réel :

$$\mathbb{C}_t(dW_{p_g}(t), dW_w(t)) = \rho dt.$$

L'évolution de l'indice spécifique attendue en considérant les anticipations risque-neutre de l'inflation générale, est donnée par :

$$\begin{aligned} \check{m}_{p_s}(t, t+k) &= \check{\mathbb{E}}_t \left( \frac{p_s(t+k)}{p_s(t)} \right) = \check{\mathbb{E}}_t \left( \frac{p_g(t+k)}{p_g(t)} \frac{w(t+k)}{w(t)} \right) \\ &= \check{m}_{p_g}(t, t+k) m_w(t, t+k) e^{\sigma_w \sigma_{p_s} \rho k}, \end{aligned}$$

et la simulation de l'inflation globale est obtenue par :

$$\frac{\check{p}_g(t+k) \check{w}(t+k)}{p_g(t) w(t)} = \frac{\check{p}_g(t+k) \left( \frac{\check{p}_s}{p_g} \right)(t+k)}{p_g(t) \frac{p_s(t)}{p_g(t)}} \approx \frac{\check{p}_s(t+k)}{p_s(t)},$$

ce qui permet de simuler l'évolution de l'inflation spécifique tout en restant en adéquation avec les anticipations de marché de l'inflation générale.

### Modélisation des taux d'intérêt

Les taux d'intérêt nominaux sont modélisés à l'aide de l'équation différentielle stochastique suivante sous la probabilité historique :

$$dr(t) = f_r(r(t), t)dt + g_r(r(t), t)dW_r(t),$$

où  $r(t)$  est le taux d'intérêt nominal instantané. Concernant la structure de dépendance, les taux d'intérêt sont supposés indépendants de l'inflation générale et de l'inflation spécifique :

$$\mathbb{C}_t(dW_r(t), dW_{p_g}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_t(dW_r(t), dW_w(t)) = 0.$$

Cette hypothèse d'indépendance entre les taux d'inflation et les taux d'intérêt peut être critiquable. En effet, la politique monétaire de la BCE, visant à assurer la stabilité des prix, à l'aide d'outils conventionnels comme le pilotage des taux d'intérêt directeurs et des taux d'intérêt du marché interbancaire, ou d'outils non conventionnels comme le quantitative easing, tend à contredire cette hypothèse. L'évolution des taux d'intérêts dans ces cas étant une conséquence de l'évolution observée des taux d'inflation. Cependant, cette hypothèse est tout de même posée dans un souci de simplification. Au-delà de cet aspect simplificatif, cette hypothèse est également réalisée puisqu'elle est cruciale pour justifier la forme de la prime de risque d'inflation (2.10), comme évoqué dans (De Felice et Moriconi, 2023).

Les fonctions  $f_r$  et  $g_r$  sont spécifiées de la manière suivante :

$$f_r(r(t), t) = \alpha(\gamma - r(t)) \quad \text{et} \quad g_r(r(t), t) = \sigma_r,$$

de sorte que la dynamique du taux d'intérêt nominal instantané soit un processus de Vasicek. C'est un processus de retour à la moyenne où  $\gamma$  représente le taux de réversion, c'est la moyenne

à long terme du taux d'intérêt,  $\alpha$  correspond à la vitesse de réversion à la moyenne et  $\sigma_r$  est un paramètre de volatilité.

Il est possible de montrer que la valeur espérée de ce processus vaut :

$$\mathbb{E}(r(t') | r(t)) = \gamma - (\gamma - r(t))e^{-\alpha(t'-t)},$$

et que sa variance vaut :

$$\mathbb{V}(r(t') | r(t)) = \frac{\sigma_r^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha(t'-t)}\right).$$

Dans le modèle de Vasicek, il est supposé que le prix des zéro coupons est une fonction déterministe du taux court et il est possible de montrer que sous certaines hypothèses cette relation est donnée par :

$$v(t, t + \tau) = A(\tau)e^{-r(t)B(\tau)},$$

avec :

$$A(\tau) = \exp\left(\frac{(B(\tau) - \tau)(\alpha^2\gamma - \sigma_r^2/2)}{\alpha^2} - \frac{\sigma_r^2 B^2(\tau)}{4\tau}\right) \quad \text{et} \quad B(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\tau}. \quad (2.11)$$

Pour les taux d'intérêt, (De Felice et Moriconi, 2023) choisissent le prix de marché du risque de la forme  $q_r(r(t), t) = -\pi r(t)$ , où  $\pi$  est le paramètre de prime de risque. La dynamique du taux court sous la probabilité risque-neutre reste un processus de Vasicek avec les termes de dérive et de diffusion suivants :

$$\check{f}_r(r(t), t) = \check{\alpha}(\check{\gamma} - r(t)) \quad \text{et} \quad \check{g}_r(r(t), t) = \sigma_r,$$

où  $\check{\alpha} = \alpha - \pi$  et  $\check{\gamma} = \gamma \frac{\alpha}{\check{\alpha}}$ . Cependant, pour fournir un ajustement parfait avec la courbe des taux sans risque initiale, comme imposé dans l'article 22 du règlement délégué, il est préférable d'utiliser le modèle de Hull and White, qui est une extension du modèle de Vasicek, pour modéliser les taux nominaux sous la probabilité risque-neutre. L'idée de ce modèle est de spécifier le paramètre  $\check{\gamma}$  comme une fonction déterministe dépendant du temps.

Dans le cadre de ce mémoire, le résultat important de ce modèle est qu'il permet, en spécifiant la fonction  $\check{\gamma}(t)$  de manière appropriée, de simuler les facteurs d'actualisation futurs,  $v(t', t' + \tau)$  pour  $t' \geq t$  et  $\tau \geq 0$ , de manière cohérente avec la courbe des taux sans risque EIOPA initiale par la formule suivante :

$$v^{\text{HW}}(t', t' + \tau) = \frac{v^{\text{EIOPA}}(t', t' + \tau)}{v^{\text{EIOPA}}(t', t')} A^{\text{HW}}(t', t' + \tau) e^{-w(t')B(\tau)},$$

où  $w(t')$  est une variable aléatoire de loi normale d'espérance nulle et de variance :

$$\mathbb{V}(w(t')) = \sigma_r^2 \frac{1 - e^{-2\alpha(t'-t)}}{2\alpha},$$

et :

$$A^{\text{HW}}(t', t' + \tau) = e^{1/2(V(\tau) - V(t'+\tau) + V(t'))},$$

avec :

$$V(\tau) = \frac{\sigma_r^2}{\check{\alpha}^2} \left( \tau + \frac{2}{\check{\alpha}} e^{-\check{\alpha}\tau} - \frac{1}{2\check{\alpha}} e^{-2\check{\alpha}\tau} - \frac{3}{2\check{\alpha}} \right).$$

Ces formules seront utilisées dans le cadre de l'évaluation du risque de réserve à horizon 1 an.

### Provisionnement avec l'approche de *marché*

#### La méthode de mise en *as-if*

Dans le cadre de l'application de la méthode de mise en *as-if* sous l'approche de *marché*, la PSAP est estimée par :

$$R_n^{\text{ac|M}} = \sum_{l=1}^n CL_n(D_{n+l}^{\text{ac}}) \check{m}_{p_s}(n, n+l).$$

Le Best Estimate est calculé en actualisant les montants de règlements espérés :

$$BE_n^{\text{ac|M}} = \sum_{l=1}^n CL_n(D_{n+l}^{\text{ac}}) \check{m}_{p_s}(n, n+l) v(n, n+l).$$

La distribution du DUO permet de quantifier le risque de réserve à l'ultime. Elle est obtenue par la collection des  $S$  simulations :

$$\text{DUO} = \left\{ {}_s\tilde{U}_n^{\text{ac|M}} = \sum_{l=1}^n {}_s\tilde{D}_{n+l}^{\text{ac}} \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+l)}{p_s(n)} v(n, n+l), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\}.$$

Le risque de réserve à horizon 1 an est évalué à l'aide de la distribution du YEO, défini par les  $S$  simulations :

$$\text{YEO} = \left\{ {}_s\tilde{Y}_{n+1}^{\text{ac|M}} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{\text{ac}} \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+1)}{p_s(n)} + {}_s\tilde{B}E_{n+1}^{\text{ac|M}}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où :

$${}_s\tilde{B}E_{n+1}^{\text{ac|M}} = \sum_{l=2}^n {}_s\tilde{C}L_{n+1}(D_{n+l}^{\text{ac}}) \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+1)}{p_s(n)} \check{m}_{p_s}(n+1, n+l) {}_s\tilde{v}(n+1, n+l),$$

où  ${}_s\tilde{v}(n+1, n+l)$  est une simulation du facteur d'actualisation à l'aide du modèle de Hull and White.

#### La méthode de séparation de Taylor

De la même manière, en utilisant la méthode de séparation de Taylor avec l'approche de *marché*, la PSAP est estimée par :

$$R_n^{Taylor|M} = \sum_{l=1}^n Taylor_n \left( D_{n+l}^{hc} \right),$$

où  $Taylor_n \left( D_{n+l}^{hc} \right)$  correspond à l'estimation en année  $n$ , du total des paiements pour l'année calendaire  $n+l$  par l'application de la méthode de séparation de Taylor en projetant le facteur calendaire à l'aide de  $\check{m}_{p_s}$ .

Après l'actualisation de flux futurs estimés, le Best Estimate est obtenu par :

$$BE_n^{Taylor|M} = \sum_{l=1}^n Taylor_n \left( D_{n+l}^{hc} \right) v(n, n+l).$$

Le risque de réserve à l'ultime est mesuré à l'aide de la distribution du DUO, donnée par les  $S$  simulations :

$$DUO = \left\{ {}_s\tilde{U}_n^{Taylor|M} = \sum_{l=1}^n {}_s\tilde{D}_{n+l}^{Taylor} v(n, n+l), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où la somme des futures diagonales  ${}_s\tilde{D}_{n+l}^{Taylor}$  est obtenues par des simulations bootstrap de la méthode de Taylor, dans lesquelles les facteurs calendaires  $\lambda$  sont projetés à l'aide de simulations de l'indice  $p_s$  sous la probabilité risque-neutre.

Enfin, le risque de réserve à horizon 1 an est évalué grâce à la distribution du YEO. Pour  $S$  simulations :

$$YEO = \left\{ {}_s\tilde{Y}_{n+1}^{Taylor|M} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{Taylor} + {}_s\tilde{BE}_{n+1}^{Taylor|M}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où  ${}_s\tilde{D}_{n+1}^{Taylor}$  est la somme de la future diagonale, obtenue par des simulations bootstrap de la méthode de Taylor adaptée pour le risque de réserve à horizon 1 an, dans lesquelles les facteurs calendaires  $\lambda$  sont projetés à l'aide de simulations de l'indice  $p_s$  sous la probabilité historique et :

$${}_s\tilde{BE}_{n+1}^{Taylor|M} = \sum_{l=2}^n {}_s\tilde{Taylor}_{n+1} \left( D_{n+l}^{hc} \right) {}_s\tilde{v}(n+1, n+l),$$

où  ${}_s\tilde{Taylor}_{n+1} \left( D_{n+l}^{hc} \right)$  correspond à l'estimation en année  $n+1$ , du total des paiements pour l'année calendaire  $n+l$ , obtenue par application de la procédure bootstrap de la méthode de Taylor adaptée pour le risque de réserve à horizon 1 an, en projetant le facteur calendaire à l'aide de  $\check{m}_{p_s}$ .

Il est important de remarquer que, sous l'approche de *marché*, la détermination de la distribution du YEO est réalisée à l'aide d'une approche de simulations dans les simulations.

L'idée de cette approche, est de projeter les taux d'inflation et le taux d'intérêt nominal instantané sous la probabilité historique, sur un horizon d'1 an. La simulation du taux court sur la

prochaine année, permet de déduire l'évolution de la courbe des taux sans risque de l'EIOPA sur cette même période. Cette modification de l'environnement économique sur l'année à venir, permet d'estimer, à la fin de cette période, le Best Estimate en tenant compte de cette nouvelle situation financière.

Pour simplifier la procédure, les différents processus stochastiques ne sont pas recalibrés en fonction de la nouvelle information disponible à la fin de la prochaine année. De plus, comme l'évaluation du Best Estimate nécessite uniquement les anticipations moyennes de l'inflation et la courbe des taux sans risque au moment de l'évaluation, il n'est pas nécessaire de simuler des trajectoires risque-neutre à partir de la fin de la prochaine année. Ainsi, comme en plus les taux d'inflation anticipés sont considérés comme déterministes, pour déterminer les taux d'inflation anticipés dans 1 an, il est suffisant d'utiliser les taux forward d'inflation sous la probabilité risque-neutre.

## Chapitre 3

# Application des méthodes à la branche responsabilité civile automobile

L'enjeu de ce chapitre est d'appliquer chacune des méthodes de provisionnement présentées dans la section précédente, tout en y intégrant les différentes approches de modélisation de l'inflation. Une première section s'intéresse à mettre en oeuvre la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation*. La deuxième section, s'attache à mettre en application la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, en modélisant dans un premier temps l'inflation selon l'approche *actuarielle* puis en adoptant dans un second temps l'approche de *marché*. Finalement, dans une dernière section un backtesting des différentes méthodes sera réalisé.

Les méthodes sont appliquées à un portefeuille couvrant la responsabilité civile automobile, à l'aide d'un triangle de règlements brut de recours hors graves et du triangle de nombre de sinistres associé, d'un acteur assurantiel français. Le choix de la branche s'est porté sur la responsabilité civile automobile car il s'agit d'une branche à développement long, où l'impact de l'inflation peut s'avérer particulièrement significatif.

Les triangles sont observés à la fin de l'année 2023 et possèdent 20 années de survenance, de 2004 à 2023. Pour des questions de confidentialité, les triangles ont été retraités de sorte, que la provision fournie par une application classique de la méthode de Chain Ladder, soit égale à 100 000, afin de mieux apprécier l'impact de l'implémentation des méthodes.

Les résultats numériques, obtenus avec les différentes méthodes, sont résumés dans le tableau 3.1, où  $m_{DUO}$ ,  $\sigma_{DUO}$  et  $CV_{DUO}$  correspondent respectivement à la moyenne, à l'écart type et au coefficient de variation de la distribution du DUO et  $m_{YEO}$ , VA  $m_{YEO}$ ,  $\sigma_{YEO}$ ,  $CV_{YEO}$  et  $q_{99,5\%}$  correspondent respectivement à la moyenne, à la moyenne actualisée, à l'écart type, au coefficient de variation et au quantile 99,5% de la distribution du YEO. Le SCR est calculé comme la valeur actualisée sur 1 an, de la différence entre le quantile à 99,5% et la moyenne de

la distribution du YEO.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> Approche de <i>marché</i>	Méthode Taylor
Provisions	PSAP	100 000	102 981	103 026	103 004	102 687	102 584
	BE	94 142	96 943	96 874	96 926	96 548	96 526
DUO	$m_{DUO}$	94 264	97 068	97 216	97 000	96 890	96 601
	$\sigma_{DUO}$	11 351	11 686	13 874	14 875	13 825	14 813
	$CV_{DUO}$	12,04%	12,04%	14,27%	15,34%	14,27%	15,33%
YEO	$m_{YEO}$	97 390	100 288	100 300	100 184	99 953	99 767
	VA $m_{YEO}$	94 227	97 031	97 043	96 930	96 706	96 527
	$\sigma_{YEO}$	9 783	10 065	11 868	12 429	11 868	12 414
	$CV_{YEO}$	10,05%	10,04%	11,83%	12,41%	11,87%	12,44%
	$q_{99,5\%}$	123 194	126 836	132 507	136 497	132 191	135 951
	SCR	24 966	25 586	31 167	35 133	31 191	35 009

TABLE 3.1 – Résultats numériques sur le montant des provisions, la distribution du DUO (vision à l’ultime) et la distribution du YEO (vision à horizon 1 an) avec les différentes méthodes

### 3.1 Application de la méthode prenant en compte implicitement l’inflation et de la méthode de *surinflation*

L’intention de cette section est de présenter les résultats obtenus à l’aide de la méthode prenant en compte implicitement l’inflation et la méthode de *surinflation*. Dans le cadre de la première méthode, une application classique de la méthode de Chain Ladder permettra de déterminer le montant de PSAP et de BE, tandis que l’utilisation des procédures bootstrap de la méthode de Chain Ladder permettra de déterminer les distributions du DUO et du YEO. Les résultats pour la méthode de *surinflation* seront obtenus de manière similaire, à la différence que des facteurs de surinflation seront utilisés.

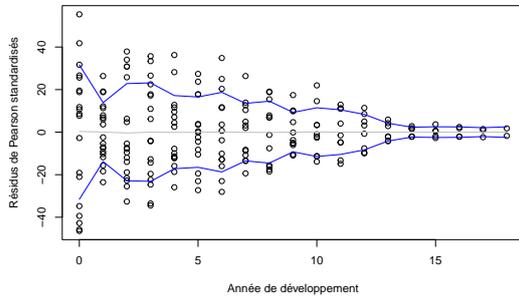
#### 3.1.1 Etude des résidus

Les deux méthodes s’appuient sur l’utilisation du triangle des règlements cumulés au coût historique. Ainsi, avant de les appliquer, et en particulier avant d’appliquer les procédures bootstrap ODP, il est essentiel de vérifier l’adéquation du modèle avec le triangle observé.

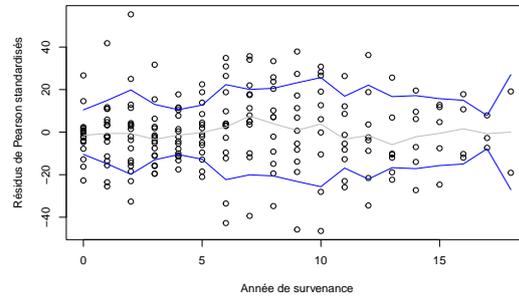
Dans ce but, il est proposé d’examiner les résidus de Pearson standardisés. Bien que ces résidus n’aient pas besoin de suivre une distribution spécifique, ils doivent, si le modèle est valide, se comporter approximativement comme des variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance constante. Une manière de vérifier ces hypothèses est de produire des graphiques des résidus.

La figure 3.1 représente les nuages de points des résidus de Pearson standardisés en fonction de

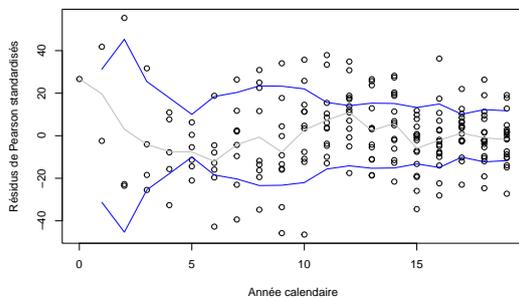
l'année de développement, de l'année de survenance, de l'année calendaire, ainsi que de la valeur moyenne prédite par la méthode de Chain Ladder.



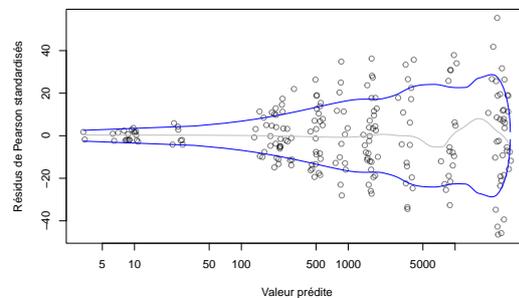
(a) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de développement



(b) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de survenance



(c) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année calendaire



(d) Résidus de Pearson standardisés en fonction de la valeur moyenne prédite

FIGURE 3.1 – Représentations graphiques des résidus de Pearson standardisés du triangle des règlements au coût historique, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) avant ajustement de l'hétéroscédasticité

En complément du nuage de points, des courbes sont ajoutées aux graphiques pour faciliter la vérification des hypothèses. La ligne grise correspond à la moyenne des résidus et les lignes bleues représentent plus et moins l'écart type des résidus. Dans les graphiques en fonction de l'année de survenance, de l'année de développement et de l'année calendaire, ces lignes sont respectivement obtenues en calculant la moyenne et l'écart type des résidus pour chaque modalité de la variable en abscisse. Dans le graphique par rapport à la valeur moyenne prédite, ces courbes correspondent respectivement à des moyennes et des écarts types lissés le long de l'axe des abscisses, obtenus à l'aide d'une régression locale.

Les résidus semblent raisonnablement aléatoires, ce qui suggère un bon ajustement du modèle aux données et renforce l'hypothèse d'indépendance des résidus.

La moyenne des résidus par année de développement et par année de survenance reste relativement stable autour de zéro. Cela s'explique par la présence, dans le modèle bootstrap ODP, d'un paramètre spécifique pour chaque année de développement et chaque année de survenance.

Une observation similaire est réalisée dans le graphique des résidus en fonction de la valeur moyenne prédite, sauf pour les grandes valeurs, où la moyenne devient plus instable. Par contre, la moyenne des résidus en fonction de l'année calendaire est plus volatile et s'éloigne davantage de zéro, car l'année calendaire n'est pas incluse comme variable explicative dans le modèle. Ces observations suggèrent que l'hypothèse de centrage des résidus est raisonnable.

En revanche, les graphiques par rapport aux années de développement et aux valeurs moyennes prédites révèlent un potentiel problème d'hétéroscédasticité des résidus. En effet, l'écart type des résidus diminue à mesure que l'année de développement progresse, tandis qu'il augmente avec la valeur moyenne prédite. Pour pallier ce problème, il est possible d'ajuster les résidus selon une approche proposée par (Shapland, 2016). Le but est de rendre les résidus homoscedastiques, de façon à se rapprocher le plus possible des conditions d'indépendance et de distribution identique nécessaires pour le rééchantillonnage des résidus dans les procédures bootstrap.

L'idée de cette approche consiste à regrouper, en  $G$  groupes, les années de développement ayant des écarts types homogènes. L'objectif est d'obtenir un facteur d'ajustement  $h_g$ , pour chaque groupe  $g \in \llbracket 1, G \rrbracket$  défini par :

$$h_g = \frac{\sigma\left(\left\{r_{i,j}^{PS}, (i,j) \in \nabla\right\}\right)}{\sigma\left(\left\{r_{i,j}^{PS}, (i,j) \in \nabla \text{ et } j \in g\right\}\right)}.$$

En d'autres termes, le facteur  $h_g$  correspond au rapport entre l'écart type de tous les résidus et l'écart type des résidus appartenant au groupe  $g$ .

Tous les résidus sont alors multipliés par le facteur  $h_g$  associé au groupe auquel ils appartiennent, pour obtenir les résidus ajustés  $r_{i,j}^{PA}$  de sorte que :

$$r_{i,j}^{PA} = h_g r_{i,j}^{PS}.$$

Après cet ajustement, tous les groupes possèdent le même écart type, permettant ainsi de réaliser, dans la procédure bootstrap, le rééchantillonnage des résidus par tirage avec remise parmi les résidus ajustés  $r_{i,j}^{PA}$ . Cependant, cet ajustement modifie la distribution initiale des résidus, et il est donc nécessaire de prendre en compte cette altération après le rééchantillonnage. Pour cela, les résidus rééchantillonnés sont divisés par le facteur d'ajustement  $h_g$  de l'année de développement correspondante, afin que les montants de règlements rééchantillonnés soient égaux à :

$$c_{i,j}^{(b)} = \hat{\mu}_{i,j} + \sqrt{\hat{\mu}_{i,j}} \frac{r_{i,j}^{(b)}}{h_g}.$$

En procédant de la sorte, l'hétéroscédasticité des résidus observée dans les données est repliquée dans le triangle rééchantillonné, tout en utilisant des résidus homoscedastiques pour le rééchantillonnage. Les facteurs d'ajustement  $h_g$  doivent également être utilisés pour ajuster le paramètre  $\phi$  par année de développement dans le cadre de l'incorporation de l'erreur de processus. Il est important de noter que ces ajustements affectent également le nombre de paramètres estimés

dans le modèle.

Le graphique 3.2 illustre les écarts types des résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de développement. Sur la base de cette représentation graphique, les années de développement sont regroupées en 5 groupes. La composition de ces groupes est résumée dans le tableau 3.2.

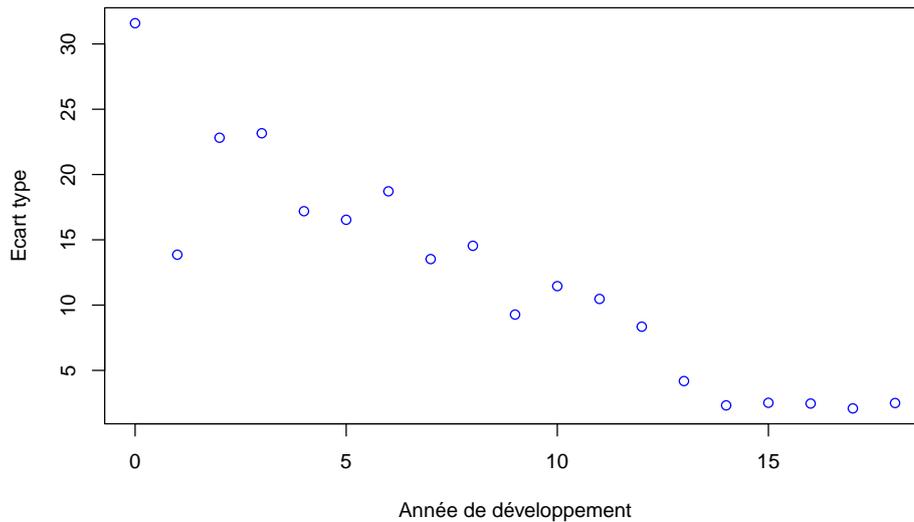
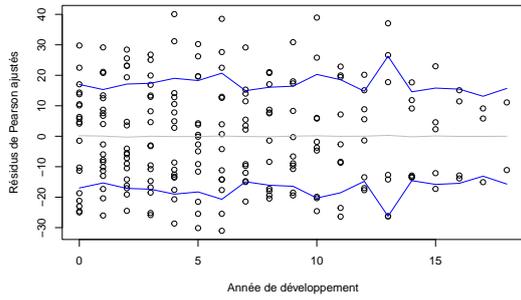


FIGURE 3.2 – Ecart type des résidus standardisés par année de développement

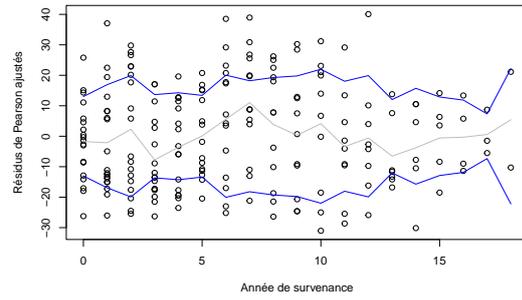
Groupes	1	2	3	4	5
Années de développement	0	1 et 4 à 8	2 et 3	9 à 12	13 à 18

TABLE 3.2 – Composition des groupes d'écart type homogène

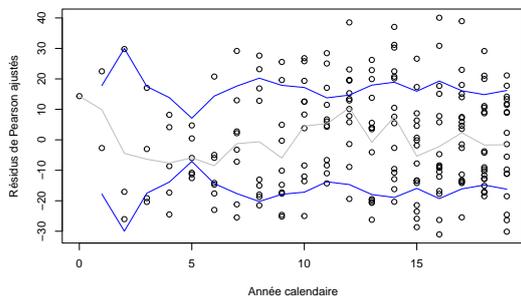
Les résidus ajustés sont illustrés à la figure 3.3. L'ajustement effectué a corrigé l'hétéroscédasticité observée sur les années de développement et par rapport à la valeur moyenne prédite. Désormais, les résidus présentent un écart type relativement constant en fonction des années de développement, des années de survenance, et des valeurs moyennes prédites. Cependant, cet ajustement a légèrement dégradé le centrage des résidus par rapport aux années de survenance. Toutefois après l'ajustement, les résidus se comportent approximativement comme des variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance constante.



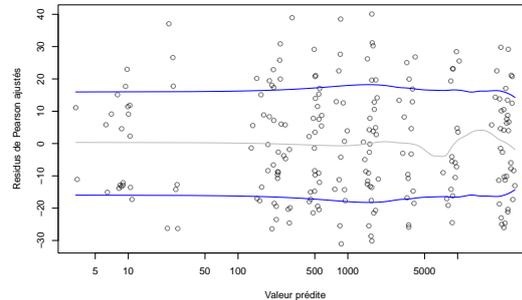
(a) Résidus de Pearson ajustés en fonction de l'année de développement



(b) Résidus de Pearson ajustés en fonction de l'année de survie



(c) Résidus de Pearson ajustés en fonction de l'année calendaire



(d) Résidus de Pearson ajustés en fonction de la valeur moyenne prédite

FIGURE 3.3 – Représentations graphiques des résidus de Pearson ajustés du triangle des règlements au coût historique, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) après ajustement de l'hétéroscédasticité

### 3.1.2 Application numérique de la méthode prenant en compte implicitement l'inflation

Après avoir étudié l'adéquation du modèle aux données, la méthode de provisionnement prenant en compte implicitement l'inflation peut être implémentée. L'utilisation de la méthode de Chain Ladder mène aux résultats présentés dans le tableau 3.3.

Inflation implicite		
Provisions	PSAP	<b>100 000</b>
	BE	<b>94 142</b>

TABLE 3.3 – Résultats numériques des provisions avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation

Le retraitement initial du triangle aboutit à une estimation de la PSAP exactement égale à 100 000. L'actualisation des règlements futurs, effectuée à l'aide de la courbe des taux sans risque

de l'EIOPA au 31/12/2023, donne un montant de BE de 94 142, soit 5,86% de moins que celui de la PSAP.

L'application des procédures bootstrap ODP avec 100 000 simulations<sup>1</sup> conduit aux résultats exposés dans le tableau 3.4.

Inflation implicite		
DUO	$m_{DUO}$	<b>94 264</b>
	$\sigma_{DUO}$	<b>11 351</b>
	$CV_{DUO}$	<b>12,04%</b>
YEO	$m_{YEO}$	<b>97 390</b>
	VA $m_{YEO}$	<b>94 227</b>
	$\sigma_{YEO}$	<b>9 783</b>
	$CV_{YEO}$	<b>10,05%</b>
	$q_{99,5\%}$	<b>123 194</b>
	SCR	<b>24 966</b>

TABLE 3.4 – Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation

Les moyennes empiriques obtenues pour le DUO et le YEO sont respectivement de 94 264 et 97 390. La comparaison de la moyenne du DUO et du YEO actualisée avec la valeur du BE obtenue avec la méthode de Chain Ladder, fournit des écarts inférieurs à 1%, ce qui montre que les procédures bootstrap sont pratiquement non biaisées.

Le coefficient de variation du DUO est de 12,04%, tandis que celui du YEO est de 10,05%. Comme attendu, le coefficient de variation du YEO est inférieur à celui du DUO, indiquant que le risque de réserve à horizon un an est plus faible que celui à l'ultime. La valeur du coefficient de variation du YEO peut être comparée à l'écart type du risque de réserve pour le segment *Assurance de responsabilité civile automobile et réassurance proportionnelle y afférente*, défini dans l'annexe II du règlement délégué, qui est de 9%. Ainsi, le présent triangle présente un risque de réserve légèrement supérieur à celui préconisé dans le cadre de l'utilisation de la formule standard.

Une exécution partielle de la procédure bootstrap, en simulant uniquement l'erreur d'estimation ou l'erreur de processus, permet de distinguer la contribution de chacune de ces deux erreurs au coefficient de variation. Ainsi, l'erreur d'estimation seule possède un coefficient de variation de 8,63% et l'erreur de processus seule affiche un coefficient de variation de 5,13%. Le coefficient de variation total est inférieur à la somme de ces deux contributions, grâce à l'effet de diversification découlant de l'indépendance entre ces deux erreurs.

En outre, la distribution du YEO possède un coefficient d'asymétrie positif d'une valeur de 0,283, signifiant que sa distribution est légèrement décalée à gauche de la moyenne et que sa queue de distribution est davantage étalée vers la droite. Elle présente également un coeffi-

1. Dans le cadre de ce mémoire, les différentes simulations ont été réalisées à graine aléatoire fixée, afin de pouvoir réaliser des comparaisons pertinentes entre les résultats numériques.

cient d'excès d'aplatissement négatif d'une valeur de  $-0,312$ , indiquant que sa distribution est relativement aplatie, et que son centre et ses queues sont affaiblis par rapport aux flancs. Ces remarques sont visibles sur la figure 3.4, comparant l'histogramme de la distribution empirique du YEO avec la densité d'une loi normale possédant une espérance et une variance identique à la distribution empirique du YEO.

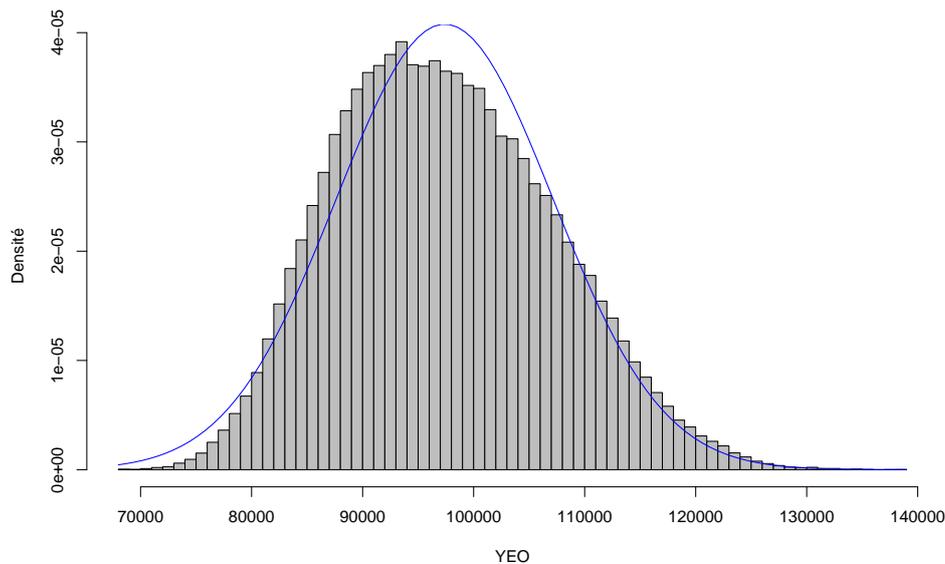


FIGURE 3.4 – Histogramme de la distribution du YEO obtenu avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation

Finalement, la distribution du YEO possède un quantile à 99,5% d'une valeur de 123 194. Ainsi, le montant de SCR de réserve estimé est de 24 966, obtenu en actualisant sur 1 an, à l'aide de la courbe sans risque de l'EIOPA au 31/12/2023, la différence entre le quantile 99,5% du YEO et la moyenne du YEO. Le SCR représente 26,52% du BE.

### 3.1.3 Application numérique de la méthode de *surinflation*

Pour pouvoir appliquer la méthode de *surinflation*, il est nécessaire de spécifier les facteurs de surinflation. La détermination de ces facteurs se basera sur les anticipations de l'inflation générale de la BCE, issues de leur projection macroéconomique en décembre 2023, ainsi que sur les indices de niveau 06.3.0.0 et 07.2.3.0 de la classification ECOICOP, calculés mensuellement par l'INSEE. Ces indices mesurent respectivement l'évolution des prix des services hospitaliers, et l'évolution des prix de l'entretien et de la réparation des véhicules des particuliers. Le premier indice vise à prendre en compte l'inflation des dommages corporels, tandis que le second vise à prendre en compte l'inflation des dommages matériels. Pour obtenir un indice d'inflation spécifique propre à la branche étudiée, il a été décidé, en l'absence d'informations sur la part respective des dommages matériels et corporels dans les sinistres, de réaliser la moyenne de ces deux indices.

Dans sa projection macroéconomique, la BCE prévoit un retour à la normale de l'inflation générale pour le second semestre 2025. En effet, l'inflation devrait rester supérieur à l'objectif de 2% de la BCE pour les années 2024 et 2025, avec des taux d'inflation anticipés respectivement à 2,7% et 2,1%. Ces prévisions incitent à spécifier des facteurs de surinflation pour les deux prochaines années.

L'idée de la méthode pour obtenir les facteurs de surinflation est de faire évoluer le taux d'inflation spécifique dans les mêmes proportions que les projections de l'inflation générale fournies par la BCE, de sorte à avoir un retour de ce taux à sa moyenne, observée sur les 20 dernières années, à partir de 2026. La projection de l'inflation de la BCE, peut être interprétée comme une moyenne pondérée du dernier taux d'inflation observé en 2023 (2,93%) et du taux d'inflation cible de 2%. Le taux d'inflation spécifique, est alors projeté pour les années 2024 et 2025 en réalisant une moyenne pondérée, avec les mêmes poids que pour l'inflation générale, entre le dernier taux d'inflation spécifique observé en 2023 (6,77%) et la moyenne du taux d'inflation spécifique sur l'historique du triangle (3,08%).

De cette manière, le taux d'inflation spécifique anticipé pour l'année 2024 vaut :

$$6,77\% \cdot \frac{2,7\% - 2\%}{2,93\% - 2\%} + 3,08\% \cdot \frac{2,9\% - 2,7\%}{2,93\% - 2\%} = 5,86\%,$$

et le taux d'inflation spécifique anticipé pour l'année 2025 vaut :

$$6,77\% \cdot \frac{2,1\% - 2\%}{2,93\% - 2\%} + 3,08\% \cdot \frac{2,9\% - 2,1\%}{2,93\% - 2\%} = 3,48\%.$$

Pour rappel, la méthode de *surinflation* repose sur l'hypothèse que la méthode de Chain Ladder projette de manière implicite une moyenne de l'inflation passée. Ainsi, afin de déduire les coefficients de surinflation, il convient de déduire la valeur moyenne de l'inflation spécifique observée aux projections réalisées. Les facteurs de surinflation obtenus sont donnés dans le tableau 3.5.

Année	2024	2025	2026 et +
Facteurs de surinflation	2,78%	0,40%	0,00%
Facteurs de surinflation cumulés	2,78%	3,19%	3,19%

TABLE 3.5 – Facteurs de surinflation

L'application de ces facteurs de surinflation, après avoir appliqué la méthode de Chain Ladder, produit les résultats du tableau 3.6.

Les montants de PSAP et de BE estimés par la méthode de *surinflation* s'élèvent respectivement à 102 981 et 96 943. Comme attendu, l'utilisation de facteurs de surinflation augmente le montant de PSAP et le montant de BE. Ainsi, avec la méthode de *surinflation*, la PSAP et le BE sont respectivement supérieurs de 2,98% et de 2,97%, par rapport à leurs homologues avec la méthode

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>
Provisions	PSAP	100 000	<b>102 981</b>
	BE	94 142	<b>96 943</b>

TABLE 3.6 – Résultats numériques des provisions avec la méthode de *surinflation*

prenant en compte implicitement l'inflation. L'actualisation des règlements futurs donne un montant de BE inférieur de 5,86% à celui de la PSAP.

L'utilisation des facteurs de surinflation dans l'application des procédures bootstrap ODP avec 100 000 simulations, donnent les résultats résumés dans le tableau 3.7.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>
DUO	$m_{\text{DUO}}$	94 264	<b>97 068</b>
	$\sigma_{\text{DUO}}$	11 351	<b>11 686</b>
	$CV_{\text{DUO}}$	12,04%	<b>12,04%</b>
YEO	$m_{\text{YEO}}$	97 390	<b>100 288</b>
	VA $m_{\text{YEO}}$	94 227	<b>97 031</b>
	$\sigma_{\text{YEO}}$	9 783	<b>10 065</b>
	$CV_{\text{YEO}}$	10,05%	<b>10,04%</b>
	$q_{99,5\%}$	123 194	<b>126 836</b>
	SCR	24 966	<b>25 586</b>

TABLE 3.7 – Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de *surinflation*

Les moyennes empiriques du DUO et du YEO atteignent respectivement 97 068 et 100 288. Comme pour la PSAP et le BE, ces moyennes sont supérieures à celles obtenues sans modéliser l'inflation. De plus, les valeurs moyennes du DUO et du YEO actualisées sont proches de la valeur du BE, avec des écarts de l'ordre de 1%, indiquant que les procédures bootstrap sont approximativement non biaisées.

La distribution du DUO présente un coefficient de variation de 12,04%, contre 10,04% pour celle du YEO. Ces derniers sont très proches de ceux obtenus avec une prise en compte implicite de l'inflation. Une application partielle de la procédure bootstrap, aboutit à des résultats similaires comparé à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation. En effet, le coefficient de variation du YEO correspondant à l'erreur d'estimation est de 8,62%, contre 8,63% sans modéliser l'inflation, et celui représentant l'erreur de processus est de 5,13%, contre 5,13% sans modéliser l'inflation.

Par ailleurs, la distribution du YEO présente un coefficient d'asymétrie positif de 0,283 et un coefficient d'aplatissement négatif de -0,312, quasiment identiques à ceux obtenus avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation. Ainsi, l'application des facteurs de surinflation ne modifie pas la forme de la distribution.

Enfin, la valeur du quantile à 99,5% de la distribution du YEO s'élève à 126 836. Elle est en augmentation de 2,96% par rapport à la précédente méthode, ce qui s'explique par l'augmentation du BE et la relative constance des autres résultats. L'augmentation relativement similaire du quantile à 99,5% et de la moyenne du YEO, donne lieu à une hausse de 2,48% du montant du SCR de réserve qui atteint la valeur de 25 586, représentant 26,39% du BE.

## 3.2 Application de la méthode de mise en *as-if* et de la méthode de séparation de Taylor

L'objectif de cette section est d'effectuer l'application numérique de la méthode de mise en *as-if* et de la méthode de séparation de Taylor. Ces méthodes seront appliquées au travers de leur méthode déterministe pour déterminer la PSAP et le BE, puis à l'aide de leurs procédures bootstrap pour obtenir les distributions du DUO et du YEO. Une première partie s'attache à implémenter l'approche *actuarielle* et la seconde celle de *marché*.

### 3.2.1 Approche *actuarielle*

Le but de cette partie est de procéder à l'application de l'approche *actuarielle*. Dans un premier temps, les paramètres des processus stochastiques modélisant l'inflation sont estimés, avant d'être utilisés pour appliquer numériquement la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor sous cette approche.

#### 3.2.1.1 Estimation des paramètres du modèle

Cette partie se concentre sur l'estimation des paramètres des modèles stochastiques de l'inflation générale et de l'inflation spécifique dans le cadre de l'approche *actuarielle*.

#### Inflation générale

Pour l'indice général des prix à la consommation  $p_g$ , le choix s'est porté sur l'indice des prix à la consommation harmonisé de la zone euro, calculé par Eurostat à la fin de chaque mois. L'évolution mensuelle de cet indice ainsi que les taux d'inflation annuelle associée sont représentés à la figure 3.5. Cette illustration est marquée, comme déjà évoquée précédemment, par la très forte augmentation de l'IPCH en 2022 et 2023.

#### Spécification des anticipations de l'inflation générale

Les taux d'inflation anticipés  $u_k$  sont déterminés à partir des anticipations de la BCE, issues de la projection macroéconomique de décembre 2023. Dans cette publication, les anticipations sont fournies pour les années 2024, 2025 et 2026, et résumées dans le tableau 3.8. Pour les années suivantes un taux d'inflation de 2% est retenu, en adéquation avec l'objectif inflationniste de la BCE à moyen terme.

#### Estimation du paramètre de volatilité de l'inflation générale

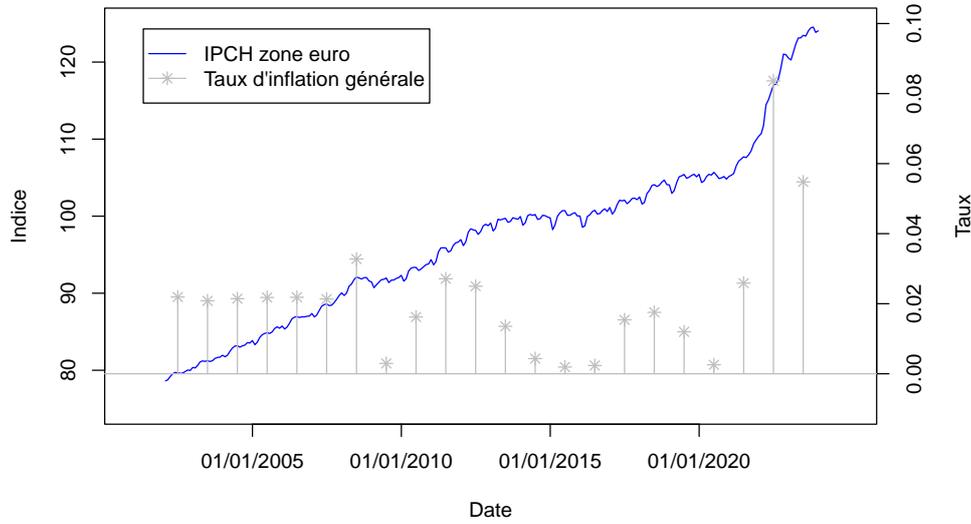


FIGURE 3.5 – Evolution de l'IPCH de la zone euro

Année	2024	2025	2026
Anticipation de l'évolution de l'IPCH de la zone euro	2,7%	2,1%	1,9%

TABLE 3.8 – Taux d'inflation générale anticipés par la BCE en décembre 2023

L'estimation du paramètre de volatilité  $\sigma_{p_g}$  est réalisée en utilisant la série temporelle de l'IPCH  $\{p_g(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$ , où  $\Theta^m$  est l'ensemble des dates de fin de mois entre janvier 2002 et décembre 2023. La série temporelle mensuelle ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$L_{p_g}(\theta, \theta + \Delta_t) = \log \frac{p_g(\theta + \Delta_t)}{p_g(\theta)}, \quad (3.1)$$

est alors calculée à partir de  $\{p_g(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$ . Ce qui permet d'obtenir, à partir de l'équation (2.8), une estimation de  $\sigma_{p_g}^2 \Delta_t$  en calculant la variance empirique de la série temporelle (3.1). Finalement, l'estimation suivante du paramètre de volatilité est obtenue :

$$\hat{\sigma}_{p_g} = 0,0167.$$

### Inflation spécifique

La mesure de l'inflation spécifique, pour la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, s'appuiera sur des données différentes. En effet, pour la méthode de mise en *as-if* cette mesure sera réalisée à l'aide d'indices exogènes des prix spécifiques à la branche responsabilité civile automobile. En revanche, pour la méthode de séparation de Taylor, elle sera effectuée à partir de la mesure de l'inflation spécifique au triangle, obtenue à l'aide de

l'estimation des facteurs calendaires  $\lambda$  de cette méthode.

### Méthode de mise en *as-if*

Dans le cadre de la méthode de mise en *as-if*, l'estimation de l'inflation spécifique à la branche responsabilité civile automobile est mesurée à l'aide des indices de niveau 06.3.0.0 et 07.2.3.0 de la classification ECOICOP.

### Estimation du terme de *drift* et du paramètre de volatilité de l'inflation spécifique

Un nouvel indice  $\{p_s(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$  avec pour période de base 2015 est obtenu en réalisant la moyenne de ces deux indices spécifiques. L'évolution de cet indice est fournie à la figure 3.6.

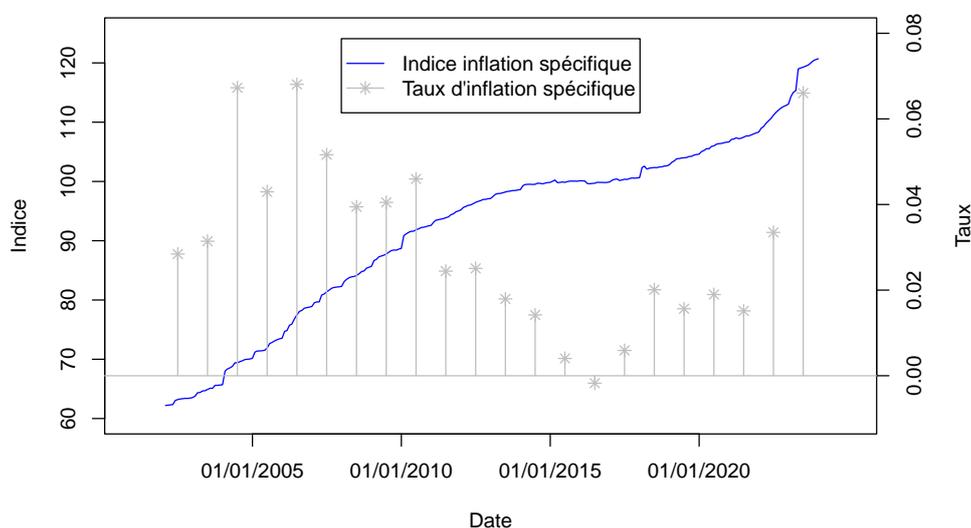


FIGURE 3.6 – Evolution de l'indice d'inflation spécifique (moyenne entre l'indice des services hospitaliers et l'indice de l'entretien et de la réparation des véhicules des particuliers)

La détermination de cet indice permet d'obtenir la série temporelle  $\{w(t)\}_{t \in \Theta^m}$ , représentée à la figure 3.7, correspondant au rapport  $w$  entre l'indice  $p_s$  et l'indice  $p_g$ . Elle est marquée par la forte diminution de ce rapport en 2021 et 2022, s'expliquant par une augmentation plus rapide de l'IPCH que l'indice des prix spécifique.

En appliquant le lemme d'Ito à  $\ln(w(t))$ , il est possible de montrer que pour un pas de temps  $\Delta_t$ ,  $\ln(w(t))$  vérifie l'équation d'un modèle auto régressif du premier ordre avec un paramètre unitaire :

$$\ln(w(t + \Delta_t)) = a + \ln(w(t)) + \varepsilon(t),$$

où :

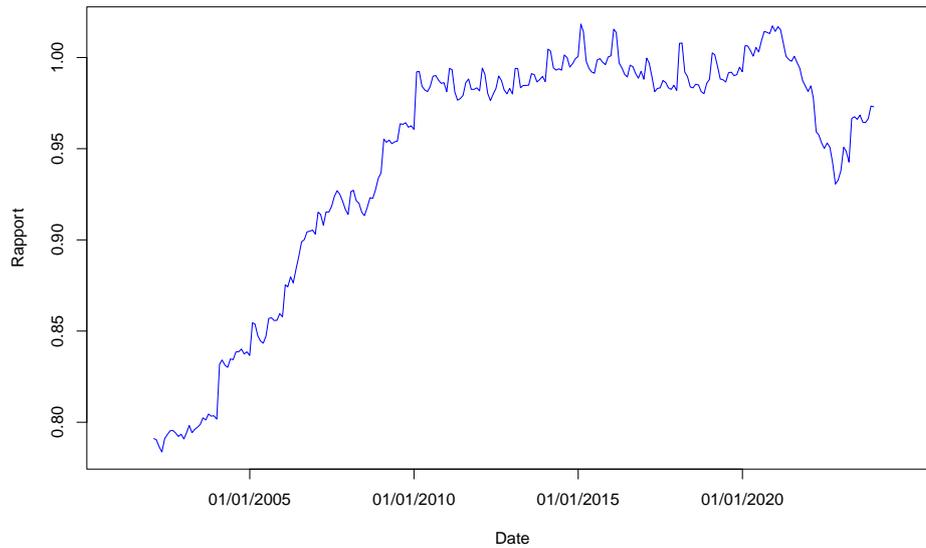


FIGURE 3.7 – Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro

$$a = \left( \mu_w - \frac{1}{2} \sigma_w^2 \right) \Delta_t,$$

et où les termes d'erreur  $\varepsilon(t)$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale d'espérance nulle et de variance :

$$\Omega^2 = \sigma_w^2 \Delta_t.$$

Ainsi, afin de vérifier la pertinence de la modélisation de la série temporelle  $w(t)$  à l'aide d'un mouvement brownien géométrique, il est possible de tracer le nuage de points représentant les logarithmes de  $w(t)$  à la fin de chaque mois en fonction de leur homologue à la fin du mois précédent, sur l'historique temporel des données. Ce graphique, présenté à la figure 3.8, inclut également en gris la première bissectrice. Il apparaît clairement que les points sont bien alignés le long d'une droite de pente unitaire, ce qui justifie l'utilisation d'un mouvement brownien géométrique pour modéliser  $w(t)$ .

De la même manière que pour l'inflation générale, la série temporelle ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$L_w(\theta, \theta + \Delta_t) = \log \frac{w(\theta + \Delta_t)}{w(\theta)}, \quad (3.2)$$

permet d'estimer le terme de *drift* et de *diffusion* du processus  $w$ . Ainsi, des estimations de  $\left( \mu_w - \frac{1}{2} \sigma_w^2 \right) \Delta_t$  et de  $\sigma_w^2 \Delta_t$  peuvent être obtenues en calculant respectivement la moyenne empirique et la variance empirique de la série temporelle (3.2). Ce qui donne finalement lieu aux estimations suivantes :

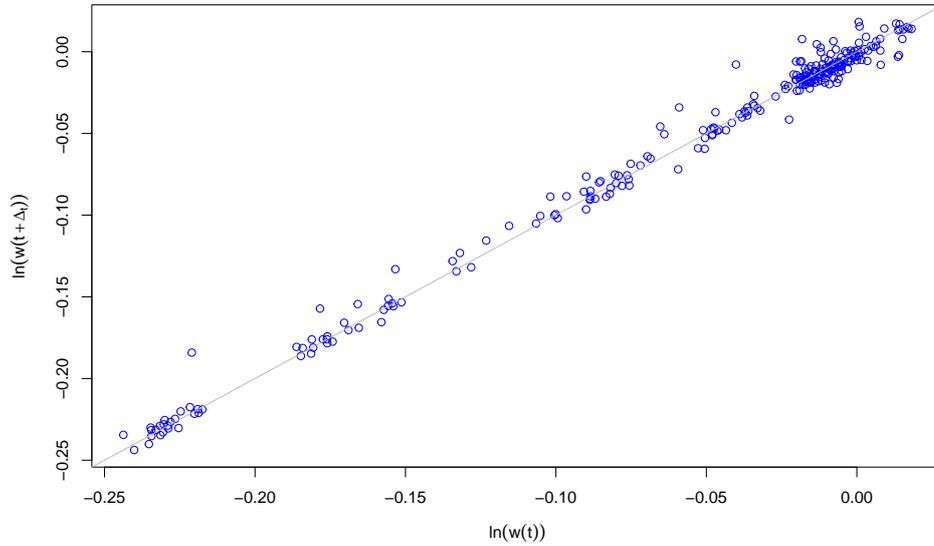


FIGURE 3.8 – Nuage de points des logarithmes du rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro pour deux mois consécutifs

$$\hat{\mu}_w = 0,0097 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_w = 0,0239.$$

### Estimation du coefficient de corrélation entre l'inflation générale et l'inflation spécifique

En remarquant que :

$$\mathbb{C}_t \left( \frac{dp_g(t)}{p_g(t)}, \frac{dw(t)}{w(t)} \right) = \sigma_{p_g} \sigma_w \mathbb{C}_t (dW_{p_g}(t), dW_w(t)) = \sigma_{p_g} \sigma_w \rho dt,$$

le coefficient de corrélation  $\rho$  peut être estimé à partir des séries temporelles ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$\frac{p_g(\theta + \Delta_t) - p_g(\theta)}{p_g(\theta)} \quad \text{et} \quad \frac{w(\theta + \Delta_t) - w(\theta)}{w(\theta)},$$

déterminées à l'aide de  $\{p_g(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$  et  $\{p_s(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$ . En effet, le calcul de la covariance empirique entre ces deux séries temporelles permet d'estimer  $\sigma_{p_g} \sigma_w \rho \Delta_t$ . En utilisant les estimations des paramètres de volatilité  $\sigma_{p_g}$  et  $\sigma_w$  obtenues précédemment, l'estimation suivante de  $\rho$  est obtenue :

$$\hat{\rho} = -0,8066.$$

L'estimation de  $\rho$  révèle une forte corrélation négative entre  $p_g$  et  $w$ . Ce résultat découle du fait que l'indice d'inflation spécifique  $p_s$  est déterminé à partir d'indices calculés à l'échelle française tandis que l'indice d'inflation générale est un indice calculé à l'échelle européenne. Par

conséquent, une augmentation de l'IPCH de la zone euro n'est pas nécessairement accompagnée d'une augmentation de l'indice de l'inflation spécifique ce qui a tendance à diminuer la valeur du rapport  $w$ . Ce commentaire est notamment observable sur la figure 3.9 comparant les évolutions de  $p_g$  et  $w$ .

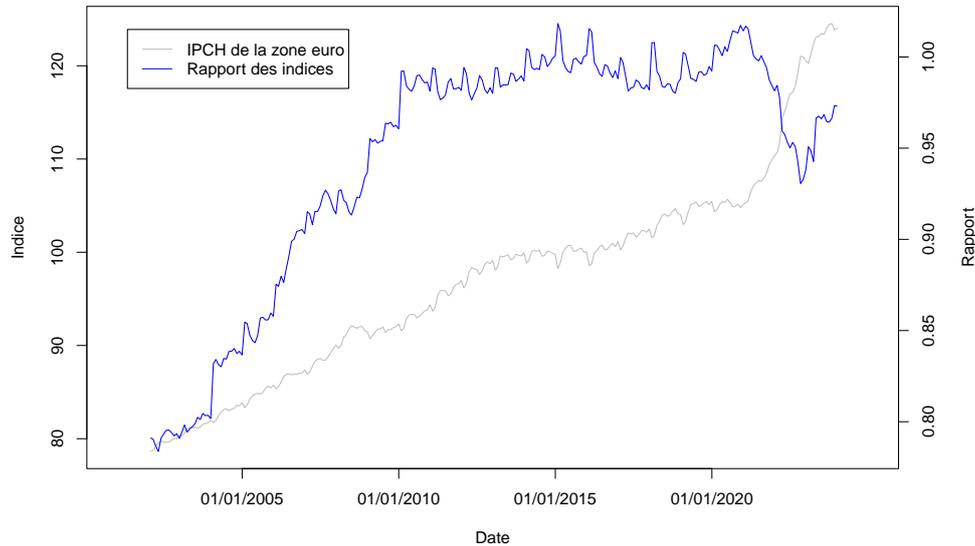


FIGURE 3.9 – Comparaison de l'évolution entre l'IPCH de la zone euro et le rapport entre l'indice d'inflation générale et l'indice d'inflation spécifique

### Méthode de séparation de Taylor

Dans le cadre de la méthode de séparation de Taylor, l'estimation de l'inflation spécifique à la branche responsabilité civile automobile est mesurée à l'aide des facteurs calendaires  $\lambda$  estimés sur le triangle de coût moyen.

### Estimation du terme de *drift* et du paramètre de volatilité de l'inflation spécifique

Un nouvel indice  $\{p_s(\kappa)\}_{\kappa \in K^a}$ , avec pour période de base 2015, est construit à partir des taux d'inflation spécifique observés dans le triangle de coût moyen, obtenus via l'équation (2.4). Ici,  $K^a$  correspond à l'ensemble des dates de fin d'années entre 2005 à 2023. Cet indice est ensuite extrapolé à un pas de temps mensuel en réalisant une interpolation linéaire entre les valeurs de deux années consécutives, de sorte à obtenir la série temporelle  $\{p_s(\kappa)\}_{\kappa \in K^m}$ , où  $K^m$  correspond à l'ensemble des dates de fin de mois entre janvier 2005 et décembre 2023. L'évolution de cet indice est fournie à la figure 3.10.

La détermination de cet indice permet d'obtenir la série temporelle  $\{w(\kappa)\}_{\kappa \in K^m}$ , représentée à la figure 3.11, correspondant au rapport entre l'indice construit  $p_s$  et l'indice  $p_g$ .

Cette représentation graphique est caractérisée par une forte diminution de ce rapport à partir de l'année 2016. Cette tendance s'explique par les nombreuses valeurs négatives de l'inflation

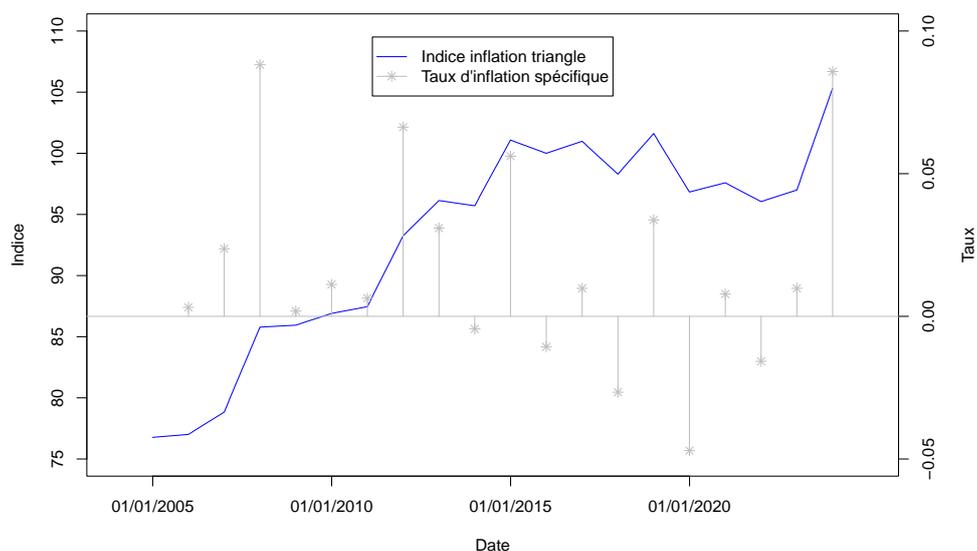


FIGURE 3.10 – Evolution de l'indice d'inflation spécifique au triangle



FIGURE 3.11 – Rapport entre l'indice d'inflation spécifique du triangle et l'IPCH de la zone euro

spécifique à partir de cette année, combinées à la forte augmentation de l'IPCH en 2022.

Il est intéressant de comparer l'inflation spécifique obtenue à l'aide des indices de niveau 06.3.0.0 et 07.2.3.0 de la classification ECOICOP, avec celle déduite du triangle de coût moyen avec la méthode de séparation de Taylor. Cette comparaison est illustrée sur la figure 3.12.

Il est constaté que les taux d'inflation spécifique au triangle suivent globalement les grandes

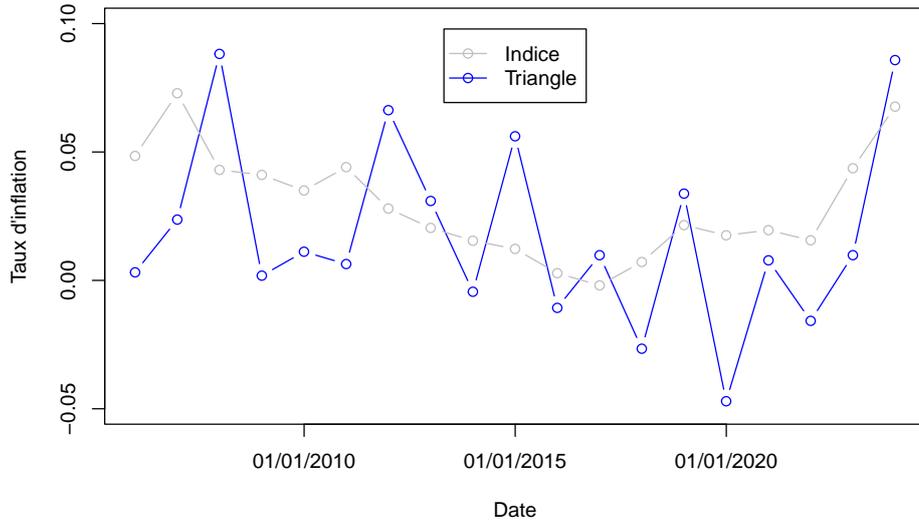


FIGURE 3.12 – Comparaison entre les taux d’inflation spécifiques obtenus à partir des indices et ceux déduits du triangle de coût moyen

tendances des taux d’inflation obtenus à partir des indices, mais ils présentent une plus grande volatilité.

L’adéquation de la modélisation de la série temporelle  $\{w(\kappa)\}_{\kappa \in K^m}$  avec un mouvement brownien géométrique peut à nouveau être vérifiée en traçant le nuage de points de la série temporelle des logarithmes des  $w(t)$  à la fin de chaque mois en fonction de leur homologue à la fin du mois précédent sur l’historique temporel des données. Ce nuage de points, accompagné de la première bissectrice, est représenté à la figure 3.13.

Les points sont bien alignés selon une droite de coefficient directeur égale à 1, ce qui justifie la modélisation de  $w(t)$  par un mouvement brownien géométrique.

A nouveau, la série temporelle ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$L_w(\theta, \theta + \Delta_t) = \log \frac{w(\theta + \Delta_t)}{w(\theta)}, \quad (3.3)$$

permet d’estimer le terme de *drift* et de *diffusion* du processus  $w$ . Ce qui donne finalement lieu aux estimations suivantes :

$$\hat{\mu}_w = -0,0037 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_w = 0,0200.$$

Le paramètre de volatilité estimé est proche de celui obtenu pour la méthode de mise en *as-if*. Au contraire, le paramètre  $\mu_w$  devient négatif dans le cadre de la méthode de Taylor alors qu’il est positif pour la méthode de mise en *as-if*.

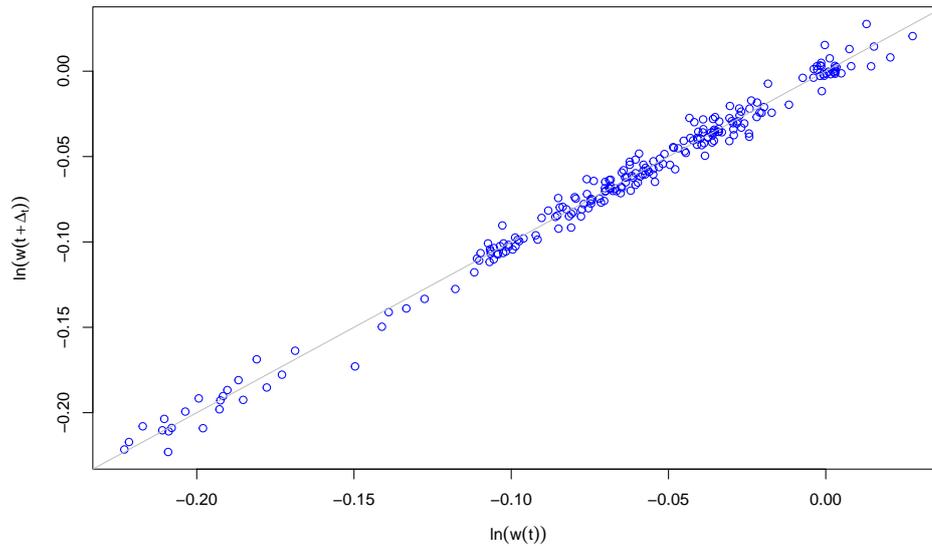


FIGURE 3.13 – Nuage de points des logarithmes du rapport entre l’indice d’inflation spécifique et l’IPCH de la zone euro pour deux mois consécutifs

### Estimation du coefficient de corrélation entre l’inflation générale et l’inflation spécifique

La même procédure d’estimation du paramètre  $\rho$  que celle pour la méthode de mise en *as-if* aboutit à l’estimation suivante :

$$\hat{\rho} = -0,9203.$$

L’estimation du paramètre  $\rho$  met en évidence une très forte corrélation négative entre  $p_g$  et  $w$ . Ce constat s’explique par le fait que l’indice d’inflation spécifique  $p_s$  est obtenu à partir d’une inflation observée sur un portefeuille d’un acteur assurantiel français, alors que l’indice d’inflation générale est un indice calculé à l’échelle européenne. Ainsi, de la même manière que pour les indices de niveau 06.3.0.0 et 07.2.3.0 de la classification ECOICOP, une hausse de l’IPCH de la zone euro n’est pas nécessairement accompagnée d’une augmentation de l’indice de l’inflation spécifique, ce qui a tendance à diminuer la valeur du rapport  $w$ .

Il est intéressant de remarquer que ces estimations de paramètres impliquent que, sous l’approche *actuarielle*, l’inflation projetée dans le cadre de la méthode de séparation de Taylor est inférieure à celle prévue avec l’application de la méthode de mise en *as-if*, comme illustrée à la figure 3.14. Cette observation s’explique notamment par le fait que l’inflation spécifique moyenne observée sur l’historique des indices est supérieure à celle déduite du triangle de coût moyen.

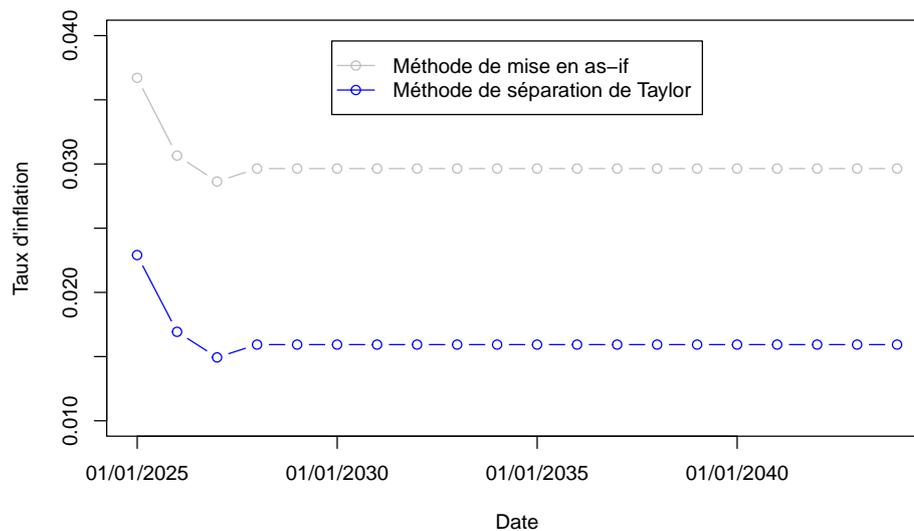


FIGURE 3.14 – Comparaison des taux d’inflation spécifiques anticipés avec la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor sous l’approche *actuarielle*

### 3.2.1.2 Application numérique des méthodes au provisionnement

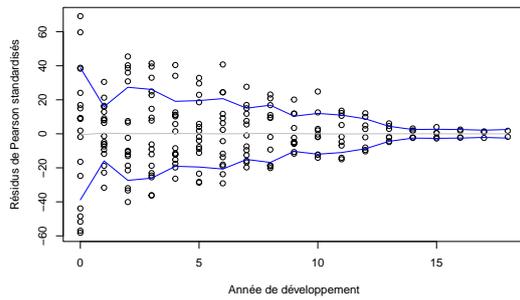
Après avoir estimé les paramètres des modèles stochastiques permettant de projeter l’inflation, la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor peuvent être appliquées dans le cadre de l’approche *actuarielle*.

#### Application numérique de la méthode de mise en *as-if*

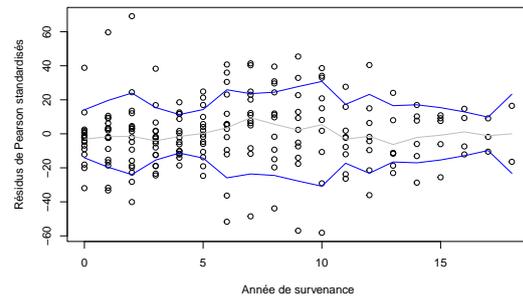
La méthode de mise en *as-if* repose sur l’utilisation du triangle des règlements cumulés au coût actuel. Ce dernier est obtenu en retraitant le triangle de règlements cumulés au coût historique de l’inflation passée, en utilisant l’indice des prix spécifique construit dans la partie précédente. Avant d’appliquer cette méthode, il est nécessaire de réaliser une étude des résidus, analogue à celle de la partie 3.1.1, de ce triangle au coût actuel.

La figure 3.15 représente les nuages de points des résidus de Pearson standardisés en fonction de l’année de développement, de l’année de survenance, de l’année calendaire, ainsi que de la valeur moyenne prédite par la méthode de Chain Ladder. Les graphiques sont similaires à ceux obtenus pour le triangle des règlements au coût historique, révélant que le retraitement du triangle ne bouleverse pas sa structure. Les résidus apparaissent comme raisonnablement aléatoires, ce qui indique un bon ajustement du modèle aux données et confirme l’hypothèse d’indépendance des résidus.

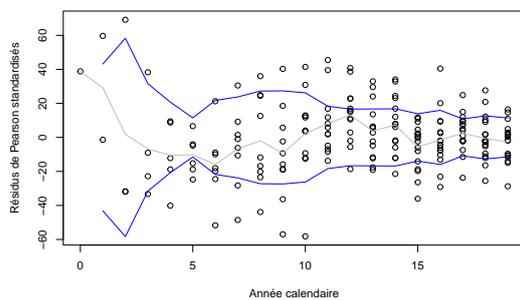
La moyenne des résidus par année de développement et par année de survenance se maintient autour d’une valeur nulle, en lien avec la présence de ces variables en tant que variable explicative dans le modèle ODP. La même remarque peut être réalisée pour le graphique des résidus en



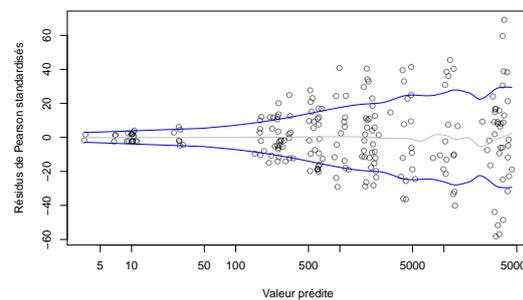
(a) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de développement



(b) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de survivance



(c) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année calendaire



(d) Résidus de Pearson standardisés en fonction de la valeur prédite

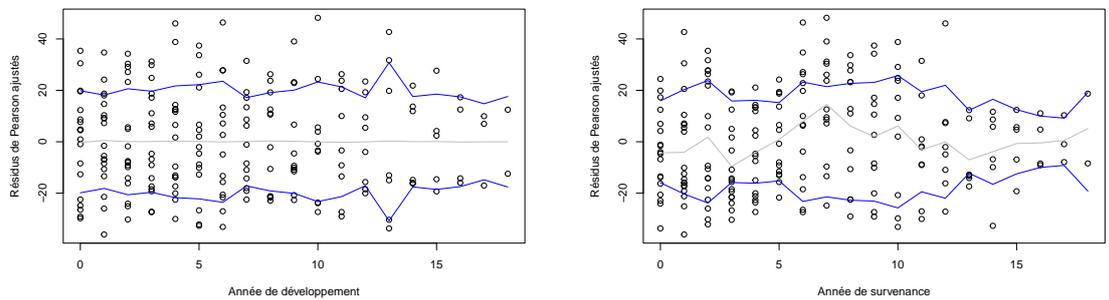
FIGURE 3.15 – Représentations graphiques des résidus de Pearson standardisés du triangle de règlements au coût actuel, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) avant ajustement de l'hétéroscédasticité

fonction de la valeur moyenne prédite, à l'exception des grandes valeurs, où la moyenne montre davantage d'instabilité. En revanche, cette observation n'est plus valable au sujet de la figure des résidus en fonction de l'année calendaire, ce qui n'est pas surprenant puisque cette dernière n'est pas une variable explicative du modèle. Ces commentaires suggèrent toutefois que l'hypothèse de centrage des résidus est vérifiée.

Cependant, les graphiques par rapport à l'année de développement et à la valeur moyenne prédite dévoilent un problème d'hétéroscédasticité des résidus. Effectivement, l'écart type des résidus diminue avec les années de développement et il augmente avec la valeur moyenne prédite. Le même ajustement que celui réalisé pour le triangle au coût historique est mis en oeuvre pour corriger ce problème.

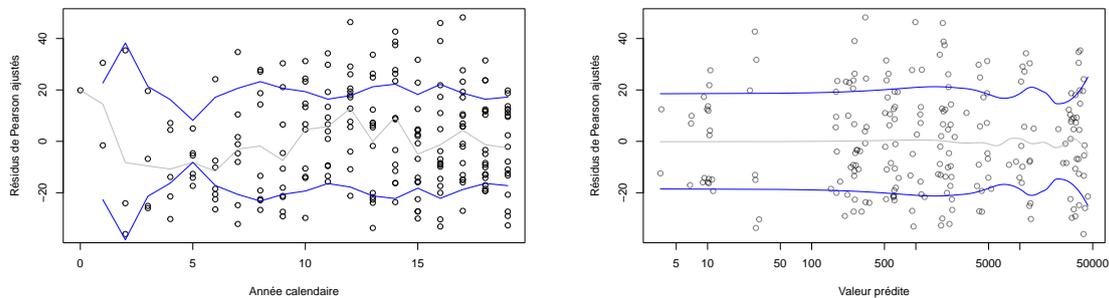
Les représentations graphiques des résidus ajustés sont fournies à la figure 3.16. Comme pour le triangle au coût historique, l'ajustement réalisé a fait disparaître l'hétéroscédasticité des résidus par rapport aux années de développement et à la valeur moyenne prédite. En outre, il a légèrement détérioré le centrage des résidus par rapport aux années de survivance. Néanmoins, après cet ajustement, il est raisonnable de supposer que les résidus se comportent approximativement

comme des variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance constante.



(a) Résidus de Pearson ajustés en fonction de l'année de développement

(b) Résidus de Pearson ajustés en fonction de l'année de survie



(c) Résidus de Pearson ajustés en fonction de l'année calendaire

(d) Résidus de Pearson ajustés en fonction de la valeur prédite

FIGURE 3.16 – Représentations graphiques des résidus de Pearson ajustés du triangle de règlements au coût actuel, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) après ajustement de l'hétéroscédasticité

Après avoir étudié les résidus du triangle au coût actuel, la méthode de mise en *as-if* peut être appliquée. Les résultats concernant la PSAP et le BE sont fournis dans le tableau 3.9.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>
Provisions	PSAP	100 000	102 981	<b>103 026</b>
	BE	94 142	96 943	<b>96 874</b>

TABLE 3.9 – Résultats numériques des provisions avec la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l'approche *actuarielle*

Les valorisations de la PSAP et du BE obtenues avec cette méthode sont respectivement de 103 026 et 96 874. Le montant de BE est inférieur de 5,97% par rapport à celui de la PSAP. Ces derniers sont supérieurs par rapport aux estimations obtenues à l'aide de la méthode intégrant implicitement l'inflation et relativement équivalent à ceux obtenus avec la méthode de *surinflation*. En effet, il est observé une hausse de la PSAP et du BE de respectivement 3,03% et 2,91%

par rapport à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation. Cependant, il apparaît une très légère augmentation dans l'estimation de la PSAP de 0,04% et une très légère baisse dans l'estimation du BE de 0,01% par rapport à la méthode de *surinflation*. Ces évolutions simultanées dans des sens opposés de la PSAP et du BE s'expliquent par un cadencement des flux légèrement différent entre les deux méthodes.

L'augmentation du montant des provisions avec cette méthode par rapport à une application classique de la méthode de Chain Ladder s'explique notamment par l'analyse effectuée à la partie 1.1.5, où il est observé, pour la prochaine année, une brusque baisse de l'inflation projetée implicitement par la méthode de Chain Ladder atteignant un niveau inférieur de celui anticipé, dans le cas d'une récente forte augmentation de l'inflation.

Il est important de noter que cette sous-estimation des provisions avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation par rapport à la méthode de mise en *as-if*, est atténuée par la baisse de l'inflation anticipée pour les prochaines années. Les impacts sur les montants de provisions seraient plus importants si les prévisions des taux d'inflation futurs continuaient d'être supérieures à la normale dans les années à venir.

L'application des procédures bootstrap ODP dans le cadre de la méthode de mise en *as-if* avec 100 000 simulations, mène aux résultats décrits dans le tableau 3.10.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche actuarielle
DUO	$m_{DUO}$	94 264	97 068	<b>97 216</b>
	$\sigma_{DUO}$	11 351	11 686	<b>13 874</b>
	$CV_{DUO}$	12,04%	12,04%	<b>14,27%</b>
YEO	$m_{YEO}$	97 390	100 288	<b>100 300</b>
	VA $m_{YEO}$	94 227	97 031	<b>97 043</b>
	$\sigma_{YEO}$	9 783	10 065	<b>11 868</b>
	$CV_{YEO}$	10,05%	10,04%	<b>11,83%</b>
	$q_{99,5\%}$	123 194	126 836	<b>132 507</b>
	SCR	24 966	25 586	<b>31 167</b>

TABLE 3.10 – Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l'approche *actuarielle*

La procédure bootstrap fournit des moyennes du DUO et du YEO respectivement égales à 97 216 et 100 300. Elles sont en augmentation, à l'instar des montants de PSAP et de BE, par rapport à la méthode modélisant implicitement l'inflation, tandis qu'elles sont proches de celles obtenues avec la méthode de *surinflation*. Les écarts entre la moyenne du DUO et la moyenne actualisée du YEO avec le BE, sont inférieurs à 1%, ce qui révèle le caractère non biaisé des procédures bootstrap.

Le coefficient de variation de la distribution du DUO s'élève à 14,27% tandis que celui de la distribution du YEO s'élève à 11,83%, supérieur de 2,83 points de pourcentage par rapport

à l'écart type du risque de réserve du règlement délégué. Ces derniers sont respectivement en augmentation de 2,23 et de 1,78 points de pourcentage par rapport à la méthode ne modélisant pas l'inflation.

Ces augmentations s'expliquent notamment par l'incorporation des simulations stochastiques de l'inflation future dans l'estimation de la distribution du YEO. Le coefficient de variation associé uniquement à la modélisation stochastique de l'inflation est de 1,44%. Cependant, il est important de noter que ces dernières ne s'expliquent pas uniquement par cette raison. En effet, l'application de la procédure bootstrap ODP au triangle de règlements au coût actuel augmente le coefficient de variation de l'erreur d'estimation et de l'erreur de processus. Le coefficient de l'erreur d'estimation s'élève à 10,13%, contre 8,63% avec la méthode ne modélisant pas l'inflation, et le coefficient de l'erreur de processus s'élève à 5,92%, contre 5,13% avec la méthode ne modélisant pas l'inflation. Ces résultats se justifient par la hausse dans l'estimation du paramètre  $\phi$  passant de 284,70 pour le triangle des règlements au coût historique, à 388,79 pour le triangle des règlements au coût actuel.

La distribution du YEO possède un coefficient d'asymétrie de 0,335 et un coefficient d'aplatissement de -0,238. Ainsi, comme pour la méthode avec prise en compte implicite de l'inflation, la distribution est décalée à gauche de la moyenne et la queue de distribution est étalée vers la droite. En outre, le centre et les queues de la distribution sont relativement appauvris par rapport aux flancs. Ces observations sont visibles sur la figure 3.17, comparant l'histogramme de la distribution empirique du YEO avec la densité d'une loi normale possédant une espérance et une variance identique à cette dernière.

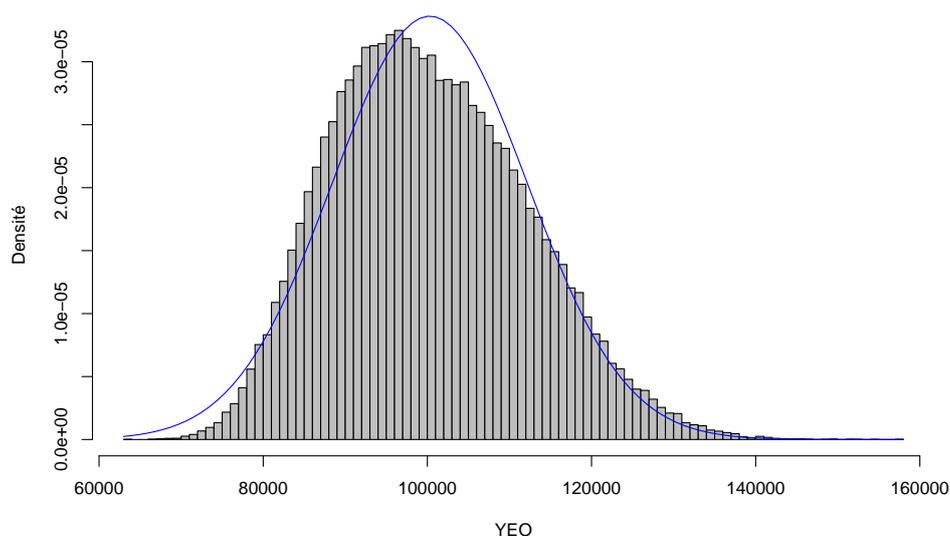


FIGURE 3.17 – Histogramme de la distribution du YEO obtenu avec la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*

La distribution du YEO possède un quantile à 99,5% à hauteur de 132 507. Ce dernier est en hausse de 7,56% relativement à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation. Elle s'explique principalement par l'augmentation du coefficient de variation de la distribution du YEO et l'accroissement du BE. La valorisation du SCR de réserve atteint 31 167, ce qui représente 32,17% du BE. Elle est en augmentation de 24,84% par rapport à la méthode ne modélisant pas l'inflation, en lien avec l'augmentation du quantile à 99,5% supérieur à celle de la moyenne du YEO.

### Application numérique de la méthode de séparation de Taylor

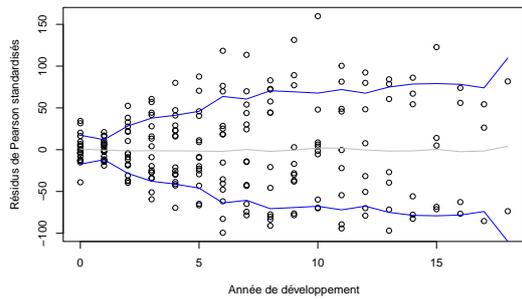
Contrairement à la méthode de Chain Ladder, la méthode de séparation de Taylor est basée sur l'utilisation du triangle de coût moyen. De plus, bien que la procédure bootstrap proposée de la méthode de Taylor ne rééchantillonne pas les résidus, il est tout de même important d'étudier des résidus pour vérifier l'adéquation du modèle aux données et réperer une éventuelle situation d'hétéroscédasticité qui pourrait altérer les rééchantillonnages paramétriques.

La méthode de séparation de Taylor ne fait pas partie de la famille des méthodes GLM, cependant la similitude des hypothèses de la procédure bootstrap avec un modèle GLM pondéré par les nombres de sinistres, avec une fonction de lien logarithmique et une distribution Gamma suggère naturellement l'utilisation des résidus de Pearson. La représentation graphique des résidus de Pearson standardisés est fournie à la figure 3.18.

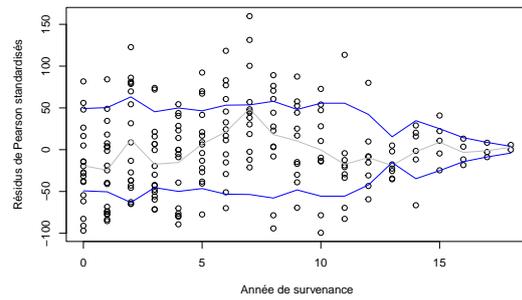
Elle représente les résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de développement, de l'année de survenance, de l'année calendaire, ainsi que de la valeur moyenne prédite par la méthode de séparation de Taylor. Les résidus semblent relativement aléatoires. Cette observation indique un ajustement du modèle aux données satisfaisant, suggérant la validité de l'hypothèse d'indépendance des résidus.

La moyenne des résidus par année de développement et par année calendaire est relativement stable autour d'une valeur nulle. Cela s'explique par la spécification, dans la méthode de séparation de Taylor, d'un paramètre pour chaque année de développement et chaque année calendaire. Une tendance similaire est observée dans le graphique des résidus par rapport à la valeur moyenne prédite, sauf pour les grandes valeurs, où l'instabilité de la moyenne augmente. A l'inverse, la moyenne des résidus en fonction de l'année de survenance est plus volatile et s'éloigne davantage de zéro, en lien avec l'absence de l'année de survenance dans les variables explicatives de la méthode de Taylor. Ces éléments laissent penser que l'hypothèse de centrage des résidus est bien vérifiée.

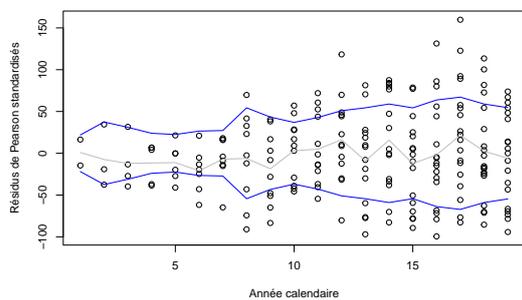
En revanche, le graphique par rapport aux années de développement et aux valeurs moyennes prédites témoignent à nouveau d'un problème d'hétéroscédasticité des résidus. En effet, l'écart type des résidus semblent être d'autant plus grand que l'année de développement augmente, et d'autant plus faible que la valeur moyenne prédite augmente. Pour pallier ce problème, l'ajustement déjà présenté et proposé, pour les triangles des règlements au coût historique et actuel, est utilisé.



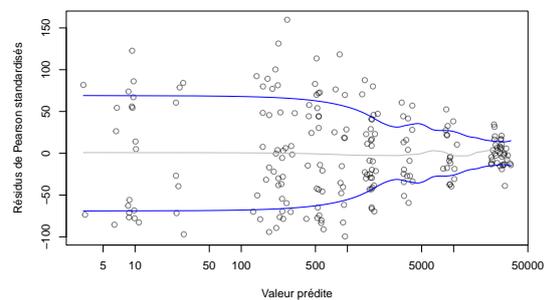
(a) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de développement



(b) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année de survivance



(c) Résidus de Pearson standardisés en fonction de l'année calendaire



(d) Résidus de Pearson standardisés en fonction de la valeur prédite

FIGURE 3.18 – Représentations graphiques des résidus de Pearson standardisés pour la méthode de séparation de Taylor, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) avant ajustement de l'hétéroscédasticité

Les résidus, après cet ajustement, sont illustrés à la figure 3.19. L'hétéroscédasticité observée sur les années de développement et le long de valeurs moyennes prédites, a été corrigée par l'ajustement. Cependant, il fait apparaître une surdispersion sur les premières années calendaires, touchant néanmoins un nombre restreint de résidus. Après l'ajustement, il semble plus raisonnable de considérer les résidus comme des variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance constante.

Les regroupements effectués permettront de corriger le paramètre  $\phi$  en fonction de l'année de développement pour les rééchantillonnages paramétriques des procédures bootstrap de la méthode de séparation de Taylor.

L'application de la méthode de séparation de Taylor donne les résultats exposés dans le tableau 3.11.

Les montants de PSAP et de BE estimés par cette méthode sont respectivement de 103 004 et de 96 926. Le montant de BE estimé est inférieur de 5,90% par rapport à celui de la PSAP. Ces estimations sont supérieures à celles obtenues à l'aide de la méthode intégrant implicitement l'inflation. En revanche, elles sont proches de celles calculées pour la méthode de *surinflation* et

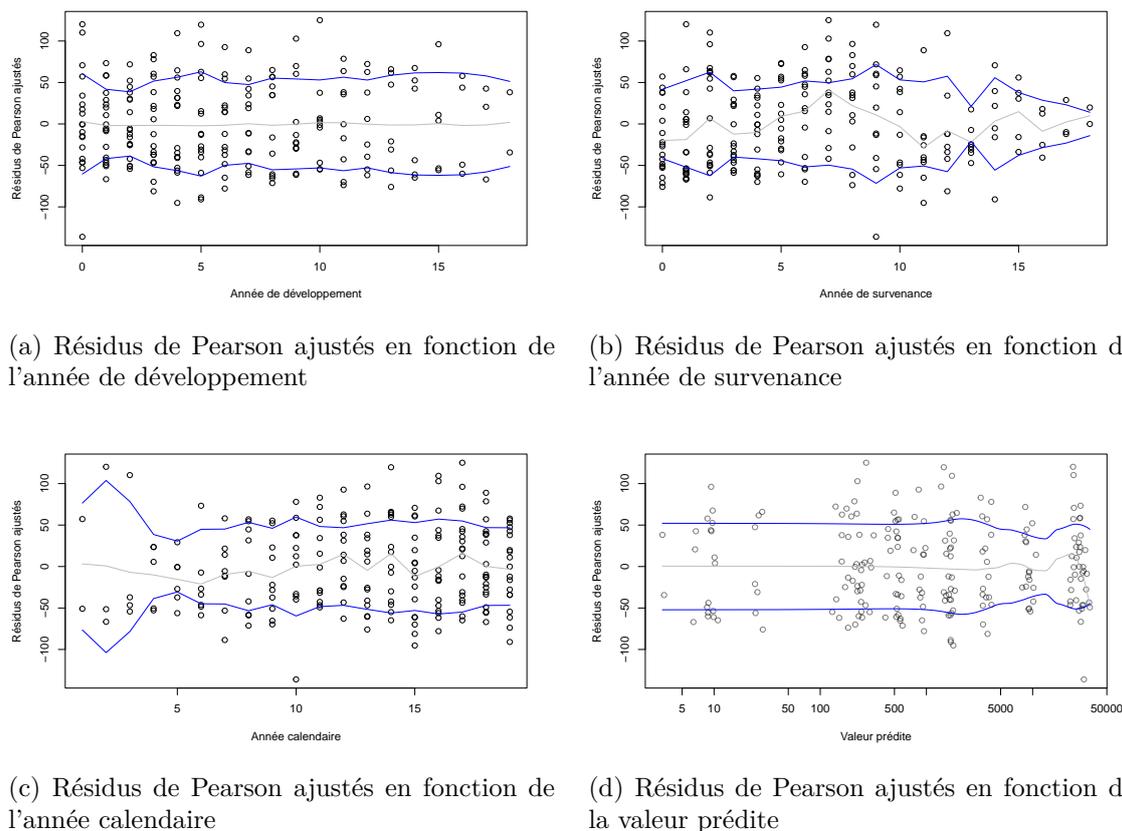


FIGURE 3.19 – Représentations graphiques des résidus de Pearson ajustés pour la méthode de séparation de Taylor, de leurs moyennes (ligne grise) et de leurs écarts types (lignes bleues) après ajustement de l'hétéroscédasticité

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i>	Méthode Taylor
					<b>Approche actuarielle</b>
Provisions	PSAP	100 000	102 981	103 026	<b>103 004</b>
	BE	94 142	96 943	96 874	<b>96 926</b>

TABLE 3.11 – Résultats numériques des provisions pour la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche *actuarielle*

la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l'approche *actuarielle*. En effet, il apparaît une très légère baisse dans l'estimation de la PSAP de 0,02% et une très légère hausse dans l'estimation du BE de 0,05% par rapport à cette dernière méthode. Cette diminution de la PSAP conjointement à l'augmentation du BE s'explique par un cadencement des flux légèrement différents entre les deux méthodes, plus précisément les flux de la première année calendaire avec la méthode de séparation de Taylor, sont supérieurs à ceux de la méthode de mise en *as-if*.

La figure 3.20 représente l'écart dans l'estimation des flux futurs de la PSAP par année calendaire pour la méthode de *surinflation*, la méthode de mise en *as-if*, et la méthode de séparation de

Taylor par rapport à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation.

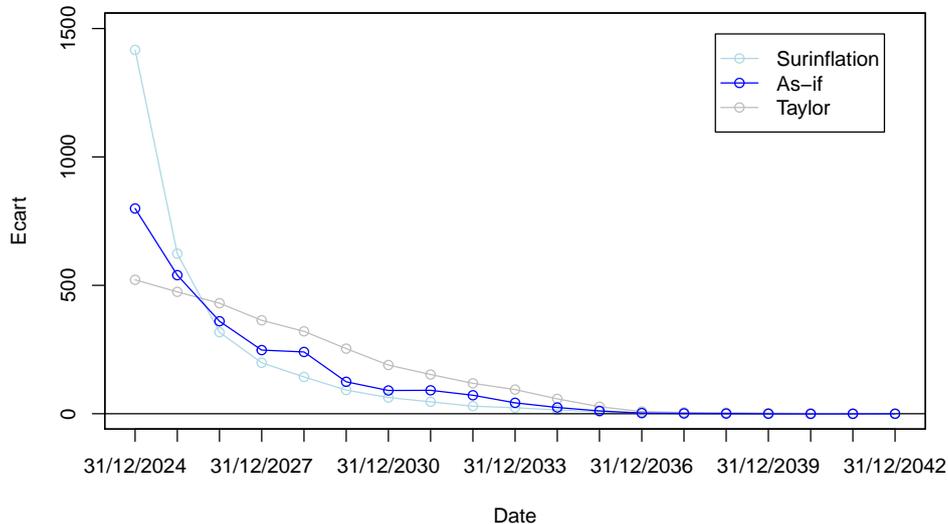


FIGURE 3.20 – Ecart dans l'estimation de la PSAP par années calendaires entre la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation*, la méthode de mise en *as-if*, et la méthode de séparation de Taylor

Il est observé que pour ces trois méthodes, les flux futurs estimés sont supérieurs à ceux obtenus à l'aide d'une application classique de la méthode de Chain Ladder. Cette remarque est logique et attendue pour la méthode de *surinflation*, puisque dans le cadre de cette méthode les flux des années calendaires futures sont obtenus en appliquant des facteurs de surinflation aux diagonales futures estimées par la méthode de Chain Ladder. Pour la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, cette observation s'explique en raison de la sous-estimation de l'inflation pour la prochaine année calendaire qui se répercute sur les années calendaires suivantes, dans le cadre d'une application classique de la méthode de Chain Ladder.

Les facteurs de surinflation des deux prochaines années permettent de compenser cette sous-estimation de l'inflation, en effet les prochains flux estimés par la méthode de *surinflation* sont supérieurs à ceux de la méthode de mise en *as-if* et de la méthode de séparation de Taylor. Néanmoins, pour les années calendaires suivantes les flux estimés avec cette méthode restent inférieurs à ceux des deux autres méthodes. Ainsi, bien que la méthode de *surinflation* conclut sur des montants de PSAP et de BE proches de la méthode de mise en *as-if* et de la méthode de séparation de Taylor, sa projection de l'inflation semble s'éloigner de celle réalisée par ces deux méthodes.

En outre, il est intéressant de remarquer que bien que l'inflation projetée dans la méthode de séparation de Taylor soit inférieure à celle projetée dans la méthode de mise en *as-if*, les montants de réserves estimés pour les deux méthodes sont similaires. L'application de la méthode de mise en *as-if* en retraitant et projetant l'inflation avec les paramètres de l'inflation spécifique estimés

pour la méthode de Taylor conduit à une estimation de la PSAP de 101 753 et une estimation du BE de 95 741. Ainsi, dans le cadre de cet exemple pour un niveau d'inflation projeté similaire, la méthode de Taylor semble intrinsèquement estimer des provisions supérieures à celle de la méthode de mise en *as-if*.

La mise en oeuvre des procédures bootstrap de la méthode de séparation de Taylor avec 100 000 simulations, conduit aux résultats du tableau 3.12.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i>	Méthode Taylor
		<b>Approche actuarielle</b>			
DUO	$m_{DUO}$	94 264	97 068	97 216	<b>97 000</b>
	$\sigma_{DUO}$	11 351	11 686	13 874	<b>14 875</b>
	$CV_{DUO}$	12,04%	12,04%	14,27%	<b>15,34%</b>
YEO	$m_{YEO}$	97 390	100 288	100 300	<b>100 184</b>
	VA $m_{YEO}$	94 227	97 031	97 043	<b>96 930</b>
	$\sigma_{YEO}$	9 783	10 065	11 868	<b>12 429</b>
	$CV_{YEO}$	10,05%	10,04%	11,83%	<b>12,41%</b>
	$q_{99,5\%}$	123 194	126 836	132 507	<b>136 497</b>
	SCR	24 966	25 586	31 167	<b>35 133</b>

TABLE 3.12 – Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche *actuarielle*

Les valorisations de la moyenne du DUO et de la moyenne du YEO, obtenues avec les procédures bootstrap de la méthode de séparation de Taylor, sont respectivement de 97 000 et de 100 184. Comme pour les montants de PSAP et de BE, elles sont en augmentation par rapport à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de mise en *as-if*, et elles sont semblables à celles estimées pour la méthode de mise en *as-if*. Par ailleurs, la valeur moyenne du DUO et la valeur moyenne du YEO actualisée, sont proches de la valeur du BE, avec des écarts inférieurs à 1%, ce qui indique que les procédures bootstrap sont presque non biaisées.

Les coefficients de variation estimés du DUO et du YEO sont respectivement de 15,34% et de 12,41%. Comme pour la méthode de mise en *as-if*, ces coefficients sont supérieurs à ceux estimés dans le cadre de la méthode de prise en compte implicite de l'inflation et de la méthode de *surinflation*. Ils sont également en hausse de respectivement 1,07 et 0,58 points de pourcentage, par rapport à la méthode de mise en *as-if*. Par ailleurs, le coefficient de variation du YEO est supérieur de 3,41 points de pourcentage par rapport à son homologue du règlement délégué.

La figure 3.21, représente les coefficients de variation du DUO pour les 10 dernières années de survéance avec la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Il en ressort que ces derniers sont relativement équivalents entre 2018 et 2023, tandis qu'ils sont inférieurs avec la méthode de séparation de Taylor pour les années précédentes.

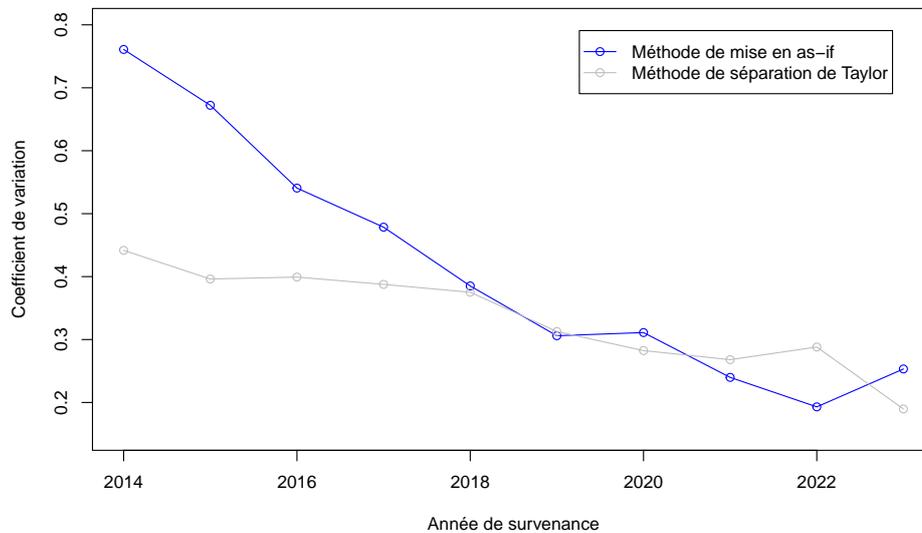


FIGURE 3.21 – Coefficient de variation du DUO par année de survenance

L'augmentation du coefficient de variation global peut alors paraître surprenante à première vue. Cependant, elle s'explique par une corrélation moins importante entre les années de survenance pour la méthode de Chain Ladder que pour la méthode de séparation de Taylor, en raison des facteurs calendaires  $\lambda$  de la méthode de séparation de Taylor, qui affectent diagonalement les lignes du triangle, comme le soulignent (Björkwall *et al.*, 2010).

De plus, la distribution du YEO possède un coefficient d'asymétrie de 0,351, relativement proche de celui obtenu pour la méthode de mise en *as-if*, tandis que le coefficient d'aplatissement est de 0,222. Ce dernier devient ainsi positif dans le cadre de la méthode de Taylor alors qu'il est négatif pour la méthode de mise en *as-if*, ce qui signifie que la distribution du YEO est moins aplatie pour la méthode de séparation de Taylor. Ces commentaires sont illustrés à la figure 3.22, comparant la distribution empirique du YEO avec la densité d'une loi normale possédant les mêmes moments d'ordre 1 et d'ordre 2 que cette dernière.

Enfin, la valorisation du quantile à 99,5% de la distribution du YEO s'élève à 136 497, en hausse de 3,01% par rapport à la méthode de mise en *as-if*. Cette augmentation s'explique notamment par l'accroissement du coefficient de variation et du coefficient d'aplatissement de la distribution du YEO. Le montant de SCR obtenu avec la méthode de Taylor est de 35 133, représentant 36,25% du BE. Il est en hausse de 12,72% par rapport à la méthode de mise en *as-if*, en conséquence de la hausse du quantile à 99,5% du YEO et de la relative stabilité de la moyenne du YEO par rapport à la méthode de mise en *as-if*.

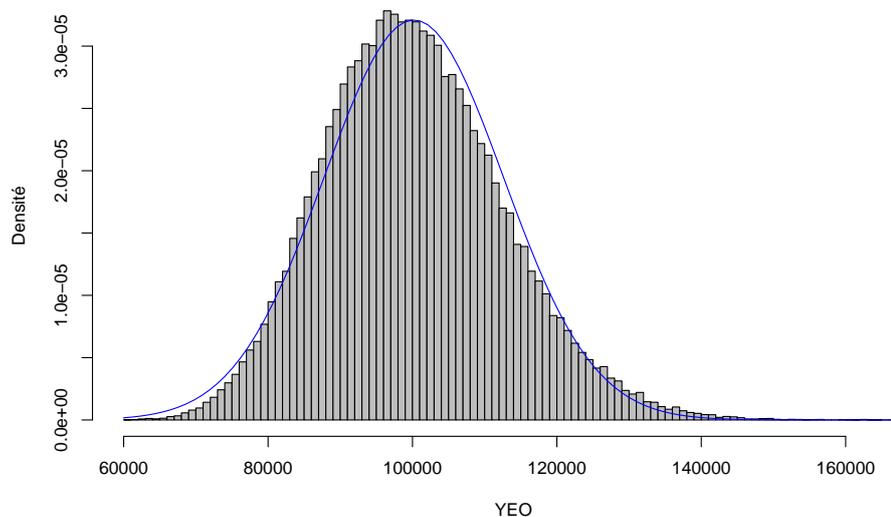


FIGURE 3.22 – Histogramme de la distribution du YEO obtenu avec la méthode de séparation de Taylor sous l’approche *actuarielle*

### 3.2.2 Approche de *marché*

L’objectif de cette partie est de mettre en oeuvre l’approche de *marché*. Dans un premier temps, les paramètres des processus stochastiques modélisant l’inflation et les taux d’intérêt sont estimés, puis utilisés pour appliquer numériquement la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, dans le cadre de cette approche.

#### 3.2.2.1 Estimation des paramètres du modèle

Cette partie se concentre sur l’estimation des paramètres des modèles stochastiques de l’inflation générale, de l’inflation spécifique et des taux d’intérêt sous l’approche de *marché*.

#### Inflation générale

Dans l’approche de *marché*, l’inflation générale est modélisée au travers de l’indice des prix à la consommation harmonisé hors tabac de la zone euro  $p_g$ , calculé par Eurostat à la fin de chaque mois. L’évolution mensuelle de cet indice ainsi que les taux d’inflation annuelle associée sont représentées à la figure 3.23. Cet indice est marqué, à l’image de l’IPCH de la zone euro, par une forte augmentation durant les années 2022 et 2023.

#### Estimation des anticipations de l’inflation générale

Dans le cadre de cette approche, les anticipations de l’inflation générale sont estimées en utilisant l’équation de Fisher. L’idée de la méthode est de reconstruire une courbe des taux d’intérêt nominaux et une courbe des taux d’intérêt réels, à partir respectivement des cotations des OAT et des OAT€i sur le marché secondaire au 31/12/2023. La différence entre ces deux

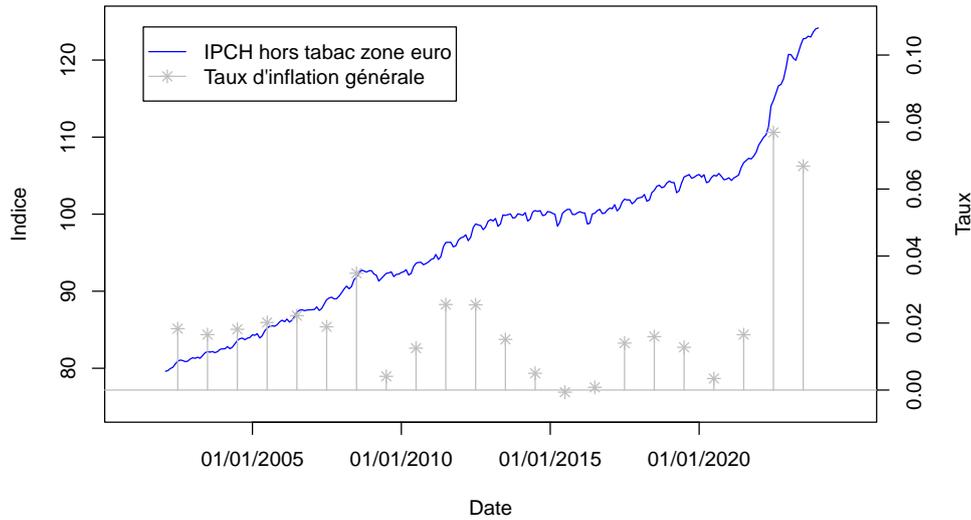


FIGURE 3.23 – Evolution de l'IPCH hors tabac de la zone euro

courbes permet de déduire les anticipations de l'inflation, incluses dans les cotations de ces obligations. Une justification de cette méthodologie est fournie en annexe C.

Les OAT sont des titres de créance négociable à moyen et long terme, de maturité de 2 à 50 ans, émis par l'état français. Ils constituent actuellement la forme unique du financement à moyen et long terme de l'État.

Les OAT€i sont des OAT dont les coupons et le nominal sont indexés sur l'indice des prix à la consommation harmonisé hors tabac de la zone euro. Les coupons et le nominal de ces obligations sont multipliés par un coefficient d'indexation pour tenir compte de l'évolution de cet indice. Ce coefficient d'indexation est calculé de manière journalière. Il est égal au rapport entre la référence quotidienne de l'indice du jour J et la référence de base. La référence quotidienne est calculée par interpolation linéaire entre la valeur de l'indice du mois M-3 et la valeur de l'indice du mois M-2. La référence de base est la référence quotidienne de l'indice à la date de jouissance de l'OAT lors de sa première émission.

La construction de ces courbes de taux est réalisée à l'aide du modèle de Svensson. C'est un modèle de reconstitution de courbe des taux qui repose sur une forme paramétrique à 6 paramètres  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$ . Le taux spot s'exprime sous la forme suivante :

$$r(0, t) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{t/\tau_1} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{t/\tau_1} - e^{-t/\tau_1} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-t/\tau_2}}{t/\tau_2} - e^{-t/\tau_2} \right), \quad (3.4)$$

où :

- $\beta_0$  est un facteur de niveau qui correspond au taux de long terme ;

- $\beta_1$  est un facteur de pente qui correspond à la différence entre le taux de court terme et la taux de long terme ;
- $\beta_2$  et  $\beta_3$  sont des facteurs de courbure qui précisent le sens et l'amplitude de la courbure ;
- $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des échelles de temps qui caractérisent l'échelle de temps de la courbure.

Les paramètres du modèle sont estimés en minimisant le critère des moindres carrés pondérés :

$$\sum_{i \in \mathcal{O}} w_i \left( P_i - \sum_{j=1}^{N_i} F_{i,j} ZC(0, t_j) \right)^2,$$

où  $\mathcal{O}$  correspond à l'ensemble des obligations sur lesquels l'ajustement est effectué,  $P_i$  est le prix de l'obligation  $i$ ,  $ZC(0, t_j) = (1 + r(0, t_j))^{-t_j}$  avec  $r(0, t_j)$  sous la forme spécifiée à l'équation (3.4) et  $w_i$  est égale à l'inverse de la durée de l'obligation  $i$ .

Cependant, le problème de minimisation ci-dessus n'est pas convexe et possède plusieurs optima locaux. Ainsi, les méthodes classiques d'optimisation qui se basent sur les dérivés de la fonction objectif ne sont pas appropriées pour résoudre ce problème. Pour pallier à cette difficulté, la méthodologie proposée par (Gilli *et al.*, 2010) est suivie. Elle consiste à utiliser un algorithme à évolution différentielle qui permet d'optimiser des fonctions en simulant l'évolution d'une population de solutions.

La mise en place de cette procédure sur l'ensemble des OAT au 31/12/2023, mène aux estimations suivantes :

$$\hat{\beta}_0 = 0,5065, \quad \hat{\beta}_1 = 2,5215, \quad \hat{\beta}_2 = -2,3345, \quad \hat{\beta}_3 = 8,8636, \quad \hat{\tau}_1 = 3,1192 \quad \text{et} \quad \hat{\tau}_2 = 12,3497.$$

La courbe des taux ainsi obtenue est représentée à la figure 3.24. Elle possède notamment un taux court terme de 3,03% et un taux long terme de 0,51%.

La mise en place de cette procédure avec sur l'ensemble des OAT€i au 31/12/2023, mène aux estimations suivantes :

$$\hat{\beta}_0 = -3,5183 \cdot 10^{-6}, \quad \hat{\beta}_1 = 0,5166, \quad \hat{\beta}_2 = -23,9943, \quad \hat{\beta}_3 = 25,4725, \quad \hat{\tau}_1 = 5,1215, \quad \text{et} \quad \hat{\tau}_2 = 5,6332.$$

La courbe des taux ainsi obtenue est représentée à la figure 3.25. Elle possède notamment un taux court terme de 0,52% et un taux long terme de 0,00%.

En utilisant la relation de Fisher, il est possible de déduire par différence, les taux annuels moyens anticipés par le marché pour l'évolution du l'IPCH de la zone euro hors tabac. Cette anticipation est représentée à la figure 3.26.

Finalement, les taux d'inflation anticipés par le marché pour les années 2024, 2025 et 2026 sont donnés dans le tableau 3.13.

Le taux d'inflation anticipé par le marché pour l'année 2024 est inférieur de 43 points de base

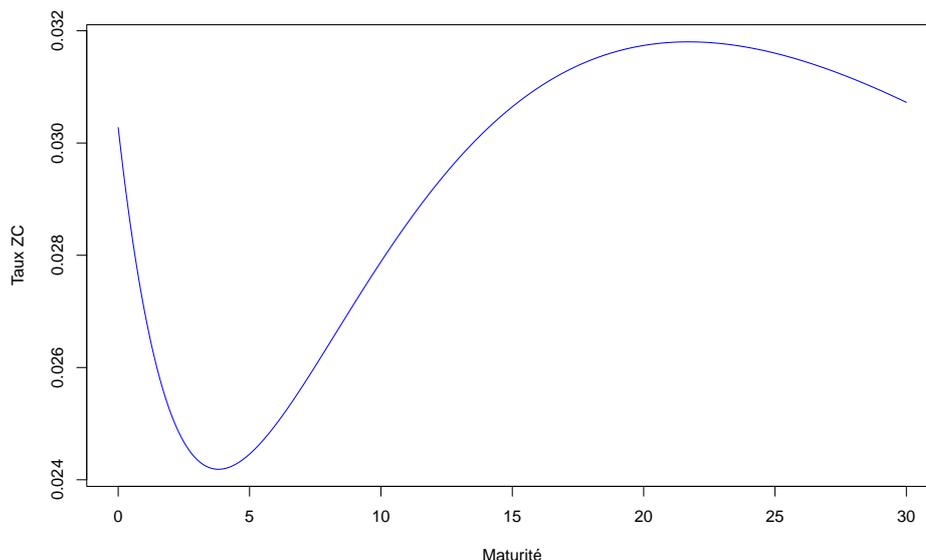


FIGURE 3.24 – Courbe des taux d'intérêt nominaux calibrée sur les OAT au 31/12/2023

Année	2024	2025	2026
Anticipation de l'évolution de l'IPCH hors tabac de la zone euro	2,27%	2,14%	2,05%

TABLE 3.13 – Taux d'inflation générale anticipés par le marché au 31/12/2023

par rapport à celui anticipé par la BCE, tandis que les taux d'inflation anticipés par le marché pour les années 2025 et 2026 sont relativement proches de ceux anticipés par la BCE. L'écart important pour la première année peut s'expliquer par le décalage de deux mois dans le calcul du coefficient d'indexation. En effet, au moment de l'achat d'une OAT€i les investisseurs connaissent déjà l'évolution de ce coefficient sur les deux prochains mois. Il en résulte que le taux d'inflation anticipé par le marché pour la prochaine année correspond en réalité au taux d'inflation anticipé au 31/12/2023, entre le 31/10/2023 et le 31/10/2024, sachant le taux d'inflation entre le 31/10/2023 et le 31/12/2023. Ainsi, l'écart pour l'année 2024 peut être expliqué par le fait que l'IPCH hors tabac de la zone euro est légèrement diminué entre le 31/10/2023 et le 31/12/2023. De ce fait, les investisseurs s'attendent à une hausse plus modérée de l'indice entre le 31/10/2023 et le 31/10/2024.

Cette courbe permet de déduire les facteurs d'inflation  $\check{m}_{p_g}$  et les taux d'inflation forward  $\check{\mu}_k$ , nécessaire pour la projection de l'inflation générale sous le probabilité risque-neutre.

### Estimation du paramètre de volatilité de l'inflation générale

L'estimation du paramètre de volatilité  $\sigma_{p_g}$  est réalisée en utilisant la série temporelle de l'IPCH hors tabac de la zone euro  $\{p_g(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$ , où  $\Theta^m$  est l'ensemble des dates de fin de mois

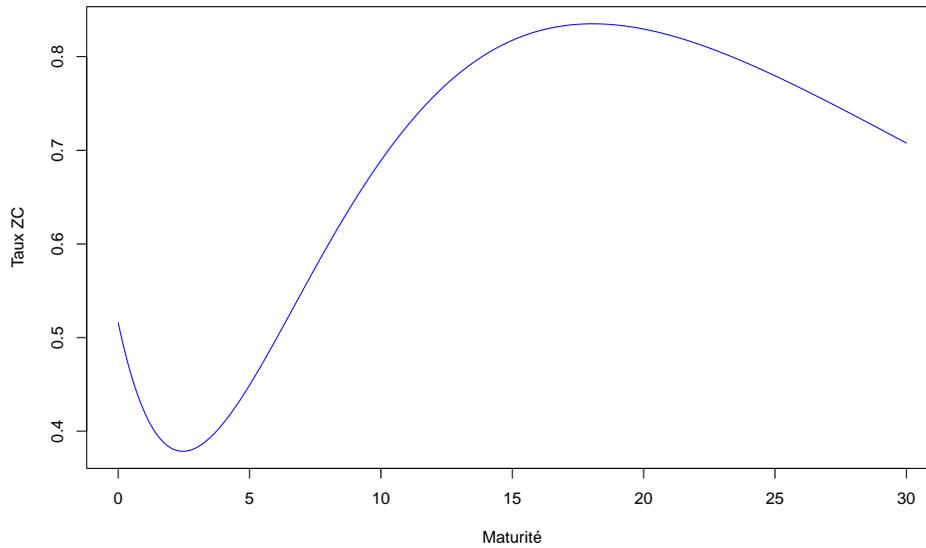


FIGURE 3.25 – Courbe des taux d'intérêt réels calibrée sur les OAT€i au 31/12/2023

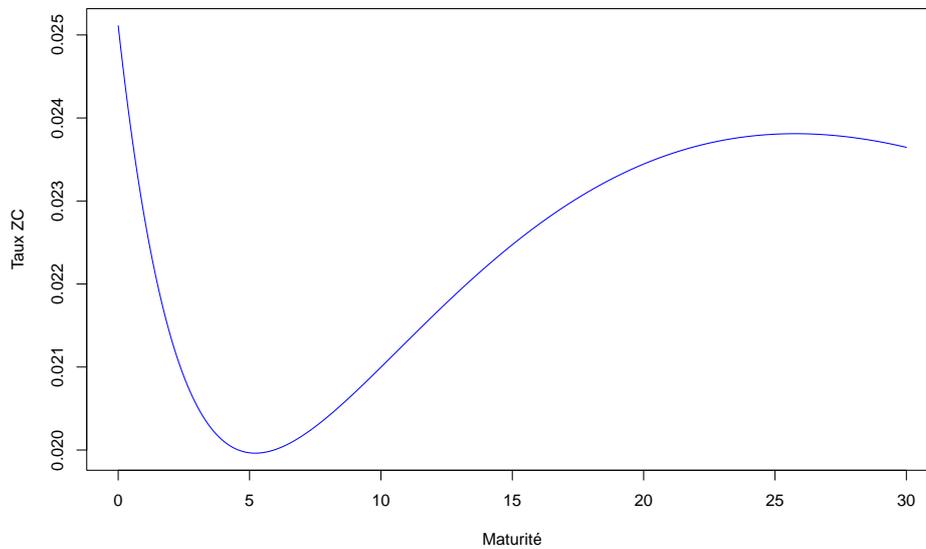


FIGURE 3.26 – Courbe des taux d'inflation anticipés par le marché au 31/12/2023

entre janvier 2002 et décembre 2023. Comme dans l'approche *actuarielle*, la série temporelle mensuelle ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$L_{p_g}(\theta, \theta + \Delta_t) = \log \frac{p_g(\theta + \Delta_t)}{p_g(\theta)}, \quad (3.5)$$

est calculée. Ce qui permet d'obtenir, à partir de l'équation (2.8), une estimation de  $\sigma_{p_g}^2 \Delta_t$  en calculant la variance empirique de la série temporelle (3.5). Finalement, l'estimation suivante

du paramètre de volatilité est obtenue :

$$\hat{\sigma}_{p_g} = 0,0164.$$

### Inflation spécifique

Comme dans l'approche *actuarielle*, la mesure de l'inflation spécifique sera séparée entre la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Les mêmes méthodologies que celles présentées dans l'approche *actuarielle* seront utilisées, à la différence près que dans cette approche l'indice des prix général considéré n'est plus l'IPCH de la zone euro mais l'IPCH de la zone euro hors tabac. Les résultats obtenus restent cependant très proches de ceux obtenus avec l'approche *actuarielle*, en lien avec la proximité entre ces deux indices.

### Méthode de mise en *as-if*

L'estimation de l'inflation spécifique à la branche responsabilité civile automobile est mesurée comme dans l'approche *actuarielle* à l'aide des indices mesurant l'évolution des prix de l'entretien et de la réparation des véhicules des particuliers, et l'évolution des prix des services hospitaliers.

### Estimation du terme de *drift* et du paramètre de volatilité de l'inflation spécifique

Le même indice  $\{p_s(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$ , obtenu en réalisant la moyenne des deux indices spécifiques, est utilisé pour déterminer la série temporelle  $\{w(\theta)\}_{\theta \in \Theta^m}$ , représenté à la figure 3.27, correspondant au rapport entre l'indice  $p_s$  et l'indice  $p_g$ .

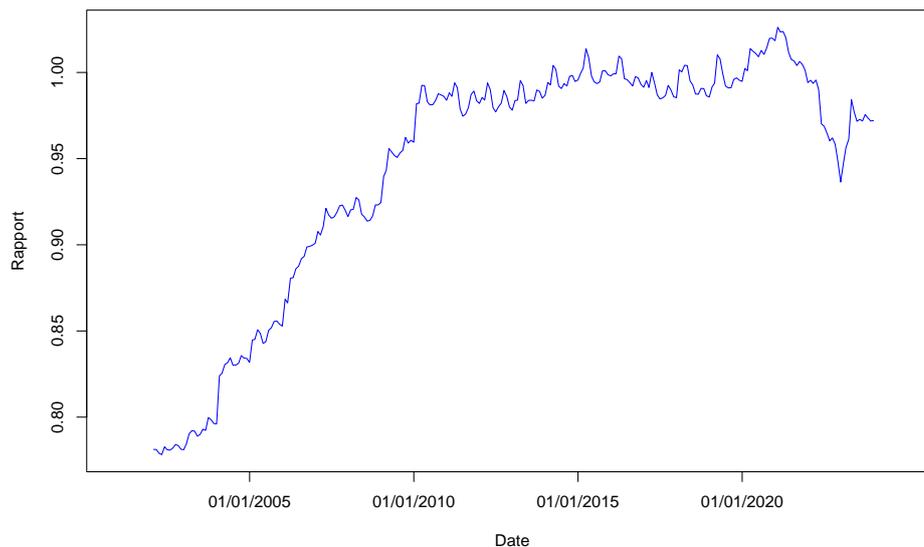


FIGURE 3.27 – Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH hors tabac de la zone euro

De la même manière que pour l'inflation générale, la série temporelle ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$L_w(\theta, \theta + \Delta_t) = \log \frac{w(\theta + \Delta_t)}{w(\theta)}, \quad (3.6)$$

permet d'estimer le terme de *drift* et de *diffusion* du processus  $w$ . Le graphique 3.28, représentant les logarithmes des  $w(t)$  à la fin de chaque mois en fonction de leur homologue à la fin du mois précédent, avec la première bissectrice, permet de justifier la modélisation du rapport des indices à l'aide d'un mouvement brownien géométrique puisque les points sont alignés selon une droite de coefficient directeur unitaire.

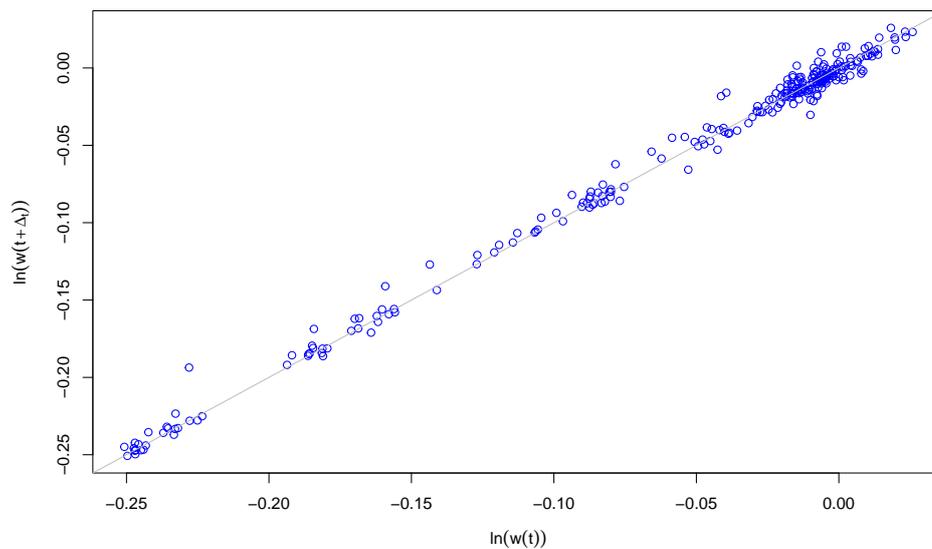


FIGURE 3.28 – Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro

Finalement, les estimations de  $\mu_w$  et de  $\sigma_w$  sont une nouvelle fois obtenues en calculant la moyenne empirique et la variance empirique de la série temporelle (3.6). Ce qui donne lieu aux estimations suivantes :

$$\hat{\mu}_w = 0,0102 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_w = 0,0213.$$

### Estimation du coefficient de corrélation entre l'inflation générale et l'inflation spécifique

La même procédure d'estimation du paramètre  $\rho$  que celle dans l'approche *actuarielle*, fournit l'estimation suivante :

$$\hat{\rho} = -0,7362.$$

La valeur négative estimée de ce coefficient, se justifie par les mêmes arguments que ceux déjà exposés au cours de l'estimation du paramètre  $\rho$  pour la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*.

### Méthode de séparation de Taylor

Comme dans l'approche *actuarielle*, l'estimation de l'inflation spécifique à la branche responsabilité civile automobile est réalisée à l'aide des facteurs calendaires  $\lambda$  estimés sur le triangle de cout moyen.

### Estimation du terme de *drift* et du paramètre de volatilité de l'inflation spécifique

L'indice  $\{p_s(\kappa)\}_{\kappa \in K^m}$ , identique à celui utilisé dans l'approche *actuarielle*, permet d'obtenir la série temporelle  $\{w(\kappa)\}_{\kappa \in K^m}$ , représenté à la figure 3.29, et correspondant au rapport entre l'indice construit  $p_s$  et l'indice  $p_g$ .



FIGURE 3.29 – Rapport entre l'indice d'inflation spécifique du triangle et l'IPCH hors tabac de la zone euro

Pour vérifier à nouveau l'adéquation de la modélisation de la série temporelle  $\{w(\kappa)\}_{\kappa \in K^m}$  avec un mouvement brownien géométrique, le nuage de points, des logarithmes des  $w(t)$  à la fin de chaque mois par rapport à ceux de la fin du mois précédent, est tracé. Ce nuage de points, avec la première bissectrice, est représenté à la figure 3.30.

Les points sont bien alignés selon une droite de coefficient directeur égale à 1, motivant la modélisation de  $w(t)$  par un mouvement brownien géométrique.

A nouveau la série temporelle ( $\Delta_t = 1/12$ ) :

$$L_w(\theta, \theta + \Delta_t) = \log \frac{w(\theta + \Delta_t)}{w(\theta)}, \quad (3.7)$$

permet d'estimer le terme de *drift* et de *diffusion* du processus  $w$ . Ce qui donne finalement lieu aux estimations suivantes :

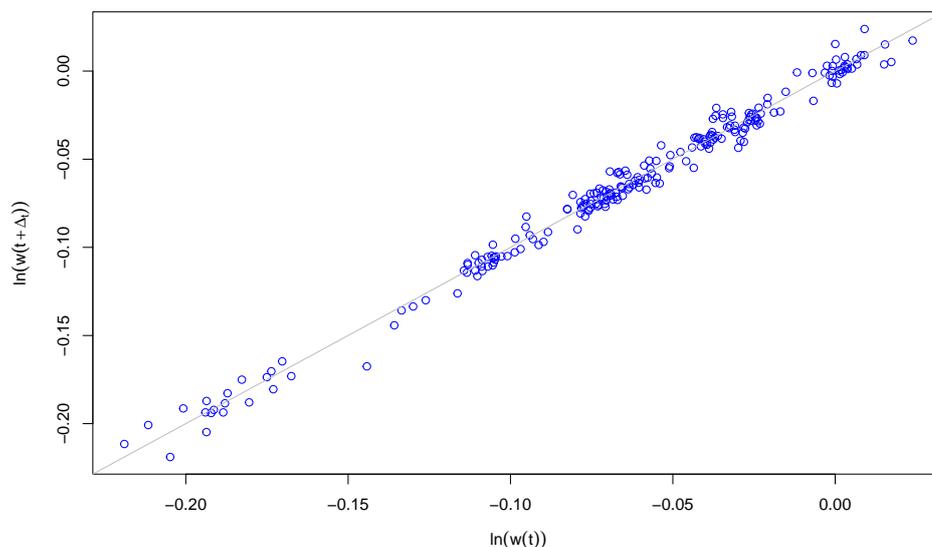


FIGURE 3.30 – Rapport entre l'indice d'inflation spécifique et l'IPCH de la zone euro

$$\hat{\mu}_w = -0,0035 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_w = 0,0196.$$

Les paramètres estimés sont proches de ceux obtenus au cours de l'approche *actuarielle*.

### Estimation du coefficient de corrélation entre l'inflation générale et l'inflation spécifique

La même procédure d'estimation du paramètre  $\rho$  que celle présentée dans l'approche *actuarielle*, aboutit à l'estimation suivante :

$$\hat{\rho} = -0,9145.$$

L'estimation négative de ce coefficient se justifie par les mêmes arguments que ceux déjà évoqués lors de l'estimation du paramètre  $\rho$  pour la méthode de séparation de Taylor dans l'approche *actuarielle*.

Comme dans le cadre de l'approche *actuarielle*, il est intéressant de constater que ces estimations de paramètres entraînent que, sous l'approche de *marché*, l'inflation projetée dans le cadre de la méthode de séparation de Taylor est inférieure à celle prévue avec l'application de la méthode de mise en *as-if*, comme illustré à la figure 3.31.

### Taux d'intérêt

#### Estimation des paramètres du monde réel

L'estimation des paramètres naturels  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\sigma_r$  du modèle de Vasicek, est réalisée à l'aide de

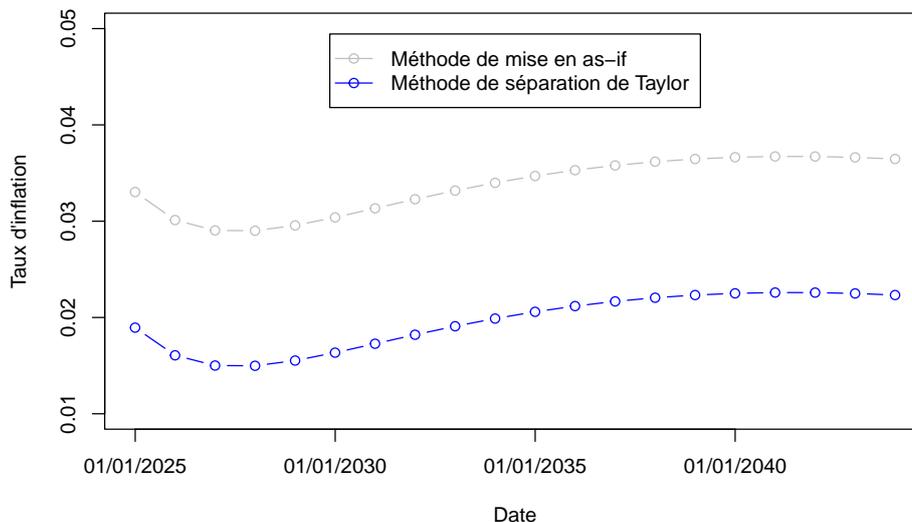


FIGURE 3.31 – Comparaison des taux d’inflation spécifiques anticipés avec la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor sous l’approche de *marché*

la courbe des taux sans risque, calculée par la BCE pour chaque jour de bourse. Cette courbe est obtenue par la BCE en calibrant un modèle de Svensson sur des obligations de notation AAA de différentes maturités. Dans le but de calibrer le modèle de taux, la variable d’intérêt est le taux court, qui peut être obtenu dans le cadre du modèle de Svensson à l’aide des estimations des paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$ , puisque  $r(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t)$ . La calibration est donc réalisée à l’aide de la série temporelle  $\{\hat{\beta}_0(t), \hat{\beta}_1(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ , où  $\mathcal{T}$  est l’ensemble des jours de bourse entre le 1er janvier 2005 et le 31 décembre 2023.

La représentation graphique de cette série temporelle est fournie à la figure 3.32. Ce graphique est marquée premièrement par la crise des subprimes en 2008. Cette dernière a eu pour conséquence une forte diminution du taux court s’expliquant notamment par les politiques financières des banques centrales à la suite de cet effondrement financier. La figure montre également une récente forte hausse du taux court, en lien à nouveau avec la politique monétaire de la BCE en réponse de l’augmentation très significative de l’inflation.

En appliquant le lemme d’Ito à la dynamique du taux court après une transformation exponentielle adéquate, il est possible de montrer que pour un pas de temps  $\Delta_t$ , le taux court vérifie l’équation d’un modèle auto régressif du premier ordre :

$$r(t + \Delta_t) = c_0 + c_1 r(t) + \varepsilon(t), \quad (3.8)$$

avec :

$$c_0 = \gamma \frac{1 - e^{-\alpha \Delta_t}}{\alpha}, \quad c_1 = e^{-\alpha \Delta_t},$$

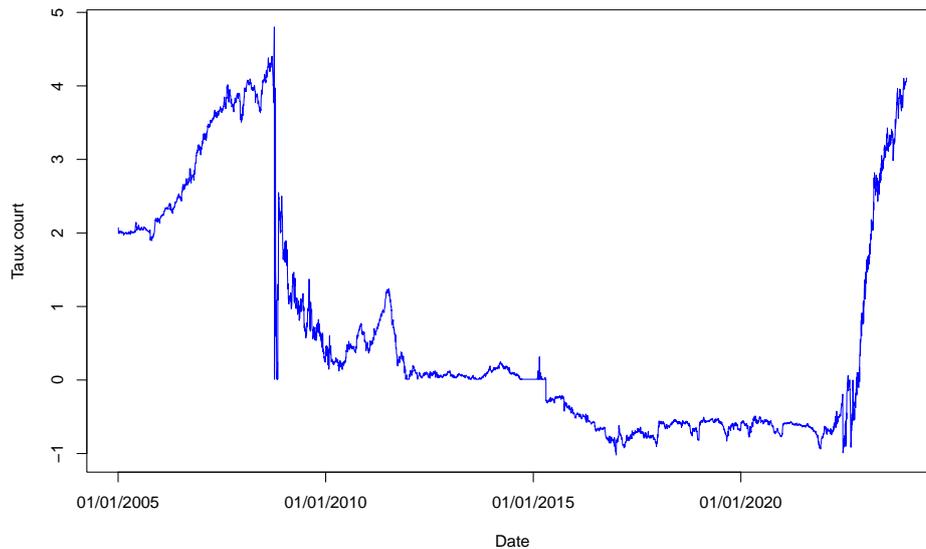


FIGURE 3.32 – Evolution du taux court entre le 1er janvier 2005 et le 31 décembre 2023

et où les termes d'erreur  $\varepsilon(t)$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale d'espérance nulle et de variance :

$$\Omega^2 = \sigma_r^2 \frac{1 - e^{-2\alpha\Delta_t}}{2\alpha}. \quad (3.9)$$

L'adéquation de la série temporelle  $\{\hat{\beta}_0(t) + \hat{\beta}_1(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  au modèle auto régressif du premier ordre peut être vérifiée en réalisant le graphique des taux courts d'un jour de bourse en fonction de leur homologue du jour précédent, sur tout l'historique temporel des données. Ce graphique est représenté à la figure 3.33. Une droite se dégage de manière très naturelle du nuage de points confirmant ainsi l'adéquation des données au modèle de Vasicek.

Ainsi, les paramètres  $c_0$ ,  $c_1$  et  $\Omega^2$  peuvent être estimés à l'aide d'une régression linéaire, et les paramètres  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\sigma_r$  peuvent être déduits de ces estimations en résolvant le système composé des équations (3.8) et (3.9). La mise en place de cette procédure, en considérant qu'il y a 260 jours de bourse dans une année ( $\Delta_t = 1/260$ ), mène aux estimations suivantes :

$$\hat{\alpha} = 0,4160, \quad \hat{\gamma} = 0,0092, \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_r = 0,0156.$$

### Estimation des paramètres du monde risque-neutre

Pour calibrer le modèle de taux sous la probabilité risque-neutre, le paramètre  $\check{\alpha}$  est estimé en ajustant au mieux, la fonction théorique  $v(t, t + \tau)$  du prix du zéro coupon sous le modèle de Vasicek au prix des zéro coupon  $v^{\text{EIOPA}}(t, t + \tau)$ , fournie par l'EIOPA au 31/12/2023. Pour avoir un maximum de flexibilité, le paramètre  $\check{\gamma}$  et le taux court instantané  $r(t)$  sont inclus dans l'estimation. Cependant, l'estimation de ces paramètres ne sera pas conservée puisque dans le

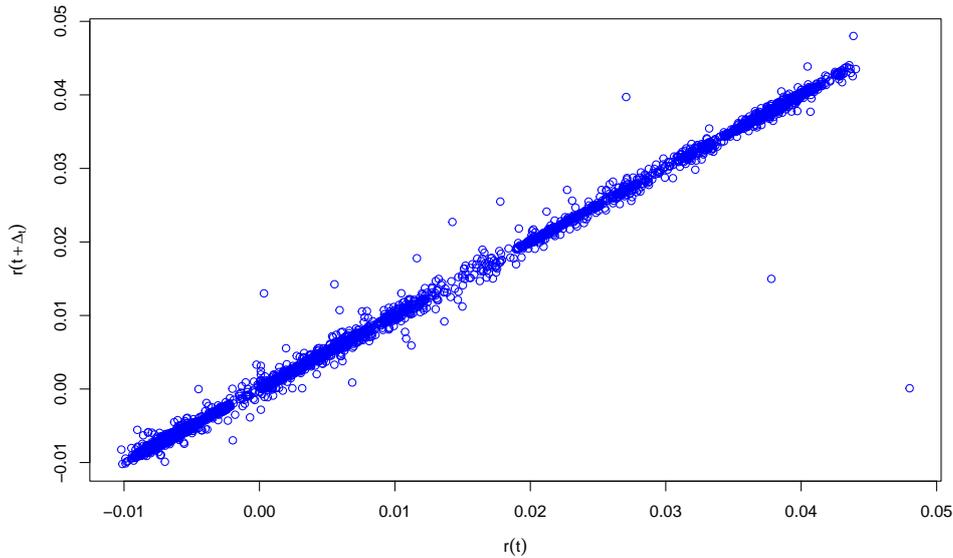


FIGURE 3.33 – Nuage de points des taux courts pour deux jours de bourse consécutifs

cadre du modèle de Hull and White, ils restent absorbés par la courbe des taux observée. Ainsi, le problème des moindres carrés ordinaires suivant est résolu :

$$\left(\widehat{\alpha}, \widehat{\gamma}, \widehat{r}(t)\right) = \arg \min_{(\alpha, \gamma, r(t))} \sum_{\tau=1}^{20} \left( A(\tau, \alpha, \gamma) e^{-r(t)B(\tau, \alpha)} - v^{\text{EIOPA}}(t, t + \tau) \right)^2,$$

où les fonctions  $A$  et  $B$  sont définis à l'équation (2.11) et le paramètre de volatilité est posé égal à sa valeur estimée  $\widehat{\sigma}_r = 0,0156$ .

La résolution de ce problème d'optimisation donne lieu à l'estimation du paramètre  $\widehat{\alpha}$  :

$$\widehat{\alpha} = 0,3208.$$

### 3.2.2.2 Application numérique des méthodes au provisionnement

L'estimation des paramètres des modèles stochastiques utilisées pour projeter l'inflation et les taux d'intérêt, permet à présent d'implémenter la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche de *marché*.

#### Application numérique de la méthode de mise en *as-if*

L'étude des résidus du triangle des règlements au coût actuel a déjà été réalisée lors de l'application de la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*. Cette méthode peut donc directement être appliquée dans le cadre de l'approche de *marché*. Les résultats des estimations de la PSAP et du BE sont donnés dans le tableau 3.14.

Les valorisations de la PSAP et du BE obtenues avec cette méthode s'élèvent respectivement à

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> Approche de marché
		Approche <i>actuarielle</i>				
Provisions	PSAP	100 000	102 981	103 026	103 004	<b>102 687</b>
	BE	94 142	96 943	96 874	96 926	<b>96 548</b>

TABLE 3.14 – Résultats numériques des provisions avec la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l'approche de *marché*

102 687 et 96 548. Elles sont supérieures aux estimations avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation, en vertu des mêmes arguments que ceux explicités dans l'approche *actuarielle*. De plus, elles sont en légère baisse de respectivement 0,31% et 0,39%, par rapport à la méthode de mise en *as-if* dans l'approche *actuarielle*. Ces diminutions sont la résultante de la baisse observée du taux d'inflation anticipé pour la prochaine année par le marché (2,27%) par rapport à cette même anticipation par la BCE (2,70%). L'actualisation des règlements futurs aboutit à un montant de BE inférieur de 5,98% à celui de la PSAP.

L'application des procédures bootstrap ODP avec 100 000 simulations, mènent aux résultats numériques du tableau 3.15.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> Approche de marché
		Approche <i>actuarielle</i>				
DUO	$m_{DUO}$	94 264	97 068	97 216	97 000	<b>96 890</b>
	$\sigma_{DUO}$	11 351	11 686	13 874	14 875	<b>13 825</b>
	$CV_{DUO}$	12,04%	12,04%	14,27%	15,34%	<b>14,27%</b>
YEO	$m_{YEO}$	97 390	100 288	100 300	100 184	<b>99 953</b>
	VA $m_{YEO}$	94 227	97 031	97 043	96 930	<b>96 706</b>
	$\sigma_{YEO}$	9 783	10 065	11 868	12 429	<b>11 868</b>
	$CV_{YEO}$	10,05%	10,04%	11,83%	12,41%	<b>11,87%</b>
	$q_{99,5\%}$	123 194	126 836	132 507	136 497	<b>132 191</b>
	SCR	24 966	25 586	31 167	35 133	<b>31 191</b>

TABLE 3.15 – Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l'ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l'approche de *marché*

Les moyennes empiriques du DUO et du YEO sont respectivement de 96 890 et 99 953. Tout comme la PSAP et le BE, elles sont en augmentation par rapport à la méthode ne modélisant pas l'inflation et la méthode de *surinflation*, mais elles sont en légère diminution par rapport à la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*, pour les mêmes raisons.

Les coefficients de variations du DUO et du YEO, respectivement égaux à 14,27% et 11,83%, sont très proches de ceux obtenus à l'aide de la méthode de mise en *as-if* dans la partie précédente. Il

est tout de même observé une légère augmentation du coefficient de variation du YEO, de 0,04 point de pourcentage, en lien avec l'incorporation du risque de taux d'intérêt dans l'évaluation du YEO, qui possède à lui seul un coefficient de variation de 0,98%. Par ailleurs, le coefficient de variation de l'erreur d'estimation s'élève à 10,13%, celui de l'erreur de processus correspond à 5,92% et celui lié à la modélisation stochastique de l'inflation est de 1,44%.

La distribution du YEO possède un coefficient d'asymétrie de 0,331 et un coefficient d'aplatissement de -0,240, similaires à ceux obtenus dans la partie précédente pour cette même méthode, spécifiant une forme de distribution identique entre les deux approches.

Enfin, le quantile à 99,5% du YEO est estimé à 132 191, en baisse de 0,24% par rapport à l'approche *actuarielle*. La valorisation du SCR de réserve atteint 31 191, représentant 32,31% du BE. Elle est en très légère augmentation de 0,07% par rapport à l'approche *actuarielle*, ce qui s'explique par l'incorporation du risque de taux d'intérêt, compensée par la baisse de la valeur moyenne du YEO relativement à l'approche *actuarielle*.

### Application numérique de la méthode de séparation de Taylor

Une étude des résidus de la méthode de séparation de Taylor a déjà été réalisée lors de l'application de cette méthode sous l'approche *actuarielle*. La méthode de séparation de Taylor peut donc directement être appliquée dans le cadre de l'approche de *marché*. Les estimations de la PSAP et du BE sont exposées dans le tableau 3.16.

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> Approche de <i>marché</i>	Méthode Taylor
Provisions	PSAP	100 000	102 981	103 026	103 004	102 687	<b>102 584</b>
	BE	94 142	96 943	96 874	96 926	96 548	<b>96 526</b>

TABLE 3.16 – Résultats numériques des provisions avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche de *marché*

Les montants de PSAP et de BE obtenus sont respectivement de 102 584 et 96 526. Ils sont en augmentation par rapport à la méthode avec une prise en compte implicite de l'inflation. En outre, elles sont aussi en légère baisse de respectivement 0,40% et 0,41% par rapport à la méthode de séparation de Taylor sous l'approche *actuarielle*. Cette réduction s'explique à nouveau par la baisse des anticipations du taux d'inflation général pour la prochaine année dans l'approche de *marché* (2,27%) par rapport à l'approche *actuarielle* (2,70%).

L'exécution des procédures bootstrap de la méthode de séparation de Taylor avec 100 000 simulations, fournit les résultats du tableau 3.17.

Les valorisations des moyennes du DUO et du YEO atteignent respectivement 96 601 et 99 767. A nouveau ces estimations sont en hausse par rapport à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation*, mais en légère baisse par rapport à

		Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>	Méthode Taylor <i>actuarielle</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche de <i>marché</i>	Méthode Taylor Approche de <i>marché</i>
DUO	$m_{DUO}$	94 264	97 068	97 216	97 000	96 890	<b>96 601</b>
	$\sigma_{DUO}$	11 351	11 686	13 874	14 875	13 825	<b>14 813</b>
	$CV_{DUO}$	12,04%	12,04%	14,27%	15,34%	14,27%	<b>15,33%</b>
YEO	$m_{YEO}$	97 390	100 288	100 300	100 184	99 953	<b>99 767</b>
	VA $m_{YEO}$	94 227	97 031	97 043	96 930	96 706	<b>96 527</b>
	$\sigma_{YEO}$	9 783	10 065	11 868	12 429	11 868	<b>12 414</b>
	$CV_{YEO}$	10,05%	10,04%	11,83%	12,41%	11,87%	<b>12,44%</b>
	$q_{99,5\%}$	123 194	126 836	132 507	136 497	132 191	<b>135 951</b>
	SCR	24 966	25 586	31 167	35 133	31 191	<b>35 009</b>

TABLE 3.17 – Résultats numériques sur la distribution du DUO (vision à l’ultime) et du YEO (vision à horizon 1 an) avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l’approche de *marché*

l’application de cette méthode sous l’approche *actuarielle*.

Les coefficients de variations du DUO et du YEO s’élèvent à 15,33% et 12,44%. Ils sont très proches de ceux estimés dans l’approche *actuarielle*. Cependant, une très légère hausse du coefficient de variation du YEO est observée dans cette approche de *marché* comparée à l’approche *actuarielle*, résultant de la modélisation stochastique des taux d’intérêt.

Le coefficient d’asymétrie de la distribution du YEO est de 0,353 et son coefficient d’aplatissement est de 0,227. Ces valeurs sont proches de celles obtenues dans le cadre de l’application de cette méthode avec l’approche *actuarielle*.

Finalement, le montant du quantile à 99,5% est de 135 951, en diminution de 0,4% par rapport à l’approche *actuarielle*. La diminution légèrement plus rapide du quantile 99,5% comparé à celle de la moyenne du YEO, aboutit à une diminution de 0,35% du montant de SCR, qui atteint la valeur de 35 009, représentant 36,27% du BE.

### 3.3 Validation des méthodes

L’ambition de cette section est d’effectuer un backtesting des méthodes de provisionnement précédemment appliquées, dans le but d’évaluer leur qualité prédictive dans le contexte inflationniste actuel. L’idée de l’approche consiste à repartir du triangle de règlements et du triangle de nombre de sinistres, utilisés dans les parties précédentes, en supprimant la dernière diagonale qui correspond aux règlements de l’année calendaire 2023. De cette manière, les triangles considérés sont observés à la fin de l’année 2022 et couvrent 19 années de survenance de 2004 à 2022.

Les différentes méthodes de provisionnement, présentées et appliquées dans les sections précédentes, seront alors implémentées à partir de ces triangles. Le montant des règlements réellement

effectués en 2023, pour les années de survenance entre 2004 et 2022, qui s'élève à 49 942, sera comparé aux estimations fournies par chacune des méthodes. Chaque méthode sera implémentée sous sa version déterministe et sa version stochastique, à l'aide des procédures bootstrap.

De la même manière que dans les parties précédentes, une étude des résidus de Pearson a été réalisée au préalable sur ces nouveaux triangles. Cependant, les résultats obtenus se révèlent très similaires à ceux présentés précédemment, à l'instar des ajustements finalement effectués. Par conséquent, ces analyses ne seront pas détaillées dans la section qui suit.

Les résultats numériques du backtesting avec les différentes méthodes sont résumés dans le tableau 3.18, où  $D_{n+1}$  correspond à l'estimation du montant des règlements pour l'année calendaire 2023 au titre des exercices de 2004 à 2022,  $m_{\text{NYO}}$ ,  $\sigma_{\text{NYO}}$  et  $CV_{\text{NYO}}$  correspondent respectivement à la moyenne, à l'écart type et au coefficient de variation de la distribution du NYO, définie par la suite, et  $q_{\text{obs}}$  correspond au quantile de la distribution du NYO associé au montant de règlement réellement observé pour la prochaine année.

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> Approche de <i>marché</i>	Méthode Taylor
$D_{n+1}$	49 942	46 311	46 716	48 018	48 651	47 764	48 364
$m_{\text{NYO}}$		46 374	46 781	48 173	48 648	47 919	48 362
$\sigma_{\text{NYO}}$		7 092	7 154	8 643	9 502	8 600	9 449
$CV_{\text{NYO}}$		15,29%	15,29%	17,94%	19,53%	17,95%	19,54%
$q_{\text{obs}}$		67,97%	67,36%	60,37%	56,11%	61,38%	57,32%

TABLE 3.18 – Résultats numériques du backtesting avec les différentes méthodes

### 3.3.1 Méthode prenant en compte implicitement l'inflation et méthode de *surinflation*

L'enjeu de cette partie est d'appliquer la méthode intégrant implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation*, de manière à estimer le montant des règlements pour l'année calendaire 2023.

Dans le cadre de la méthode prenant en compte implicitement l'inflation, l'estimation du montant des règlements pour la prochaine année calendaire est réalisée par :

$$D_{n+1}^{hc|CL} = CL_n \left( D_{n+1}^{hc} \right),$$

correspondant à l'estimation du montant des règlements pour l'année calendaire  $n + 1$  en appliquant la méthode de Chain Ladder au triangle de règlements au coût historique.

De plus, il est possible d'obtenir une distribution de cette estimation à l'aide de la distribution du NYO (Next Year Obligation), définie par la collection des  $S$  simulations :

$$\text{NYO} = \left\{ {}_s\tilde{N}_n^{hc|CL} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{hc}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

obtenues en utilisant la procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder sur le triangle de règlements au coût historique.

La mise en oeuvre de la méthode de Chain Ladder et de sa procédure bootstrap donnent lieu aux résultats numériques présentés dans le tableau 3.19.

		Observé	Inflation implicite
	$D_{n+1}$	49 942	<b>46 311</b>
	$m_{\text{NYO}}$		<b>46 374</b>
NYO	$\sigma_{\text{NYO}}$		<b>7 092</b>
	$CV_{\text{NYO}}$		<b>15,29%</b>
	$q_{\text{obs}}$		<b>67,97%</b>

TABLE 3.19 – Résultats numériques du backtesting avec la méthode prenant en compte implicitement l'inflation

La méthode prenant en compte implicitement l'inflation estime un montant de paiements de 46 311 pour l'année 2023. Ce dernier est inférieur de 7,27% par rapport à l'observé. Cette sous-estimation s'explique notamment en raison de l'augmentation de l'inflation spécifique à la branche responsabilité civile automobile en 2023, notamment visible sur la figure 3.6. En effet, cette dernière n'est pas projetée implicitement par Chain Ladder induisant ainsi une sous-estimation des règlements pour la prochaine année.

La distribution du NYO possède une moyenne de 46 374, proche de la valeur obtenue à l'aide de la méthode déterministe, et un écart type de 7 092 débouchant sur un coefficient de variation de 15,29%. Le montant de règlements observé en 2023 correspond à un quantile à 67,97% de la distribution du NYO.

L'estimation du montant des règlements pour la prochaine année calendaire, à l'aide de la méthode de *surinflation*, est réalisée par :

$$D_{n+1}^{hc|I} = CL_n \left( D_{n+1}^{hc} \right) (1 + I_{n+1}),$$

où  $I_{n+1}$  est le facteur de surinflation pour la prochaine année calendaire.

Une distribution de cette estimation est obtenue à l'aide de la distribution du NYO. Pour  $S$  simulations bootstrap :

$$\text{NYO} = \left\{ {}_s\tilde{N}_n^{hc|I} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{hc}(1 + I_{n+1}), s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\}.$$

La mise en place de la même procédure que dans la partie précédente pour déterminer les facteurs de surinflation, donne lieu à un facteur de surinflation de 0,87% pour l'année 2023. Les résultats numériques du backtesting avec cette méthode sont résumés dans le tableau 3.20.

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>
	$D_{n+1}$	49 942	46 716
	$m_{\text{NYO}}$		46 781
NYO	$\sigma_{\text{NYO}}$		7 154
	$CV_{\text{NYO}}$	15,29%	15,29%
	$q_{\text{obs}}$	67,97%	67,36%

TABLE 3.20 – Résultats numériques du backtesting avec la méthode de *surinflation*

Le montant de règlements estimé par la méthode de *surinflation* pour la prochaine année est de 46 716. Comme attendu, ce dernier est en hausse de 0,87% par rapport à la précédente méthode en lien avec l'utilisation du facteur de surinflation. Néanmoins, il reste inférieur de 6,46% par rapport à l'observé.

La moyenne de la distribution du NYO s'élève à 46 781, à nouveau proche de la valeur obtenue avec la méthode déterministe. De plus, cette dernière possède un coefficient de variation de 15,29%, très proche de celui obtenu avec la méthode intégrant implicitement l'inflation. Enfin, la valeur des paiements observés pour l'année 2023 correspond à un quantile à 67,36% de la distribution du NYO, en diminution de 0,61 point de pourcentage par rapport à la méthode précédente. Cette baisse s'explique par l'augmentation de la moyenne de la distribution du NYO.

### 3.3.2 Méthode de mise en *as-if* et méthode de séparation de Taylor

L'intention de cette partie est de mettre en oeuvre les méthodes de mise en *as-if* et de séparation de Taylor en modélisant l'inflation à l'aide de l'approche *actuarielle* et de l'approche de *marché*, dans le but d'estimer le montant des règlements pour l'année calendaire 2023. Dans le cadre de la calibration des différents modèles stochastiques de l'approche *actuarielle* et de l'approche de *marché* au 31/12/2022, les mêmes méthodologies, que celles présentées dans les parties précédentes, sont utilisées. Ainsi, le détail de ces calculs n'est pas fourni par la suite.

#### 3.3.2.1 Approche *actuarielle*

Dans le cadre de l'application de la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*, les règlements de la prochaine année sont estimés par :

$$D_{n+1}^{ac|A} = CL_n (D_{n+1}^{ac}) m_{p_s}(n, n+1).$$

Une distribution de cette estimation est déduite à l'aide de la distribution du NYO, définie par la collection des  $S$  simulations :

$$\text{NYO} = \left\{ {}_s\tilde{N}_n^{ac|A} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{ac} \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+1)}{p_s(n)}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\}.$$

Les résultats numériques obtenus avec cette méthode sous l'approche *actuarielle* sont exposés au tableau 3.21.

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>
$D_{n+1}$	49 942	46 311	46 716	<b>48 018</b>
$m_{\text{NYO}}$		46 374	46 781	<b>48 173</b>
NYO $\sigma_{\text{NYO}}$		7 092	7 154	<b>8 643</b>
$CV_{\text{NYO}}$		15,29%	15,29%	<b>17,94%</b>
$q_{\text{obs}}$		67,97%	67,36%	<b>60,37%</b>

TABLE 3.21 – Résultats numériques du backtesting avec la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l’approche *actuarielle*

Dans le cadre de l’approche *actuarielle*, la méthode de mise en *as-if* estime un montant de règlements pour la prochaine année de 48 018. Ce dernier est en hausse de respectivement 3,69% et 2,79% par rapport à la méthode prenant en compte implicitement l’inflation et la méthode de *surinflation*. Ces augmentations témoignent d’une meilleure prise en compte de l’inflation pour l’estimation des règlements futurs avec la méthode de mise en *as-if*, et mettent en lumière que l’utilisation de facteurs de *surinflation* ne permet de compenser que partiellement la sous-estimation de l’inflation future projetée implicitement par la méthode de Chain Ladder. Le montant de règlements estimé reste cependant inférieur de 3,85% par rapport à l’observé.

Sous l’approche *actuarielle*, le taux d’inflation spécifique estimé pour la prochaine année est de 7,16%, tandis que la valeur observée à partir des indices est de 6,77% soit une surestimation de 0,39 point de pourcentage. Les règlements estimés pour la prochaine année avec la valeur de l’inflation effectivement constatée sont de 47 840. Ainsi, l’écart par rapport au réalisé s’explique principalement par une mauvaise estimation du risque technique par la méthode de Chain Ladder sur ce triangle. Cette erreur d’estimation est en grande partie due à une sous-estimation du montant des paiements pendant l’année 2023 pour les sinistres de l’année de survenance 2022.

En outre, la distribution du NYO possède une moyenne de 48 173, un résultat une fois de plus proche de celui obtenu avec la méthode déterministe. Cette dernière présente également un coefficient de variation de 17,94%, en augmentation 2,65 points de pourcentage en lien la modélisation stochastique de l’inflation future. Enfin, les règlements observés pour l’année 2023 correspondent à un quantile à 60,37% de la distribution du NYO, soit une baisse de 7,60 points de pourcentage vis-à-vis de la méthode intégrant implicitement l’inflation. Cette diminution s’explique principalement par l’augmentation de la moyenne et du coefficient de variation de la distribution du NYO.

De la même manière, en utilisant la méthode de séparation de Taylor avec l’approche *actuarielle*, les paiements de la prochaine année calendaire sont estimés par :

$$D_{n+1}^{\text{Taylor}|A} = \text{Taylor}_n \left( D_{n+1}^{\text{hc}} \right),$$

où  $\text{Taylor}_n \left( D_{n+1}^{\text{hc}} \right)$  correspond à l’estimation du total des paiements pour la prochaine année calendaire par l’application de la méthode de séparation de Taylor en projetant le facteur

calendaire  $\lambda$  à l'aide de  $m_{p_s}(n, n + 1)$ .

Une distribution de cette estimation est obtenue à partir de la distribution du NYO, définie par l'ensemble des  $S$  simulations :

$$\text{NYO} = \left\{ {}_s\tilde{N}_n^{\text{Taylor}|A} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{\text{Taylor}}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où la somme de la future diagonale  ${}_s\tilde{D}_{n+1}^{\text{Taylor}}$  est obtenue par des simulations bootstrap de la méthode de Taylor, dans lesquelles les facteurs calendaires  $\lambda$  sont projetés à l'aide de simulations de l'indice  $p_s$ .

Le tableau 3.22 présente les résultats issus de cette méthode, sous l'approche *actuarielle*.

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i>	Méthode Taylor
					<b>Approche <i>actuarielle</i></b>
$D_{n+1}$	49 942	46 311	46 716	48 018	<b>48 651</b>
$m_{\text{NYO}}$		46 374	46 781	48 173	<b>48 648</b>
NYO $\sigma_{\text{NYO}}$		7 092	7 154	8 643	<b>9 502</b>
$CV_{\text{NYO}}$		15,29%	15,29%	17,94%	<b>19,53%</b>
$q_{\text{obs}}$		67,97%	67,36%	60,37%	<b>56,11%</b>

TABLE 3.22 – Résultats numériques du backtesting avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche *actuarielle*

Sous l'approche *actuarielle*, la méthode de séparation de Taylor estime un montant de paiements pour la prochaine année de 48 651. Il est en hausse de respectivement 5,05% et 1,32% par rapport à la méthode prenant en compte de manière implicite l'inflation et la méthode de mise en *as-if*, en restant tout de même inférieur 2,58% par rapport au montant réellement observé. L'inflation propre au triangle, projetée dans le cadre de cette approche est de 5,54%, alors que la valeur du taux inflation, propre au triangle, déterminée à l'aide du triangle observé à fin 2023 est de 8,58%.

Le taux d'inflation est donc sous-estimé de 3,04 points de pourcentage. Le recalcul du montant de règlements pour l'année 2023 avec le taux d'inflation effectivement observé donne lieu à un montant de 50 053, soit 0,22% de plus que la vraie valeur. Ainsi, pour cette méthode contrairement à la méthode de mise en *as-if*, l'écart observé s'explique principalement par la sous-estimation de l'inflation et la méthode de séparation de Taylor projette plutôt correctement le risque technique dans cet exemple.

Par ailleurs, la distribution du NYO présente une moyenne de 48 648, similaire à la valeur obtenue avec la méthode déterministe. Cette dernière affiche également un coefficient de variation de 19,53%, supérieur de 1,59 points de pourcentage par rapport à la méthode de mise en *as-if*. Cette augmentation s'explique à nouveau par un phénomène de diversification entre les années de survenance plus important pour la méthode de Chain Ladder que pour la méthode de séparation

de Taylor. Finalement, le montant des paiements observé durant l'année 2023 correspond au quantile à 56,11% de la distribution du NYO, marquant ainsi une baisse de 4,26 points de pourcentage vis-à-vis de la méthode de mise en *as-if*. Cette diminution est essentiellement due à l'augmentation de la moyenne de la distribution du NYO combinée à l'augmentation de son coefficient de variation.

### 3.3.2.2 Approche de *marché*

Pour la méthode de mise en *as-if* sous l'approche de *marché*, les règlements de la prochaine année sont estimés par :

$$D_{n+1}^{ac|M} = CL_n(D_{n+1}^{ac}) m_{p_s}(n, n+1).$$

De plus, il est possible d'obtenir une distribution de cette estimation à l'aide de la distribution du NYO, définie par la collection des  $S$  simulations :

$$\text{NYO} = \left\{ {}_s\tilde{N}_n^{ac|M} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{ac} \frac{{}_s\tilde{p}_s(n+1)}{p_s(n)}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\}.$$

Le tableau 3.23 expose les résultats numériques obtenus avec cette méthode, en suivant l'approche de *marché*.

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i> Approche <i>de marché</i>
$D_{n+1}$	49 942	46 311	46 716	48 018	48 651	<b>47 764</b>
$m_{\text{NYO}}$		46 374	46 781	48 173	48 648	<b>47 919</b>
$\sigma_{\text{NYO}}$		7 092	7 154	8 643	9 502	<b>8 600</b>
$CV_{\text{NYO}}$		15,29%	15,29%	17,94%	19,53%	<b>17,95%</b>
$q_{\text{obs}}$		67,97%	67,36%	60,37%	56,11%	<b>61,38%</b>

TABLE 3.23 – Résultats numériques du backtesting avec la méthode de mise en *as-if* dans le cadre de l'approche de *marché*

En appliquant l'approche de *marché*, la méthode de mise en *as-if* projette un montant de règlements de 47 764 pour la prochaine année. Ce dernier est supérieur aux montants obtenus avec la méthode intégrant implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation*, mais est en dessous, de 0,53%, par rapport à la valeur estimée par la méthode de mise en *as-if* sous l'approche *actuarielle*. Cette dernière observation s'explique par une projection du taux d'inflation de 6,60% pour la prochaine année sous l'approche de *marché*, soit un taux inférieur de 0,56% point de pourcentage par rapport à l'approche *actuarielle*. Dans le cadre de cette approche, il serait plus pertinent d'utiliser une volatilité implicite de l'inflation générale, reflétant les anticipations de marché de l'indice des prix à la consommation harmonisé, à la place d'une volatilité historique. En effet, au vu de la situation inflationniste observée à fin 2022, caractérisée par une forte instabilité et incertitude, il semble approprié que la volatilité anticipée par les investisseurs soit

supérieure à celle observée historiquement. Cependant la volatilité implicite est plus compliquée à estimer et elle serait pertinente à utiliser uniquement pour projeter l'inflation à court terme.

Par ailleurs, la moyenne de la distribution du NYO est de 47 919, un résultat proche de celui obtenu par la méthode déterministe. La distribution du NYO possède un coefficient de variation de 17,95% très proche de celui obtenu sous l'approche *actuarielle*. Enfin, le montant de paiements observés représente un quantile à 61,38% de la distribution du NYO, supérieur de 1,01 point de pourcentage par rapport à la méthode de mise en *as-if* sous la précédente approche, ce qui s'explique par la diminution de la moyenne de la distribution du NYO.

De la même manière, en utilisant la méthode de séparation de Taylor avec l'approche de *marché*, les paiements de la prochaine année calendaire sont estimés par :

$$D_{n+1}^{Taylor|M} = Taylor_n(D_{n+1}^{hc}),$$

où  $Taylor_n(D_{n+1}^{hc})$  correspond à l'estimation du total des paiements pour la prochaine année calendaire par l'application de la méthode de séparation de Taylor en projetant le facteur calendaire à l'aide de  $m_{p_s}(n, n+1)$ .

Une distribution de cette estimation est construite à partir de la distribution du NYO, basée sur l'ensemble des  $S$  simulations :

$$NYO = \left\{ {}_s\tilde{N}_n^{Taylor|M} = {}_s\tilde{D}_{n+1}^{Taylor}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket \right\},$$

où la somme de la future diagonale  ${}_s\tilde{D}_{n+1}^{Taylor}$  est obtenue par des simulations bootstrap de la méthode de Taylor, dans lesquelles les facteurs calendaires  $\lambda$  sont projetés à l'aide de simulations de l'indice  $p_s$  sous la probabilité historique.

Les résultats numériques provenant de cette méthode en suivant l'approche de *marché*, sont récapitulés dans le tableau 3.24.

	Observé	Inflation implicite	Méthode <i>surinflation</i>	Méthode <i>as-if</i> Approche <i>actuarielle</i>	Méthode Taylor	Méthode <i>as-if</i> <b>Approche de <i>marché</i></b>	<b>Méthode Taylor</b>
$D_{n+1}$	49 942	46 311	46 716	48 018	48 651	47 764	<b>48 364</b>
$m_{NYO}$		46 374	46 781	48 173	48 648	47 919	<b>48 362</b>
$\sigma_{NYO}$		7 092	7 154	8 643	9 502	8 600	<b>9 449</b>
$CV_{NYO}$		15,29%	15,29%	17,94%	19,53%	17,95%	<b>19,54%</b>
$q_{obs}$		67,97%	67,36%	60,37%	56,11%	61,38%	<b>57,32%</b>

TABLE 3.24 – Résultats numériques du backtesting avec la méthode de séparation de Taylor dans le cadre de l'approche de *marché*

Dans le cadre de l'approche de *marché*, la méthode de séparation de Taylor estime un montant de paiements pour la prochaine année de 48 364. Il est supérieur aux montants calculés avec la

méthode prenant en compte de manière implicite l'inflation et la méthode de mise en *as-if*, mais reste inférieur de 3,16% par rapport au montant réellement observé.

L'inflation propre au triangle, projetée dans le cadre de cette approche est de 4,91%, soit respectivement 0,63 et 3,67 points de pourcentage de moins que le taux d'inflation spécifique projeté sous l'approche *actuarielle* et le taux d'inflation spécifique observé. A nouveau, il serait peut être plus pertinent d'utiliser une volatilité implicite pour projeter l'inflation générale.

Finalement, la distribution du NYO présente une moyenne de 48 648, similaire à la valeur obtenue avec la méthode déterministe. Cette dernière possède également un coefficient de variation de 19,54%, similaire à celui obtenu avec cette méthode sous l'approche *actuarielle*. Enfin, le montant des paiements observé durant l'année 2023 correspond au quantile à 57,32% de la distribution du NYO, soit 1,21 points de pourcentage de plus que sous l'approche *actuarielle* avec cette même méthode. Cette augmentation est essentiellement due à la diminution de la moyenne de la distribution du NYO.

### 3.4 Synthèse de l'application des méthodes

L'objectif de cette section est de résumer les principales observations issues de la mise en pratique des différentes méthodes de provisionnement sur les données de la branche responsabilité civile automobile.

L'application des différentes méthodes, sur les triangles à fin 2023, révèle que la méthode intégrant l'inflation de manière implicite sous-estime les provisions techniques, par rapport aux méthodes de *surinflation*, de mise en *as-if* et de séparation de Taylor, qui donnent lieu à des résultats semblables. En effet, la hausse soudaine de l'inflation récemment observée, entraîne une projection insuffisante de l'inflation par la méthode de Chain Ladder, justifiant ainsi cette sous-estimation. De plus, l'analyse de résultats dévoile aussi que la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* estiment un risque de réserve inférieur à celui calculé avec la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Cette observation résulte de la modélisation et la projection de l'inflation future au moyen de processus stochastiques pour ces méthodes, introduisant une volatilité supplémentaire dans le montant des réserves. Il est également observé que l'approche de *marché* sous-estime légèrement les provisions par rapport à l'approche *actuarielle*, en raison des anticipations de l'inflation générale basées sur les cotations des OAT et OAT€i, qui sont plus basses que celles de la BCE.

Le backtesting des méthodes sur l'année 2023 met en évidence que les différentes méthodes présentées au sein du mémoire, sous-estiment le montant des règlements réellement effectué. Néanmoins, ce sont la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* qui possèdent les écarts les plus importants par rapport au montant de règlements réalisé. Dans le cadre de ce backtesting, les écarts constatés avec la méthode de mise en *as-if* résultent essentiellement d'une estimation incorrecte du risque technique, alors que, pour la méthode de séparation de Taylor, ils s'expliquent majoritairement par une projection imprécise

de l'inflation. De plus, il apparaît que l'approche de *marché* sous-estime légèrement les règlements de la prochaine année par rapport à l'approche *actuarielle*, ce qui peut s'expliquer par une valorisation insuffisante de la prime de risque d'inflation.

Les résultats obtenus auraient pu s'avérer différents en cas d'application des méthodes sur d'autres jeux de données. Néanmoins, les applications numériques réalisées montrent la nécessité actuelle de prendre en compte l'inflation de manière explicite dans le calcul des provisions techniques. Cette remarque est d'autant plus valable sur les branches longues, où l'impact de l'inflation sur l'évaluation des provisions techniques est le plus prononcé, en raison du développement de la sinistralité sur un plus grand nombre d'années.

Dans ce cadre, l'étude réalisée montre les limites de la méthode intégrant implicitement l'inflation et de la méthode de *surinflation*, pour la projection de l'inflation future dans un contexte inflationniste instable. Ainsi, les résultats obtenus recommandent actuellement l'utilisation de la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, pour évaluer les provisions techniques. Ces dernières sont cependant plus longues et plus compliquées à mettre en oeuvre d'un point de vue opérationnel, par rapport à la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation*, en raison de la modélisation explicite de l'inflation.

# Conclusion

L'inflation est actuellement au coeur des préoccupations du marché de l'assurance. Le récent choc inflationniste, a forcé les organismes d'assurances à contrôler la validité des modèles et des méthodes employés pour évaluer les provisions techniques et le risque de réserve, de manière à éviter de les sous-estimer. Cette problématique est mise en évidence par (Brydon et Verrall, 2009), qui montrent que, en cas d'une récente brusque hausse de l'inflation, la méthode de Chain Ladder a tendance à sous-estimer l'inflation qui est projetée l'année suivante. C'est dans ce contexte que ce mémoire cherchait à adapter les méthodes de provisionnement non-vie pour prendre en compte ce dernier pic inflationniste.

Pour répondre à cette problématique, 4 méthodes sont proposées. La première méthode consiste à prendre en compte l'inflation de manière implicite. Elle consiste de manière classique à projeter un triangle de règlements au coût historique à l'aide de la méthode de Chain Ladder. La deuxième méthode, appelée méthode de *surinflation*, est similaire à la précédente, à la différence qu'elle utilise des facteurs de surinflation pour ajuster les flux futurs de la différence entre l'inflation anticipée et celle projetée implicitement par la méthode de Chain Ladder. Par la suite, la méthode de mise en *as-if* est proposée, son intention est de pallier l'absence de prise en compte des effets calendaires dans la méthode de Chain Ladder, en modélisant cette dernière de manière exogène. Sa mise en oeuvre nécessite de retraiter au préalable le triangle de règlements observés de l'inflation passée avant d'appliquer la méthode de Chain Ladder. Une modélisation et une projection de l'inflation sont alors nécessaires dans le but d'inflater les règlements futurs. La dernière méthode introduite est la méthode de séparation de Taylor, (Taylor, 1977). Cette dernière sépare l'écoulement des sinistres de l'influence affectant les années calendaires. De cette manière, elle modélise intrinséquement l'inflation en la considérant comme un facteur endogène au triangle.

Pour implémenter la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor, l'inflation a été modélisée et projetée à l'aide de processus stochastiques. Dans cette optique, deux approches inspirées de (De Felice et Moriconi, 2023) sont proposées, à savoir une approche *actuarielle* et une approche de *marché*. L'approche *actuarielle* repose sur les hypothèses de futurs taux d'inflation anticipés déterministes, d'indépendance entre le risque d'inflation et le risque technique et d'absence de risque de taux d'intérêt et de prime de risque d'inflation. Dans cette approche, les taux d'inflation générale anticipés sont déterminés grâce aux projections de la BCE. L'approche de *marché* essaye de se passer des hypothèses d'absence de risque de taux d'intérêt et de prime

de risque d'inflation. Sous cette approche, les taux d'inflation générale anticipés sont estimés à partir des cotations des OAT et des OAT€i.

Les différentes méthodes ont été testées sur un portefeuille couvrant la responsabilité civile automobile, en utilisant des procédures déterministes et des procédures bootstrap. L'analyse comparative des résultats montre que la méthode intégrant l'inflation de manière implicite tend à sous-estimer les provisions techniques, comparativement aux méthodes de *surinflation*, de mise en *as-if* et de séparation de Taylor, qui fournissent des résultats similaires. Cette tendance à sous-estimer le montant des provisions découle essentiellement d'une projection insuffisante de l'inflation par la méthode de Chain Ladder, en lien avec le récente brusque hausse de l'inflation. L'analyse comparative des résultats révèle également que la méthode prenant en compte implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* estiment un risque de réserve inférieur à celui obtenu avec la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor. Cette observation s'explique par la modélisation et la projection de l'inflation future à l'aide de processus stochastiques pour ces méthodes, ce qui introduit une volatilité supplémentaire dans le montant des réserves. Par ailleurs, il est observé que l'approche de *marché* tend à légèrement sous-estimer les provisions par rapport à l'approche *actuarielle*, en raison des anticipations de l'inflation générale du marché, estimées à partir des cotations des OAT et des OAT€i, qui sont inférieures à celles de la BCE.

Un backtesting des différentes méthodes proposées a été réalisé. Ce dernier consiste à tronquer, à fin 2022, les triangles utilisés pour l'application numérique précédente, dans le but d'estimer les règlements de l'année calendaire 2023 et de les confronter au montant observé. Dans le cadre de cette étude, les diverses méthodes présentées au sein du mémoire, sous-estiment le montant des paiements effectivement réalisé. Cependant, la méthode intégrant implicitement l'inflation et la méthode de *surinflation* sont les méthodes qui présentent les plus grands écarts avec la valeur observée. Ainsi, l'analyse des résultats du backtesting met en lumière les limites de la méthode de *surinflation* pour la projection de l'inflation future dans un contexte inflationniste instable. Les écarts observés dans le backtesting avec la méthode de mise en *as-if* s'expliquent principalement par une mauvaise estimation du risque technique, tandis que pour la méthode de séparation de Taylor l'erreur de prédiction s'explique majoritairement par une mauvaise projection de l'inflation. Ainsi, toutes ces observations suggèrent que les méthodes les plus adaptées dans le contexte inflationniste actuel sont la méthode de mise en *as-if* et la méthode de séparation de Taylor.

Pour approfondir les démarches entreprises dans ce mémoire, il pourrait être pertinent d'améliorer la modélisation de l'inflation. Dans ce but, une complexification naturelle de l'approche proposée serait de considérer les taux d'inflation instantanés anticipés comme stochastiques. Dans cette optique, la fonction  $y(t)$ , représentant l'espérance du taux d'inflation instantané au temps  $t$ , devrait également être considérée comme un processus stochastique. Cette approche est développée dans (Moriconi, 2023), où les taux d'inflation instantanés anticipés sont modélisés à l'aide d'un processus de Vasicek.

Ce mémoire a permis de montrer les limites auxquelles les compagnies d'assurances vont se

heurter, dans le cadre de l'évaluation de leurs provisions techniques et de leur risque de réserve, en raison de la récente recrudescence de l'inflation. L'environnement inflationniste actuel aura un impact de longue durée sur le calcul des provisions. Même si un retour à une stabilité est attendue dans les deux prochaines années selon la BCE, les effets des exercices antérieurs persisteront et continueront de perturber les méthodes de provisionnement traditionnelles. Ainsi, il est désormais indispensable pour les assureurs d'adapter leurs méthodes de provisionnement non-vie afin de prendre en compte l'inflation de manière explicite.

# Bibliographie

- ACPR (2023). La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France à fin 2022. Analyses et synthèses. [https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230626\\_as\\_assureurs\\_s2\\_dec2022.pdf](https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230626_as_assureurs_s2_dec2022.pdf).
- ACPR (2024). Programme de travail pour l'année 2024. Communiqué de presse. [https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20240115\\_cp\\_acpr\\_programme\\_de\\_travail\\_2024.pdf](https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20240115_cp_acpr_programme_de_travail_2024.pdf).
- BARNETT, G. et ZEHNWIRTH, B. (2000). Best estimates for reserves. *In Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, volume 87, pages 245–321.
- BCE (2016). A guide to the Eurosystem/ECB staff macroeconomic projection exercises. Rapport technique. <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/other/staffprojectionsguide201607.en.pdf>.
- BERARD, J. (2015). Taux d'intérêt - Risque de défaut. Note de cours, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg.
- BERARD, J. (2023). Modèles linéaires généralisés. Note de cours, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg.
- BERTHIER, J.-P. (2005). Introduction à la pratique des indices. Note de cours, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques.
- BEZBAKH, P. (2019). *Inflation et désinflation*. La Découverte, 7ème édition.
- BJÖRKWALL, S., HÖSSJER, O. et OHLSSON, E. (2009). Non-parametric and parametric bootstrap techniques for age-to-age development factor methods in stochastic claims reserving. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2009(4):306–331.
- BJÖRKWALL, S., HÖSSJER, O. et OHLSSON, E. (2010). Bootstrapping the separation method in claims reserving. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 40(2):845–869.
- BRYDON, D. et VERRALL, R. (2009). Calendar year effects, claims inflation and the chain-ladder technique. *Annals of Actuarial Science*, 4(2):287–301.
- DE FELICE, M. et MORICONI, F. (2023). Stochastic Chain-Ladder Reserving with Modeled General Inflation. *Risks*, 11(12):221.
- EIOPA (2022). Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/?uri=CELEX:32015R0035>.

- EIOPA (2024). Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/?uri=CELEX:32009L0138>.
- GILLI, M., GROSSE, S. et SCHUMANN, E. (2010). Calibrating the nelson-siegel-svensson model. *Available at SSRN 1676747*.
- GROUPE DE TRAVAIL SUR LE PROVISIONNEMENT DES SINISTRES NON-VIE (2023). Guide de provisionnement des sinistres en assurance non-vie. Rapport technique, Institut des actuaires.
- KUANG, D., NIELSEN, B. et NIELSEN, J. P. (2008a). Forecasting with the age-period-cohort model and the extended chain-ladder model. *Biometrika*, 95(4):987–991.
- KUANG, D., NIELSEN, B. et NIELSEN, J. P. (2008b). Identification of the age-period-cohort model and the extended chain-ladder model. *Biometrika*, 95(4):979–986.
- LALLEMAND, T. (2014). Le risque de modèle. Mémoire de master, Université de Strasbourg.
- LE CAMUS-PARADIS, M. (2022). *Les grands principes de l'actuariat*. L'Argus de l'assurance, 3ème édition.
- LÉGIFRANCE (2024). Code des assurances. [https://www.legifrance.gouv.fr/codes/texte\\_lc/LEGITEXT000006073984](https://www.legifrance.gouv.fr/codes/texte_lc/LEGITEXT000006073984).
- MARCZEWSKI, J. (1977). Inflation et chômage, analyse quantitative, méthodologie statistique. *Journal de la Société de statistique de Paris*, 118(4):269–291.
- MCCULLAGH, P. (2019). *Generalized linear models*. Routledge.
- MORICONI, F. (2023). A three-factor market model for incorporating explicit general inflation in non-life claims reserving. *Risks*, 11(10):174.
- PHILLIPS, A. W. (1958). The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957. *economica*, 25(100):283–299.
- PINHEIRO, P., ANDRADE e SILVA, J. M. et CENTENO, M. d. L. (2003). Bootstrap methodology in claim reserving. *Journal of Risk and Insurance*, 70(4):701–714.
- RENSHAW, A. E. et VERRALL, R. (1998). A stochastic model underlying the chain-ladder technique. *British Actuarial Journal*, 4(4):903–923.
- RENSHAW, A. E. et VERRALL, R. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8(3):443–518.
- SHAPLAND, M. R. (2016). Using the ODP Bootstrap Model : A Practitioner's Guide. Casualty Actuarial Society Arlington.
- TAYLOR, G. (1977). Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 9(1-2):219–230.
- VERBEEK, H. G. (1972). An approach to the analysis of claims experience in motor liability excess of loss reinsurance. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 6(3):195–202.

## Annexe A

# Les modèles linéaires généralisés

### A.1 Les résidus de Pearson standardisés

L'objectif de la standardisation est de rapprocher la variance des résidus de sa valeur constante supposée. A cette fin, (Renshaw et Verrall, 2002) proposent d'utiliser un facteur correctif global :

$$r_{i,j}^{PS} = \sqrt{\frac{l}{l-p}} r_{i,j}^P,$$

tandis que (Pinheiro *et al.*, 2003) estiment que la standardisation à l'aide de la hat-matrix  $H$  est un meilleur choix. Dans ce cas les résidus standardisés sont donnés par :

$$r_{i,j}^{PS} = \frac{r_{i,j}^P}{\sqrt{1 - h_{i,j}}},$$

où  $h_{i,j}$  est l'élément correspondant de la diagonale de la hat-matrix.

Dans le cadre de la théorie des modèles GLM l'expression de la hat-matrix est donnée par :

$$H = X \left( X^T W X \right)^{-1} X^T W,$$

où  $X$  est la matrice d'expérience du modèle GLM de taille  $l \times p$  et  $W$  est une matrice diagonale de taille  $p \times p$  constituée par les éléments :

$$W_{ij,ij} = \left( v(\mu_{i,j}) \left( \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \mu_{i,j}} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Le paramètre  $\phi$  est alors estimé par  $\hat{\phi} = \frac{1}{l} \sum_{(i,j) \in \nabla} \left( r_{i,j}^{PS} \right)^2$ .

Selon (Björkwall *et al.*, 2009), les deux approches mènent globalement à des ajustements similaires. Dans le cadre de ce mémoire, la standardisation à l'aide de la hat-matrix a été retenue.

## A.2 La Mean Spread Error of Prediction

En utilisant une approximation de Taylor au premier ordre, (Renshaw et Verrall, 2002) montrent que dans le cadre d'un modèle GLM la MSEP d'une estimation peut s'écrire :

$$\text{MSEP}(\hat{\mu}_{i,j}) \approx \phi v(\hat{\mu}_{i,j}) + \left( \frac{\partial \mu_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} \right)^2 \mathbb{V}(\hat{\eta}_{i,j}),$$

que la MSEP de l'estimation d'une année de survénance peut s'écrire :

$$\text{MSEP}(\hat{\mu}_{i\bullet}) \approx \sum_{j \in \Delta_i} \phi v(\hat{\mu}_{i,j}) + \sum_{j \in \Delta_i} \left( \frac{\partial \mu_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} \right)^2 \mathbb{V}(\hat{\eta}_{i,j}) + 2 \sum_{\substack{j_1, j_2 \in \Delta_i \\ j_2 \geq j_1}} \frac{\partial \mu_{i,j_1}}{\partial \eta_{i,j_1}} \frac{\partial \mu_{i,j_2}}{\partial \eta_{i,j_2}} \mathbb{C}(\hat{\eta}_{i,j_1}, \hat{\eta}_{i,j_2}),$$

et que la MSEP totale peut s'écrire :

$$\text{MSEP}(\hat{\mu}_{\bullet\bullet}) \approx \sum_{(i,j) \in \Delta} \phi v(\hat{\mu}_{i,j}) + \sum_{(i,j) \in \Delta} \left( \frac{\partial \mu_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} \right)^2 \mathbb{V}(\hat{\eta}_{i,j}) + 2 \sum_{\substack{(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \Delta \\ (i_2,j_2) \geq (i_1,j_1)}} \frac{\partial \mu_{i_1,j_1}}{\partial \eta_{i_1,j_1}} \frac{\partial \mu_{i_2,j_2}}{\partial \eta_{i_2,j_2}} \mathbb{C}(\hat{\eta}_{i_1,j_1}, \hat{\eta}_{i_2,j_2}).$$

Les termes de variance et de covariance dans les formules peuvent être obtenus à partir de la matrice de variance covariance des paramètres estimés dans le GLM.

# Annexe B

## Procédures bootstrap

### B.1 Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque de réserve à l'ultime

#### Détail de la procédure bootstrap

##### Etape 1 : Les préliminaires

- Estimer les facteurs de développement  $(f_j)_{0 \leq j \leq n-1}$  à partir du triangle supérieur des montants cumulés observés  $d_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Calculer les montants cumulés estimés par le modèle pour le triangle supérieur  $\hat{d}_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$  par une récurrence à l'envers en partant de la dernière diagonale connue, autrement dit :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \hat{d}_{i,n-i} = d_{i,n-i}$  et  $\hat{d}_{i,k-1} = \hat{d}_{i,k} \hat{f}_k^{-1} \forall k \in \llbracket 1, n-i \rrbracket$ .
- Calculer les montants incrémentaux estimés par le modèle pour le triangle supérieur  $\hat{\mu}_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$  par différence.
- Calculer les résidus de Pearson standardisés  $r_{i,j}^{PS} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Estimer le paramètre de surdispersion  $\hat{\phi}$ .

##### Etape 2 : Boucle bootstrap (pour b allant de 1 à B)

- Rééchantillonner les résidus obtenus à l'étape 1 (tirage avec remise) pour obtenir  $r_{i,j}^{(b)}$  (erreur d'estimation).
- Reconstruire des pseudo données  $c_{i,j}^{(b)} = \hat{\mu}_{i,j} + \sqrt{\hat{\mu}_{i,j}} r_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \nabla$  et calculer les pseudo données cumulés  $d_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Estimer les facteurs de développement et projeter le triangle cumulé à l'aide de la méthode de Chain Ladder  $\hat{d}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$ .
- Calculer le triangle inférieur des montants incrémentaux par différence  $\hat{\mu}_{i,j}^* \forall (i,j) \in \Delta$ .
- Simuler le triangle inférieur selon une loi de Poisson surdispersée avec pour espérance  $\hat{\mu}_{i,j}^*$  et pour variance  $\hat{\phi} \hat{\mu}_{i,j}^*$  pour obtenir  $\hat{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$  (erreur de processus).
- Stocker les résultats obtenus  $\hat{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$ .

##### Etape 3 : Analyse des résultats

- Calculer une estimation de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .
- Calculer une mesure de l'erreur dans l'estimation de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .
- Déterminer la distribution empirique de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .

TABLE B.1 – Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque à l'ultime

## B.2 Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque de réserve à horizon 1 an

La procédure bootstrap pour le risque de réserve à horizon 1 an consiste à appliquer la méthode de Chain Ladder au triangle observé auquel on ajoute une simulation de la prochaine diagonale contenant à la fois l'erreur de processus et l'erreur d'estimation. Cette procédure est détaillée dans le tableau B.2.

### Détail de la procédure bootstrap

#### Etape 1 : Les préliminaires

- Estimer les facteurs de développement  $(f_j)_{0 \leq j \leq n-1}$  à partir du triangle supérieur des montants cumulés observés  $d_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Calculer les montants cumulés estimés par le modèle pour le triangle supérieur  $\widehat{d}_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$  par une récurrence à l'envers en partant de la dernière diagonale connue, autrement dit :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \widehat{d}_{i,n-i} = d_{i,n-i}$  et  $\widehat{d}_{i,k-1} = \widehat{d}_{i,k} \widehat{f}_k^{-1} \forall k \in \llbracket 1, n-i \rrbracket$ .
- Calculer les montants incrémentaux estimés par le modèle pour le triangle supérieur  $\widehat{\mu}_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$  par différence.
- Calculer les résidus de Pearson standardisés  $r_{i,j}^{PS} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Estimer le paramètre de surdispersion  $\widehat{\phi}$ .

#### Etape 2 : Boucle bootstrap (pour b allant de 1 à B)

- Rééchantillonner les résidus obtenus à l'étape 1 (tirage avec remise) pour obtenir  $r_{i,j}^{(b)}$  (erreur d'estimation).
- Reconstruire des pseudo données  $c_{i,j}^{(b)} = \widehat{\mu}_{i,j} + \sqrt{\widehat{\mu}_{i,j}} r_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \nabla$  et calculer les pseudo données cumulés  $d_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \nabla$ .
- Estimer les facteurs de développement et projeter le triangle cumulé sur la prochaine diagonale à l'aide de la méthode de Chain Ladder  $\widehat{d}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$  avec  $i+j = n+1$ .
- Calculer les montants décumulés obtenus sur la prochaine diagonale par différence  $\widetilde{\mu}_{i,j}^{(*)} \forall (i,j) \in \Delta$  avec  $i+j = n+1$ .
- Simuler la prochaine diagonale selon une loi de Poisson surdispersée avec pour espérance  $\widetilde{\mu}_{i,j}^*$  et pour variance  $\widehat{\phi} \widetilde{\mu}_{i,j}^*$  pour obtenir  $\widetilde{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$  avec  $i+j = n+1$  (erreur de processus).
- Construire le triangle de montants décumulés composés par les montants décumulés observés pour le triangle supérieur  $c_{i,j} \forall (i,j) \in \nabla$  et par les montants décumulés simulés pour la prochaine diagonale  $\widetilde{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$  avec  $i+j = n+1$ .
- Cumuler le triangle obtenu, estimer les facteurs de développement et projeter le triangle cumulé à l'aide de la méthode de Chain Ladder.
- Décumuler le triangle projeté et stocker les résultats obtenus  $\widehat{\mu}_{i,j}^{(b)} \forall (i,j) \in \Delta$ .

#### Etape 3 : Analyse des résultats

- Calculer une estimation de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .
- Calculer une mesure de l'erreur dans l'estimation de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .
- Déterminer la distribution empirique de  $\mu_{i\bullet} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mu_{\bullet\bullet}$ .

TABLE B.2 – Procédure bootstrap de la méthode de Chain Ladder pour le risque à horizon 1 an

Il est important de remarquer que lorsque les facteurs de développement sont estimés sur le triangle augmenté de la prochaine diagonale, une information supplémentaire est connue, ce qui change légèrement l'estimateur des facteurs de développement en comparaison d'une application classique de la méthode de Chain Ladder. Pour tenir compte de la connaissance des paiements de l'année  $n+1$ , les facteurs de développement sont estimés de la manière suivante :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} D_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} D_{i,j}}.$$

## B.3 Procédure bootstrap de la méthode de séparation de Taylor pour le risque de réserve à horizon 1 an

### Détail de la procédure bootstrap

#### Etape 1 : Monde réel

##### Sous-étape 1.1 : Le triangle de nombre de sinistres $\nabla N$

- Projeter les futures valeurs espérées  $\nabla n$  par Chain Ladder.
- Calculer le nombre de sinistres ultime par année de survenance  $\widehat{N}_i$ .

##### Sous-étape 1.2 : Le triangle de règlements $\nabla C$

- Utiliser  $\widehat{N}_i$  de la sous-étape 1.1 dans le but de projeter les futures valeurs espérées  $\Delta \widehat{m}$  et calculer les valeurs prédites  $\nabla \widehat{m}$  par la méthode de séparation de Taylor.
- Calculer  $\widehat{\phi}$  pour le rééchantillonnage.
- Calculer les réserves  $\widehat{R}_i = \sum_{j \in \Delta_i} \widehat{m}_{i,j}$  et  $\widehat{R} = \sum_{\Delta} \widehat{m}_{i,j}$ .

#### Etape 2 : Monde bootstrap

- Simuler une trajectoire de l'inflation future pour la prochaine année à l'aide d'une approche présentée dans la partie 2.2.2.

##### Sous-étape 2.1 : L'estimation des réserves

- Rééchantillonner les règlements à partir de l'équation (2.5) pour obtenir la pseudo réalité dans  $\nabla C^*$ .
- Utiliser  $\widehat{N}_i$  et la simulation de l'inflation future obtenue au début de l'étape 2 dans le but d'estimer les futures valeurs espérées  $\widehat{m}^*$  par la méthode de séparation de Taylor pour la prochaine diagonale.
- Construire le triangle de montants décumulés composés par le triangle de règlements observés  $\nabla C$  et la prochaine diagonale obtenue au point précédent.
- Utiliser  $\widehat{N}_i$  et la projection moyenne de l'inflation dans le but d'estimer les futures valeurs espérées  $\widehat{m}^*$  par la méthode de séparation de Taylor pour le reste du triangle.
- Calculer les estimateurs des réserves  $\widehat{R}_i^* = \sum_{j \in \Delta_i} \widehat{m}_{i,j}^*$  et  $\widehat{R}^* = \sum_{\Delta} \widehat{m}_{i,j}^*$ .

##### Sous-étape 2.2 : Les vraies réserves

- Rééchantillonner les règlements à partir de l'équation (2.5) pour obtenir la pseudo réalité dans la prochaine diagonale  $\widehat{m}^{**}$ .
- Construire le triangle de montants décumulés composés par le triangle de règlements observés  $\nabla C$  et la prochaine diagonale obtenue au point précédent.
- Utiliser  $\widehat{N}_i$  et la projection moyenne de l'inflation dans le but d'estimer les futures valeurs espérées  $\widehat{m}^{**}$  par la méthode de séparation de Taylor pour le reste du triangle.
- Calculer les vraies réserves  $\widehat{R}_i^{**} = \sum_{j \in \Delta_i} \widehat{m}_{i,j}^{**}$  et  $\widehat{R}^{**} = \sum_{\Delta} \widehat{m}_{i,j}^{**}$ .
- Stocker l'erreur de prédiction non-standardisée (2.6).
- Retourner au début de la boucle bootstrap dans l'étape 2 et répéter  $B$  fois.

#### Etape 3 : Analyse des simulations

- Obtenir la distribution des vraies réserves dans le monde réel  $R_i$  et  $R$ .

TABLE B.3 – Procédure bootstrap de la méthode de séparation de Taylor pour le risque à horizon 1 an

Il est important de remarquer que lorsque la méthode de séparation de Taylor est appliquée au triangle augmenté de la prochaine diagonale, il est nécessaire de spécifier les montants de coût moyen  $s_{n+1,0}$  et  $s_{0,n+1}$  pour pouvoir appliquer la méthode. Dans la sous-étape 2.1, il est proposé de spécifier  $s_{0,n+1} = 0$  et  $s_{n+1,0} = \widehat{r}_0 \widehat{\lambda}_{n+1}$  où  $\widehat{r}_0$  et  $\widehat{\lambda}_{n+1}$  correspondent aux estimateurs obtenus au deuxième point de la sous-étape 2.1. Dans la sous-étape 2.2, il est proposé de spécifier  $s_{0,n+1} = 0$  et  $s_{n+1,0} = \widehat{r}_0 \widehat{\lambda}_{n+1}$  où  $\widehat{r}_0$  et  $\widehat{\lambda}_{n+1}$  correspondent aux estimateurs obtenus dans la sous-étape 1.2.

## Annexe C

# Anticipation de l'inflation dans les cotations des OAT et des OAT€i sous l'approche de *marché*

Soit une OAT de date d'émission  $T_0$ , de dates d'échéance  $T_1, \dots, T_n$ , de taux de coupon  $c$  et de valeur nominale  $V_{\text{nom}}$ . Dans le cadre de l'approche de *marché*, à un instant  $t \in ]T_{i-1}, T_i]$ , la valeur actuelle des flux de paiements futurs est donnée par :

$$\begin{aligned} V_t^{\text{OAT}} &= \check{\mathbb{E}}_t^r \left[ cV_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n e^{-\int_t^{T_j} r(s)ds} \right) + V_{\text{nom}} e^{-\int_t^{T_n} r(s)ds} \right] \\ &= cV_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n \check{\mathbb{E}}_t^r \left[ e^{-\int_t^{T_j} r(s)ds} \right] \right) + V_{\text{nom}} \check{\mathbb{E}}_t^r \left[ e^{-\int_t^{T_n} r(s)ds} \right] \\ &= cV_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n v^{\text{HW}}(t, T_j) \right) + V_{\text{nom}} v^{\text{HW}}(t, T_n). \end{aligned}$$

En introduisant le taux spot d'intérêt nominal  $R$ , la valeur actuelle de l'OAT s'écrit également :

$$V_t^{\text{OAT}} = cV_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n e^{-R(t, T_j)(T_j - t)} \right) + V_{\text{nom}} e^{-R(t, T_j)(T_n - t)},$$

de sorte que  $e^{-R(t, T)(T-t)} = v^{\text{HW}}(t, T)$ , d'où :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log \left( v^{\text{HW}}(t, T) \right).$$

De la même manière, soit une OAT€i indexée sur un indice des prix à la consommation  $p_g$ , de date d'émission  $T'_0$ , de dates d'échéance  $T'_1, \dots, T'_n$ , de taux de coupon  $c'$  et de valeur nominale  $V'_{\text{nom}}$ . Dans le cadre de l'approche de *marché*, à un instant  $t \in ]T'_{i-1}, T'_i]$ , la valeur actuelle des flux de paiements futurs est donnée, grâce à l'indépendance entre l'inflation générale et les taux d'intérêt, par :

$$\begin{aligned}
 V_t^{\text{OAT€i}} &= \mathbb{E}_t^{p_g \otimes r} \left[ c' V'_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n \frac{p_g(T'_j)}{p_g(t)} e^{-\int_t^{T'_j} r(s) ds} \right) + V'_{\text{nom}} \frac{p_g(T'_n)}{p_g(t)} e^{-\int_t^{T'_n} r(s) ds} \right] \\
 &= c' V'_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n \mathbb{E}_t^{p_g} \left[ \frac{p_g(T'_j)}{p_g(t)} \right] \mathbb{E}_t^r \left[ e^{-\int_t^{T'_j} r(s) ds} \right] \right) + V'_{\text{nom}} \mathbb{E}_t^{p_g} \left[ \frac{p_g(T'_n)}{p_g(t)} \right] \mathbb{E}_t^r \left[ e^{-\int_t^{T'_n} r(s) ds} \right] \\
 &= c' V'_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n \check{m}_{p_g}(t, T'_j) v^{\text{HW}}(t, T'_j) \right) + V'_{\text{nom}} \check{m}_{p_g}(t, T'_n) v^{\text{HW}}(t, T'_n).
 \end{aligned}$$

En introduisant le taux spot d’intérêt réel  $\bar{R}$ , la valeur actuelle de l’OAT€i s’écrit également :

$$V_t^{\text{OAT}} = c V_{\text{nom}} \left( \sum_{j=i}^n e^{-\bar{R}(t, T_j)(T_j - t)} \right) + V_{\text{nom}} e^{-\bar{R}(t, T_j)(T_n - t)},$$

de sorte que  $e^{-\bar{R}(t, T)(T - t)} = \check{m}_{p_g}(t, T) v^{\text{HW}}(t, T)$ , d’où :

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \left[ \log(\check{m}_{p_g}(t, T)) + \log(v^{\text{HW}}(t, T)) \right] \\
 &= -\frac{1}{T-t} \left[ \int_t^T \check{y}(s) ds + \log(v^{\text{HW}}(t, T)) \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi, l’estimation de la courbe des taux d’intérêt nominaux  $T \mapsto R(t, T)$ , et de la courbe des taux d’intérêt réels  $T \mapsto \bar{R}(t, T)$ , à partir des cotations observées des OAT et des OAT€i, permet par différence d’obtenir :

$$\check{i}(t, T) = R(t, T) - \bar{R}(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \check{y}(s) ds,$$

correspondant à la valeur moyenne de l’inflation anticipée entre  $t$  et  $T$ .