

Mémoire présenté devant l'Institut des Actuares
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuares

le 04/04/2023

Par : Mariama BALDE

Titre : Optimisation de la structure de réassurance du risque Cyber

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuares :*

Entreprise :

Nom : GIE Axa

Signature : *Anne Suchel*

*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

Directeur de Mémoire en entreprise :

Nom : Anne SUCHEL

Signature : *Anne Suchel*

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Anne Suchel

Bibliothèque :

Signature du candidat

MB

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les pistes d'optimisation de la structure de réassurance de la branche Cyber du groupe Axa. La structure de réassurance est l'ensemble des traités souscrits pour protéger le groupe Axa en cas de sinistres importants. Pour le cyber, cette structure repose sur des traités quote-part dits « locaux » couvrant individuellement les entités du groupe, et des traités dits « Groupe » proportionnels et non proportionnels couvrant l'ensemble du groupe Axa.

Il est possible de modéliser la structure actuelle et d'observer, pour différents scénarios annuels de pertes cyber brutes, modélisées par entité, quelle sera la perte nette totale pour le groupe. La fonction de modélisation est implémentée et validée par comparaison des pertes nettes totales renvoyées par le modèle construit et celles renvoyées par l'outil de simulation Remetrica.

On s'intéresse à différents indicateurs évaluant la performance de la structure : marge cédée, réduction de la volatilité et des pertes extrêmes, courbes AEP et OEP. Cela permet de donner une vision de ce que la structure, dans ses conditions actuelles, peut renvoyer comme résultat.

L'optimisation des paramètres se fait par deux algorithmes méta-heuristiques dont le choix se justifie par la nature du problème : l'algorithme génétique et l'algorithme par essaim particulaire. Une approche par classement à partir de scores calculés sur plusieurs indicateurs permet de comparer quelques versions de la structure envisageables par Axa.

Les résultats de toutes ces méthodes sont confrontés et analysés pour conclure sur l'allure à retenir pour la structure optimale. L'évolution de certains facteurs, externes à la structure, telle l'exposition ou les taux de change est également prise en compte pour cibler l'optimisation sur les entités ou LoB ayant le plus d'impact sur les résultats de la structure de réassurance.

Mots-clés : réassurance, optimisation, cyber, indicateurs, analyse de sensibilités.

Abstract

The objective of this dissertation is to study ways to optimize the reinsurance structure of the Cyber branch of Axa group. The reinsurance structure is the set of treaties subscribed to protect the group in case of major losses. For Cyber, this structure is based on "local" quota share treaties covering individually the group entities, and "Group" proportional and non-proportional treaties covering the entire Axa group.

It is possible to model the current structure and observe, for different annual scenarios of gross cyber losses, modeled by entity, what the total net loss for the group will be after reinsurance. The modeling function is implemented and validated by comparing the total net losses returned by the constructed model with those returned by the Remetrica simulation tool.

We focus on different indicators that evaluate the performance of the structure: ceded margin, volatility reduction and extreme losses reduction, AEP and OEP curves. This gives a vision of what the structure, under its current conditions, can return as a result.

The optimization of the parameters is done by two meta-heuristic algorithms chosen to be the most fitting given the nature of the problem: the genetic algorithm and the particle swarm algorithm. A ranking approach based on scores computed on several indicators allows to compare some versions of the structure that Axa could consider.

The results of all these methods are compared and analyzed to conclude on the optimal structure. The evolution of certain factors, external to the structure, such as exposure or exchange rates is also considered to target the optimization on the entities or LoB which have the most impact on the results of the reinsurance structure.

Keywords: reinsurance, optimization, cyber, indicators, sensitivity analysis.

Note de Synthèse

L'assurance Cyber : contexte actuel

L'assurance Cyber est depuis quelques années un sujet central dans l'environnement assurantiel à tous les niveaux. Le risque Cyber se définit comme le risque de défaillance des systèmes électroniques et informatiques ou d'atteinte aux données informatiques. Il peut entraîner différents types de dégâts : les dommages résultant d'une action humaine délibérée (attaques cyber) ou non (erreur d'un collaborateur) ; les pannes qu'elles proviennent des systèmes utilisés ou des processus internes défaillants, et finalement les événements externes comme les catastrophes naturelles. Le risque cyber prend de plus en plus d'ampleur et le marché de la Cyber assurance suit la même tendance. Cependant les conditions d'assurabilité de ce risque peuvent être questionnées. Un certain nombre de critères d'assurabilité sont analysés pour le cas du Cyber.

	Critères d'assurabilité	Satisfait ?
Actuariel	1) Caractère aléatoire	Aspect aléatoire limité
	2) Perte maximum probable	Existence de limites dans les contrats
	3) Perte moyenne par événement	Pertes moyennes raisonnables
	4) Exposition	Exposition sur le marché croissante
	5) Asymétrie d'information	Asymétrie d'information importante
Marché	6) Prime d'assurance	Pas très abordable et difficile à estimer
	7) Limites de couverture	Limites suffisantes
Sociétal	8) Politique publique	Selon la politique/ réglementation, on peut favoriser ou freiner l'essor de l'assurance Cyber
	9) Restrictions légales	

TABLE 1 : Critères d'assurabilité et exigences selon Berliner

En cyber, les assureurs rencontrent bien certaines difficultés avec ces critères mais parviennent généralement à les dépasser pour proposer des couvertures. Cela nécessite une modélisation du risque porté par les portefeuilles souscrits. Le manque cruel de données de sinistres et les caractéristiques de ce risque (évolutif, contagieux, systémique...) ne facilitent pas sa modélisation. On retient une approche par scénarios d'événements Cyber dont les pertes sont calculées sur chaque assuré. Pour chaque scénario, la fréquence de survenance et la sévérité sont modélisées en s'appuyant sur les informations des différents assurés : la fréquence est estimée par jugement d'experts, tandis que la modélisation du coût utilise une approche par exposition (proche du modèle CAT).

Problématique : optimisation de la structure

Dans un groupe comme Axa, la réassurance est essentielle pour contenir l'exposition en cédant une partie du risque. Pour le Cyber, il existe une structure composée des traités de réassurance des entités locales (Quote-Part) ainsi que des traités souscrits au niveau du groupe (Quote-Part et Stop Loss).

L'ensemble définit plusieurs paramètres de traité (taux de cession, limites et rétentions) ; l'objectif de l'étude étant d'optimiser ces paramètres pour avoir la structure la plus efficiente du point de vue du groupe Axa.

Réplication et validation de la structure

On retrouve 8 entités locales dites GIs (General Insurance) qui proposent chacune un unique traité QP* pour toutes les branches cyber qu'elle couvre. L'entité Axa XL qui est dominante en termes de taille de portefeuilles, propose différents traités pour ses nombreuses branches, principalement des QP. Le groupe Axa vient compléter cette réassurance par un traité QP dit groupe QS et un traité SL, groupe Aggregate. La structure Cyber est modélisée sur R par une fonction, qui à partir d'un jeu de pertes et de toutes les informations de la structure (paramètres de tous les traités) en entrée, va calculer les résultats de la réassurance pour les différents traités sur chaque perte. Les informations de la structure sont formalisées pour être facilement applicables par cette fonction sur les données de pertes modélisées par le GRM d'Axa. Pour admettre ce programme de réplication comme valide, on compare les pertes du groupe après réassurance qu'on calcule sur R à celles renvoyées par le logiciel de modélisation Remetrica. Avec une tolérance de 1%, on a 4% de différences, chiffre qui tombe à 0,53% avec une tolérance de 10%.

Indicateurs de performance retenus

Une série d'indicateurs retenus sont calculés sur le jeu de pertes soumis à la structure. Les AEP et OEP sont respectivement les distributions des pertes annuelles totales et des pertes annuelles maximales. On s'intéresse à la moyenne, au quantile à 99,5% (bicentenaire) et au quantile à 95% (vingtenaire) de ces distributions. La marge cédée et le résultat de l'assureur (groupe Axa) sont aussi calculés par pertes unitaires qui agrégées par année renvoient une distribution permettant de retrouver la moyenne et les deux quantiles d'intérêt. Le coefficient de réduction de volatilité est calculé pour déterminer comment la variabilité des pertes, mesurée par l'écart-type, évolue quand elles sont soumises à la réassurance. La réduction de la perte totale (AEP) bicentenaire est-elle mesurée par l'indicateur de réduction de T_{Var} . Le dernier indicateur mesure la limite du traité Groupe QS pour donner une idée de la difficulté de placement de ce traité en pratique.

Indicateurs	Moyen/Bicentenaire/Vingtenaire				Coefficients de réduction		SCR	Capacité Group QS
	AEP	OEP	Résultat	Marge Cédée	Volatilité	T_Var		
Importance	Bicentenaire *** Moyen** Vingtenaire*		Bicentenaire * Moyen*** Vingtenaire*		***	*	***	**
Complexité	Bicentenaire *** Moyen* Vingtenaire***		Bicentenaire *** Moyen** Vingtenaire***		*	**	***	**

TABLE 2 : Indicateurs étudiés

*QP ou QS désignent les traités Quote-Part ou Quota Share en anglais

Algorithmes d'optimisation utilisés

Les deux algorithmes bio-inspirés qu'on utilise sont l'algorithme génétique et l'algorithme par essaim particulaire (dit PSO). Les paramètres à optimiser sont les suivants :

- Les taux de cession de 4 entités Axa locales
- Les taux de cession des portefeuilles A et B de l'entité Axa XL
- Les limites annuelles des traités groupe (groupe QS et groupe Aggregate)
- La rétention du traité groupe Aggregate

Cet ensemble de 9 paramètres forment un vecteur d'entrée des algorithmes qu'on fait évoluer pour tendre vers un vecteur optimal selon une fonction objectif qui est définie par un des indicateurs ou plusieurs indicateurs combinés. Les fonctions objectif retenues pour cette optimisation utilisent l'OEP bicentenaire, la marge cédée moyenne, et la réduction de volatilité.

L'algorithme génétique

Cet algorithme fait évoluer une population d'individus sur plusieurs générations qui sont les itérations. L'individu correspond au vecteur des 9 paramètres à optimiser ci-dessous. C'est en réalité toute une population, ensemble d'individu qu'on optimise avec cet algorithme jusqu'à la dernière itération où le choix du meilleur individu de cette population finale s'impose comme solution retenue. À chaque itération, 3 processus permettent de faire évoluer la population P_t vers P_{t+1} : les processus de sélection, de croisement, et de mutation. Ils permettent successivement de :

- 1) Piocher les meilleurs individus au sens de la fonction objectif minimale au sein de P_t
- 2) Modifier leurs paramètres par groupe de 2 (probabilité de croisement)
- 3) Transformer certains paramètres de chaque individu (avec une probabilité de mutation)

L'algorithme génétique s'arrête quand la population finale est suffisamment homogène et le meilleur individu est renvoyé comme point d'optimum. Un critère d'arrêt aussi utilisé est d'atteindre un nombre maximal d'itérations fixées, c'est cela qui est fait ici.

L'algorithme PSO

Il fonctionne également en faisant évoluer un essaim (ensemble de particules) d'une itération à l'autre selon une logique imitant le comportement de certains insectes sociaux. La particule X_k , qui est le vecteur de 9 paramètres à l'itération k , est mise à jour selon trois directions, chacune ayant une importance plus ou moins grande selon le poids qui lui est associée.

- La particule se déplace fidèlement à sa position actuelle avec un poids w ;
- La particule tend à revenir vers la meilleure position qu'elle a rencontrée par le passé ($pbest$) avec un poids c_1 ;
- La particule tend à se diriger vers le meilleur site qu'un de ses voisins a déjà déclaré avoir atteint ($gbest$) avec un poids c_2 . Sa nouvelle position se calcule avec la formule

$$X_{k+1} = X_k + wX_k + c_1(pbest_k - X_k) + c_2(gbest_k - X_k).$$

Résultats des algorithmes

Paramètres	Algorithme génétique	Algorithme PSO
Axa.E.QS	max	max
Axa.C.QS	max	max
Axa.B.QS	max	max
Axa.A.QS	max	max
Limite groupe QS	max	max
Limite Aggregate		min
Retention Aggregate		max
Portefeuille A QS - groupe	min	min
Portefeuille B QS - groupe	max	max

TABLE 3 : Résultats et limites des algorithmes d'optimisation

L'algorithme génétique implémenté sur une population de 60 individus au cours de 40 itérations suggère une cession importante des pertes sur les principaux traités locaux. On a des taux de cessions maximaux sur les deux grosses entités GI du groupe (Axa E et Axa C). En cédant le moins possible sur le traité groupe QS avec les portefeuilles A et B d'Axa XL, la cession sur les traités locaux de ces 2 portefeuilles devient en contrepartie très importante. L'algorithme PSO s'aligne sur cette idée de cession maximale sur tous les traités considérés même si on note une divergence sur le portefeuille A de Axa XL. Ce deuxième algorithme tend plutôt à couvrir ce portefeuille en priorité par le traité groupe plutôt que local.

Optimisation par scoring

Un groupe de 7 versions de structure de réassurance sont comparées entre elles pour retenir la meilleure. Il s'agit de la structure dans son état actuel et 3 couples d'options prenant des paramètres modifiés sur : le portefeuille A de Axa XL, le portefeuille B de Axa XL, les deux portefeuilles A et B de Axa XL. Chaque couple présente une version avec la limite actuelle du traité groupe QS (version a) et une autre avec une hausse de cette limite (version b).

Options	Paramètres				Loss Ratio cap
	Tx cession A	Tx cession A Grp	Tx cession B	Tx cession B Grp	
Opt Exp	α	α'	β	β'	γ
Opt 1a	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	β	β'	γ
Opt 1b	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	β	β'	$\gamma+2$
Opt 2a	α	α'	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	γ
Opt 2b	α	α'	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	$\gamma+2$
Opt 3a	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	γ
Opt 3b	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	$\gamma+2$

TABLE 4 : L'évolution des paramètres observés sur les différentes options

En se fiant aux indicateurs de la figure suivante on voit que l'option 2b se démarque comme la plus intéressante sur la plupart des indicateurs. Il s'agit de l'option qui transfère une partie de la cession du traité local (Axa XL portefeuille B) vers le traité groupe QS. On peut expliquer cela principalement par une volonté d'augmenter la capacité mutualisée du traité groupe QS commission.

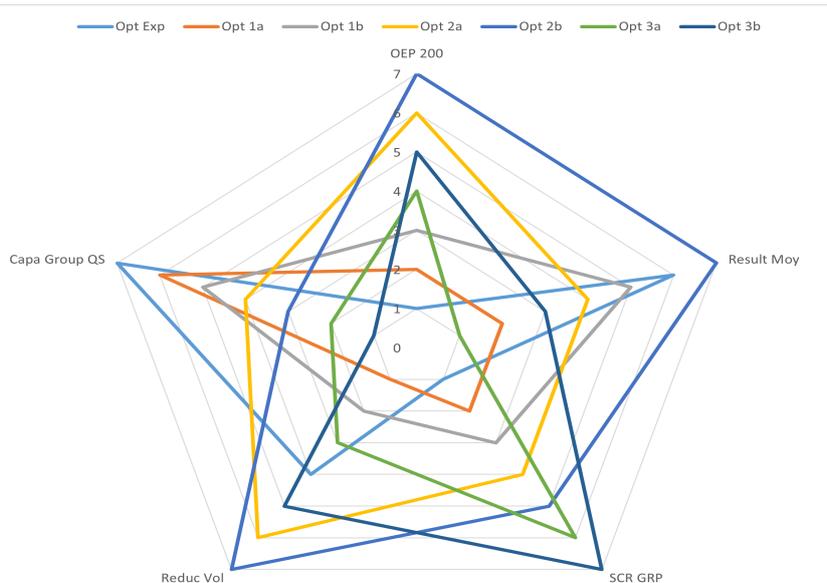


FIGURE 1 : Classement des options (sur 5 indicateurs)

Un classement plus général peut être réalisé en considérant comme critère les écarts relatifs de chaque option à la meilleure option de l'indicateur ; ces écarts sont sommés pour tous les indicateurs. Cette méthode permet d'aboutir à un score qui prend en compte autant d'indicateurs que souhaité en attribuant des poids à chaque indicateur dans la somme selon l'importance qu'il tiendra dans le classement. Le score de l'option j se calcule par

$$S_j = \sum_{i \in \text{Indic}} S_{i,j},$$

avec $S_{i,j} = i - \text{optim}_{j=1..7i}$, et $\text{optim} = \text{max}$ ou min .

Classement	Option	Ecart
1	2b	0,2132
2	2a	0,6641
3	Actuelle	0,8658
4	1b	0,9223
5	3b	1,2233
6	3a	1,7483
7	1a	1,9692

TABLE 5 : Classement des options avec les valeurs standardisées

Ce nouveau critère construit confirme que l'option 2b est la plus intéressante. Il permet aussi de noter que la structure dans son état actuel reste plus optimale que les options 1 et 3. Ce classement dépend évidemment des poids accordés à chaque indicateur dans la formule.

Evolution de la structure dûe aux facteurs externes

Dans une structure où interviennent des portefeuilles de divers pays, et aux expositions propres à chacun, la réassurance est affectée par ces deux facteurs dits externes. À l'aide de la méthode de criblage de Morris on fait varier 5 paramètres importants qui sont le taux de change USD, et les expositions des plus gros portefeuilles, à savoir les entités Axa A, Axa E et les portefeuilles A et B d'Axa XL. Le graphique de sensibilité (par méthode de Morris) renvoyé indique en abscisse la sensibilité de la structure aux paramètres et en ordonnée la linéarité et la corrélation aux autres paramètres.

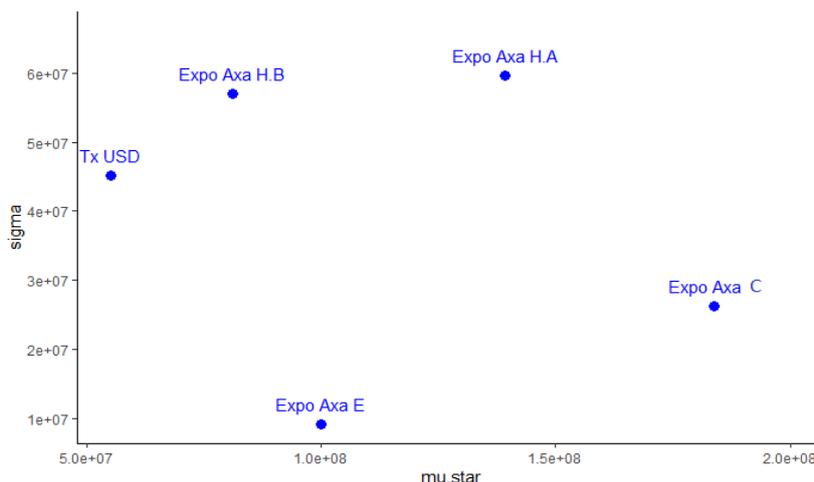


FIGURE 2 : Résultats Morris

On observe comme attendu une corrélation importante sur les portefeuilles d'Axa XL souscrits en USD et sur le taux USD. Les sensibilités ne suivent pas la taille du portefeuille, l'exposition de l'entité Axa C a plus d'impact sur la structure Cyber que les expositions sur Axa XL par exemple. Au final on montre que la réaction de la structure à ces facteurs internes peut dépendre en plus de la taille du portefeuille, de la qualité de réassurance de ce portefeuille. Axa XL étant mieux réassuré, les chocs sur ses paramètres externes l'affectent beaucoup moins.

Conclusion et pistes d'ouverture

On a choisi un panel d'indicateurs de performance de la structure assez complémentaires sur lesquels l'optimisation abordée avec différentes méthodes est effectuée. Les algorithmes génétiques et PSO donnent des tendances qui se rapprochent, même si la convergence est approximative, sur l'indicateur de marge cédée en particulier. On a donc des algorithmes qui favorisent la cession des pertes autant que possible et prennent peu en compte la contrepartie perdue en résultat/marge cédée. Une comparaison entre sept options de la structure permet d'identifier la meilleure selon chaque indicateur. Un classement est aussi réalisé en prenant en compte tous les indicateurs avec différents poids qu'il est possible d'ajuster. Finalement, la sensibilité de la structure de réassurance aux taux de change des différentes entités et leur niveau d'exposition montrent que les chocs sur chaque portefeuille peuvent avoir un impact important, parfois indépendamment de sa taille.

Pour aller plus loin, une piste serait d'implémenter pour notre problème des algorithmes de la littérature qui combinent ceux utilisés dans cette étude (GA et PSO) qui sont HPSOGA et HGAPSO. Des méthodes comme Sobol ou Shapley peuvent être envisagées pour pousser l'analyse de sensibilité.

Synthesis note

Cyber insurance: current context

Cyber insurance has been a central topic in the insurance environment at all levels for several years. Cyber risk is defined as the risk of failure of electronic and computer systems or computer data damage. It can lead to different types of damage: damage resulting from deliberate human action (cyber attacks) or not (employee error); breakdowns, whether they come from the systems used or from faulty internal processes; and finally external events such as natural disasters. The cyber risk is becoming more and more important and the cyber insurance market is following the same trend. However, the conditions for insurability of this risk can be questioned. A certain number of insurability criteria are analyzed for the Cyber case.

	Criteria of insurability	Satisfied?
Actuarial	1) Randomness	Limited randomness
	2) Probable maximum loss	Existence of limits in contracts
	3) Average loss per event	Reasonable average losses
	4) Exposure	Increasing market exposure
	5) Information asymmetry	Significant information asymmetry
Market	6) Insurance Premiums	Not very affordable and difficult to estimate
	7) Coverage Limits	Sufficient Limits
Social	8) Public policy	Depending on policy/ regulation, the growth of cyber insurance may be encouraged or inhibited
	9) Legal restrictions	

Table 6: Insurability criteria and requirements according to Berliner

In cyber, insurers do encounter certain difficulties with these criteria, but generally manage to overcome them in order to propose covers. This requires modeling the risk carried by the portfolios underwritten. The cruel lack of claims data and the characteristics of this risk (evolving, contagious, systemic...) do not facilitate its modeling. We use a scenario-based approach for Cyber events, where losses are calculated for each insured. For each scenario, the frequency of occurrence and the severity are modeled based on the information of the different insureds: the frequency is estimated by expert judgement, while the modeling of the cost uses an approach by exposure (similar to the CAT model).

Problem: structure optimization

In a group like Axa, reinsurance is essential to contain the exposure by ceding part of the risk. For Cyber, there is a structure composed of reinsurance treaties of local entities (Quote-Part) as well as treaties underwritten at the group level (Quote-Part and Stop Loss). The set defines several treaty parameters (cession rates, limits and retentions); the objective of the study is to optimize these parameters to have the most efficient structure from the point of view of the Axa group.

Replication and validation of the structure

There are 8 local entities called GIs (General Insurance), each of which offers a single QP treaty * for all the cyber branches it covers. The Axa XL entity, which is dominant in terms of portfolio size, offers different treaties for its numerous lines of business, mainly QPs. The Axa group completes this reinsurance with a QP treaty called Group QS and an SL treaty, Group Aggregate. The Cyber structure is modeled on R by a function, which from a set of losses and all the structure information (parameters of all treaties) as input, will calculate the reinsurance results for the different treaties on each loss. The structure information is formalized to be easily applicable by this function on the loss data modeled by the Axa GRM. To admit this replication program as valid, we compare the group losses after reinsurance that we calculate on R to those returned by the Remetrica modeling software. With a tolerance of 1%, we have 4% of differences, a figure which falls to 0,53% with a tolerance of 10%.

Performance indicators

A series of indicators are calculated on the set of losses submitted to the structure. The AEP and OEP are the distributions of total annual losses and maximum annual losses, respectively. We are interested in the mean, the 99.5% quantile (bicentennial) and the 95% quantile (twentieth century) of these distributions. The margin ceded and the result of the insurer (Axa group) are also calculated by unitary losses which, when aggregated by year, return a distribution allowing to find the mean and the two quantiles of interest. The volatility reduction coefficient is calculated to determine how the variability of the losses, measured by the standard deviation, changes when they are subject to reinsurance. The two-year total loss reduction (TLR) is measured by the T_{Var} reduction indicator. The last indicator measures the limit of the QS Group treaty to give an idea of the difficulty of placing this treaty in practice.

Indicators	Mean/Bicentennial/Twentieth				Reduction coefficients		SCR	Group QS Capacity
	AEP	OEP	Result	Ceded Margin	Volatility	T_Var		
Importance	Bicentennial *** Mean** Twentieth*		Bicentennial * Mean*** Twentieth*		***	*	***	**
Complexity	Bicentennial *** Mean* Twentieth***		Bicentennial *** Mean** Twentieth***		*	**	***	**

Table 7: Indicators studied

Optimization algorithms used

The two bio-inspired algorithms used are the genetic algorithm and the particle swarm algorithm (known as PSO). The parameters to be optimized are the following:

- The transfer rates of 4 local Axa entities
- The cession rates of the portfolios A and B of the Axa XL entity

*QP or QS refers to Quote-Part or Quota Share treaties

- The annual limits of the group treaties (Group QS and Group Aggregate)
- The retention of the Group Aggregate treaty

This set of 9 parameters forms an input vector for the algorithms that is made to evolve towards an optimal vector according to an objective function that is defined by one of the indicators or several combined indicators. The objective functions chosen for this optimization use the bicentennial OEP, the average margin given up, and the volatility reduction.

The genetic algorithm

This algorithm evolves a population of individuals over several generations which are the iterations. The individual corresponds to the vector of the 9 parameters to be optimized below. It is in fact a whole population, a set of individuals that we optimize with this algorithm until the last iteration where the choice of the best individual of this final population is imposed as the adopted solution. At each iteration, 3 processes allow the population P_t to evolve towards P_{t+1} : the selection, crossing and mutation processes. They allow successively to :

- 1) Pick the best individuals according to the minimal objective function within P_t .
- 2) Modify their parameters by groups of 2 (crossing probability)
- 3) Transform some parameters of each individual (with a mutation probability)

The genetic algorithm stops when the final population is sufficiently homogeneous and the best individual is returned as the optimum point. A stopping criterion also used is to reach a maximal number of iterations fixed, that is what is done here.

The PSO algorithm

It also works by evolving a swarm (set of particles) from one iteration to another according to a logic mimicking the behavior of some social insects. The particle X_k , which is the vector of 9 parameters at iteration k , is updated according to three directions, each having a greater or lesser importance according to the weight associated with it.

- The particle moves faithfully to its current position with weight w ;
- The particle tends to return to the best position it has encountered in the past ($pbest$) with a weight c_1 ;
- The particle tends to move toward the best site that one of its neighbors has already reported reaching ($gbest$) with a weight c_2 . Its new position is calculated with the formula

$$X_{k+1} = X_k + wX_k + c_1(pbest_k - X_k) + c_2(gbest_k - X_k).$$

Results of the algorithms

Parameters	Genetic algorithm	PSO Algorithm
Axa_E.QS	max	max
Axa_C.QS	max	max
Axa_B.QS	max	max
Axa_A.QS	max	max
Group QS Limit	max	max
Aggregate Limit		min
Aggregate Retention		max
Portfolio A QS - Group	min	min
Portfolio B QS - Group	max	max

Table 8: Results and limits of the optimization algorithms

The genetic algorithm implemented on a population of 60 individuals during 40 iterations suggests a significant cession of losses on the main local treaties. We have maximum cession rates on the two large GI entities of the group (Axa E and Axa C). By ceding as little as possible on the Group QS treaty with Axa XL portfolios A and B, the cession on the local treaties of these 2 portfolios becomes very important. The PSO algorithm is aligned with this idea of maximum cession on all the considered treaties even if we note a divergence on the Axa XL portfolio A. This second algorithm tends rather to cover this portfolio in priority by the group treaty rather than the local one.

Optimization by scoring

A group of 7 versions of the reinsurance structure are compared between them to choose the best one. These are the structure in its current state and 3 pairs of options taking modified parameters on: Axa XL portfolio A, Axa XL portfolio B, both Axa XL portfolio A and B. Each pair presents a version with the current Group QS treaty limit (version a) and another with an increase in this limit (version b).

Options	Parameters				Loss Ratio cap
	Cession rate A	Cession rate A Grp	Cession rate B	Cession rate B Grp	
Opt Exp	α	α'	β	β'	γ
Opt 1a	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	β	β'	γ
Opt 1b	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	β	β'	$\gamma+2$
Opt 2a	α	α'	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	γ
Opt 2b	α	α'	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	$\gamma+2$
Opt 3a	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	γ
Opt 3b	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	$\gamma+2$

Table 9: Evolution of the parameters observed on the different options

Looking at the indicators in the following figure, we can see that option 2b stands out as the most interesting on most indicators. It is the option that transfers part of the cession from the local treaty (Axa XL portfolio B) to the Group QS treaty. This can be explained mainly by a desire to increase the mutualized capacity of the Group QS commission treaty.

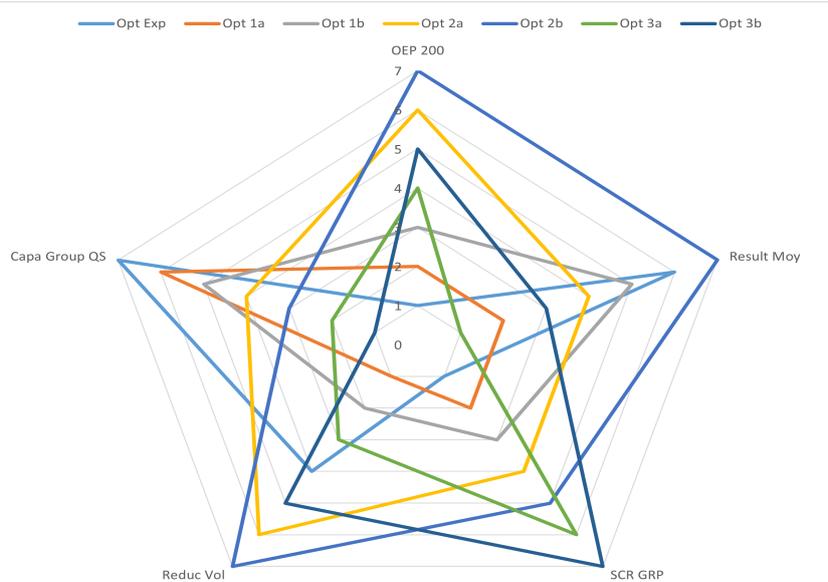


Figure 3: Ranking of options (on 5 indicators)

A more general ranking can be achieved by considering the relative deviations of each option from the best option of the indicator; these deviations are summed for all indicators. This method makes it possible to obtain a score that takes into account as many indicators as desired by assigning weights to each indicator in the sum according to its importance in the ranking. The score of the option j is computed by

$$S_j = \sum_{i \in \text{Indic}} S_{i,j},$$

with $S_{i,j} = i - \text{optim}_{j=1..7}i$, and $\text{optim} = \text{max}$ or min .

Ranking	Option	Difference
1	2b	0,2132
2	2a	0,6641
3	Actual	0,8658
4	1b	0,9223
5	3b	1,2233
6	3a	1,7483
7	1a	1,9692

Table 10: Ranking of options with standardized values

This new constructed criterion confirms that option 2b is the most attractive. It also allows us to note that the structure in its current state remains more optimal than options 1 and 3. This ranking obviously depends on the weights given to each indicator in the formula.

Evolution of the structure due to external factors

In a structure where portfolios from different countries are involved, and with exposures specific to each, reinsurance is affected by these two so-called external factors. Using the Morris screening method,

we vary 5 important parameters which are the USD exchange rate, and the exposures of the largest portfolios, i.e. the Axa A, Axa E entities and the Axa XL A and B portfolios. The sensitivity graph (by Morris method) returned shows on the x-axis the sensitivity of the structure to the parameters and on the y-axis the linearity and correlation to the other parameters.

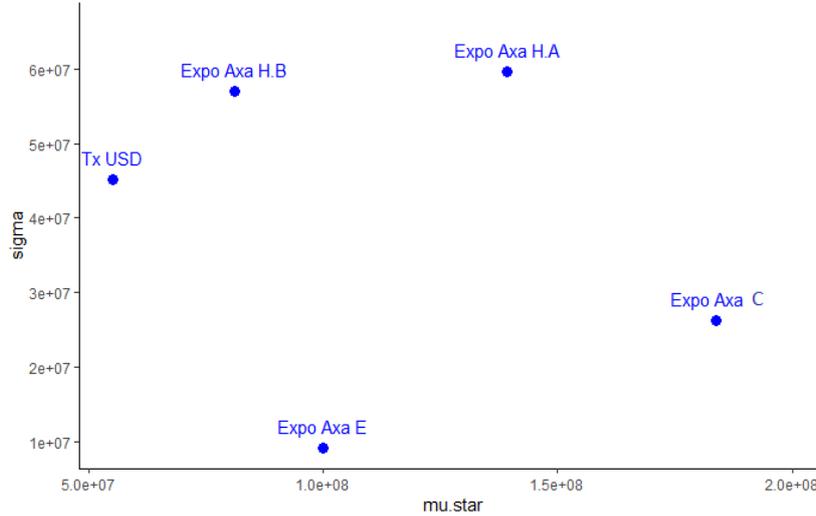


Figure 4: Results Morris

As expected, we observe a significant correlation on the Axa XL portfolios underwritten in USD and on the USD rate. The sensitivities do not follow the size of the portfolio, the exposure of the Axa C entity has more impact on the Cyber structure than the exposures on Axa XL for example. In the end, we show that the reaction of the structure to these internal factors may depend not only on the size of the portfolio, but also on the quality of the reinsurance of this portfolio. Since Axa XL is better reinsured, shocks to its external parameters affect it much less.

Conclusion and opening remarks

We have chosen a panel of fairly complementary performance indicators of the structure on which the optimization discussed with different methods is performed. The genetic and PSO algorithms give trends that are close, even if the convergence is approximate, on the indicator of margin given up in particular. We thus have algorithms that favor the disposal of losses as much as possible and take little account of the counterpart lost in income/margin disposed of. A comparison between seven options of the structure allows us to identify the best one according to each indicator. A ranking is also made by taking into account all the indicators with different weights that can be adjusted. Finally, the sensitivity of the reinsurance structure to the exchange rates of the different entities and their level of exposure shows that the shocks on each portfolio can have a significant impact, sometimes independently of its size.

To go further, one way would be to implement for our problem algorithms from the literature that combine those used in this study (GA and PSO) which are HPSOGA and HGAPSO. Methods like Sobol or Shapley can be considered to push the sensitivity analysis.

Remerciements

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe Analytics & Pricing du GIE Axa sous la direction de Monsieur Jérôme CRETEN, pour m'avoir accueillie et permis de réaliser ce stage si enrichissant.

Un immense merci particulièrement à ma tutrice en entreprise, Madame Anne SUCHEL pour son encadrement, ses conseils et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je suis très reconnaissante pour tous ses enseignements qui m'ont permis d'aboutir à ce mémoire et qui me serviront pour la suite.

Je remercie également les professeurs de Dauphine, l'équipe enseignante du GMM de l'INSA Toulouse, et plus généralement tous les professeurs que j'ai croisés dans mon parcours et qui ont contribué à mon apprentissage.

Mes remerciements s'adressent plus particulièrement à Monsieur Quention GUIBERT pour m'avoir tant aidé à finaliser la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais aussi remercier mon tuteur académique, Monsieur Jean Francois DECROOCQ pour son aide et ses recommandations.

Enfin, je remercie sincèrement ma famille et mes amis pour leur soutien sans faille et leurs encouragements durant toutes ces années.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	11
Remerciements	17
Table des matières	17
Introduction	21
1 Risque Cyber : ses enjeux et sa couverture	23
1.1 Introduction au risque Cyber	23
1.2 Modélisation du risque Cyber	31
1.3 Modélisation de la structure de réassurance	36
2 Présentation des données et calcul d'indicateurs	43
2.1 Description et confidentialité des données	43
2.2 Choix et calcul des indicateurs de performance	52
3 Optimisation et facteurs externes	65
3.1 Limites des méthodes traditionnelles	65
3.2 Algorithme génétique	69
3.3 Algorithme par essaim particulière	74
3.4 Résultats de l'optimisation par les algorithmes	77
3.5 Optimisation manuelle graphique sur 7 options de structures	80
3.6 Analyse des effets de la réassurance	90
3.7 Impact de l'évolution de facteurs externes à la structure	92
3.8 Analyse qualitative des résultats	98
Conclusion	101
Bibliographie	103

Annexes	105
A.1 Les garanties cyber, de la plus courante à la moins courante	105
A.2 Prépondérance des Etats Unis sur le marché de la Cyber assurance	106
A.3 Apprentissage pour estimer le RoL	106
A.4 Pseudo Code des algorithmes d'optimisation	110
A.5 Evolution du taux de change EUR-USD depuis Octobre 2017	110

Introduction

Avec les évolutions technologiques permanentes des dernières décennies, et l'expansion des systèmes informatiques et d'internet, le risque Cyber est devenu un vrai sujet qui prend de plus en plus d'ampleur. Avec la pandémie, le recours au numérique s'est naturellement intensifié et les cybermenaces auraient explosé de 400% (groupe DELTA, 2021).

Le risque Cyber est un des risques à impact majeur selon les acteurs de l'assurance. En effet, selon un scénario catastrophe du CyRim (ABADIE (2019b)), la plateforme de recherche à laquelle participent Scor, Trans Re, le Lloyd's, Aon et MSIG, une attaque cyber à l'échelle mondiale pourrait causer entre 85 et 193 milliards de dollars de pertes économiques soit plus de pertes que l'ouragan Sandy de 2012. Dans ce scénario du CyRim, la part assurée de ces pertes serait de moins de 15%.

S'il est vrai que les assureurs et réassureurs peuvent se montrer réticents à proposer des garanties pour le risque Cyber dû à cette importante sinistralité, l'important décalage entre les pertes en jeu et la partie que les potentielles victimes du risque Cyber sont prêtes à couvrir reste donc notable. Pourtant, les dernières années ont été alarmantes sur la question du risque Cyber ; elles ont vu se multiplier les attaques, dont certaines aux ampleurs catastrophiques.

En mai 2017, est repérée une attaque informatique de type ransomware, Wannacry (LATTO (2020)). Ce type d'attaque consiste en une "prise d'otage" des données des systèmes infiltrées par un logiciel, comme son nom l'indique une rançon est alors demandée à l'utilisateur pour retrouver l'accès à ses données. Elle a touché plus de 300 000 ordinateurs dans plus de 150 pays à travers le monde. Wannacry est présenté comme le plus grand piratage à rançon de l'histoire, il a causé des pertes de données colossales et a ralenti l'activité de plusieurs grandes entreprises et groupes, ciblant plus spécifiquement certains hôpitaux (NHS aux Royaumes-Unis). Le bilan financier serait de plus de 4 milliards de dollars. Le virus exploitait une faille de sécurité présente sur les versions antérieures à Windows 10, pour accéder aux données et les chiffrer.

Cette attaque n'est pas la seule, les années 2016 et 2017 ont vu des attaques de type rançongiciel ou cheval de troie, causant des pertes considérables, se propager : Locky, Petya, NotPetya (GRETEN (2020)).

Le cyber-risque reste encore considéré comme un risque émergent dans le secteur de l'assurance, les acteurs sont hésitants car il s'agit d'un risque complexe à modéliser et présentant de nombreuses incertitudes comme nous le verrons plus loin. Les réassureurs redoutent notamment un phénomène d'accumulation. Le problème se situe également du côté de la demande, les TPE / PME qui sont les plus vulnérables sont aussi les moins couvertes. Les petites entreprises seraient ciblées par 43% (groupe DELTA (2021)) des cyberattaques. Pour mutualiser le risque, il faudrait que ces entreprises qui représentent la grande masse, entrent sur le marché.

Au vu de ces impacts parfois colossaux et des incertitudes autour de ce risque, l'enjeu pour les assureurs est de ne pas trop s'exposer et un des moyens courants est de passer par la réassurance qui est un outil de pilotage de l'appétit au risque. Dans un groupe comme Axa qui harmonise la réassurance de ses différentes entités d'assureurs, cet outil devient certes plus complexe mais ainsi plus puissant.

La structure actuelle de réassurance du risque Cyber chez Axa combine des traités dits « locaux »,

souscrits par les différentes entités et des traités souscrits par le groupe. Il s'agit de traités quote-part et d'un traité aggregate. Les paramètres de ces traités sont ceux que nous voudrions optimiser dans ce mémoire. Cela implique de définir en amont des critères d'optimalité ; c'est pourquoi nous retenons un certain nombre d'indicateurs de risque et de performance : AEP, OEP, Capital économique, marge cédée, résultat, réduction de volatilité...

L'étape centrale d'optimisation couvre différentes méthodes. Deux algorithmes d'optimisation sont présentés, implémentés et leurs résultats comparés, en définissant en amont les plages sur lesquelles on souhaite faire varier chacun des paramètres de la structure.

On dispose également de plusieurs options envisagées par Axa pour faire évoluer la structure, qu'on teste afin de les hiérarchiser selon des critères de classement à définir.

Le modèle implémenté pour répliquer la structure de réassurance dépend également de nombreux paramètres externes ; il devient intéressant d'observer sa sensibilité à ses paramètres. S'agissant du taux de change des différentes entités Axa ou de leurs expositions, on s'intéresse à la prise en compte de l'impact de l'évolution de ces éléments sur les résultats du modèle.

Dans ce mémoire, nous commencerons par présenter les enjeux autour du risque Cyber et sa modélisation ([Chapitre 1](#)). Une deuxième partie va introduire la structure de réassurance étudiée en allant des données de pertes aux indicateurs de performance respectivement en entrée et sortie de cette structure ([Chapitre 2](#)). La troisième partie se consacre aux différentes méthodes d'optimisation ainsi que les résultats obtenus. Pour finir, on étudiera l'impact des paramètres d'exposition et de taux de change sur la structure de réassurance ([Chapitre 3](#)).

Chapitre 1

Risque Cyber : ses enjeux et sa couverture

Ce premier chapitre présente le contexte de l'étude menée dans ce mémoire. On présente le risque Cyber étudié, les enjeux de sa réassurance et ses approches de modélisation. On abordera la réassurance au sein du groupe Axa, en faisant un focus sur la structure de réassurance Cyber.

1.1 Introduction au risque Cyber

Pour protéger les entreprises des menaces de cybersécurité, on fait appel à la cyber assurance. Aucun organisme aujourd'hui, n'est à l'abri de ce risque qui est l'un des principaux risques dits émergents.

1.1.1 Description du risque Cyber et son évolution

Qu'entend-on par risque Cyber ?

Le risque cyber désigne le risque de défaillance des systèmes électroniques et informatiques ou d'atteinte aux données informatiques entraînant tout type de dégâts.

Sa cause peut être un acte malveillant, mais aussi une erreur humaine ou une panne technique. Dans le premier cas, on parle de cyberattaque ; le gouvernement liste quatre principaux types d'attaques cyber sur son site (SITE DU GOUVERNEMENT (2019)) :

- La cybercriminalité qui consiste à obtenir des informations personnelles afin de les exploiter ou de les revendre (données bancaires, identifiants à des sites marchands, etc.). Un exemple répandu : l'hameçonnage (« phishing ») utilisé par les fraudeurs pour obtenir des renseignements personnels en vue d'une usurpation d'identité.
- L'attaque à l'image regroupe un ensemble d'attaques de déstabilisation souvent peu sophistiquées par les canaux des réseaux sociaux, allant de l'exfiltration de données personnelles à l'exploitation de vulnérabilité, elles portent atteinte à l'image de la victime en remplaçant le contenu par des revendications politiques, idéologiques ou religieuses.
- L'espionnage, généralement, est à visée économique ou scientifique, et orchestré par des groupes bien organisés. De fait, sa détection peut prendre beaucoup de temps par rapport aux autres attaques, parfois de nombreuses années. L'objectif est de maintenir discrètement l'accès le plus longtemps possible afin de capter l'information stratégique en temps voulu.

- Le sabotage va rendre inutilisable tout ou partie du système d'information d'une organisation.

Les attaquants, agissant individuellement ou en groupes, peuvent avoir des motivations personnelles, matérielles à travers un bénéfice financier ou idéologique (par exemple, les Anonymous). Le risque cyber concerne toute personne ou structure qui y est vulnérable ; tant les entités économiques, les organisations étatiques que les particuliers ; parfois pour le compte d'autres États, institutions internationales ou entreprises multinationales.

Comme dit plus haut, la source de la défaillance peut aussi être accidentelle ou matérielle. D'ailleurs selon l'étude annuelle de 2021 du groupe Delta, 90% des brèches informatiques ont lieu à cause d'une erreur humaine (groupe DELTA (2021)). Malgré le renforcement des formations et des campagnes de sensibilisation aux cyberattaques au sein des organisations, les collaborateurs restent le maillon faible du système de sécurité et l'hameçonnage, par e-mail notamment reste très courant et efficace.

Les différents types de risque Cyber

Le tableau ci-dessous décrit les différentes catégories de risque Cyber en donnant des exemples de la manifestation de ces risques (BIENER et al., 2015).

Catégorie	Description	Eléments
Sous-catégorie 1 : Actions humaines		
1.1 Involontaire	Actions entreprises sans intention malveillante ou nuisible	Fautes, erreurs, omissions
1.2 Délibérée	Actions avec l'intention de nuire	Fraude, sabotage, vol et vandalisme
1.3 Inaction	Absence d'action ou l'incapacité d'agir dans une situation donnée	Manque de compétences, connaissances ou de disponibilité du personnel
Sous-catégorie 2 : défaillances des systèmes et des technologies		
2.1 Matériel	Risques imputables à des défaillances dans l'équipement physique	Défaillance due à la capacité, maintenance et obsolescence
2.2 Logiciel	Risques liés aux logiciels (programmes, applications et systèmes d'exploitation)	Compatibilité, gestion de la configuration
2.3 Système	Défaillances des systèmes intégrés	Conception, spécifications, intégration, et complexité
Sous-catégorie 3 : processus internes défaillants		
3.1 Conception et/ou exécution	Mauvaise conception ou exécution du processus	Problème de flux d'informations, notifications, transferts de tâches.
3.2 Contrôle	Contrôles inadéquats sur le fonctionnement du processus	Surveillance examen périodique et propriété du processus
3.3 Pilotage	Défaut dans le pilotage des ressources appropriées	Continuité du développement, formation des salariés
Sous-catégorie 4 : événements extérieurs		
4.1 Catastrophes	Événements naturels ou humains hors du contrôle de l'entreprise	Événement météorologique, incendie, inondation, tremblement de terre
4.2 Questions juridiques	Risque découlant de questions juridiques	Conformité réglementaire, législation et litiges
4.3 Problèmes commerciaux	Risques découlant de changements dans l'environnement commercial de l'organisation	Défaillance des fournisseurs, conditions du marché et conditions économiques
4.4 Dépendances du service	Risques dus à la dépendance de l'entreprise	Locaux, services d'urgences, transport

TABLE 1.1 : Types de risque cyber par familles

On a deux principaux types de risque contre lesquels on s'assure en cyber dits « **First party** » et « **Third party** ».

Le First party désigne les conséquences de la défaillance qui affectent directement la structure couverte. Nous allons présenter deux types d'attaques par infection majeures en Cyber.

1. Attaque de serveur cloud :

Le "cloud computing" est très répandu depuis quelques années : un fournisseur met à disposition différents services sur Internet (serveurs, logiciels, stockage, application...) pour le grand public ou pour d'autres entreprises via un réseau privé. Il peut y avoir trois parties impliquées dans le réseau, le fournisseur Cloud, l'entreprise ou organisation hébergée par le fournisseur et éventuellement ses clients qui bénéficient de ses services pouvant eux-mêmes être des entreprises ou des particuliers. L'assuré peut donc faire référence à chacune de ces trois entités. On parle d'attaque cloud quand il y'a une interruption du service, (DoS pour Denial of Service), entraînant une perte d'exploitation ou une altération voire destruction des données au sein du Cloud. C'est une garantie complexe à assurer, car le partage de responsabilité entre les différentes parties n'est pas toujours clairement établi.

2. Attaque par rançongiciel (ransomware) :

Ce type d'attaque, revenu plusieurs fois dans nos exemples en introduction a connu une prolifération ces dernières années, tant auprès des grandes entreprises qu'au niveau des petites structures. Les attaquants utilisent un logiciel qui va chiffrer les données d'un système et exiger une rançon en échange de la clé. Ce logiciel infiltre l'appareil de l'utilisateur à travers une pièce jointe ou un lien infecté, un site web corrompu...

Le Third party fait référence aux dommages causés aux clients ou aux tiers en général qui engagent la responsabilité civile de l'assuré. On y retrouve les coûts résultant d'une procédure judiciaire par exemple.

Il existe également des couvertures sur du "retail", quand ces dernières concernent exclusivement les particuliers.

Pour se prémunir de ces risques, les structures vont mener des actions dites directes. Il s'agit de techniques courantes : changements réguliers de mot de passe, installation d'antivirus, ou encore chiffrement des données. Cependant, ce premier niveau de protection est généralement insuffisant, d'où le recours aux actions indirectes en se tournant vers les couvertures d'assurance et de réassurance. La cyber assurance, va tout d'abord inciter les entreprises souscriptrices à mieux suivre la cartographie des risques cyber auxquelles elles sont exposées. Son objectif principal reste toutefois de couvrir les pertes que causerait une défaillance cyber qui n'a pas pu être empêchée par les actions précédentes.

La couverture du risque Cyber

Les couvertures d'assurance pour le Cyber sont très nombreuses, mais leur répartition est assez hétérogène*. Les garanties proposées sont plus ou moins fréquentes dans les différents produits et contrats d'assurance (MARTINEZ, 2019).

Garanties les plus courantes

La garantie la plus courante couvre les fuites de données privées (garantie incluse dans 92% des produits). Cette garantie couvre les dépenses suite à un incident impliquant la divulgation d'informations et la violation de données privées. Au-delà des coûts légaux, de réponse interne et de services externes, la garantie couvre aussi tous les frais de notification, compensation, dommages et intérêts versés à ces derniers.

On a ensuite la garantie pour pertes de logiciels et de données (garantie incluse dans 81% des produits). Elle couvre le coût de reconstitution des données et/ou logiciels corrompus ou supprimés.

La troisième garantie concerne les coûts de réponse aux incidents (garantie incluse dans 81% des produits). Elle protège contre les coûts pour investiguer et clôturer un incident cyber en vue de minimiser

*Voir annexe A.1 pour le classement détaillé des garanties Cyber

les pertes liées à cet incident.

Garanties les moins fréquentes

La garantie cyber la moins répandue aujourd'hui est celle contre les dommages environnementaux (garantie incluse dans 4% des produits). Garantie couvrant les coûts pour nettoyer et réhabiliter un lieu de déversement d'un produit dans l'environnement dû à un incident cyber.

On retrouve ensuite la responsabilité civile produit et opérations (garantie incluse dans 8% des produits). Elle couvre les réclamations des tiers liées à la responsabilité civile produit ou à des opérations défectueuses.

La responsabilité civile des administrateurs et membres du comité de direction (garantie incluse dans 13% des produits) est la troisième couverture la moins fréquente. Elle protège l'assuré contre les demandes d'indemnisation effectuées envers ses administrateurs, y compris pour abus de confiance ou pour manquement à un devoir en lien avec un incident cyber.

On a pour finir la garantie contre les décès et accidents corporels (garantie incluse dans 15% des produits). Elle couvre les coûts liés au décès ou à l'accident corporel d'un tiers en raison d'une attaque cyber.

Ce risque est depuis quelques années la préoccupation principale des entreprises. En France, il s'agit du premier risque en entreprise depuis 2019. Comme le montre le tableau 1.2, le principal risque du baromètre Allianz Global Corporate & Speciality SE est le risque Cyber.

Classement 2019	Pourcentage	Classement 2018
1- Incidents Cyber	41%	2 (46%)
2- Interruption d'activités	40%	1 (47%)
3- Incendie, explosion	29%	3 (21%)
4- Catastrophes naturelles	28%	3 (21%)
5- Evolutions législatives et réglementaires	26%	3 (21%)
6- Evolutions de marchés	18%	6 (18%)
7- Nouvelles technologies	18%	8 (14%)
8- Atteinte à la réputation	12%	9 (13%)
9- Défaillances de qualité	12%	7 (16%)
10- Vol, fraude et corruption	10%	9 (13%)

TABLE 1.2 : 10 principaux risques en entreprise en France

Selon le rapport Axa Future Risks 2022 (AXA, 2022a), le risque Cyber finit parmi les trois risques les plus importants pour tous les continents comme le montre le tableau 1.2.

Amérique	Europe	Afrique	Asie Pacifique et Moyen Orient
1- Changement climatique	1- Changement climatique	1- Changement climatique	1- Changement climatique
2- Cybersécurité	2- Instabilité géopolitique	2- Cybersécurité	2- Pandémie et maladies infectieuses
3- Instabilité géopolitique	3- Cybersécurité	3- Pandémie et maladies infectieuses	3- Cybersécurité

TABLE 1.3 : Risques principaux sur les 5 à 10 prochaines années

À l'échelle globale, comme on peut lire dans le tableau 1.3 les experts le positionnent comme troisième plus gros risque aux côtés du changement climatique et de l'instabilité géopolitique. En effet, suite aux tensions de guerre en Europe cette année, la question géopolitique inquiète même si ce contexte peut justement accentuer le risque d'attaques cyber avec des motivations politiques. Du côté du grand public qui est aussi très concerné quant au risque de pandémie, le risque Cyber arrive 4ème. Le paysage des risques futurs considère donc le risque cyber comme très préoccupant.

Le marché de la cybersécurité est en pleine croissance à toutes les échelles (en France mais aussi au niveau européen et mondial). On passe d'un marché de 137 millions de dollars en 2017 à 248 millions prévus pour l'année 2023 d'après le portail de données Statista (COLUMBUS, 2020). Cette évolution constante est visible sur la figure 1.1.

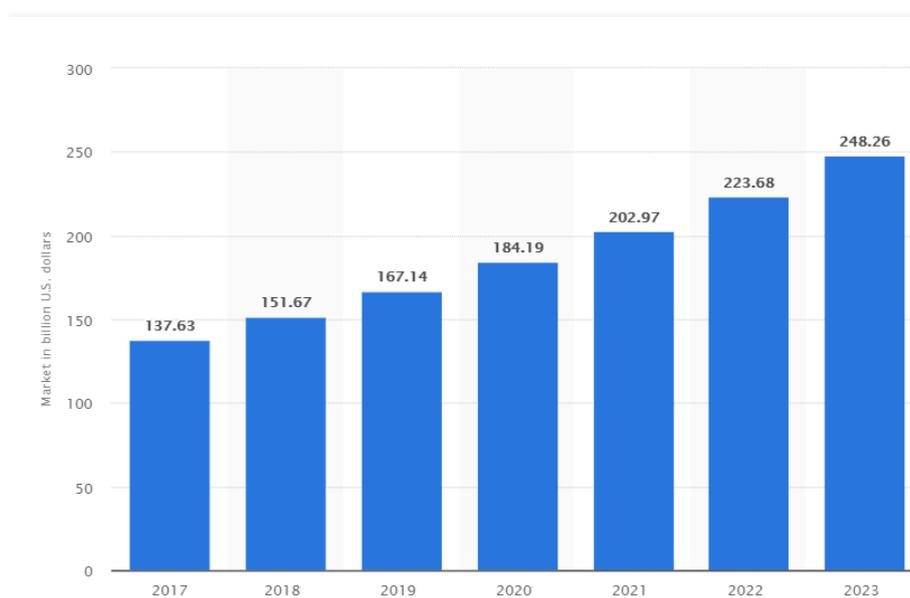


FIGURE 1.1 : Taille du marché mondial de la cybersécurité de 2017 à 2023

Assurabilité du risque Cyber et pistes d'amélioration

L'assurabilité désigne pour un risque le fait de pouvoir le garantir par un contrat d'assurance. Baruch Berliner * proposait dans ses travaux un ensemble de critères d'assurabilité sur trois volets qu'on retrouve dans le tableau 1.4 (BIENER et al., 2015).

* Actuaire et auteur de nombreuses publications en finance et en actuariat dans les années 80.

	Critères d'assurabilité	Exigences
Actuariel	1) Caractère aléatoire	Indépendance et prévisibilité
	2) Perte maximum probable	Gérable
	3) Perte moyenne par évènement	Modérée
	4) Exposition	L'exposition aux pertes doit être importante
	5) Asymétrie d'information	Aléa moral et anti-sélection non excessifs
Marché	6) Prime d'assurance	Recouvre les coûts et est abordable
	7) Limites de couverture	Acceptable
Sociétal	8) Politique publique	Cohérente avec les valeurs de société
	9) Restrictions légales	N'entravent pas la couverture

TABLE 1.4 : Critères d'assurabilité et exigences selon Berliner

En s'appuyant sur les travaux de l'université St Gallen (BIENER et al., 2015), on va analyser à présent l'assurabilité du risque Cyber selon ces différents critères.

On analyse les conditions proposées par Berliner pour le cas du risque Cyber.

- Le premier point concernant l'aspect aléatoire et l'indépendance des sinistres Cyber pouvant survenir n'est pas vraiment respecté. D'une part, les systèmes de cybersécurité sont majoritairement conçus de manière similaire et donc sensibles aux mêmes vulnérabilités. La corrélation peut être forte entre les incidents au sein d'une entreprise et même entre différentes entreprises. De plus au sein des portefeuilles d'assurance cibler, on ne retrouve pas un grand nombre de contrats, ce qui rend difficile la diversification. Le caractère aléatoire des pertes est aussi limité par la possibilité pour le régulateur de changer les règles d'assurance pour ce risque Cyber. Cela entraînerait une altération des stratégies de gestion des risques de l'entreprise et les pertes assurées. Pour finir les incidents causant le plus de pertes sont généralement des attaques à motivations pécuniaires ou politiques. L'aspect aléatoire disparaît car ces attaques ciblent des entités spécifiques. Les incidents qui surviennent accidentellement conservent ce côté aléatoire, mais moins du tiers des incidents recensés (27% dans l'étude « 2018 Cost of Data Breach Study : Global Overview » (INSTITUTE, 2018)).

- Le second critère actuariel est d'avoir des pertes maximales peu probables sur les incidents cyber. Ce problème est contourné par les limites que les assureurs fixent dans les contrats. Les pertes couvertes sont plafonnées, protégeant ainsi l'assureur.

- Le troisième critère d'assurabilité est d'avoir des pertes moyennes raisonnables. On observe pas de réel décalage entre les pertes moyennes en cyber par rapport aux pertes des autres risques opérationnels des structures. Si la moyenne est plus faible chez les premières, l'écart type est toutefois légèrement plus important. De plus il est à noter que sur les entreprises de taille plus petites et plus grandes tendent à subir les pertes les plus importantes en moyenne. Cela peut s'expliquer par le fait que les plus petites entreprises n'ont pas forcément une gestion adéquate de ce type de risque, voire n'en sont même pas conscientes. À l'opposé, les grandes entreprises qui sont notamment liées à d'autres entreprises sont plus exposées et à des pertes plus importantes. Ce critère est validé, bien que très dépendant du type d'entreprise et son niveau de gestion Cyber.

- L'exposition d'un individu désigne sa disposition à être atteint par un risque. Un exemple dans la vie quotidienne est l'exposition au risque d'accident de voiture, cette exposition augmente plus la personne conduit sa voiture. Une exposition trop insignifiante à un risque ne va pas inciter les individus ou entités à se couvrir contre ce risque. Le risque Cyber étant en forte expansion ces dernières années, son exposition a naturellement augmenté malgré quelques points d'attention. Cette exposition est très liée à la taille de l'entreprise ainsi qu'à son secteur d'activité. Les entreprises de grande taille sont plus exposées aux incidents cyber. L'exposition ne prend pas en compte les mesures de prévention mises

en place, qui sont également plus importantes dans ces grandes structures. De même les entreprises évoluant dans les secteurs comme la finance ou dans les secteurs avec une forte sollicitation des données (comme le médical) l'exposition au risque Cyber est plus élevée. De plus l'exposition dépend beaucoup du type d'incidents observés. Les incidents Cyber résultant d'attaques sont très fréquents et vont l'être de plus en plus tandis que ceux causés par des catastrophes naturelles sont très rares. Malgré ces nuances, on peut conclure que l'exposition au risque Cyber est suffisamment importante pour garantir l'assurabilité.

- Pour assurer un risque, il est préférable que l'asymétrie d'information entre les deux parties ne soit pas importante. En cyber, les assureurs disposent principalement des informations fournies par leurs assurés, pour quantifier l'exposition au risque de ces derniers. Cela est dû au fait que les données de sinistres publiées sont très limitées et peut occasionner cette asymétrie d'information en faveur des assurés. L'aléa moral désigne un changement de comportement d'une des parties grâce à une information qu'elle est seule à détenir, en vue de maximiser son intérêt. On peut craindre que des entreprises s'investissent moins dans la protection Cyber et la prévention car elles sont assurées. Pour pallier ce risque de désengagement certains assureurs collaborent avec des acteurs de la cybersécurité pour avoir une évaluation du niveau de risque chez les assurés en fonction des mesures qu'ils mettent en place en interne.

- L'anti-sélection survient quand l'offre proposée va attirer les profils d'assurés les moins rentables. En cyber assurance, ce sont les entreprises qui ont déjà subi une attaque cyber qui ont plus tendance à s'assurer que les autres (SHACKELFORD, 2012). Il est difficile et coûteux pour les assureurs de dresser des profils suffisamment détaillés et distincts pour éviter la sélection défavorable.

- L'assurabilité doit aussi être garantie par les critères du marché. Le critère n° 6 exige qu'il soit possible de fixer des primes suffisantes pour couvrir les coûts en cas d'incidents Cyber tout en restant abordables. La tarification en Cyber est parfois présentée comme assez chère sans véritable justification de ce tarif. Les assureurs tâchent d'être prudents avec ce risque car ils ne le connaissent encore que peu. Les produits d'assurance Cyber sont relativement nouveaux, ce qui implique un historique de données peu profond, peu d'acteurs sur le marché, donc une concurrence assez limitée, sans oublier l'asymétrie d'information mentionnée précédemment. Les spécialistes anticipaient, il y a quelques années, une diminution du niveau des primes avec le développement du marché Cyber confortées par une légère baisse observée au Etats Unis suite à l'arrivée de nouveau acteurs sur le marché. Ces dernières années l'augmentation des cyberattaques et de la demande de cyber assurance en réponse ont plutôt comme effet une hausse des primes. La vague de souscription se heurte au manque d'expérience de certains assureurs qui vont couvrir toujours de plus en plus de polices. L'exposition devient ainsi très importante au sein des portefeuilles de ces assureurs et ils se voient contraints de hausser les primes pour se protéger.

- Les limites des couvertures proposées en Cyber varient selon le produit mais elles restent en général suffisantes pour couvrir jusqu'au niveau des pertes maximales. Pour ce risque, les assureurs s'appuient prioritairement sur les nombreuses exclusions comme les pertes auto-infligées, espionnage et terrorisme ou les accès piratés car ils n'étaient pas suffisamment sécurisés. De nombreuses couvertures excluent aussi l'atteinte à la réputation qui est n'est pas facile à quantifier.

- Sur le plan sociétal, la politique adoptée par les institutions régulatrices ainsi que les restrictions légales peuvent constituer un frein à l'assurabilité d'un risque. Le recours par les entreprises à l'assurance Cyber peut avoir l'effet inverse de celui escompté, par aléa moral. En se sachant couverts, les assureurs peuvent atténuer leur protection cyber en interne, ce qui à terme va les rendre plus vulnérables. Deux théories s'opposent chez les spécialistes : les uns estiment qu'avec l'arrivée de l'assurance cyber, l'auto-protection n'est plus suffisante en particulier pour les dommages dont la vérification est difficile

pour l'assureur. D'autre part, certains voient la cyber assurance comme un bien public qui démocratise la cybersécurité et incitent même à une plus grande auto-protection. Ils estiment que le développement d'une cyber assurance régulée implique une augmentation des normes facilitant la cyber-sécurité et des services de consultation plus performants en cyber. Ce second point de vue amène à envisager des pistes d'intervention des états pour promouvoir la cyber-assurance. L'état comme réassureur de dernier recours pour faire face à la capacité de réassurance qui peut être parfois limitée est une piste. On pense également à la mise en place de subventions pour encourager la protection cyber en interne ou de règles autour de l'obligation de s'assurer sous certaines conditions.

- Les réglementations agissent directement sur les polices d'assurance, par exemple il est parfois interdit de couvrir des amendes ou pénalités. En France, depuis le 7 Septembre l'assurabilité des cyber-rançons (ransomware) est approuvée à condition que la victime dépose une plainte dans les 48 heures. Cette mesure est désapprouvée par le Sénat qui s'appuyant sur un rapport de l'ANSSI de 2020 préconisant "de ne jamais payer la rançon" car cela peut être incitatif pour les cyber-criminels sans garantie de résultat. C'est un exemple de question sur laquelle la réglementation peut évoluer du jour au lendemain et les conditions générales des contrats doivent alors être revues. Un autre point sur lequel la législation a un impact est le traitement des données. Les informations transmises aux assureurs ne doivent pas aller à l'encontre des règles sur la protection des données. Au vu de ces restrictions, seuls les assureurs avec une expertise suffisante devraient intervenir, sous peine de s'exposer à des actions judiciaires. Cela peut donc être un frein au développement du marché assurantiel.

Sur les critères actuariels, les pertes moyennes et le niveau d'exposition restent raisonnables sur le marché malgré des spécificités selon la nature de l'assuré. Le problème des pertes maximales peut être éludé grâce aux plafonds présents dans les contrats Cyber. Cependant la survenance aléatoire et indépendante des sinistres est remise en question. C'est un risque avec une importante part de corrélation entre les sinistres, et des portefeuilles difficiles à diversifier pour se protéger. Le manque de données de la communauté Cyber alimente une asymétrie d'information en défaveur des assureurs qui rend coûteuse et difficile la modélisation.

Concernant les critères de marché, ils sont assez problématiques pour le risque Cyber.

Les primes restent assez élevées pour ce risque en raison d'un marché peu mature, peu concurrentiel et d'assureurs qui n'ont pas toujours l'expertise suffisante pour une bonne anticipation de leur portefeuille. Quant aux limites des couvertures qu'on retrouve, elles sont généralement assez élevées; c'est plutôt sur les exclusions que les assureurs ne lésinent pas pour se préserver.

Du point de vue sociétal, la législation et les réglementations peuvent à la fois ralentir ou accélérer le développement du marché assurantiel en Cyber, mais ne constitue pas jusqu'ici un frein à l'assurabilité. Leurs effets dépendent du contexte dans lequel la réglementation est mise en place, et de la réaction des acteurs du marché qui ne sont pas toujours faciles à prévoir.

Ces difficultés rendent le marché assurantiel en Cyber limité, seulement 135 millions d'euros de primes soit 0,225% des 60 milliards de l'assurance non-vie en France (SÉNAT (2021)). Il s'agit pourtant d'un des premiers risques en entreprise comme le montrent les chiffres et exemples présentés en introduction. C'est pourquoi plusieurs entrepreneurs dans le domaine du numérique recommandent de créer un fonds de réassurance géré par l'Etat, à l'image du CCR pour les catastrophes naturelles. Ce fonds permettrait de rassurer à la fois les assureurs et les entreprises qui voudraient se couvrir et ainsi dynamiser le marché. C'est une des nombreuses solutions évoquées au cours d'une table ronde de la Délégation Sénatoriale des entreprises sur la question de l'assurabilité en cybersécurité en Novembre 2021.

Un autre point central qui est revenu est la sensibilisation et la formation des dirigeants d'entreprise et de leurs salariés, mais également des collectivités territoriales, au risque cyber qui demeure essentielle; elle réduirait de 40 % les possibilités d'attaques. Cet aspect de formation est en train de prendre une apparence plus officielle, avec la mise en place et le développement des certifications

Cyber. Ces certifications constituent des éléments tangents qui démontrent que des mesures sont bien mises en place au sein de la structure pour prévenir le risque Cyber. On voit donc qu'elles peuvent constituer un élément déterminant dans l'évaluation du niveau de vulnérabilité de la structure par l'assureur et par conséquent le réassureur. Dans cette initiative on retrouve par exemple la certification ISO/IEC 27001-système de management de la sécurité de l'information.

1.2 Modélisation du risque Cyber

Plusieurs caractéristiques font du risque cyber un risque particulier qui nécessite une modélisation assez spécifique.

1.2.1 Un risque difficile à modéliser

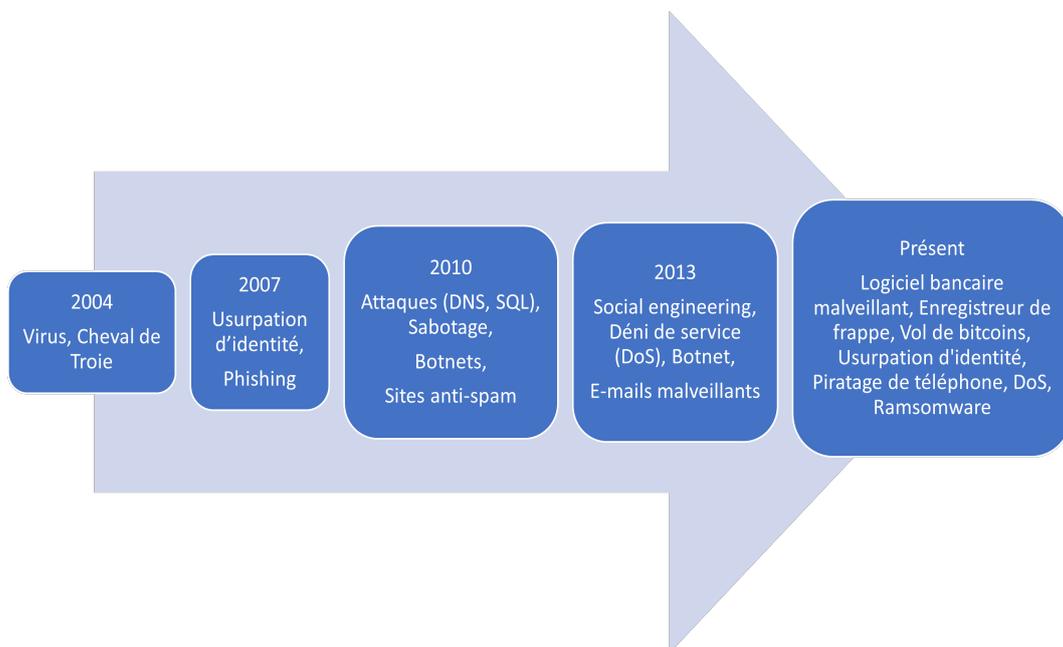


FIGURE 1.2 : Evolution des types d'attaques Cyber depuis le début des années 2000

A l'ère où la technologie évolue au quotidien, les systèmes de sécurité se perfectionnent mais les moyens de s'y infiltrer deviennent également de plus en plus sophistiqués (ABADIE (2019a)). On est confronté à un risque évolutif, avec des vulnérabilités qui prennent régulièrement de nouvelles formes. Cet aspect dynamique rend son anticipation difficile pour les spécialistes du risque. Comme on peut le voir sur la figure 1.2 ci-dessus, entre 2004 et aujourd'hui, les types d'attaques ont pris diverses formes. Initialement, il s'agissait surtout de virus et vers informatiques, puis les attaques par phishing, et usurpation d'identité. Aujourd'hui, les attaques prédominantes sont les rançongiciels mais cela pourrait totalement changer dans les années à venir.

Une autre particularité est la difficulté à localiser géographiquement le risque cyber, comme on le ferait pour un risque de tempête ou de tremblement de terre par exemple. L'avantage de l'univers numérique étant de briser les frontières physiques, le risque Cyber lui n'a ni frontière géographique, ni frontière temporelle. Un attaquant ("hacker") localisé en Australie peut infiltrer des ordinateurs un peu partout dans le monde et l'attaque peut prendre effet à différents moments. Pour résumer on dit

que le risque Cyber n'a pas d'unicité de temps, de lieu ou d'action. La modélisation de ce risque est grandement rendue ardue par le peu de données historiques disponibles. La modélisation va privilégier une approche qui contourne ce problème.

1.2.2 Multiples approches de modélisation du risque Cyber

Les actuaires et spécialistes du risque en général ont diverses approches pour modéliser les risques sur lesquels ils acceptent d'intervenir.

Quand ils disposent d'un historique bien fourni, cette modélisation est facilitée car il est possible de s'appuyer sur la sinistralité passée pour prévoir celle de l'année à venir. On parle des méthodes par expérience. A contrario, quand on a peu de données historiques ou que le risque est assez rare et imprévisible on ne peut pas se fier à ce passé, il faut recourir à des simulations stochastiques pour avoir une connaissance de la survenance. Il s'agit des méthodes par exposition qui nécessitent généralement la construction de modèles à partir des connaissances d'experts du risque étudié et surtout de données permettant de quantifier l'exposition de chaque assuré, données recueillies auprès de ces derniers. Le risque Cyber est généralement modélisé par une approche appelée : fréquence-sévérité (ou fréquence-coût).

Le modèle Fréquence-Sévérité

En assurance IARD, la tarification par modèle fréquence-coût est très courante, elle repose sur le calcul de charge totale de sinistres pour l'année k , notée S_k et calculée par

$$S_k = \sum_{i=1}^{N_k} C_{i,k},$$

où N_k est le nombre de sinistres survenus au cours de l'année k et $C_{i,k}$ le coût du $i^{\text{ème}}$ sinistre de cette même année k .

Dans ce modèle, il suffit que :

- H1) Toutes les variables soient indépendantes
- H2) les $(C_{i,k})_{i < n}$ soient identiquement distribués

pour avoir la relation $E(S) = E(N_k) \times E(C_k)$ par

$$E[E[S|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \times n \times E[C] = E[N]E[C].$$

Avec cette espérance de la charge de sinistres, on a la brique de base pour construire notre prime selon le principe souhaité. Les principaux principes de primes à partir de l'espérance sont :

- La prime pure $\Pi(S) = E(S)$
- Le principe de la valeur espérée : $\Pi(S) = (1 + \kappa)E[S]$ pour $\kappa > 0$
- Le principe de la variance $\Pi(S) = \kappa Var[S]$ pour $\kappa > 0$
- Le principe de l'écart type $\Pi(S) = \kappa \sqrt{Var[S]}$ pour $\kappa > 0$

Avec la prime, on peut ensuite établir le tarif en prenant en compte les frais et commissions en jeu. Cette approche présente des limites en Cyber car on peut remettre en question les deux hypothèses (H1 et H2) présentées. Premièrement l'indépendance entre les coûts des différents sinistres n'est pas toujours vérifiée. Les incidents Cyber observés sur différentes structures sont même généralement corrélés. L'atteinte à certains systèmes et logiciels à grande échelle a une répercussion sur l'ensemble des entités s'en servant. De plus sur une année k , le niveau de pertes peut être totalement différent d'un incident à l'autre, l'identique distribution non plus n'est pas systématique. Cela peut dépendre de la taille de l'entité touchée, ou du type d'incident mais les coûts C_i ne suivront pas nécessairement la même distribution.

Modélisation de la fréquence

La fréquence, donnée par la variable N , est modélisée par ajustement d'une loi de probabilité discrète connue. Les lois de fréquence principalement retenues sont la loi de Poisson et la loi binomiale négative dont les paramètres se retrouvent par les relations suivantes :

$$N \rightarrow Pois(\lambda) \Leftrightarrow P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (1.1)$$

$$Esp = Var = \lambda, \quad (1.2)$$

$$N \rightarrow Bin(n, p) \Leftrightarrow P(N = k) = \binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k, \quad (1.3)$$

$$Esp = \frac{n \times (1-p)}{p}, \quad (1.4)$$

$$Var = \frac{n \times (1-p)}{p^2}. \quad (1.5)$$

La loi de Poisson est très utilisée en pratique car elle est simple à paramétrer, toutefois $E(N) = Var(N)$ et ce n'est pas ce qui est le plus souvent observé avec les données.

La loi binomiale négative est plus prudente que celle de Poisson car elle tend vers 0 plus lentement. Il y a donc plus de chances d'avoir des valeurs de N atypiques. On sous-estime moins le risque d'avoir de nombreux sinistres Cyber dans notre cas. De plus $E(N) < Var(N)$ pour la loi binomiale négative, ce qui est plus courant dans la vraie vie.

Ces lois de fréquence sont calibrées par jugement de comités d'expert qui analysent la fréquence empirique des événements Cyber au cours des dernières années. Plus exactement on observe l'espérance et la variance historiques et on fait correspondre les paramètres des lois en utilisant les relations 1.2, 1.4, et 1.5 .

Modélisation du coût (par expérience)

Pour modéliser le coût, la méthode utilisée dépendra de nouveau de la disponibilité ou non de données historiques suffisantes sur le coût des sinistres.

On peut modéliser le coût en l'ajustant par une loi connue qu'on calibre ensuite, c'est-à-dire le même principe que la modélisation de la fréquence. De nombreuses lois sont envisagées, (quelques-unes sont listées dans le tableau 1.5) pour la distribution du coût, et elles sont plus ou moins pertinentes selon l'épaisseur de la queue de distribution, aussi appelée kurtosis.

Le choix de la loi à retenir se fait ensuite par étude des QQ-plots et PP-plots et par tests statistiques. Ces méthodes par expérience, rappelons-le, reposent sur une connaissance suffisante et fiable de l'historique de coûts utilisé pour ajuster la loi. C'est pourquoi elles ne sont pas privilégiées en modélisation Cyber car on dispose de données assez limitées comme on le détaillera dans la partie 2.1.1.

Queues	Définitions	Exemples
Queues Fines	Sinistres graves non significatifs	Exponentielle, Normale
Queues moyennes	Sinistres graves significatifs	Gamma, Log normale
Queues épaisses	Sinistres graves prépondérants	Weibull, Pareto

TABLE 1.5 : Exemple de lois pour chaque type de distribution

Modélisation par exposition

Une méthode très courante en Cyber dû au manque de données est la modélisation par exposition, c'est celle utilisée par Axa (AXA (2022b)), et donc pour générer les données utilisées dans le cadre de ce mémoire. Le principe est assez similaire à la modélisation CAT pour les risques de catastrophes naturelles (tempêtes, inondations...). Cette méthode procède à un découpage des étapes en plusieurs modules. Le modèle CAT Cyber a 3 modules : le module aléa, le module vulnérabilité et le module financier visibles sur la figure 1.3.

- Module aléa

L'étape 1 va consister à identifier selon le risque étudié des zones à différentes échelles (entreprises, pays, utilisateurs d'outils informatiques) susceptibles d'être touchées et avec quels niveaux d'intensité. Cela est fait grâce aux données recueillies auprès de chaque entreprise assurée. C'est à ce niveau que la construction de scénarios "événement cyber" est rendue possible. Pour chaque événement on établit ainsi l'empreinte de l'évènement sur l'ensemble du portefeuille assuré. Comme le nom du module l'indique, c'est à cette étape que les simulations stochastiques seront faites. Pour une attaque cloud de vol de données par exemple, on a l'aléa sur la proportion d'entreprises utilisant un fournisseur public, la région du monde dont les serveurs sont attaqués etc...

- Module vulnérabilité

C'est un module central qui va à partir des résultats du module aléa associer une perte à chaque sinistre qui toucherait un assuré. Ici, est donc calculé le niveau de vulnérabilité de chaque entité assurée dans le cas où surviendrait chacun de scénarios. Cela dépend de nouveau des données des assurés, par exemple la taille de l'entreprise (en nombre d'employés) mais aussi son système de gestion de vulnérabilité cyber en place. Autant d'informations qui déterminent à combien s'élèvent les pertes dans un scénario de sinistre cyber donné. Ce module peut également utiliser des variables stochastiques. En cas de scénario d'attaques Cyber par infection (les attaques du Cloud ou par rançongiciel présentées précédemment), la durée de l'infection, de récupération des données peuvent être des variables stochastiques. La simulation stochastique peut aussi servir pour la complétion des données du portefeuille. Ne connaissant pas une information comme le nombre d'employés pour un assuré, on peut la simuler par une méthode stochastique.

- Module financier

Il a pour objectif de déterminer les pertes finales brutes de l'assureur une fois prises en compte les conditions assurantielles (caractéristiques de chaque contrat souscrit, coassurance...).

À l'issue de ces étapes, on a pour chaque événement simulé, la perte brute qu'on lui associe pour chaque assuré (ce sont les valeurs de $C_{i,k}$). On réitère cet ensemble de simulations plusieurs fois pour générer différentes « années Cyber ».

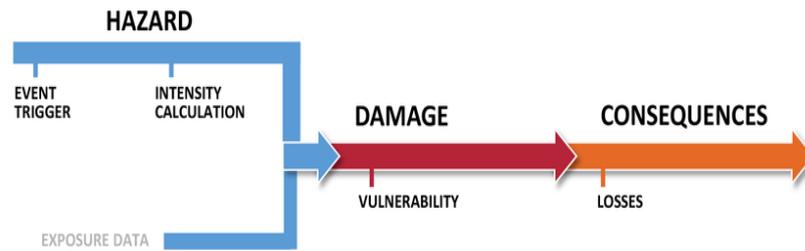


FIGURE 1.3 : Modules du modèle CAT

1.2.3 Aperçu de la modélisation Cyber chez Axa

Chez Axa, des modèles différents seront utilisés pour modéliser l'offre commerciale et celle des particuliers (retail). Sur le risque commercial on utilise deux sous-modèles : le sous-modèle du First party et le sous-modèle du Third party. La démarche générale reste toutefois la même, malgré quelques spécificités selon qu'on s'attelle à modéliser le risque First party, Third party ou retail. Cette démarche suit les étapes du schéma de la figure 1.4.

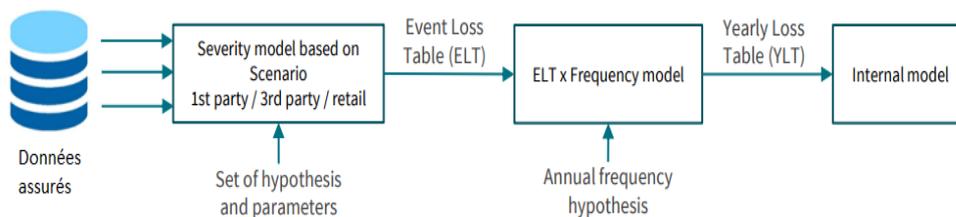


FIGURE 1.4 : Génération des pertes par scénarios

Pour chaque catégorie de risque il existe un ensemble de scénarios plausibles sur une année, en fonction des données recueillies par Axa auprès de tous ces assurés.

Les scénarios désignent des situations futures plausibles de survenance d'incident cyber pouvant être assez nuisibles. Ils reposent sur des hypothèses et paramètres cohérents. En effet ils doivent être pertinents, suffisamment impactants, réalistes et cohérents.

Exemples de scénarios selon le type de risque :

- Fuite de données par une attaque Cloud qui va impacter les assurés de Axa utilisant ce serveur Cloud voir le fournisseur s'il s'assure aussi chez Axa. (First party)
- Panne d'un logiciel populaire qui affecte les clients des entreprises qui utilisent ce logiciel (pas d'accès aux services en ligne par exemple). La responsabilité du fournisseur du logiciel mais aussi des entreprises qui l'utilisent est engagée pour le préjudice subi par les clients. (Third party)
- Vol de données et usurpation d'identité de personnes assurées par Axa. (retail)

Ces scénarios peuvent affecter différents secteurs de l'économie et différents pays, ils présentent un risque d'accumulation élevé. Pour les scénarios événements retenus, la sévérité est modélisée stochastiquement. Le modèle stochastique ainsi que les paramètres stochastiques retenus dépendront du

scénario étudié. De manière générale, il n’y a pas encore un cadre uniforme pour le développement de ces scénarios ce qui rend leur analyse compliquée. Une fois le scénario formulé, généralement sous la forme d’un récit fictif comportant des détails qualitatifs, il faut évaluer son coût. On obtient ainsi les pertes par scénario sur chaque structure assurée qui pourrait être impactée.

La fréquence annuelle de survenance est ensuite calculée. Chez Axa, la fréquence pour chaque scénario est obtenue à partir de valeurs fixées par jugement d’experts grâce à l’historique de sinistralité. En combinant la sévérité des scénarios générés à leur fréquence de survenance annuelle, on obtient les pertes annuelles attendues.

1.3 Modélisation de la structure de réassurance

Les traités de réassurance sont des contrats entre assureurs et réassureurs dans une optique de transfert de risque. Un ensemble de traités entre un ou plusieurs assureurs et réassureurs constitue une structure de réassurance. Au sein d’Axa, on a cette volonté d’optimiser la réassurance tant à une échelle locale qu’au niveau groupe ; de fait, les traités de réassurance sont abordés dans une vision d’ensemble. C’est pourquoi nous allons dans cette partie introduire la structure de réassurance Cyber qu’on a pu répliquer sur l’outil R.

1.3.1 Rôle de la cyber réassurance chez Axa

Le groupe Axa est l’un des plus grands groupes d’assurance en France et dans le monde, avec 95 millions de clients dans le monde et 99,9 milliards d’euros de chiffre d’affaires pour l’année 2021 (AXA (2022c)). Le groupe à travers ses nombreuses entités mène différentes activités dont les principales restent l’assurance et la réassurance.

La réassurance est répandue car elle présente plusieurs avantages. La volonté pour les assureurs de réduire leur probabilité de ruine, autrement dit, garantir leur survie. Certains traités, dits «cat» permettent de protéger l’assureur contre les risques extrêmes qui le mettent en danger. Avec la réforme solvabilité II, la réassurance permet alors de mieux répondre au pilier 1 de cette directive. En transférant une partie de son risque, l’assureur réduit son Solvency Capital Requirement (SCR). Le SCR (ou capital économique en français) désigne le capital à bloquer pour couvrir les pertes que subirait l’assureur dans le cas d’une année «catastrophique» qui aurait 1 chance sur 200 de survenir.

La réassurance permet également de lisser les résultats des différentes années. Les assureurs, averses à la volatilité, préfèrent avoir des années moyennes consécutives plutôt qu’alterner entre très bonne et très mauvaise année.

Au sein du groupe Axa, les différentes entités réassurent leurs risques selon leurs objectifs propres en termes d’appétit au risque et selon leurs budgets. AGRé est née pour gérer toute cette réassurance du groupe, initialement sur les branches non-vie (Axa Global PC) puis sur l’ensemble des portefeuilles depuis quelques années (Axa Global Re). L’objectif premier était de prendre plus de poids en termes de pouvoir de négociation en permettant au groupe de se positionner comme interlocuteur des réassureurs et courtiers en tant qu’ensemble d’entités. L’activité de Axa Global Re n’a cessé de se diversifier pour prendre un rôle de réassureur, de courtier, mais surtout de conseiller auprès des entités Axa sur divers points pour avoir les structures de réassurance optimales.

Le principe décrit sur le schéma 1.5 est le suivant : AGRé après réception pour l’année des traités de chaque entité va décider de :

- Réassurer une partie de ces traités en les rétrocédant sur le marché externe (Back to back reinsurance). Pour ce faire AGRé va souscrire ces traités locaux puis se réassurer à son tour sur le marché avec des traités qui correspondent exactement aux traités locaux des entités. Le nom

de back-to-back fait référence à cet effet miroir des traités souscrits. AGRe ne supporte en réalité que le risque de contrepartie des réassureurs externes vis-à-vis des entités.

- Réassurer elle-même l'entité sans récession externe sur le marché (Own funds reinsurance)
- Combiner les deux possibilités précédentes ; cela consiste à placer un pourcentage en Back to back et réassurer le reste au sein du groupe.
 - Avec cette dernière option il est possible de se placer dans un pool de réassurance. On calcule le résultat entre les entrées (Récupérations - Primes des traités locaux) et les sorties (Récupérations - Primes des traités groupes) et ce résultat est redistribué à toutes les entités et AGRe selon leur poids dans le pool. C'est une forme de partage du gain et des pertes entre entités.
 - On peut aussi considérer le cas de la rétention : le résultat n'est pas redistribué c'est à la charge d'AGRe, si c'est positif tant mieux, sinon c'est une perte pour AGRe. Pour le Cyber chez Axa, il s'agit d'une rétention et non d'un pool.

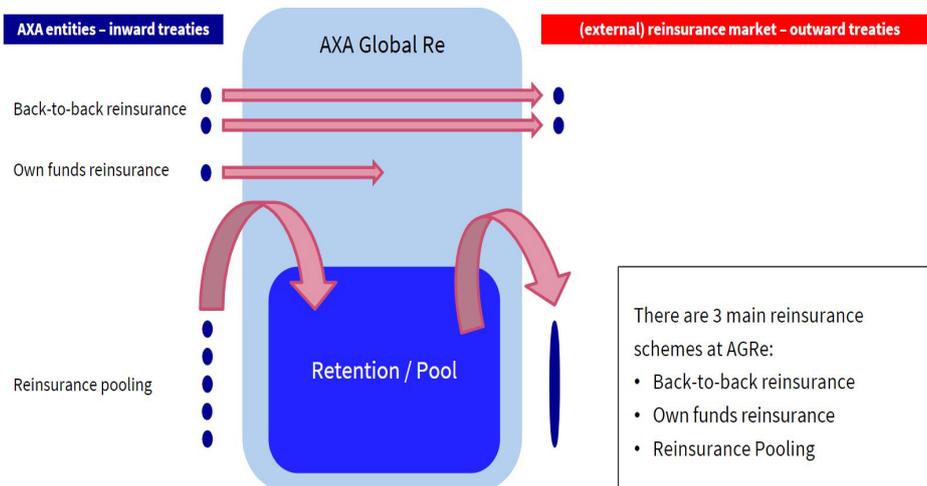


FIGURE 1.5 : Schéma des options de placements des traités chez AGRe

1.3.2 La structure Cyber : une réassurance en deux niveaux

Le modèle Cyber se présente sous forme de couches de réassurance successives. Les traités majoritairement souscrits sont des Quote-Part (QP) et des Stop Loss (SL).

Traité Quote Part

C'est un traité pour lequel l'assureur verse un pourcentage $\theta_1\%$ des primes au réassureur qui s'engage en contrepartie à couvrir $\theta_2\%$ des sinistres de l'assureur. En pratique ces deux taux sont quasiment toujours identiques, et sont désignés par le **taux de cession**. C'est pourquoi le traité quote-part est un exemple typique de réassurance dite proportionnelle. L'assureur étant le seul en charge des frais, pour rééquilibrer la transaction, le réassureur verse une **commission** qui est une part des primes cédées.

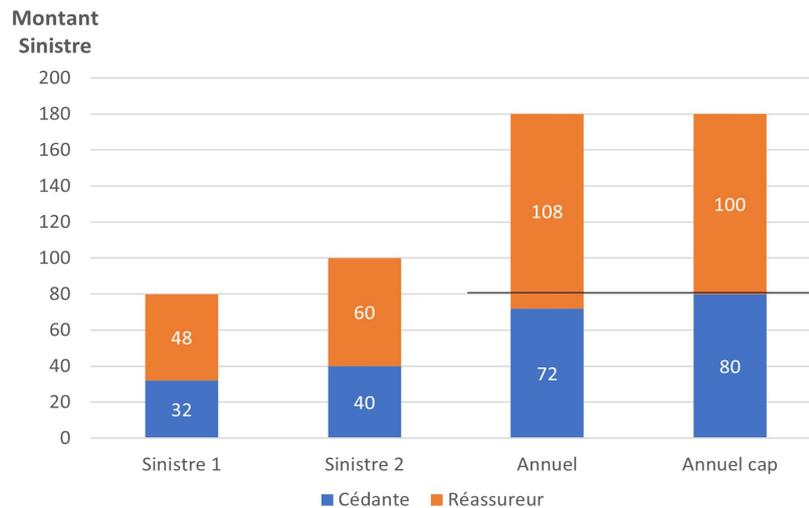


FIGURE 1.6 : Exemple de traité QP : QP 60%

Ce traité est appliqué par sinistre, sur l'exemple de la figure 1.6 on suppose que 2 sinistres surviennent au cours de l'année. On peut appliquer une limite annuelle à la part cédée en réassurance, limite qu'on désigne aussi par le "cap". Sur l'exemple, en combinant les 2 sinistres on arrive à une perte annuelle de 180, dont 108 est la part cédée en réassurance. Si on "cap" la cession à 100, le réassureur accepte au maximum une perte de 100, ici la cédante conserve alors 80 après l'application de cette limite.

Traités Stop Loss (Excédent de pertes annuelles)

Ce traité (aussi appelé traité Aggregate) est un traité répandu en réassurance non proportionnelle, ayant pour objectif de ne couvrir que les sinistres annuels au-delà d'une certaine franchise. Ce traité considère une agrégation annuelle des sinistres comme son nom l'indique, c'est ce qui le distingue du traité XS (Excédent de sinistre) qui est appliqué sinistre par sinistre. L'assureur et le réassureur conviennent de deux paramètres :

- La "**priorité**" (ou **rétenion s**) : le seuil à partir duquel l'assureur souhaite que les sinistres soient pris en charge par le réassureur.
- La "**portée**" (ou **limite w**) : la limite d'intervention, c'est le montant maximum que payera le réassureur

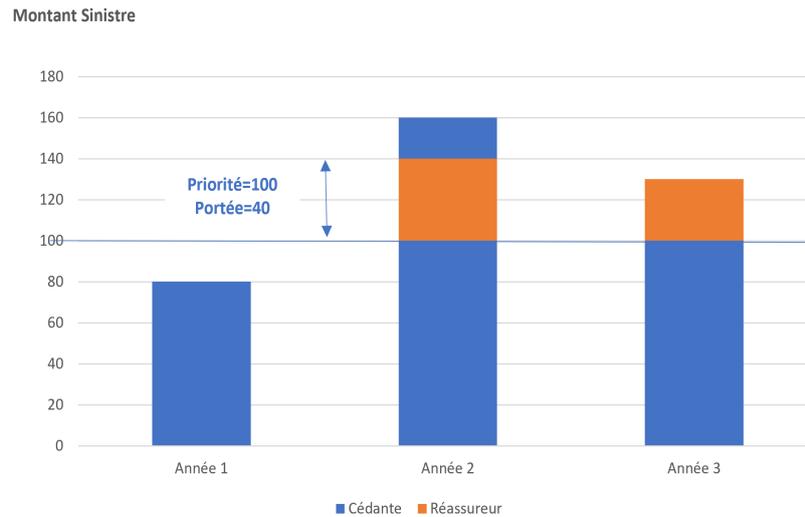


FIGURE 1.7 : Exemple de traité SL : 100SL40

Les traités en excédent peuvent être évalués par sinistres mais aussi par évènements. Selon l'ampleur des sinistres, l'une ou l'autre des évaluations sera plutôt favorable à la cédante ou au réassureur, d'où l'impact non négligeable de cette interprétation. Dans notre structure de réassurance Cyber, on retrouve quasi exclusivement des traités par sinistres. En effet la notion d'évènement en Cyber n'est pas nécessairement consensuelle. On ne peut par exemple pas facilement s'appuyer sur une délimitation temporelle ou géographique comme on a l'a vu précédemment pour définir un évènement Cyber. Il n'y a pas d'unité de lieu, une attaque pouvant se diffuser à l'ensemble de la planète, pas d'unité de temps car certaines attaques mettent des années à être repérées. Un même type de virus peut être utilisé par des groupes de hacker différents, il n'y a pas non plus d'unité d'action. Il est toutefois possible d'avoir des traités par évènement pour lesquels les deux parties définissent clairement dans le contrat le périmètre de l'évènement. On retrouve d'ailleurs dans notre structure quelques traités par évènement chez Axa XL mais de manière très marginale.

Description de la structure de réassurance

Au niveau dit local, les entités (Axa France, Axa Belgique, Axa Allemagne, Axa suisse, Axa XL) dites GI (General Insurance) souscrivent à des traités quote-part suivant des taux de cession et dans une certaine limite propre à chacune. À l'exception d'Axa XL, les entités ont fait le choix d'une couverture unique de réassurance quel que soit le type de police d'assurance Cyber sous jacente. Dans le cas d'Axa XL qui est la plus grosse entité du groupe Axa, il a été choisi d'avoir des conditions de réassurance différenciées en fonction du portefeuille, cela permet de céder plus ou moins en réassurance en fonction du résultat d'un portefeuille par rapport à un autre. Nous distinguerons donc le portefeuille A (périmètre géographique extérieur aux USA) couvert par des traités QS et le portefeuille B (qui se concentre sur les pertes cyber au sein des Etats-Unis) couvert également par des traités QS.

Axa XL souscrit également à d'autres traités qui ne sont pas réassurés par AGRe mais sont directement placés sur le marché externe de la réassurance. Ces traités ne sont généralement pas dédiés exclusivement aux sinistres cyber mais peuvent couvrir également des sinistres dommages ou RC.

Quand une perte survient, c'est cette première couverture au niveau des entités locales qui l'absorbe. À un second niveau, le groupe Axa souscrit a deux traités dits « groupe ». Le traité groupe QS, comme son nom l'indique est un traité quote-part qui va couvrir les pertes cédées par les entités. Pour chaque entité Axa (hors Axa XL), le taux de cession au QS groupe correspond exactement à celui du QS

local. Pour Axa XL, une partie seulement est versée au traité groupe, l'autre partie est versée dans un traité QS conjoint qui couvre aussi du risque Responsabilité Civile (Liability).

L'autre paramètre déterminant est la limite du traité groupe QS qui sera un pourcentage de l'assiette totale de primes cédées par les entités aux réassureurs de ce traité groupe. Si on note $Lim_{QS-Group}$ la limite sur le traité QS groupe et Ced_Prem_{GI} les primes totales cédées par le GI , on a un paramètre dit Loss Ratio cap LR_{cap} qui est le facteur permettant de passer de l'un à l'autre à travers la relation

$$Lim_{QS-Group} = LR_{cap} \times \sum_{GI} Ced_Prem_{GI},$$

avec Ced_Prem_{GI} calculé en multipliant le taux de cession de l'entité (GI) considérée par son assiette de primes

$$Ced_Prem_{GI} = \Theta_{GI} \times Primes_{GI}.$$

Malgré des taux de cession identiques (à l'exception des traités d'Axa IFL), le traité groupe n'est pas un traité miroir des traités locaux. En effet, la limite du QS groupe est mutualisée pour toutes les entités et est inférieure à la somme des limites sur les QS locaux. Dans le cas d'importantes pertes sur l'ensemble des entités, AGRe peut donc être amené à payer plus sur les QS locaux que ce que l'on récupère de la couverture groupe ; ce qui génère une rétention. À l'inverse, dans le cas d'un évènement très important sur une entité qui dépasse la limite du QS local, AGRe peut bénéficier d'une plus grande récupération de la part de la couverture groupe entraînant un gain.

Le dernier traité est le groupe Cyber Aggregate*, c'est un Stop Loss. Il couvre les rétentions (parts conservées par les assureurs) sur les traités locaux ainsi que la rétention d'AGRe dans le cas où le QS groupe ne serait pas suffisant pour couvrir les récupérations dues sur les QS locaux.

Exemple détaillé de l'application de la structure de réassurance

On présente un exemple numérique ici pour mieux comprendre le fonctionnement de la structure. Pour l'année i considérée, la France subit 2 sinistres causant des pertes de 10000 et 15000 et l'Allemagne en subit 3 de pertes 8000,3000 et 5000 ; on suppose que les autres entités ne recensent aucun sinistre. Les taux de cession des traités sur la France et l'Allemagne sont respectivement 85% et 50% avec des limites annuelles de 20000 et 15000. Le traité Groupe QS a pour limite 25000 et le traité Groupe Aggregate a une rétention de 10000 et une limite de 30000.

Les premiers traités qui sont les QS locaux sont appliqués. Les pertes cédées par chaque entité pour l'année i (Ent_{QS}) correspondent à l'application du taux de cession (θ_{Ent}) aux pertes brutes ($Loss_{Ent}$), dans la limite de la capacité autorisée (Lim_{Ent}). Pour chaque traité, on a ainsi

$$Ent_{QS} = \min(Lim_{Ent}, \theta_{Ent} \times \sum Loss_{Ent}),$$

qui donne,

$$FRA_{QS} = \min(Lim_{FRA}, \theta_{FRA} \times \sum Loss_{FRA}) = \min(20000, \underbrace{0.85 \times (10000 + 15000)}_{21250}) = 20000,$$

$$DEU_{QS} = \min(Lim_{DEU}, \theta_{DEU} \times \sum Loss_{DEU}) = \min(25000, \underbrace{0.50 \times (8000 + 3000 + 5000)}_{8000}) = 8000.$$

On peut ensuite appliquer le traité groupe QS aux pertes des entités. Comme pour les traités locaux

*Ou plus simplement groupe Aggregate qui pourra être retenue comme appellation dans la suite

il s'agit simplement de calculer la perte cédée au groupe QS avec les taux de cession fournis puis de la "caper" (minorer) avec la limite du traité groupe QS (Lim_Grp_{QS}). Les entités considérées dans l'exemple étant des GIs, leur taux de cession est le même que sur le traité local. On a $\theta_{grp_{FRA}} = \theta_{FRA} = 0.85$ et $\theta_{grp_{DEU}} = \theta_{DEU} = 0.50$, la forme formule correspondante est

$$Grp_{QS} = \min(Lim_Grp_{QS}, \sum_{Ent} \theta_{grp_{Ent}} \times \sum Loss_{Ent}),$$

$$Grp_{QS} = \min(Lim_Grp_{QS}, \theta_{grp_{FRA}} \times \sum Loss_{FRA} + \theta_{grp_{DEU}} \times \sum Loss_{DEU}),$$

$$Grp_{QS} = \min(25000, \underbrace{0.85 \times (10000 + 15000)}_{21250} + \underbrace{0.50 \times (8000 + 5000 + 3000)}_{8000}) = 25000.$$

29250

Le dernier traité, groupe Cyber Aggregate, reçoit en entrée les rétentions issues de tous les traités locaux (Ret_Ent) et la rétention du traité Groupe QS qui est à la charge de AGRe (Ret_AGRe), leur somme donne

$$Ret_Tot = Ret_Ent + Ret_AGRe.$$

Les rétentions sur les entités correspondent à la différence entre les pertes brutes et les pertes cédées par les traités locaux, soit

$$Ret_Ent = \sum Loss_{Ent} - \sum Ent_{QS},$$

$$Ret_Ent = (10000 + 15000 + 8000 + 5000 + 3000) - (20000 + 8000) = 13000.$$

AGRe a aussi une rétention sur le traité groupe QS qui sera la différence entre les récupérations des traités locaux et celles du traité groupe QS, soit

$$Ret_AGRe = \sum Ent_{QS} - Grp_{QS},$$

$$Ret_AGRe = (20000 + 8000) - 25000 = 3000.$$

On calcule bien séparément les rétentions annuelles récupérées directement auprès des entités, et celles qui proviennent de AGRe avant de faire le total. Cette étape intermédiaire permettra d'allouer les récupérations totales entre les entités et AGRe. La rétention totale correspond pour notre exemple d'application numérique à

$$Ret_Tot = Ret_Ent + Ret_AGRe = 13000 + 3000 = 16000.$$

Le traité groupe Aggregate qui a pour limite $Lim_Grp_{Agg} = 10000$ et pour rétention ($Ret_Grp_{Agg} = 15000$) s'applique comme suit :

$$Grp_{Agg} = \min(Ret_Grp_{Agg}; \max(Ret_Tot - Lim_Grp_{Agg}; 0)),$$

$$Grp_{Agg} = \min(15000; \underbrace{\max(16000 - 10000; 0)}_{6000}) = 6000.$$

Ces récupérations sont redistribuées aux entités et à AGRe à hauteur de la part de pertes apportées par chaque partie en entrée du traité, soit

$$AGRe_Grp_{Agg} = Grp_{Agg} \times \frac{Ret_AGRe}{Ret_Tot} = 6000 \times \frac{3000}{16000} = 1125,$$

$$Ent_Grp_{Agg} = Grp_{Agg} \times \frac{Ret_Ent}{Ret_Tot} = 3000 \times \frac{13000}{16000} = 4875.$$

La dernière étape est le calcul des pertes après l'intervention de tous ces traités. La perte nette finale sur l'ensemble du groupe (*Pertes N. Groupe*) est la différence entre la perte brute initiale et toutes les récupérations sur les 2 traités au niveau groupe, et s'écrit

$$Pertes\ N.\ Groupe = \sum Loss_{Ent} - Grp_{QS} - Grp_{Agg},$$

$$Pertes\ N.\ Groupe = (15000 + 10000 + 8000 + 5000 + 3000) - 25000 - 6000 = 10000.$$

La perte nette au niveau d'AGRe correspond à la différence entre d'une part la récupération des traités locaux et d'autre part les récupérations du traité groupe QS et celles du traité Groupe Aggregate allouées à AGRe; elle s'obtient par

$$Pertes\ N.\ AGRe = \sum Ent_{QS} - Grp_{QS} - AGRe_Grp_{Agg} = (20000 + 8000) - 25000 - 1125 = 1875.$$

On a donc une année pour laquelle Axa perd 1000 sur l'ensemble du Groupe, tandis que AGRe a des pertes de 1875.

* * *

Dans cette première partie, on se familiarise avec un risque assez large par sa définition et qui prend de plus en plus d'ampleur sur le marché de l'assurance. Le risque Cyber qui constitue une des premières préoccupations aujourd'hui regroupe de nombreux types de dommages et de couvertures. Il reste difficilement quantifiable et modélisable, les méthodes historiques communes se heurtant au manque cruel de données, à son caractère systémique, contagieux et très évolutif. Pour modéliser ce risque, les assureurs dont Axa, utilisent une approche par scénarios Cyber définie à l'aide des données d'expositions recueillies. On a aussi vu comment se met en place la réassurance cyber au sein du groupe. La structure de réassurance Cyber a été introduite à travers les traités qu'elle contient et leurs interactions pour aborder dans la suite le problème central de ce mémoire : l'optimisation de cette structure.

Chapitre 2

Présentation des données et calcul des indicateurs de performance

Dans cette partie, les données utilisées seront présentées, en proposant des solutions face aux questions de confidentialité et de taille de données importante. A partir de ces données on va construire la structure de réassurance Cyber et présenter les indicateurs de performance de cette structure.

2.1 Description et confidentialité des données

En Cyber, on rappelle qu'on dispose de données historiques sur la sinistralité assez limitées pour plusieurs raisons. D'une part, car les entités victimes d'attaques Cyber ne sont pas toujours enclines à diffuser leurs données de pertes et d'autre part car c'est un risque étudié depuis peu par rapport à d'autres types de risques. Pour le premier point, une réglementation incitative sur la question est en train de se développer mais reste encore assez récente, particulièrement en Europe. Cela explique le fait que les bases de données disponibles et utilisées sont généralement américaines, nécessitant parfois d'être adaptées pour modéliser les risques sur les portefeuilles européens. Il y a un important décalage entre les Etats Unis et le reste du monde, tant sur la sinistralité que sur la couverture du risque en Cyber [†]. Pour toutes ces raisons, la modélisation du risque Cyber passe par des simulations de scénarios qui correspondent à des événements Cyber comme on l'a présenté. La génération des pertes brutes que nous allons introduire n'a pas été réalisée au cours de cette étude.

2.1.1 Les données de pertes, point de départ du modèle

On a utilisé un jeu de pertes modélisées par une équipe du groupe dédiée qui travaille sur les modèles. Cette équipe s'occupe de la modélisation pour toutes les entités du groupe en développant les modèles, de la théorie jusqu'à l'implémentation. Elle récupère les données de portefeuille cyber auprès des entités pour faire tourner ces modèles sur ces portefeuilles de données. Pour finir, l'équipe de modélisation communique les résultats des modélisations sous forme d'un tableau de pertes annuelles (YELT pour Year Event Loss Table) aux entités dont AGRe qui est l'entité de réassurance.

Une simulation sur l'année correspond à la vue d'ensemble de la sinistralité Cyber pour toutes les entités sur l'année simulée. À l'issue de la modélisation, chaque simulation décrit donc pour chacune des entités les pertes associées aux événements Cyber qui peuvent se produire.

[†]Voir annexe [A.2](#) pour les graphiques illustrant la prépondérance des Etats Unis sur le marché de la cyber réassurance

Year	Event ID	TYPE	ENTITY	LOB	Loss
1	502	1	CHE	CHE-L1	203
1	503	3	XLI	XLI-L1	1200
2	501	1	FRA	FRA-L3	830
...					

TABLE 2.1 : Forme des données de pertes brutes

Le tableau 2.1 montre sous quelle forme les données de pertes sont présentées. C'est un exemple sur lequel, les montants de perte ont été changés.

Les variables qui y sont contenues sont :

- Year : les années de simulation. On travaillera avec 50000 années de simulation ; une même année aura plusieurs évènements qui pourront toucher différentes entités. Le nombre de lignes n'est donc pas 50000 mais environ 400000. Autrement dit une ligne correspond à une perte causée par un sinistre unique qui frappe une entité donnée sur l'année observée.
- Event ID : un identifiant pour désigner de manière unique un évènement Cyber.
- Variable Type qui prend 1,3 ou 11 pour préciser si c'est un risque First party, Third party ou retail.
- Entity désigne l'entité d'Axa touchée par l'évènement, elles sont au nombre de 9. 7 entités locales (GI) pour les pays France (FRA), Allemagne (DEU), Suisse (CHE), Italie (ITA), Belgique (BEL), Espagne (ESP), Grande-Bretagne (GBR), une entité Juridica (JUR) et une entité globale Axa XL (XLI). Juridica est l'entité d'Axa pour la protection contre les risques juridiques autant pour les particuliers que les professionnels. Axa XL elle, s'occupe de l'assurance IARD des grandes entreprises et des risques de spécialités. L'entité propose des couvertures d'assurance et de réassurance pour tous types d'entreprises dans plus de 200 pays avec plus de 30 familles d'assurance : Dommages aux biens, responsabilité civile, cyber, construction, risques professionnels...
- LOB (Line of Business) ; on classe les sinistres selon les secteurs d'activité pour leur couverture, la LoB donne une indication plus précise de la branche touchée. Chaque entité à ses propres LoB, cette variable a donc une liste de différentes modalités selon l'entité.
- **Loss est la variable clé, celle qui contient le coût de la perte.** Cette perte brute est reportée en euro car tous les paramètres négociés sur les traités seront également en euro. Les pertes desquelles nous partons dans l'étude sont déjà en euro mais elles sont initialement modélisées par entité, avec les devises de ces entités. Cette conversion en euro est influencée par le taux de change des différents pays des entités ; comme on le verra dans la partie 3.7, l'évolution de ces taux de change va agir sur les données.

2.1.2 Formalisme des informations de la structure

Dans le modèle de réassurance Cyber, des données indispensables sont les types de traités souscrits par les entités mais également au niveau de groupe. On parle des caractéristiques de la structure de réassurance. On a les différents taux sur les traités quote-part locaux et sur le traité quote-part au niveau groupe, ainsi que les limites et rétentions sur les traités en excédent de sinistre par risque et par évènement. Au-delà de savoir quelle forme prennent les traités, il est capital de formaliser quelles

branches ils couvrent et à quelle hauteur ils les couvrent comme nous allons le préciser plus loin. Dans un contrat, ou sur un schéma toutes ces informations se transcrivent de manière assez évidente mais pour le synthétiser dans un fichier, on utilise des tableaux. Les différents traités en colonne et chaque ligne contenant l'information désirée. Les 3 premières lignes précisent des paramètres du traité tandis que les lignes suivantes correspondent aux LoB. En effet, la répartition des LoB ne correspond pas avec exactitude à la répartition des traités disponibles sur le marché. Par exemple le portefeuille A de l'entité Axa XL n'a pas toutes ses sous unités couvertes par le traité concerné mais seulement un pourcentage qui sera le plus conséquent et d'autres traités vont couvrir ses autres sous unités. C'est pourquoi le tableau précise pour chaque LOB quel pourcentage de ses unités chaque traité va couvrir. Le premier tableau 2.2 noté **infos-QS** contient les informations pour l'ensemble des traités quote-part. Le taux de cession pour chaque traité quote-part.

La capacité, sera donnée pour une cession à 100%, nécessitant donc de calculer la capacité effective au taux de cession $Cap_{\theta} = \theta \times Cap_{100\%}$. Cette capacité devra également parfois être convertie en euros car connue en USD pour certains traités.

Le type va indiquer pour un traité donné s'il entre en jeu sur les risques First, Third ou les deux, dans ce dernier cas de figure le type prendra la valeur 0 dans le tableau.

Chaque traité va concerner les différentes LOB (de la table 2.1) à une certaine hauteur, caractérisé par un taux.

Traités	Treaty 1	Treaty 2	Treaty 3	...	Treaty n
Cession rate	0,5	0,35	1	...	0,8
Capacity	1000	1500	1000	...	2000
Capacity Currency	EUR	USD	USD	...	EUR
Type	0	1	3	...	0
CHE-L1	1	0	0	...	0
XLI-L1	0	0,1	0,9	...	0
...					
FRA-L3	0	0	0	...	1

TABLE 2.2 : Tableau des données de la structure : Traités quote parts

Par exemple, le traité 2 est un traité QP cédé à 35% au réassureur avec une limite fixée à 1500 ; sur les événements qui touchent Axa XL, il ne couvrira que le risque First. Ce traité entre en jeu sur 10% des sous unités de business de la branche XLI-L1.

Pour les traités Aggregate également, il faut simplement la limite et la rétention pour chaque traité, comme on peut le voir dans le tableau 2.3 **infos-Agg**.

Entity	Limit	Retention
groupe	50000	20000

TABLE 2.3 : Tableau des données de la structure : Traités Aggregate

Les données sont présentes dans des fichiers Excel au format *.csv* qu'on peut aisément importer et manipuler sur R.

2.1.3 Manipulation pratique des données

Les données de pertes manipulées donnent des indications sur la distribution de ces pertes brutes pour chaque entité. Elle reflète la sinistralité simulée par le groupe Axa chez chacune de ses entités

locales. Pour des raisons de confidentialité, certains éléments seront donc anonymisés ou remplacés par des données arbitraires. L'objectif étant de restituer de manière claire les hypothèses ainsi que les résultats sans divulguer les informations confidentielles.

Gestion de la confidentialité

Un premier point est d'anonymiser les identités des différentes entités. Dans la suite du mémoire, 8 entités considérées seront désignées par les 8 premières lettres de l'alphabet (Axa A, Axa B,..., Axa H), selon un ordre arbitraire. On passe des 9 entités de départ à 8 entités modélisées car une des entités Axa ne renvoie aucune perte dans le jeu de simulations obtenu. Pour avoir une structure la plus générale possible, cette entité est incluse dans la réplication du modèle, mais les parties du code la concernant dans la réplication sont commentées. Dans toute la suite du mémoire on étudiera les résultats sur les 8 entités présentant au moins une perte brute non nulle sur une des années simulées. Ces entités peuvent être divisées en trois familles selon leurs caractéristiques. L'entité H qui est la seule dont on va lever l'anonymat désignera Axa XL. Elle souscrit des « gros » risques, auprès d'assurés présents partout dans le monde mais principalement aux Etats Unis et en Europe. Cette entité est sensible au taux de change euro-dollar US. Les entités C et E réassurent des risques plus petits que Axa XL. Elles couvrent ces risques essentiellement dans le pays d'implémentation de l'entité au sein de portefeuilles assez importants. La dernière famille composée des entités A, B, D, F, G couvrent des portefeuilles assez petits. Ces positionnements sont assez cohérents avec la part de pertes apportées par chaque entité sur le graphique 2.1. Cette anonymisation permet de conserver les vraies valeurs en pourcentage sur le graphique.

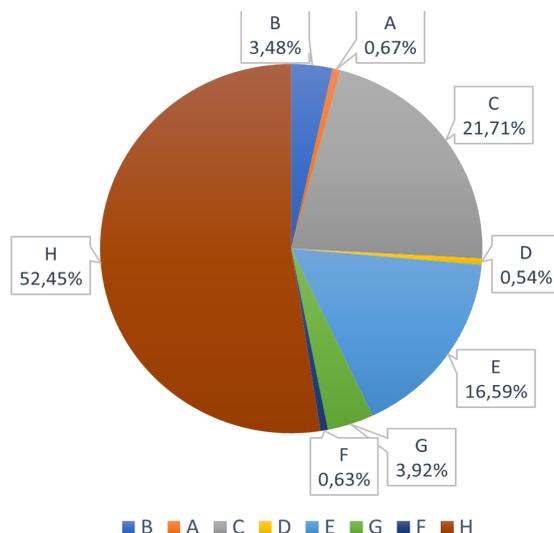


FIGURE 2.1 : Répartition des pertes brutes par entité

Comme on peut le voir sur le diagramme circulaire de la figure 2.1, plus de la moitié des pertes touchent l'entité H, tandis que certaines entités comme Axa A ou Axa D sont très peu touchées. La répartition est très inégalitaire ; plus de trois-quarts des pertes concernent Axa H, Axa E et Axa C. L'idée étant de ne pas fournir d'indication sur les valeurs des indicateurs renvoyés par le modèle, s'agissant des pertes, récupérations, primes cédées. Dans cette optique, sur les graphiques, les valeurs en ordonnée ne seront pas visibles. Pour certains graphes ou l'évolution des courbes en fonction de ces valeurs en ordonnée présente un intérêt, on pourra substituer les valeurs des graduations à des niveaux x , $2x$, $3x$...

Dans toute la partie comparative du chapitre 3, seront présentées les variations relatives des indicateurs en pourcentage à la place des valeurs calculées.

Taille des données et échantillonnage

On rappelle qu'une *année simulée* correspond à une année modélisée présentant plusieurs évènements de pertes (scénarios) simulés possibles. Par exemple dans le tableau de pertes de l'exemple 2.1, les deux premières lignes décrivent des pertes qui surviendraient la même année ($Year = 1$) mais causées par des évènements différents ($Event_ID$ différents) et affectant des entités différentes. Une ligne de perte est identifiée par toutes ces variables : année, évènement générateur, entité concernée, type de risque (First party, Third party, retail) et même la ligne de business (LoB). Autrement dit, au cours d'une année, plusieurs évènements peuvent survenir, déclenchant ou non des pertes sur certaines entités mais pas d'autres, voire sur certaines branches uniquement d'une entité. On considère comme perte unitaire, une perte sur un portefeuille (LoB) bien définie conditionnée au fait qu'un évènement ait lieu. Cette perte n'est pas à confondre avec la perte annuelle qui est à la perte totale sur une année pouvant prendre en compte les pertes relatives à plusieurs évènements. Les données de pertes sur les 50000 *années simulées* correspondent à un nombre de pertes unitaires très conséquent, précisément 467181 lignes de pertes recensées. Ce qui fait environ 9 pertes en moyenne pour une année. En réalité les années sont assez hétérogènes en termes de sinistralité, certaines années ne connaissent aucun évènement cyber tandis que pour d'autres, la sinistralité sera nettement plus sévère. Le modèle implémenté pour reproduire la structure de réassurance sur R (R CORE TEAM (2022)) devient chronophage quand il est lancé sur l'ensemble des simulations. Il faut entre 25 et 28 minutes pour appliquer cette structure de réassurance sur les données complètes. Ce temps de calcul explose quand on passe aux algorithmes d'optimisation. Comme nous le verrons plus loin, ces algorithmes de forme itérative effectuent plusieurs appels de la fonction modèle.

On réduit le nombre de pertes, en condensant les lignes de données sur certaines entités. Parmi les entités, seule Axa XL présente une différence de traitement dans la structure selon qu'on soit sur le portefeuille A ou B. Cette distinction est portée par la variable LoB . La connaissance de la LoB devient facultative sur l'ensemble des entités hors Axa XL.

De manière analogue, l'information de la variable $TYPE$ n'est intéressante que pour Axa XL. Sur les autres entités, la réassurance est toujours appliquée tant sur les risques First party que sur les risques Third party (la variable $TYPE$ vaut 0 dans le tableau 2.2 pour tous les traités de ces entités). Sur toutes les entités hors Axa XL, les pertes sont agrégées selon l'année de survenance ainsi que l'évènement générant la perte sans aller au niveau de détail de la LoB ou du type de risque couvert. Cette opération permet une réduction du nombre de pertes de 467181 à 307502 lignes soit environ 150000 lignes de pertes en moins.

Les méthodes implémentées n'en restent pas moins chronophages, il est nécessaire de les lancer sur un échantillon de données plus faible pour effectuer des tests répétitifs mais surtout sur les algorithmes qui appellent plusieurs fois le modèle.

On travaillera sur un échantillon de 1000 simulations. Il est important de valider la représentativité de cet échantillon. Les 1000 simulations sont retenues aléatoirement parmi les 50000 simulations initiales.

Les boîtes à moustache de la figure 2.2 représentent la dispersion des pertes sur l'ensemble des simulations et sur l'échantillon pour chacune des entités. La légende indique les différentes entités et le type de distribution observée par entité. $A.Echant\ 1000$ et $A.Echant\ 50000$ correspondent respectivement à la distribution du sous-échantillon de 1000 années et à celle de l'échantillon complet de 50000 années sur l'entité A. On voit que les couples de boxplots sur les entités sont assez similaires, traduisant une dispersion de l'échantillon bien représentative de celle de l'ensemble.

Il n'a pas été utile de réaliser un échantillonnage plus sophistiqué car le tirage de manière aléatoire des 1000 années est satisfaisant. Pour s'assurer que le tirage aléatoire est acceptable, on a vérifié qu'on obtient cette similarité entre paires de boxplots pour plusieurs jeux de 1000 années tirés aléatoirement. Le gain en temps de calcul est considérable ; le modèle de réassurance s'exécute sur une trentaine de secondes avec 1000 simulations. On a une réduction du temps de l'ordre de $X50$ qui est bien cohérente avec la réduction du nombre de données.

Bien que cet échantillon soit admis comme représentatif, dans les études, on ne recourt à l'échantillon que pour les calculs qui ne sauraient être réalisés en un temps raisonnable sur l'ensemble des pertes. Dans les résultats présentés il sera précisé sur quelles données les calculs ont été effectués.

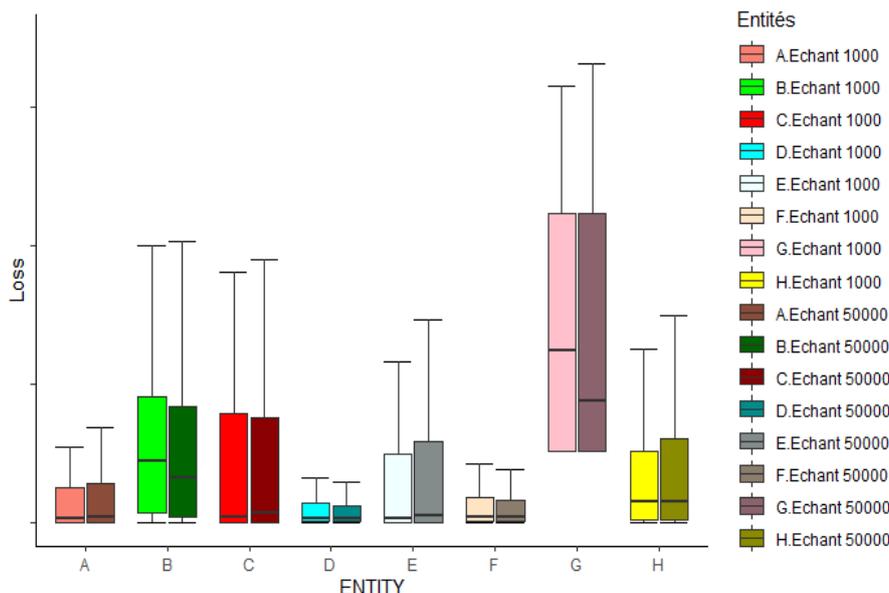


FIGURE 2.2 : Boxplots des pertes sur le total et sur un échantillon de 1000 simulations

On retient 1000 années pour la taille du sous-échantillon comme compromis entre la diminution des temps de calcul et la conservation des informations utiles sur les pertes. Comme nous le verrons dans la partie 3, les calculs effectués sur les données seront principalement des calculs de moyenne et de quantiles (notamment le quantile à 99,5%). On s'assure donc qu'on pourra accéder aux pertes survenant avec une probabilité d'au moins 0.5%, ce seuil correspond à la 5^{ème} perte la plus importante dans un échantillon de taille 1000. On perd cependant en robustesse en travaillant sur un sous-échantillon de 1000 années simulées. Sur le calcul du quantile, il est plus probable d'avoir une valeur atypique sur la 5^{ème} plus grande valeur que sur la 250^{ème}. En effet, le premier cas nécessite que les 5 plus grandes valeurs soient atypiques tandis qu'il faudrait que les 250 plus grandes valeurs soient atypiques dans le cas de l'échantillon initial. De même le calcul de moyenne peut contenir plus de biais car il comprendra 50 fois moins de valeurs. Bien que la proximité entre les distributions de l'échantillon initial et du sous-échantillon soient justifiée par la figure 2.2, nous retenons donc un échantillon de 1000 uniquement pour que les ressources en temps de calcul restent acceptables en pratique.

2.1.4 Réplication de la structure sur R

Dans cette partie, on présente le programme implémenté pour simuler le modèle de réassurance. Cette étape permet d'obtenir une fonction qui à l'appel, va appliquer la réassurance à tous les niveaux de la structure pour obtenir les parts cédées et conservées par chaque entité ainsi que la part réassurée

au global par AGRe et par le groupe Axa. On a vu dans l'exemple de la partie (1.3.2) comment les traités s'appliquent sur les pertes annuelles des entités, on va voir à présent comment cela se fait en pratique sur R.

La structure se présente sous forme de niveaux de réassurance qui s'empilent et sont interdépendants. Le calcul sur le traité groupe QS a besoin par exemple des cessions et rétentions de chaque traité local. C'est pourquoi le modèle va partir des pertes brutes et les faire passer par les différents traités concernés pour aboutir aux pertes nettes qu'il reste à AGRe mais aussi au groupe à terme. Pour cela on écrit une fonction R notée *model_reass()*.

Elements en entrée et en sortie du modèle de réassurance

On a en entrée les tableaux de données de la partie précédente, à savoir les pertes pour chaque entité (tableau 2.1 d'environ 460 000 lignes) ainsi que les informations de la structure de réassurance, à la fois sur les traités quote-part (tableau infos-QS 2.2) que sur les traités stop-loss (tableau infos-Agg 2.3).

L'information commune à ces deux ensembles de données est la branche de réassurance, la LoB (Line of Business). En effet dans le tableau de structure, pour chaque LoB, on a les paramètres de tous les traités quote-part et dans le tableau des pertes, à chaque ligne de pertes correspond une LoB donnée. On commence donc par concaténer les données de pertes et celles de la structure de réassurance par le critère de la LoB avec la fonction "merge" de R. Comme le montre le tableau 2.4, chaque ligne de pertes est ainsi complétée par la part prise par chacun des traités. Pour les entités hors Axa XL, un seul traité (le traité QS de l'entité concernée) va agir à 100% sur les pertes, peu importe la branche concernée. En effet pour les GIs la réassurance est la même quelle que soit la LoB tandis que pour Axa XL la réassurance est différenciée selon la LoB. Après cette fusion, on obtient un nouveau tableau qu'on peut noter *infos-compl* pour (informations complètes).

Year	Event ID	TYPE	ENTITY	LOB	Loss	CHE _{QS}	XL-1 _{QS}	XL-2 _{QS}	...	FRA _{QS}
1	502	1	CHE	CHE-L1	203	1	0	0	...	0
1	503	3	XLI	XLI-L1	1200	0	0,1	0,9	...	0
2	501	1	FRA	FRA-L1	830	0	0	0	...	1
...										

TABLE 2.4 : *infos-compl* : table de données après fusion des pertes et de la structure

Le tableau en sortie du modèle est le tableau **infos-compl** ayant subi les modifications suite à l'application des différents traités. Le programme est pensé pour que les calculs soient appliqués colonne par colonne.

Différentes étapes du modèle implémenté :

1. Une première partie de la fonction va s'atteler à calculer les récupérations des traités locaux (au niveau des entités et portefeuilles). La perte de chaque ligne sera évaluée par chaque traité même si en pratique seul le traité en vigueur sur le portefeuille va s'appliquer. On a une vingtaine de traités locaux, car sur Axa XL, il y a une grande variété de traités selon les différents portefeuilles. Il serait donc lourd de créer des conditions (avec *if* ou *case_when*) pour déterminer pour chaque perte quel traité appliqué. On va donc calculer les récupérations (équivalentes aux pertes cédées en réassurance) pour tous ces traités, bien qu'elles soient nulles pour tous les traités non concernés. En effet la perte cédée s'obtient en multipliant la perte subie (colonne Loss de *infos-compl*) à la part supportée par le traité (colonnes des traités *CHE_{QS}*, *XLI_{QS}*...). Le résultat de

ce calcul est conservé dans les colonnes des traités, il ne s'agit donc que d'une mise à jour de ces colonnes par

$$Traite_{QS} := Loss \times Traite_{QS}.$$

Par exemple pour CHE_{QS} on a

$$CHE_{QS} := Loss \times CHE_{QS} = \begin{pmatrix} 203 \\ 1200 \\ 830 \\ \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer pour l'ensemble de ces traités locaux leurs récupérations en accédant aux taux de cession associés à chaque portefeuille dans la ligne Cession rate du tableau de la structure 2.2. Ce nouveau résultat est lui aussi conservé dans les colonnes des traités en remplaçant les données qui s'y trouvent déjà,

$$Traite_{QS} := Traite_{QS} \times tx_cession.$$

Il faut ensuite appliquer leurs limites annuelles à ces traités par des calculs qui vont ajouter deux types de colonnes à infos-compl. Pour chaque traité, on commence par stocker les récupérations annuelles totales dans une nouvelle colonne notée $Traite_{QS} - Year$. Pour chaque ligne de pertes, ce résultat s'obtient en sommant la part cédée (dans la colonne $Traite_{QS}$) sur toutes les lignes de pertes survenues la même année. Le minimum entre ces récupérations annuelles et la limite annuelle fixée par traité, limite à trouver dans la ligne Capacity du tableau infos-QS (2.2 pour chaque traité, est retenue. Le dernier type de colonne pour les traités locaux ($Traite_{QS} - ap - cap$ pour après "cap") va contenir la part cédée par le traité après prise en compte de cette limite annuelle. C'est une répartition de la perte annuelle sur les différentes lignes de perte proportionnellement à la part de pertes de chaque ligne,

$$Traite_{QS} - ap - cap = Traite_{QS} \times \frac{Traite_{QS} - Year}{\sum_{Year=i} Traite_{QS}}.$$

Une fois que tous les traités locaux ont calculé leurs triplets permettant d'avoir les valeurs des récupérations on applique les traités groupe.

2. Le traité groupe QS est appliqué comme les traités quote-part locaux. On calcule son paramètre de limite annuelle par $Lim_QS = LR_{cap} * PrimesCédées$ ou les primes cédées dépendent des coefficients de cession des portefeuilles que ce traité réassure. Le même triplet de colonnes que précédemment est ensuite calculé.
3. Pour le traité Groupe Aggregate, les informations de limite et rétention sont à récupérer dans le tableau infos-Agg. Ce traité rajoute plusieurs colonnes à notre tableau infos-compl pour restituer les étapes intermédiaires nécessaires au calcul des récupérations du traité Aggregate. On rappelle parmi ces étapes qu'il faut calculer les rétentions sur les traités locaux, faire une distinction entre les pertes apportées par AGRe et celles des entités. (cf partie 1.3.2)

Finalement en sortie de la fonction du modèle de réassurance on a le tableau infos-compl avec toutes les colonnes supplémentaires, dont les pertes nettes finales pour le groupe et pour AGRe.

On ne détaille pas ici certains éléments qui complexifient la structure. Les quelques traités par évènement de Axa XL ont un traitement spécifique. On a aussi une co-cession et de nombreuses subtilités sur certaines entités qui sont modélisées par la fonction.

2.1.5 Validation par comparaison Remetrica

La réplication du modèle sur R présentée ci-dessus est assez complète, toutes les étapes intermédiaires sont conservées, permettant ainsi d'effectuer différents calculs par la suite qui utilisent ces résultats intermédiaires. Pour valider ou non l'application de la structure à un jeu de pertes brutes en entrée, on s'est assuré de la justesse de deux ensembles de valeurs en sortie : les pertes nettes au niveau du groupe et celles au niveau de AGRe pour chaque année. On a observé **la perte totale** sur l'année et **la perte maximale** produite par un événement sur l'année. Il est pertinent de s'intéresser à ces deux grandeurs pour effectuer la comparaison car comme nous l'avons vu dans la partie qui présente la réplication du modèle sur R, ces pertes constituent les résultats finaux et elles reprennent tous les calculs intermédiaires.

On a cette table de pertes après réassurance pour le groupe et pour AGRe qu'on transforme en table de pertes totales annuelles en sommant toutes les pertes d'une même année simulée. La nouvelle table notée *tab_pertes_R* agrégée n'aura plus que 50000 lignes de pertes.

On va comparer ces pertes à celles récupérées en sortie du modèle lancé sur un logiciel développé par AON : Remetrica. Axa achète une licence de ce logiciel pour pouvoir l'exploiter ; c'est l'un des outils privilégiés de modélisation. Remetrica est utilisé au sein d'Axa pour modéliser le capital économique et vérifier les contraintes d'appétit au risque du groupe. C'est un modèle très complet et détaillé. L'avantage de passer à un modèle sous R est de simplifier le modèle en ciblant ce qu'on souhaite mettre en avant dans les modèles, de raccourcir le temps de calcul pour pouvoir lancer des algorithmes de simulation et faire des études de sensibilité plus rapidement et facilement que sous Remetrica. Pour le modèle Cyber répliqué sur R par exemple, on passe d'un temps de calcul de quelques heures à 25 min environ. En lançant le modèle de réassurance sur Remetrica avec les mêmes données de pertes brutes en entrée, on peut récupérer une table des pertes totales annuelles après réassurance au niveau du groupe et de AGRe. On va la noter *tab_pertes_Rem* et la comparer à *tab_pertes_R*.

Cette comparaison permet de mesurer les différences en termes d'implémentation de la structure de réassurance car on fournit les mêmes données et on compare les pertes en sortie.

La vérification de la validité du modèle sur R se fait en admettant un certain seuil de tolérance qu'on peut accorder à des subtilités non prises en compte dans le modèle R ou tout simplement à des arrondis à certains moments car les étapes intermédiaires de calcul sont nombreuses avant d'arriver au calcul des pertes. On compte donc le nombre de valeurs de pertes différentes pour 3 seuils de tolérance donnés : 1%, 5% et 10%. Par exemple pour le seuil de 10%, la perte Remetrica et la perte calculée sur R seront admises différentes si elles ont un écart relatif d'au moins 10%. La structure sera optimisée avec une vision groupe et non AGRe, c'est pourquoi on observe ici les différences au niveau groupe. On restitue le nombre d'années différentes pour les pertes au niveau du groupe dans le tableau. Le critère de différence étant l'écart relatif entre les pertes Remetrica et celles renvoyées par le modèle sur R. 2.5,

$$Ecart_{Grp} = \frac{Pertes_{Grp-Rem} - Pertes_{Grp-R}}{Pertes_{Grp-Rem}},$$

On obtient les ordres de grandeurs suivants pour la perte totale annuelle au niveau du groupe :

Seuil de tolérance	1%	5%	10%
Nb d'années simulées	50000	50000	50000
Nb d'années avec pertes non nulles	15000	15000	15000
nb d'années différentes	600	250	80
nb d'années différentes / nb d'années avec perte non nulle	0.04	0.017	0.0053

TABLE 2.5 : Nombre de simulations dont l'écart entre modèle Remetrica et R est supérieur au seuil

Ces valeurs restent raisonnablement faibles par rapport aux 15000 années de simulation générant des

pertes. En effet sur les 50000 scénarios, on a environ 15000 qui génèrent des pertes non nulles au niveau du groupe. Ces écarts observés dans le tableau 2.5 peuvent s'expliquer par des différences de modélisation. En effet, notre modèle répliqué sur R est simplifié par endroits. Le modèle Remetrica modélise le Cyber et la RC (Liability), c'est une spécificité qui n'est pas prise en compte dans R. Les deux traités d'Axa XL (A et B) par exemple, réassurent à la fois le risque RC et Cyber, avec leurs limites sur les quote-part mutualisées sur ces deux périls.

Dans certains scénarios extrêmes, rares mais possibles, la capacité serait entièrement consommée en partie à cause des sinistres dus au risque RC. Le modèle tel qu'il est répliqué dans R ne prenant pas en compte le risque responsabilité civile (RC), cette consommation de la capacité des QS n'est pas parfaitement modélisée.

2.2 Choix et calcul des indicateurs de performance

En réassurance, après l'application d'un traité suite à la survenance de sinistres, différents indicateurs peuvent être calculés pour avoir une idée de la rentabilité de ce traité. On peut avoir la même démarche pour une structure de réassurance. Le but de ces indicateurs est de :

- Quantifier le gain, si gain il y a eu (sinon on évalue la perte), apporté par l'application de la réassurance. Par gain on ne sonde pas uniquement le transfert de pertes induit par la couverture mais on prend également en compte ce que cette dernière nous coûte.
- Comparer différentes structures de réassurance entre elles. Les types de traités en jeu ne vont pas changer, le squelette même de la structure reste en réalité exactement le même, ce qu'on va faire évoluer ce sont les valeurs des paramètres de certains traités QP, ou XS pour aller vers une structure optimale en terme du "gain" mentionné ci-dessus.

Dans cette partie, au-delà de présenter sa méthode de calcul, on justifiera donc pour chaque indicateur en quoi il est pertinent pour les objectifs rappelés ici. Ces indicateurs seront étudiés au niveau groupe, et pas au niveau de AGRé. On observe la distribution des pertes nettes du groupe (*Pertes N. Groupe* dans la partie 1.3.2) pour réaliser les calculs. On s'intéresse uniquement aux pertes subies par Axa au niveau groupe avant et après réassurance. Pour cela, les pertes brutes et nettes sont agrégées (qu'on s'intéresse au total ou au maximum) par année simulée sans distinction d'entités.

2.2.1 Les pertes du groupe à travers les AEP /OEP

On commence par étudier les distributions des pertes totales annuelles et celles des pertes maximales annuelles.

L'AEP (Annual Exceedance Probability) et l'OEP (Occurrence Exceedance Probability) mesurent la probabilité que les pertes excèdent un seuil donné (AUBRY, 2019). En faisant varier ce seuil, elles se comportent donc telles des fonctions dont on peut étudier les courbes, ou des points spécifiques qui nous intéressent.

- L'Aggregate Exceedance Probability (AEP) est la probabilité que la somme des pertes sur une année observée dépasse le seuil x : $AEP(x) = P(\sum X_i > x)$, où les X_i représentent les pertes de l'année i .
- L'Occurrence Exceedance Probability (OEP) s'intéresse à la perte maximum causée par un événement sur une année. Il s'agit de la probabilité que cette perte maximum dépasse le seuil x , soit $OEP(x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)$.

Ces grandeurs d'Exceedance Probability EP représentent des probabilités de survie $1 - P(X \leq x)$, X définies selon que l'on s'intéresse à l'AEP ou l'OEP. Leurs courbes sont décroissantes allant de 1 pour un seuil de perte $x = 0$ et tendant vers 0 à mesure que le seuil tend vers sa valeur maximale.

Notion de période de retour

Les AEP/OEP sont intéressantes à observer sous l'angle de la période de retour. Cette notion est directement liée à celle de probabilité de survie d'une perte. La période de retour (généralement en années) désigne la récurrence à laquelle survient un évènement causant une perte d'au moins x , c'est l'inverse de l'Exceedance Probability. $RP = \frac{1}{EP}$. La probabilité retenue est celle de rencontrer sur une année un évènement identique ou supérieur à celui en question.

Pour exemple avec l'AEP (la méthode est analogue pour l'OEP), prenons 5 données de pertes, qui sont donc l'agrégation des pertes annuelles pour 5 années ainsi que la probabilité de survie associée à chacune de ses pertes. On peut calculer pour chacune d'elles l' EP ainsi que la période de retour RP associée :

i	Montant de perte	P(survenance) P_i	$EP = 1 - \prod_{P_j \leq P_i} (1 - P_j)$	$RP = \frac{1}{EP}$
1	10000	0,12	0,27	3,7
2	15000	0,07	0,17	5,9
3	20000	0,05	0,11	9,4
4	30000	0,05	0,06	16,8
5	50000	0,01	0,01	100

TABLE 2.6 : Calcul d'EP et de RP pour quelques montants de pertes

Comme on l'imaginait, on observe que les grosses pertes (50000) étant les plus rares en termes de survie auront également très peu de chance d'être dépassées (EP faible) et surtout la période de retour la plus forte, survenant une fois tous les 100 ans.

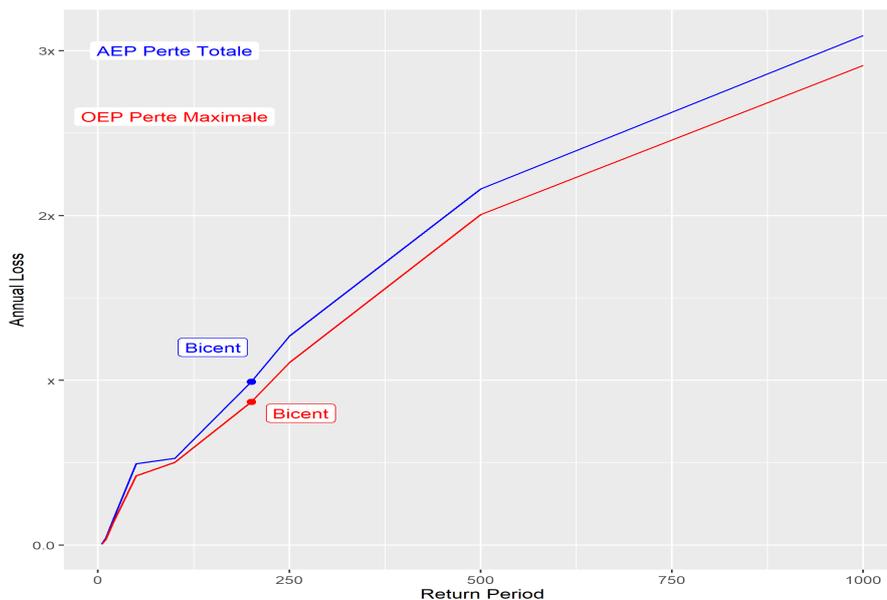


FIGURE 2.3 : Courbes AEP et OEP

Il est pertinent de tracer les courbes AEP et OEP que montre la figure 2.3 dans la configuration $Pertes(RP)$ pour voir comment évoluent ces pertes. Ces courbes ont été tracées sur les pertes renvoyées par le modèle avec l'ensemble des 50000 données.

Présentation et analyse des courbes AEP/OEP

Les courbes sont croissantes avec des changements de pente sur différents intervalles de périodes de retour.

Pour les périodes de retour entre 0 et environ 100 ans, les deux courbes sont très proches, se superposant presque. On en déduit que pour les pertes qui reviennent de manière relativement récurrente, seul un évènement génère quasiment toute la perte au cours de l'année. Ce phénomène s'estompe avec l'augmentation des périodes de retour. Les deux courbes conservent toutefois la même allure, la perte maximale semble représenter la même part des pertes totales à toute période de retour observée.

Sur les courbes AEP et OEP, un point en particulier est intéressant à observer : le bicentenaire. C'est le point correspondant à la période de retour 200. En ordonnée on retrouve le montant des pertes annuelles ou maximales survenant tous les 200 ans. Ce bicentenaire vient de la norme prudentielle S2, dont le premier pilier nous dit que : « Les assureurs et réassureurs devront s'assurer qu'ils ont suffisamment de fonds propres pour couvrir leur risque à un niveau de probabilité de 99,5% » (SOLVABILITÉ-II, 2009).

Autrement dit les pertes qui surviennent avec une probabilité d'au moins 0,05% soit au moins tous les 200 ans doivent être calculées et réservées pour constituer le SCR (Solvency Capital Requirement).

Les AEP et OEP retenus

On retient comme indicateurs les AEP et OEP moyens ainsi que sur les périodes de retour 20 ans (vingtenaire) et 200 ans (bicentenaire). Les pertes annuelles sont calculées au niveau du groupe. Pour l'AEP on agrège les pertes nettes de réassurance (qui sont supportées par le groupe après application de toute la réassurance) par année. L'OEP considère les pertes nettes maximales pour chaque année. Les AEP et OEP moyens désignent la moyenne de ces pertes respectivement sur les distributions de pertes nettes totales annuelles et de pertes nettes maximales annuelles. Les AEP et OEP bicentenaire correspondent à la 200^{ème} plus grande perte de ces distributions respectives. Les AEP et OEP vingtenaire correspondent à la 2500^{ème} plus grande perte de ces distributions respectives.

2.2.2 Calcul de la marge cédée

La marge cédée est un indicateur qui mesure la part de son résultat que l'assureur cède au réassureur. Il se calcule en faisant la différence entre l'ensemble des primes cédées à la réassurance et l'ensemble des récupérations. Les commissions de réassurance sont également intégrées dans ce calcul de marge qui devient

$$MC = Prime_Ced - Récup - Commis_Reass. \quad (2.1)$$

La marge cédée est un indicateur assez complet pour mesurer la rentabilité. C'est l'un des quelques indicateurs que nous utiliserons qui prendra en compte les primes cédées, qui représentent ce qu'il a coûté aux assureurs de se réassurer.

Formules de marge cédée en quote-part et en stop-loss

Les traités qui nous intéressent sont les deux traités souscrits au niveau du groupe car rappelons-le, les indicateurs seront étudiés à l'échelle du groupe. D'après la formule ((2.1)), la connaissance de trois éléments est nécessaire au calcul de cette marge cédée : les **primes cédées**, les **récupérations** et

les commissions. En réalité, cette formule assez générale se simplifie dans le cas du traité Aggregate qui n'engage pas de commission de réassurance. Le paiement de commission par le réassureur n'a lieu que dans le cadre des traités proportionnels.

Commissions : hypothèses et calcul en traité proportionnel

Pour rééquilibrer la transaction de réassurance en traité proportionnel, des commissions sont à verser par le réassureur. Elles servent à couvrir une part des frais d'acquisition et de gestion de toutes les polices prises en charge par les assureurs avec qui il traite. Dans la structure Cyber étudiée on a un taux de commission $tx_commis \in [0, 1]$. Pour tout traité quote-part, le montant total des commissions, s'obtient en multipliant ce taux par les primes totales cédées en réassurance.

On calcule ainsi les commissions du traité groupe QS

$$Commis_Group_QS = tx_commis \times Prim_Ced_{Group_QS}.$$

En ayant tous les éléments, on peut finalement calculer la marge cédée sur chacun des deux traités avec les formules (2.2) et (2.3).

La marge cédée totale est la somme des marges cédées par ces deux traités

$$MC = MC_{Group_QS} + MC_{Agg}.$$

La formule 2.1 se précise comme suit selon le traité,

$$MC_{Group_QS} = Prime_Ced_{Group_QS} - Recup_{Group_QS} - Commis_{Group_QS}, \quad (2.2)$$

$$MC_{Agg} = Prime_Ced_{Agg} - Recup_{Agg}. \quad (2.3)$$

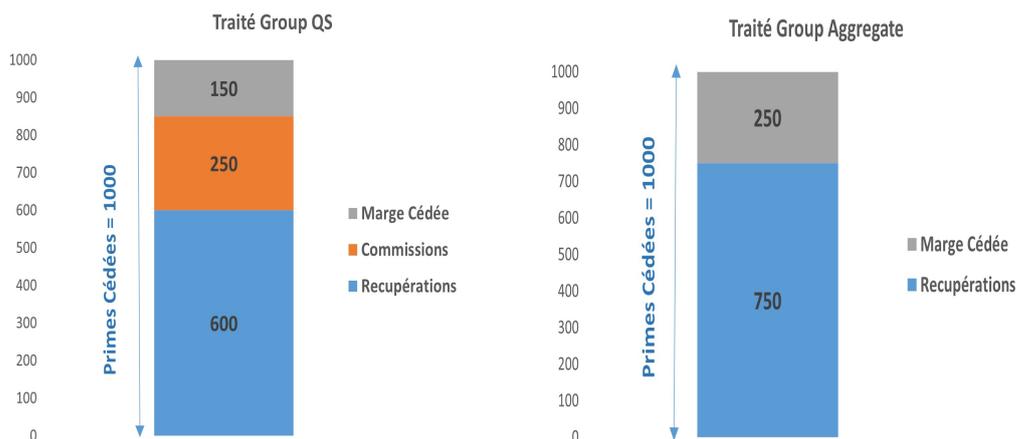


FIGURE 2.4 : Calcul de marge cédée sur un exemple

La figure 2.4 est un exemple de calcul de marge cédée sur les deux types de traité. La prime cédée valant 1000, la marge cédée correspond au montant restant une fois déduites les récupérations valant 600 en groupe QS et 750 en Aggregate ainsi que les commissions de 250 en groupe QS.

On complète le calcul de la marge cédée en ajoutant les marges cédées à l'externe par les deux traités locaux de Axa XL pour avoir la marge cédée totale.

$$MC_{tot} = MC_{Group.QS} + MC_{Agg} + MC_{XL-A} + MC_{XL-B}.$$

Calcul de la prime cédée : Traité groupe QS

Sur le traité groupe QS, la prime de réassurance se calcule de manière assez intuitive. Les cédantes, ici les entités, vont donner aux réassureurs une part des primes qu'elles perçoivent, part définie par le taux de cession du traité local. C'est le principe même du traité proportionnel en quote-part présenté dans la première partie (1.3.2). En contrepartie les entités récupèrent la part que le traité prend en charge ainsi que les commissions de réassurance. Chaque entité aura pour primes cédées le produit de ses propres primes d'assurance acquises et du taux de cession qu'il a signé pour son traité en quote-part. Cela est illustré par l'exemple du tableau 2.7 où la distinction entre portefeuille A et B est bien présente au sein de l'entité Axa XL car le taux de cession peut différer entre ces deux sous entités. La prime de réassurance totale pour ce traité sera la somme des primes de réassurance de toutes les entités. Par exemple avec les données du tableau (2.7) on obtient

$$P_{réass-tot} = \sum_{E \in Entités} P_{réass-E} = 400 + 200 + \dots + 1500 + 500.$$

Entité	Primes récoltées P_{ass}	Taux de cession θ	Primes cédées en réass $P_{réass} = \theta_{ass}$
FRA	1000	0.4	400
BEL	250	0.8	200
...
XL Ptf A	3000	0.5	1500
XL Ptf B	1500	0.3	500

TABLE 2.7 : Calcul de la prime de réassurance

Calcul de la prime cédée : Traité groupe Aggregate

Pour le traité groupe Aggregate, on a également besoin des deux informations suivantes : primes cédées et récupérations récoltées. La dernière se retrouve par l'application du traité groupe Aggregate aux pertes survenues. L'information capitale qui nous manque dans le calcul de la marge cédée pour le traité Aggregate, est alors la prime cédée en réassurance. Contrairement à la configuration du traité quote-part, on ne retrouve pas la proportionnalité qui implique de transférer un pourcentage des recettes et des pertes, il est donc plus difficile de trouver la prime cédée en réassurance. Sur le traité Aggregate nous n'avons pas connaissance de la prime mais uniquement des pertes et de la probabilité d'attachement. La section suivante va utiliser l'apprentissage sur des configurations où les primes sont connues en passant par un indicateur intermédiaire : le Rate on Line (RoL).

2.2.3 Estimation du RoL aggregate par apprentissage

Connaissant la limite du traité Aggregate, on va introduire le Rate on Line (RoL) pour déduire la prime. En effet avec le RoL on peut retrouver simplement la prime car par définition

$$RoL = \frac{\text{Prime de réassurance}}{\text{Limite de la tranche}}. \quad (2.4)$$

Rate on Line : RoL

Le *RoL* permet d'évaluer le coût de la réassurance. C'est le ratio entre ce que la cédante paye au réassureur et ce qu'elle peut récupérer au maximum. On va l'estimer, en s'appuyant sur les récupérations moyennes du traité (Expected Recoveries) et la probabilité à laquelle elles sont perçues par les cédantes du traité Aggregate. Obtenir des récupérations revient pour les entités à avoir des pertes supérieures à la rétention du traité Groupe Aggregate.

Probabilités d'attachement

En réassurance, la rétention est aussi désignée par le "point d'attachement". La probabilité d'attachement d'une tranche est la probabilité qu'elle intervienne au cours de l'année, à savoir que ses récupérations ne soient pas nulles. Comme on s'intéresse dans toute cette partie au traité groupe Aggregate on calcule sa probabilité d'attachement d'après la définition donnée ci-dessus grâce à la formule.

$$P(\text{attach_Aggreg}) = \frac{\#\text{Recup_Group_Aggreg} \neq 0}{\#\text{Scenar_total}},$$

qui est un rapport entre le nombre de scénarios où on a des récupérations (non nulles) et le nombre de scénarios total.

Récupérations moyennes

L'espérance des récupérations sur le traité groupe Aggregate s'obtient en faisant leur moyenne sur l'ensemble des scénarios. Il faut inclure les scénarios pour lesquels on n'a pas de récupérations voire pas de pertes car on cherche une vision complète. D'une part, l'information sur la présence ou non de récupération sera justement apportée par la probabilité d'attachement. Mais surtout, observer exclusivement les scénarios causant une perte biaise le calcul de moyenne. La cédante paye la prime indépendamment de la survenance ou non du sinistre. Sur ce traité, une perte nulle et plus généralement inférieure à la rétention est une des situations défavorables à la cédante dans la mesure où elle paye une prime mais ne récupère rien en contrepartie.

Présentation des méthodes d'apprentissage automatique

Les données prennent la forme d'un tableau d'individus en ligne et de variables en colonne. Les variables sont dites explicatives (ou d'entrée) sauf celle qu'on cherche à estimer qui est la variable à expliquer (ou de sortie). Les individus possèdent des valeurs connues pour toutes ces variables excepté l'individu pour lequel on souhaite estimer la variable de sortie, cette variable de sortie sera évidemment l'inconnue de tout le tableau.

Le RoL va donc être l'information en sortie de nos modèles d'apprentissage (variable à expliquer). Pour le prédire, les algorithmes auront besoin de données connues en entrée. On va utiliser les probabilités d'attachement et les pertes moyennes notées Expected Recoveries (variables explicatives).

Les courtiers fournissent pour différentes options les récupérations moyennes, les probabilités d'attachement et les RoL associés, nous permettant ainsi de construire une petite base d'apprentissage pour les modèles de Machine Learning qui se présente comme le tableau 2.8.

Individu	P(attachement)	Expected Recoveries (ER)	RoL
1	0,1	50	0,03
2	0,29	100	0,017
...
I	0,09	45	??

TABLE 2.8 : Tableau des données des modèles d'apprentissage

En apprentissage automatique, deux phases se déroulent. La première, dite d'apprentissage au cours de laquelle, le modèle prend forme ; à partir des données disponibles (couple entrée et sortie associées), le modèle apprend comment cette association se fait pour définir ses paramètres de modèle. La seconde phase est l'application du modèle à des données nouvelles, à partir d'une entrée le modèle va estimer une sortie à partir de ce qu'il a "compris" de la manière dont les combinaisons entrées-sorties sont établies.

Les données servent aussi à contrôler ce que le modèle a appris en Machine Learning. On divise la base en deux jeux de données : un jeu d'apprentissage et un jeu de test. Chaque algorithme va s'entraîner sur le premier jeu avant d'être mis à l'épreuve sur les variables d'entrée du second jeu. Une comparaison est alors faite entre ce que le modèle obtenu retourne en prédiction sur le jeu de test et les vraies valeurs de sortie pour ce jeu de test. La comparaison utilise différentes métriques dont quelques-unes seront introduites plus loin.

Normalisation des données pour la prédiction

Selon le type de modèle utilisé, il peut être nécessaire de normaliser les données.

Les récupérations moyennes sont de l'ordre de 10^6 tandis que la probabilité d'attachement est comprise entre 0 et 1. Les modèles utilisant un calcul de distance sont généralement ceux qui nécessitent de normaliser les données. Dans l'exemple du *KNN* appliqué à nos données brutes avec la distance euclidienne comme critère de proximité. Une différence de 1 entre deux individus sur la variable des récupérations est relativement faible, ces deux individus sont même très proches. Cependant cette même différence de 1 appliquée à la variable de probabilité d'attachement est très élevée car c'est l'écart maximal entre deux individus. Sans normaliser les données, on a donc une variable qui sera dominante, ici celle des récupérations.

Plusieurs méthodes de normalisation peuvent être utilisées

- La normalisation min-max qui ramène toutes les valeurs sur l'intervalle $[0, 1]$

$$z = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}.$$

- La normalisation par moyenne permet de centrer les valeurs autour de 0 en les plaçant dans l'intervalle $[-0.5, +0.5]$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\max(x) - \min(x)}.$$

- La standardisation qui est la méthode la plus répandue et celle qu'on utilise ici ; elle permet de centrer et réduire les données qui prennent alors comme moyenne 0 et comme écart type 1

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}.$$

Cette standardisation des variables d'entrée doit se faire après le découpage des données en jeux d'apprentissage et de test. On normalise les données d'apprentissage et on conserve les paramètres, la moyenne et l'écart type. Ce sont ces paramètres qui doivent être repris pour normaliser le jeu de test ou sur toute autre donnée à entrer dans le modèle pour prédire le RoL.

Si la variable en sortie, le RoL, est également normalisée, les prédictions de RoL en sortie du modèle doivent être dénormalisées en faisant la transformation inverse

$$x = z\sigma + \bar{x}$$

On choisit de ne pas normaliser la variable réponse ici, car les RoL du jeu de données sont assez condensés sur une petite plage.

Pour estimer le RoL on va utiliser dans un premier temps différents modèles d'apprentissage (KNN, arbre, glm) qui sont présentés en détail en annexe A.3.

Méthode de règle de trois pondérée

La méthode retenue sera une méthode de règle de trois pondérée qui est validée grâce à nos modèles de Machine Learning.

La probabilité d'attachement va servir de variable de pondération dans la règle de trois. Plus la probabilité d'attachement d'un individu est différente de celle de l'individu I , moins cet individu aura du poids dans la règle de trois. Pour quantifier cela, on calcule une nouvelle variable w_attach_norm (pour Weight Attachment normalised Probability). Elle se construit en calculant la distance entre les probabilités d'attachement des individus et celle de l'individu I ,

$$\forall i, dist_attach_i = D(P(attach)_i, P(attach)_I) = |P(attach)_i - P(attach)_I|.$$

On prend ensuite l'inverse de cette variable

$$w_attach = \frac{1}{dist_attach},$$

car le poids est fonction inverse de cette distance. Pour finir, on normalise chacune de ces valeurs, en la divisant par la somme de toutes les valeurs sur l'ensemble des individus.

$$\forall i, w_attach_norm_i = \frac{w_attach_i}{\sum_i w_attach_i}.$$

La dernière étape de normalisation est indispensable, autrement on a des valeurs de poids trop grandes qui ne signifient plus rien en termes de pondération.

$$P(attach) \rightsquigarrow dist_attach \rightsquigarrow w_attach \rightsquigarrow w_attach_norm$$

Par règle de trois sur chaque individu de la base on calcule une première valeur du RoL qu'on associe à cet individu, le RoL_ER

$$RoL_ER_i = \frac{Exp_Recov_I \times RoL_i}{Exp_Recov_i}.$$

Le RoL final estimé est la somme pondérée des RoL_ER par les poids calculés précédemment est alors

$$RoL_{r3} = \sum_i RoL_ER_i \times w_attach_norm_i.$$

RoL estimé avec l'arbre de régression

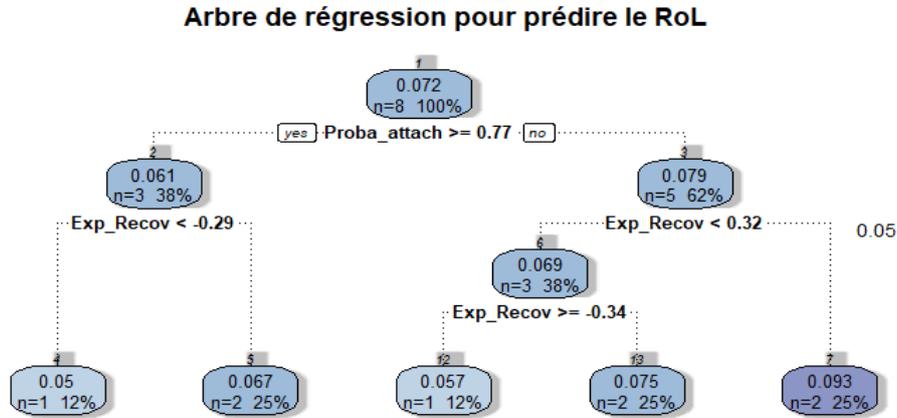


FIGURE 2.5 : Arbre élagué obtenu avec nos données

L'arbre construit, visible sur la figure 2.5 présente les différentes valeurs du RoL selon les informations en entrée, ici la probabilité d'attachement et les récupérations espérées. On peut lire des seuils sur les valeurs de pertes de l'ordre de $\pm 0,3$ qui s'expliquent par la normalisation des données effectuée avant de construire les modèles.

Avec nos données de pertes et le modèle implémenté on a en entrée une probabilité d'attachement et des récupérations moyennes qui correspondent à un noeud de l'arbre.

Une fois normalisées, ces variables d'entrée satisfont les conditions $P_{attach} \geq 0.77$ et $Exp_Recov < 0.32$ qui correspond sur l'arbre de la figure 2.5 à la case en bas à droite ayant pour RoL estimé : 0.093.

Résultats sur l'ensemble des méthodes utilisées

La qualité de prédiction de chacun de ces modèles est testée grâce aux métriques d'erreur suivantes

- $MSE = \frac{\sum_{i \in D.test} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n_{test}}$,
- $RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i \in D.test} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n_{test}}}$,
- $MAE = \frac{|(y_i - \hat{y}_i)|}{n_{test}}$,

Grâce à ces différentes méthodes, on a obtenu les estimations du RoL dans le tableau (2.9) ci-dessous.

Méthode	RoL estimé	RMSE	MAE
Modèle linéaire	0.0562	0.01942047	0.01839576
KNN	0.075	0.01767767	0.0125
Arbre	0.0934	0.02573869	0.0182

TABLE 2.9 : Résultats des différents modèles d'apprentissage

De ces résultats, on note que les trois modèles donnent des prédictions assez différentes ; leurs précisions sont assez proches et satisfaisantes sur le jeu de test. Le KNN reste le meilleur modèle avec les plus faibles valeurs de RMSE et de MAE, il renvoie un RoL estimé proche de la moyenne des RoL renvoyés par les deux autres modèles.

Un élément supplémentaire généralement pris en compte en apprentissage pour retenir une méthode favorable est le temps de calcul. Le nombre de données étant assez réduit dans ce cas particulier, nous ne prenons pas ce critère en compte car tous les calculs sont immédiats.

Avec la méthode de règle de trois pondérée on obtient un RoL estimé de **0,074867**.

Cette dernière estimation est retenue car elle est proche de la valeur moyenne sortie par nos trois modèles qui est $Rol_{moy} = 0,0700988$, ainsi que celle du meilleur modèle qui est le KNN ici qui retourne 0,075. Avec cette valeur du RoL, on calcule la prime du traité Aggregate à l'aide de la formule 2.4.

2.2.4 Résultat d'assurance

Le résultat est l'indicateur qui permet de mesurer la différence entre les recettes et les coûts pour les entités cédantes dans le cadre de la réassurance.

Il reprend la marge cédée dans son calcul, c'est pourquoi la connaissance de l'un de ces deux indicateurs permet de retrouver facilement le second.

En entrée, on a les primes d'assurance récoltées par chaque entité auprès de ses assurés. En décaissement pour la cédante, on a les pertes subies qu'on retrouve dans la variable *Loss* du tableau de pertes simulées ainsi que la marge cédée qui vient d'être présentée. La différence donne

$$Resultat = Primes_{assur} - Pertes_{Brutes} - MC_{tot}.$$

2.2.5 SCR : Solvency Capital Requirement

Depuis la réforme Solvabilité II de 2016, les assureurs et réassureurs doivent se soumettre à des exigences quantitatives en termes de fonds propres. Elles sont précisées par le pilier 1 de la réforme.

Le SCR est le capital minimum dont doit disposer la compagnie pour faire face à un risque important qui a une probabilité de survenance d'au plus 0,005 à l'horizon 1 an.

Cette définition renvoie à l'AEP bicentenaire qui désigne la perte survenant tous les 200 ans et qui a donc une probabilité de survenance à horizon 1 an de $\frac{1}{200} = 0,005$.

Cette perte à sa survenance peut être amortie des pertes nettes moyennes qu'on suppose possible d'anticiper, ce qui donne

$$SCR = AEP_{200} - Pertes_{nettes_{moy}}.$$

2.2.6 Capacité du traité groupe QS

La limite (ou capacité) d'un traité quote-part dénote l'engagement du réassureur sur les pertes extrêmes qui peuvent survenir chez la cédante. C'est un indicateur qui est ici observé sur le traité groupe et qui est obtenu en multipliant le total des primes cédées par les entités par un paramètre noté *LR_Cap* pour Loss Ratio Capacity.

Par exemple pour un *LR_Cap* de 3, les deux parties s'entendent pour que le réassureur couvre jusqu'à 3X le montant des primes que les entités cèdent au réassureur.

Ainsi construit, cet indicateur sur la limite du groupe QS est assez complet. Il contient les informations sur les taux de cessions des entités, car chez chaque entité, les primes sont cédées à hauteur de ces taux de cessions, ainsi que le facteur de *LR_Cap*.

2.2.7 Indicateurs supplémentaires de réduction

On va à présent regarder des indicateurs qui permettent de comparer différentes options de la structure mais sous le prisme de ce qu'a apporté la réassurance. Autrement dit ces indicateurs seront des comparateurs entre des résultats bruts de réassurance et après application de la réassurance.

Réduction de volatilité

La volatilité représente la variabilité des pertes nettes, ici aussi observée au niveau du groupe. Elle est obtenue en prenant l'écart type de ces pertes sur l'ensemble des scénarios.

Après la mise en place de la réassurance, on espère une baisse de ces pertes tant en moyenne qu'en variance.

Le rapport de ces volatilités avant et après réassurance $Ratio_{SD} = \frac{SD_{Net.Loss}}{SD_{Gross.Loss}}$ donne le gain en volatilité observé avec l'application de la réassurance.

Une valeur de 0,35 pour le $Ratio_{SD}$ indique que la volatilité a été réduite de 35%, passant par exemple de 10000 avant réassurance à 3500 après réassurance. Plus ce rapport se rapproche de 1 plus on tend vers la situation où le $Ratio_{SD}$ comporte des valeurs d'écart-type identiques avant et après réassurance. Cette quantité est majorée par 1 car le numérateur est toujours inférieur au dénominateur, la réassurance induisant une réduction de la volatilité et pas l'inverse. Pour obtenir un indicateur quantifiant la réduction de volatilité, il faut donc prendre : $Reduc.vol = 1 - \frac{SD_{Net.Loss}}{SD_{Gross.Loss}}$ Cette nouvelle quantité étant de sens de variation opposé au $Ratio_{SD}$, plus elle est grande, soit proche de 1, plus la réassurance est efficace, on a une réduction de volatilité importante apportée par l'opération et inversement quand $Reduc.vol$ tend vers 0.

Réduction Tail Var (T-Var)

Un indicateur qui a le même format que la réduction de volatilité est la réduction de la T-var notée $Reduc.T.var$.

Exactement comme le fait $Reduc.vol$ pour l'écart type des pertes, ce nouvel indicateur qui calcule l'amélioration qu'apporte la réassurance aux pertes bicentennaires (AEP) se calcule par

$$Reduc.T.var = 1 - \frac{AEP_{200yNet.Loss}}{AEP_{200yGross.Loss}}$$

2.2.8 Conclusion : Synthèse des indicateurs retenus

Ce deuxième chapitre fait une présentation exhaustive des indicateurs qui ont été calculés dans cette étude, bien que certains apportent une information redondante car ils réutilisent d'autres indicateurs. Les indicateurs d'AEP, OEP, résultat et marge cédée présentés seront observés pour la moyenne, le bicentenaire et le vingtenaire.

Le tableau 2.10 ci-dessous récapitule les indicateurs retenus comme critères d'efficacité de la structure de réassurance.

Indicateurs	Moyen/Bicentenaire/Vingtenaire			Coefficients de réduction		SCR	Capacité Group QS	
	AEP	OEP	Résultat	Marge Cédée	Volatilité			T_Var
Importance	Bicentenaire *** Moyen** Vingtenaire*		Bicentenaire * Moyen*** Vingtenaire*		***	*	***	**
Complexité	Bicentenaire *** Moyen* Vingtenaire***		Bicentenaire *** Moyen** Vingtenaire***		*	**	***	**

TABLE 2.10 : Indicateurs étudiés

Dans le tableau ci-dessus on retrouve des appréciations sur la complexité et l'importance, allant de relativement faibles (*) à élevées (***). Selon le type d'indicateur, le groupe s'intéresse en priorité à une vision long terme ou court terme. Les résultats (et marge cédée) permettent de suivre le budget, il est important d'en avoir une estimation annuelle. C'est pourquoi la moyenne est plus surveillée que le bicentenaire et vingtenaire. Pour les pertes, le groupe met l'accent sur un horizon plus éloigné. Par prudence les pertes moins probables mais plus lourdes (bicentenaire et vingtenaire) ont plus d'importance ici. Sur les coefficients de réduction, la volatilité reflète l'évolution de toute la distribution de pertes nettes tandis que la T_Var se concentre sur les pertes extrêmes.

La complexité de calcul fait référence au nombre d'étapes nécessaire à ce calcul. Les indicateurs bicentenaire et vingtenaire vont par exemple nécessiter d'agrèger et ordonner les données d'une distribution pour accéder au quantile souhaité là où la moyenne sera directement calculée.

* * *

Les données de pertes et celles des traités utilisées sont présentées sous la forme de tableaux restituant toutes les informations importantes pour appliquer la structure. Certains paramètres de ces données sont anonymisés pour en conserver la confidentialité. Par une fonction principale implémentée sur R , on réplique la structure de réassurance pour obtenir les résultats des différents traités et les résultats au niveau groupe après la réassurance. Ces résultats sont validés en les comparant à ceux renvoyés par le même modèle sur Remetrica appliqué aux mêmes pertes. Pour finir, un ensemble d'indicateurs de la performance de la structure de réassurance sont présentés en détail avec leurs méthodes de calcul.

Chapitre 3

Optimisation de la structure de réassurance et influence de paramètres externes

Dans cette troisième partie, on cherche les paramètres qui rendent la structure de réassurance optimale au vu des indicateurs retenus précédemment.

3.1 Limites des méthodes traditionnelles

Les indicateurs précédents n'évoluent pas toujours dans le même sens, ce qui rend l'optimisation au global complexe. Par exemple, une amélioration sur le bidentaire n'implique pas nécessairement un meilleur résultat ou une marge cédée plus faible et inversement.

3.1.1 Les différents types d'optimisation

Les algorithmes d'optimisation sont très répandus car leurs applications se retrouvent dans divers domaines. Le but est de trouver pour une fonction dite fonction objectif les paramètres en entrée (inputs) qui rendent la sortie optimale, minimale ou maximale selon le problème qu'on cherche à résoudre.

On a plusieurs type de problèmes d'optimisation qui n'ont pas toujours les mêmes outils de résolution. Il est important d'identifier à quelle catégorie de problèmes on est confronté pour utiliser la méthode la plus adaptée.

On a des problèmes d'optimisation discrète ou continue selon la nature des variables en entrée de la fonction. Ces variables peuvent être discrètes, soit des entiers ou des valeurs binaires ou alors continues pouvant prendre toute valeur réelle. Quand la fonction prend des variables à la fois discrètes et continues on parle d'optimisation mixte. Dans notre problème, on sera confronté uniquement à des variables continues : les taux de cession, ainsi que les limites et rétentions.

L'optimisation peut être avec et sans contrainte. L'ajout de contraintes sur une ou plusieurs variables de la fonction va naturellement rendre l'optimisation plus complexe. Ces contraintes sont généralement les bornes qui indiquent l'intervalle sur lequel on s'autorise à observer les variables, sous forme d'inégalités. Elles peuvent être aussi des contraintes d'égalité ou des contraintes plus complexes combinant plusieurs variables selon le problème. On a ici une optimisation avec deux types de contrainte. Premièrement, pour chaque variable on définira des bornes inférieures et supérieures de tous les paramètres d'entrée. Dans un second temps on envisagera d'optimiser certains indicateurs sous contraintes sur d'autres

indicateurs. Pour une fonction d'objectif qui s'intéresse à un indicateur A on posera des contraintes sur un autre indicateur B . Par exemple, on va optimiser l'OEP bicentenaire sous contrainte que la Marge Cédée soit inférieure à un certain seuil ou inversement. Cette idée est justement reprise dans la distinction faite entre optimisation mono-objectif et multi-objectifs. En optimisation mono-objectif on a une unique fonction objectif, le but sera par exemple de minimiser l'OEP bicentenaire. En multi-objectifs, on peut avoir plusieurs fonctions objectifs, qui ne sont pas toujours concordantes comme on l'a mentionné plus haut. Pour rester cohérent avec l'exemple ci-dessus, on peut souhaiter minimiser l'OEP bicentenaire, tout en minimisant la marge cédée. Ce problème multi-objectifs peut être transformé en problème mono-objectif sous contrainte comme on l'a vu.

Une dernière différenciation se fait de nouveau sur les variables qui peuvent être déterministes ou stochastiques. Dans notre problème toutes les variables seront déterministes mais l'aléa peut être introduit avec l'optimisation stochastique quand les variables désignent des valeurs de résultats futurs par exemple.

Le problème général d'optimisation qui se pose est d'optimiser un indicateur donné en fonction des paramètres des traités : Par exemple, pour optimiser l'OEP bicentenaire par rapport aux taux de cession locaux $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ on aura le problème

$$\operatorname{argmin}_{\theta_A, \theta_B, \theta_C} f(\theta_A, \theta_B, \theta_C),$$

avec la fonction f qui calcule la valeur de l'indicateur. Par exemple $f(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = OEP_{200}(\theta_A, \theta_B, \theta_C)$. Les 9 paramètres ($\theta_1 \dots \theta_9$) qu'on souhaite optimiser dans cette étude sont ci-dessous.

Traité	Paramètres	Borne Inférieure	Borne Supérieure
Entité A QS	Taux de cession	0	100%
Entité B QS	Taux de cession	0	100%
Entité C QS	Taux de cession	0	100%
Entité E QS	Taux de cession	0	100%
Portefeuille A QS	Taux de cession	0	100%
Portefeuille B QS	Taux de cession	0	100%
groupe QS	LR Cap	1	LR sup
groupe Agg	Limite	Lim Inf	Lim Sup
	Retention	Ret Inf	Ret Sup

TABLE 3.1 : Paramètres optimisés par l'algorithme génétique

Les 3 indicateurs étudiés ici comme fonction objectif sont : l'OEP bicentenaire, la marge cédée, et la réduction de volatilité. On effectue une optimisation multi-objectifs qui prend en compte la fonction objectif de chacun de ces trois indicateurs, le problème devient

$$\min_{\Theta \in R^9} (f_1(\Theta), f_2(\Theta), f_3(\Theta)).$$

Il existe 4 grandes approches de résolution de ce type de problème HOUAM, 2013, composée chacune de nombreuses méthodes : les méthodes non Pareto, les méthodes Pareto, les méthodes hybrides et les méthodes méta-heuristiques (HOUAM, 2013). C'est cette dernière famille qui nous intéressera dans ce mémoire.

3.1.2 Algorithmes classiques

Des algorithmes d'optimisation classiques sont présentés ici. On verra pourquoi ils ne sont pas adaptés à notre problème et quels algorithmes on utilisera en alternative.

Méthode de descente du gradient

Avec cette méthode, à chaque itération on détermine le minimum local grâce au gradient de la fonction. Ce gradient étant, localement, la plus forte pente de la fonction, l'idée est de prendre sa direction opposée pour aller vers le minimum, c'est la direction de descente.

Le point de départ est x_0 , et l'algorithme descend d'itération en itération le long de la plus grande pente d'où l'appellation d'algorithme de la plus forte pente (steepest descent).

On donne un pas de descente s_k qui précise jusqu'où on va descendre dans cette direction de descente. Il est possible mais chronophage en temps de calcul de trouver le pas exact pour aller jusqu'au minimum local. On va plus souvent en pratique prendre un pas raisonnable pour se rendre vers le minimum progressivement.

La condition : $\|\nabla f(x)\| < \epsilon$ définit le critère d'arrêt de l'algorithme avec $\epsilon > 0$ le seuil de précision choisi au préalable. Pour résumer, les méthodes basées sur le gradient présentent deux inconvénients majeurs : elles sont coûteuses en temps de calcul, et surtout ne convergent que si la fonction à minimiser est lisse (au moins C^2). Ainsi si la fonction est discontinue ou non dérivable, elles ne sont pas adaptées.

Algorithme de Newton

La méthode de Newton utilise l'approximation de Taylor pour estimer les zéros de la fonction dérivée de celle que l'on souhaite minimiser itérativement. Si la fonction dont on cherche le zéro est notée f , en partant d'un point x_0 , l'approximation utilisée en x est

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

de là, on a

$$f(x) = 0 \iff f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

D'une itération k à $k + 1$ cette relation devient

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \iff x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.1)$$

On met ainsi à jour successivement les points avec la relation 3.1. Comme critère d'arrêt on peut retenir une évaluation de la fonction suffisamment proche de zéro en un point ($\|f(x_k)\| < \epsilon_1$) ou une évolution entre deux itérations qui devient négligeable ($\|x_{k+1} - x_k\| < \epsilon_2$) avec $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$.

Comme l'indique la relation 3.1, il faut une fonction au moins dérivable, de dérivée non nulle.

3.1.3 Des algorithmes peu adaptés au problème

Quand la fonction objectif est simple, ou suffisamment "lisse", c'est-à-dire différentiable, on privilégie des méthodes classiques telles que la méthode de Newton ou l'algorithme de descente de gradient, cette dernière est généralement très performante. Cependant, comme il apparaît dans la construction de notre modèle, peu importe l'indicateur observé dans l'étude, la fonction objectif n'est ni simple ni explicite. Cela s'explique par le fait que tous les indicateurs se construisent à partir d'éléments en sortie du modèle suffisamment complexes.

Les OEP et AEP bicentennaires, vingtenaires et moyens sont respectivement des quantiles et moyennes de la répartition des pertes totales et maximales survenues au niveau du groupe Axa.

Le capital économique (SCR) ainsi que les indicateurs de réduction de volatilité et d'AEP sont également construits à partir de cette distribution de pertes.

La marge cédée et le résultat ont une partie calculée par des données déterministes avec les primes et commissions mais le dernier élément du calcul est la distribution des récupérations.

Tant les pertes au niveau groupe que les récupérations, sont donc à un niveau déjà avancé de la

structure, résultant de combinaisons de plusieurs calculs intermédiaires qui utilisent les paramètres en entrée. En comparaison, les récupérations du traité local d'une des entités comme Axa France seraient à un stade bien plus "précoce" du calcul. Les récupérations de la France seraient obtenues en multipliant simplement le taux de cession du traité sur la France aux pertes survenues en France. Le schéma de la figure 3.1 retrace les impacts du changement d'un de ces 9 paramètres sur les étapes intermédiaires jusqu'au calcul des indicateurs.

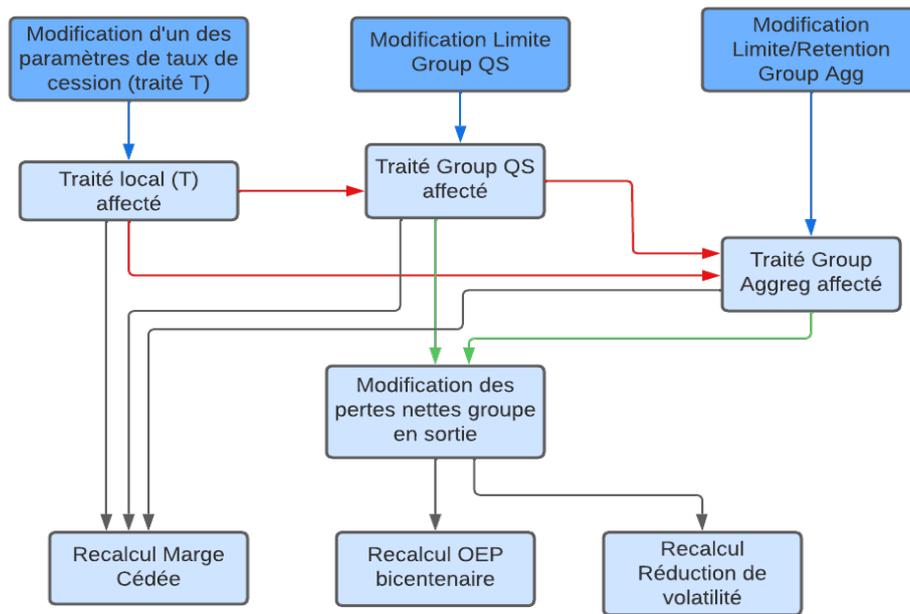


FIGURE 3.1 : Modifications suite à un changement de paramètres

Une modification de la structure sur un paramètre d'un traité T va impacter les données de pertes (récupération et rétentions) sur ce traité T mais aussi sur tous les autres traités avec lesquels il interagit. On a donc un premier niveau d'impact, les paramètres directs du traité agissent sur lui (flèches bleues sur le schéma). De plus chaque traité modifié va affecter les traités ultérieurs dans la structure (flèches rouges). Cela s'explique par la forme d'empilement de traités que prend la structure. Par exemple le traité groupe Aggregate qui prend en entrée les rétentions de tous les autres traités sera impacté par un changement de paramètre sur un traité local ainsi que sur le traité groupe QS. La dernière étape qui calcule les pertes finales du groupe s'appuie sur les résultats des 2 traités groupe (flèches vertes). De nouvelles valeurs des pertes nettes nécessitent de recalculer les OEP bicentennaires et la réduction de volatilité. Concernant la marge cédée, elle est recalculée dès qu'il y a une mise à jour des récupérations des différents traités (flèches noires).

En somme, modifier un seul de ces 9 paramètres induit une réaction en chaîne et nécessite donc d'appliquer à nouveau tout le modèle de réassurance aux données.

Écrire une fonction objectif ($f(param_1, \dots, param_9)$) sous la forme d'une formule explicite est très complexe car cette formule devrait traduire l'application de chaque traité. Sur le vecteur des (460000) pertes unitaires, pour appliquer les traités quote-part, la formule dépend de l'entité voire la LoB touchée. La formule générale pour l'ensemble des pertes contiendrait alors une somme de nombreuses indicatrices 1 selon la LoB affectée par la perte. De manière analogue, pour agréger les résultats annuellement on a besoin d'indicatrices pour chaque année simulée. Cette agrégation annuelle se fait à plusieurs étapes : pour avoir les récupérations annuelles de chaque traité mais aussi pour appliquer

les traités stop-loss (en particulier groupe Aggregate).

Cette formule explicite serait lourde et interminable. Pour contourner les méthodes classiques, on passe par des algorithmes d'optimisations méta-heuristique qu'on va présenter.

3.1.4 Avantages et inconvénients des algorithmes retenus

On utilise dans cette étude deux algorithmes : l'algorithme génétique et l'algorithme par essaim particulière. Les deux fonctionnent selon cette même idée, en partant d'un point de départ, on va évaluer à chaque itération la valeur de la fonction objectif pour déterminer la mise à jour du point. Ils appartiennent à une classe particulière d'algorithmes basés sur l'utilisation d'une population (Population Based). Ils vont fondamentalement différer par les critères de mise à jour des points d'une itération à l'autre. Le premier algorithme s'inspire d'évolutions biologiques et le second de phénomènes observés en éthologie.

Le tableau 3.2 ci-dessous présente une liste non exhaustive d'éléments qui nous feront privilégier dans ce mémoire les algorithmes méta-heuristiques (GA et PSO) aux méthodes classiques présentées.

Avantages	Inconvénients
Peuvent être utilisés sur une fonction non différentiable/dérivable	Temps de calcul important
Connaissance analytique de la fonction objectif non nécessaire	Risque de convergence vers un minimum local
Calibrage des paramètres simple (majoritairement des hyperparamètres)	Choix des hyperparamètres par tâtonnement (chronophage)
Algorithmes peu sensibles à la fonction f à minimiser	

TABLE 3.2 : Avantages et inconvénients de l'algorithme génétique et PSO

Le principal avantage de ces algorithmes est le côté générique. Il n'est pas nécessaire d'avoir la formule explicite de la fonction objectif, il suffit de pouvoir évaluer cette dernière sur les paramètres en entrée souhaités. Ces méthodes sont facilement implémentables en calibrant des hyperparamètres qui vont influencer l'optimisation. Ces hyperparamètres sont peu influencés par la nature précise du problème, ce qui facilite leur calibration. Ces méthodes restent toutefois moins précises qu'une approche classique (Newton ou Descente de gradient) et le problème de convergence vers un optimum local peut survenir assez tôt.

La principale limite de ces algorithmes reste l'important temps de calcul nécessaire. Comme elles utilisent des populations, donc un ensemble de points et plutôt qu'un unique point à chaque itération, le nombre d'évaluation de la fonction objectif augmente rapidement. Si cette fonction est chronophage, le temps de calcul va exploser avec le nombre d'itérations. Ce coût en temps rend difficile la bonne calibration des hyperparamètres qui se fait en essayant différentes valeurs hyperparamètres sur les algorithmes.

3.2 Algorithme génétique

L'algorithme d'optimisation génétique est de la famille des algorithmes évolutionnistes. C'est un ensemble d'algorithmes qui s'inspirent des principes de l'évolution des êtres vivants pour faire progresser la solution vers un optimum.

3.2.1 Principe de l'algorithme génétique

Les trois principes fondamentaux sur lesquels repose cette théorie de l'évolution sont :

- Un principe d'unicité des individus d'une population causé par des différences plus ou moins marquées chez tous les individus.
- Un principe d'hérédité qui entraîne une transmission des caractéristiques d'un individu à ses descendants.
- Un principe d'adaptation qui permet aux individus présentant les caractéristiques les plus "avantageuses" selon leur environnement de survivre et donc se reproduire d'avantage dans la population.

Il est nécessaire de préciser quelques termes empruntés à la biologie, en les explicitant pour le cas précis de l'optimisation des paramètres de réassurance. Un chromosome représente une variable à optimiser, c'est un des 9 paramètres du tableau 3.1 Un individu désignera un ensemble de chromosomes, à savoir ici un ensemble de valeurs pour chacune des variables. Une population est elle-même un ensemble d'individus, avec chacun une combinaison différente de variables. L'objectif de l'algorithme est à partir d'une population de départ, de converger vers une population optimale. Comme pour la plupart des algorithmes le point de départ est aléatoire, l'algorithme génétique est également initialisé avec une population initiale aléatoire. Pour un individu donné de cette population, pour chacune de ses variables, est attribuée une valeur aléatoire de son ensemble de définition. Cela est répété pour les I individus de la population. Pour passer d'une population P à une population $P + 1$, un ensemble de processus fidèles à la reproduction sont introduits.

Opérateur de sélection

Cette étape cherche à retenir les meilleurs individus de la population P au sens de la fonction objectif. On applique donc le modèle à chaque individu et on calcule l'indicateur étudié (OEP, Marge Cédée...) qui joue le rôle de score permettant de classer ces individus. Une fois les I individus classés du meilleur au moins intéressant par le critère de la fonction objectif, différentes méthodes de sélection peuvent être appliquées :

- Sélection par critère du rang : On attribue une probabilité de sélection à chacun des individus selon son rang dans le classement établi grâce à la fonction objectif. Le premier individu aura logiquement la plus forte probabilité d'être sélectionné et cette probabilité ira en décroissant jusqu'au dernier individu du classement. Par un tirage de I individus avec remise dans la population P on retient alors plus souvent les meilleurs individus.
- Sélection par tournoi deux à deux : On tire 2 individus aléatoirement dans P . Par le même critère du score que précédemment, le meilleur des deux est retenu pour faire partie de la nouvelle population $P + 1$. On réitère ce processus I fois pour avoir tous les individus de $P + 1$.
- Sélection uniforme : On choisit les I individus directement par un tirage avec remise répété I fois au sein de la population P . Avec cette méthode, l'évaluation de la fonction objectif n'intervient pas.

Opérateur de croisement ou d'enjambement

C'est l'étape qui traduit dans le processus d'évolution la reproduction avec le croisement de deux individus apportant chacun ses chromosomes pour constituer un nouvel individu. Elle se fait par paire

d'individus, variable par variable. On peut regarder en détail ce qui est fait pour la 1^{ère} variable chez le couple individu 1- individu 2. Par exemple cette variable peut être le taux de cession du traité quote-part de Axa A, valant chez ce couple QP_1 et QP_2 . On met à jour cette variable selon une probabilité de croisement P_{Crois} définie comme paramètre exogène de l'algorithme : U_c est la variable uniforme tirée entre 0 et 1 qui permet de décider de l'application ou non de l'opérateur de croisement. Elle agit comme une loi de Bernouilli de paramètre $p = P_{Crois}$ dans notre problème. La variable est modifiée chez le premier individu par

$$QP_1 := \left\{ \begin{array}{ll} QP_1 + U_c \times (QP_2 - QP_1) & \text{si } U_c < P_{Crois} \\ QP_1 & \text{si } U_c \geq P_{Crois} \end{array} \right\}.$$

Réciproquement la variable est modifiée pour le second individu de la paire comme suit

$$QP_2 := \left\{ \begin{array}{ll} QP_1 + U_c \times (QP_1 - QP_2) & \text{si } U_c \geq P_{Crois} \\ QP_2 & \text{si } U_c < P_{Crois} \end{array} \right\}.$$

Toutes les variables de la paire subissent ce croisement, avant de passer à la paire suivante : individu 3 - individu 4. C'est pourquoi un nombre pair d'individus au sein de la population est préférable, cela est d'ailleurs imposé par le package que nous utiliserons *mco*. En cas de non-respect de cette condition de parité, le dernier individu n'est pas croisé et rejoint la génération suivante tel qu'il est.

Opérateur de mutation

Ce dernier processus va apporter des modifications aux variables à l'image des perturbations génétiques spontanées qu'on observe au niveau des chromosomes. Une probabilité de mutation P_{mut} est donnée en entrée pour indiquer à quelle fréquence les variables subissent cet opérateur ; elle est très faible. La mutation s'effectue sur chaque individu, une variable après l'autre. On va regarder en détail l'exemple de la première variable du premier individu QP_1 , dont la valeur à l'itération suivante s'obtient par

$$QP_1^{i+1} := \left\{ \begin{array}{ll} \max \left(QP_{inf}; \min \left(QP_1^i + \frac{QP_{sup} - QP_{inf}}{2} \times U; QP_{sup} \right) \right) & \text{si } U_m < P_{mut} \\ QP_1^i & \text{si } U_m \geq P_{mut} \end{array} \right\}.$$

U_m est une variable uniforme sur $(0, 1)$ qui joue le même rôle que U_c pour l'opérateur de croisement. U est une variable uniforme sur $(-1, 1)$.

QP_{inf} et QP_{sup} sont les bornes inférieure et supérieure de la variable concernée (pour cet exemple le taux de cession).

De manière analogue, toutes les variables de tous les individus de la population sont mutées par cette mise à jour. Ces trois opérateurs sont toujours appliqués dans l'ordre ou ils sont présentés comme on peut le retrouver sur le schéma 3.2. Ils permettent de construire une nouvelle génération $P + 1$ à partir de la population P selon les étapes résumées ci-dessous.

- 1- Dans la population P on retient les meilleurs individus (sélection). On obtient la population P' .
- On croise ces individus 2 à 2, en modifiant certains paramètres par ajout de l'information issue de leur paramètre binôme chez l'individu appareillé. La modification n'est pas systématique, elle survient sur les paramètres d'une paire avec la probabilité P_{Crois} (croisement). On obtient la population P'' .
- Chacun des individus de P'' va muter ; ses variables vont être mises à jour avec une probabilité P_{mut} . On obtient la population $P + 1$

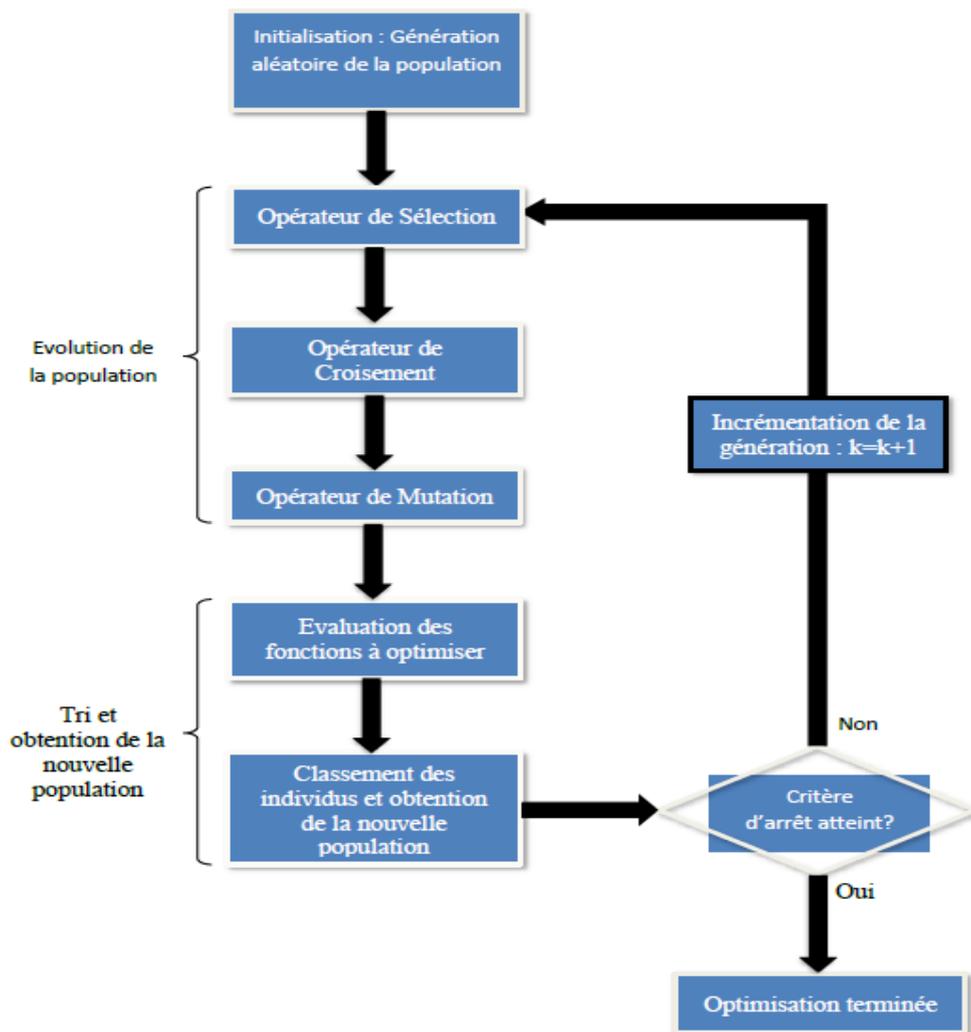


FIGURE 3.2 : Shema de l'algorithme génétique(ARNAUD, 2019)

Convergence et critère d'arrêt

Le critère d'arrêt de l'algorithme est d'avoir des individus au sein de la population suffisamment homogènes. Pour cela on évalue pour chaque variable l'écart entre tous les individus. Si cet écart est toujours inférieur ou égal à un seuil de convergence fixé au préalable, on conclut que l'algorithme a convergé pour cette variable. On répète cette vérification pour toutes les variables. On a convergence et donc vérification du critère d'arrêt quand l'algorithme a convergé pour toutes les variables. La solution obtenue est à ce stade une population optimale de laquelle on retrouve le meilleur individu par évaluation grâce à la fonction objectif comme il a été fait plus haut dans le processus de sélection. C'est cet individu qui est en sortie de l'algorithme d'optimisation.

3.2.2 Implémentation de l'algorithme génétique pour notre problème

En pratique, le package *mco* (pour MultiCriteria Optimization) de R a été utilisé pour implémenter cet algorithme. C'est plus précisément la fonction *nsga2* (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) qui a été utilisée en lui spécifiant les paramètres suivants : *idim* = 9 pour input dimension c'est le

nombre de variables en entrée à optimiser

$odim = 3$ pour output dimension c'est la dimension de la sortie de l'évaluation du modèle par la fonction objectif (notre fonction objectif renvoie la valeur des trois indicateurs retenus)

$lower_bounds$ et $upper_bounds$ sont respectivement le vecteur des 9 bornes inférieures et supérieures des variables à optimiser.

Paramètres	Descriptions	Valeurs choisies
fun.model	La fonction objectif	fun_obj
cprob	Probabilité de croisement (P_crois)	0,5
mprob	Probabilité de mutation (P_mut)	0,1
popsiz	Taille des populations (I)	60
generation	Nombre de générations (n)	40
idim	Dimension du vecteur d'inputs	9
odim	Dimension du vecteur d'outputs	3
lower.bounds	Bornes inférieures	(min1... min9)
upper.bounds	Bornes supérieures	(max1... max9)
constraints	Fonction de contrainte	const_fun

TABLE 3.3 : Paramètres de l'algorithme génétique

Les hyper-paramètres P_{crois} et P_{mut} sont choisis pour approcher les valeurs qu'on trouve dans la littérature sur les algorithmes génétiques, en particulier sur un benchmark ou l'algorithme génétique a été paramétré pour optimiser une structure de réassurance (ARNAUD, 2019). Le taux de mutation est généralement choisi très faible (environ 10%) pour garantir une convergence de l'algorithme. D'après cette même étude, la probabilité de croisement autour de 50% est optimale en termes de compromis entre-temps de calcul et convergence.

Le premier paramètre de la fonction *nsqa2* est lui-même une fonction appelée *fun.model* permettant d'évaluer les individus, autrement dit c'est la fonction objectif désirée. On a implémenté cette fonction afin qu'elle prenne en input les 9 valeurs des variables qui sont des paramètres de différents traités de réassurance. La première étape est de replacer ces valeurs dans les tableaux contenant les informations des paramètres des traités : *infos - Agg* et *infos - QS* aux bons endroits. En second lieu le modèle au préalable répliqué sur R est appliqué avec les valeurs prises par ces paramètres. Pour finir, selon l'indicateur souhaité, la fonction objectif est calculée, (l'OEP ou la marge cédée par exemple) et renvoyé en output. Dans un fichier de code support, toutes les fonctions objectif qui peuvent servir à l'algorithme génétique sont implémentées. Les trois fonctions objectif qui renvoient chacun des trois indicateurs (*objfunc_educ_ol*, *objfunc_MC*, *objfunc_OEP*). Une fonction générale (*ga_objfunc_MC_ol_ol*) qui renvoie chacun de ces trois indicateurs par un vecteur de 3 éléments est aussi prévue pour pouvoir faire un seul appel de fonction dans l'algorithme génétique. On a travaillé avec cette fonction générale (le paramètre $odim = 3$ pour cette raison) bien qu'il soit possible d'observer le comportement de l'algorithme pour un seul des indicateurs avec les fonctions objectif associées.

Le principal inconvénient de l'algorithme génétique est son important coût en temps de calcul. Coût très dépendant de celui de la fonction objectif qui est répétée de nombreuses fois au cours des itérations. Le passage d'une population à la suivante nécessite une évaluation de tous les individus pour les classer, donc I exécutions de la fonction objectif. En allant jusqu'à n générations on retrouve $I \times n$ exécutions auxquelles s'ajoutent I évaluations de sorties pour déterminer le meilleur individu à retenir dans la population optimale. La fonction objectif est appelée $I \times (n + 1)$ fois au total donc

$$Coût_{tot} = I(n + 1)Coût_{f-obj}. \quad (3.2)$$

Le modèle détaillé de la structure de réassurance a un temps de calcul assez important, de presque

30 min. Dès que le nombre d'individus ou de générations commence à augmenter, le temps de calcul de l'algorithme explose au vu de la relation 3.2. C'est l'une des limites majeures rencontrées par cet algorithme. Pour réduire ce temps de calcul le modèle a été ajusté pour être plus rapide en ciblant uniquement les traités concernés par les variables à optimiser. On le voit dans le tableau 3.1, ce sont les 6 traités quote-parts locaux et les 2 traités groupes. Le modèle est lancé une première fois et l'ensemble des sorties est conservé dans un tableau *res*. La nouvelle version allégée de l'algorithme génétique va donc reprendre sur chaque génération ce tableau de départ *res*. Il n'y a pas besoin de recalculer les résultats pour tous les traités. Il faut appliquer les calculs uniquement pour les sorties concernant ces 7 traités mentionnés (7 au lieu de 8 car le traité Groupe Aggregate sera modifié après des calculs intermédiaires de rétentions.) La nouvelle fonction du modèle de réassurance va remplacer les colonnes de *res* concernées par le changement sur ce 7 traités par les calculs effectués (cela concerne $7 \times 3 = 21$ colonnes au lieu de $25 \times 3 = 75$ colonnes à modifier au départ, car on rappelle chaque traité QS renvoie un triplet de colonnes). Une fois toutes les colonnes des traités QS à jours, le modèle peut continuer avec l'application du traité Groupe Aggregate et les calculs de pertes. Cette opération de remplacement (rendant le modèle simplifié) permet un léger gain de temps d'environ 5 min par itération ; multiplié par la taille de la population et le nombre de générations, ce gain de temps devient non négligeable.

A ce stade là, on a les résultats du modèle de réassurance. Pour avoir les fonctions objectif, on implémente des fonctions calculant les indicateurs souhaités (Marge Cédée Moyenne, OEP bicentenaire et Réduction de volatilité) à partir des résultats du modèle simplifié. On peut directement implémenter une optimisation multi-objectifs avec la fonction *nsga2* de l'algorithme génétique. Pour cela, il faut définir une fonction objectif supplémentaire qui renvoie un vecteur de 3 valeurs, qui sont les fonctions objectif des 3 indicateurs retenus.

3.3 Algorithme par essaim particulaire

Un second algorithme étudié dans ce mémoire est l'optimisation par essaim particulaire dite OEP (PSO pour Particle Swarm Optimization en anglais)*.

3.3.1 Principe de l'algorithme PSO

Cette méthode s'inspire du comportement de certains insectes sociaux volants. L'optimisation est stochastique par itérations successives avec une approche globale assez similaire aux algorithmes génétiques.

L'exemple typique généralement présenté est la recherche de nourriture par une ruche d'abeilles qui cherchent chacune dans l'espace environnant. On suppose que les abeilles peuvent accéder et communiquer entre elles les deux informations suivantes : leur position et à quel point elles sont proches du lieu de la nourriture. Une bonne manière d'optimiser la recherche est pour toutes les autres abeilles de rejoindre celle qui se déclare la plus proche de la nourriture pour cibler cette zone-là. Tout l'algorithme s'appuie donc sur la collaboration des individus entre eux. Dans l'idée de l'algorithme PSO, une particule sera en mouvement sous l'impulsion des trois types de comportement suivants(LOUBIERE, 2016) :

- Une dimension physique, mobile : la particule voudra suivre sa propre trajectoire ;
- Une dimension cognitive : la particule tend à revenir vers le meilleur site qu'elle a rencontré par le passé ;

*Pour éviter toute confusion avec l'Occurrence Excedence Probability, on utilisera l'abréviation en anglais PSO pour désigner cet algorithme

- Une dimension sociale : la particule tend à se diriger vers le meilleur site qu'un de ses voisins a déjà déclaré avoir atteint.

Les termes suivants sont utiles à définir pour la compréhension du fonctionnement de l'algorithme.

Essaim : Pour faire le parallèle avec les algorithmes génétiques, la population qui est ici un essaim est composée de particules qui elles font référence aux individus.

Particule : les individus composant l'essaim. Un ensemble de valeurs des variables d'entrée donnant une solution potentielle au problème. Elle est identifiée à tout instant par sa position.

Pbest (personal best) : le record personnel atteint par une particule depuis le début de l'optimisation. C'est la position de la particule dans son historique de déplacement pour laquelle elle a eu la valeur minimale de la fonction objectif.

Gbest (global best) : le record global qui donne la meilleure position qui a été atteinte à un moment donné par une des particules de l'essaim.

Déplacement (parfois appelé vitesse) : vecteur qui donne la direction de déplacement de la particule d'une position à l'itération k à sa nouvelle position à l'itération $k + 1$.

Pondérations : dans la mise à jour de la position d'une particule, différentes importances sont accordées à sa position actuelle, celle de son record personnel ainsi que celle du record global.

- L'inertie (w) pondère l'impact de la position actuelle sur sa mise à jour.
- Le facteur cognitif (c_1) permet de quantifier à quel point la particule tendra à aller vers son pbest.
- Le facteur social c_2 contrôle l'attraction vers le succès du groupe, donc vers gbest.

L'algorithme est initialisé par un essaim de particules positionnées aléatoirement dans l'espace. A l'itération k , les records sont enregistrés ($pbest_k$ et $gbest_k$) par chacune des particules qui se trouve alors à la position X_k . Ces records sont identifiés en calculant la valeur de la fonction objectif sur l'ensemble des particules de l'essaim et en les comparant, c'est pourquoi on parle de phase d'évaluation. Le nouveau déplacement est calculé par $D_{k+1} = wX_k + c_1(pbest_k - X_k) + c_2(gbest_k - X_k)$. La mise à jour consiste simplement à se rendre à la nouvelle position grâce au vecteur déplacement,

$$X_{k+1} = X_k + D_{k+1}.$$

De même que pour l'algorithme génétique, le critère de convergence est un critère de similarité entre les particules. L'algorithme PSO s'arrête sur un essaim pour lequel les différentes particules sont suffisamment proches pour chacune des variables de position. Ces étapes sont illustrées sur le schéma de la figure 3.3.

3.3.2 Implémentation de l'algorithme PSO pour notre problème

La fonction *psoptim* du package *pso* de *R* permet d'appeler l'algorithme PSO. La fonction objectif construite pour l'algorithme génétique est reprise comme paramètre principal. On fournit également les bornes inférieures et supérieures de chacun des 9 paramètres à optimiser à l'aide de 2 vecteurs *lower* et *upper*. La taille de l'essaim et le nombre maximal d'itération souhaité sont deux hyperparamètres choisis respectivement à 40 particules et 50 itérations.

Paramètres	Descriptions	Valeurs choisies
fn	La fonction objectif	fun_obj
par	Le vecteur position de départ	(Init1... Init9)
w	Inertie	0,7
c.p	Facteur cognitif (c1)	1,5
c.g	Facteur social (c2)	1,5
s	Taille des populations	40
maxit	Nombre max d'itérations	50
lower	Bornes inférieures	(min1... min9)
upper	Bornes supérieures	(max1... max9)
constraints	Fonction de contrainte	const_fun

TABLE 3.4 : Paramètres de l'algorithme PSO

Contrairement à la fonction *nsga2* utilisée pour l'algorithme génétique, avec *psoptim* pour l'algorithme PSO, il n'est pas possible de retourner plusieurs sorties de la fonction objectif. On contourne ce problème en définissant une fonction mono-objectif qui combine les trois indicateurs d'OEP bicentenaire, de marge cédée et de réduction de volatilité. Cette fonction calcule une somme pondérée de ces trois indicateurs

$$f_obj = w_OEP \times OEP_optim + w_MC \times MC_optim + w_rv \times rv_optim,$$

avec w_indic le poids de l'indicateur et $indic_optim$ la valeur optimale de l'indicateur renvoyée par l'algorithme. On introduit une étape de normalisation comme à chaque fois qu'on associe ces indicateurs aux ordres de grandeurs totalement différents pour avoir

$$f_obj = w_OEP \times \frac{OEP_ref - OEP_optim}{OEP_ref} + w_MC \times \frac{MC_ref - MC_optim}{MC_ref} + w_rv \times \frac{rv_ref - rv_optim}{rv_optim},$$

Ces poids peuvent être choisis pour être cohérents avec les poids retenus dans le tableau 3.10 ou pour orienter l'optimisation en faveur d'un des trois indicateurs, la deuxième option a été retenue ici. Une seconde limite présentée par la fonction *psoptim* est l'impossibilité de préciser des contraintes à l'algorithme. Sans possibilité de contraindre l'OEP bicentenaire sous un certain seuil, on aboutit à des paramètres qui tendent vers une réassurance maximale sans réellement tenir compte du coût en termes de Marge Cédée. C'est pourquoi le choix des poids est fait pour que l'optimisation minimise en priorité la Marge Cédée. On retient les poids $w_OEP = w_rv = 0,05$ et $w_MC = 0.9$. Ce choix s'est fait par ajustement, l'algorithme est testé avec des poids aléatoires dans un premier temps; l'accent est ensuite mis sur l'indicateur de marge cédée quand on se rend compte que c'est lui que l'algorithme optimise le moins bien.

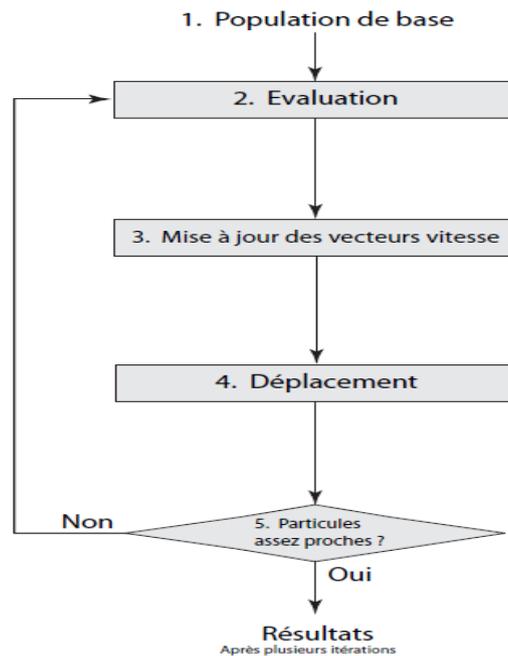


FIGURE 3.3 : Schéma de l'algorithme par essaim particulaire (YOUSSEF, 2011)

3.4 Résultats de l'optimisation par les algorithmes

L'optimisation porte sur les fonctions objectif suivantes : OEP bicentenaire, marge cédée et réduction de volatilité.

Paramètres	Algorithme génétique	Algorithme PSO
Axa_E.QS	max	max
Axa_C.QS	max	max
Axa_B.QS	max	max
Axa_A.QS	max	max
Limite groupe QS	max	max
Limite Aggregate		min
Retention Aggregate		max
Portefeuille A QS - groupe	min	min
Portefeuille B QS - groupe	max	max

TABLE 3.5 : Résultats et limites des algorithmes d'optimisation

Les résultats restent cohérents d'un algorithme à l'autre. On voit que sur l'algorithme génétique et dans une moindre mesure sur l'algorithme PSO, on tend vers une structure de réassurance où les cédantes réassurent leurs pertes au maximum. Les taux de cession sur les traités locaux chez les 4 entités locales retenues tendent vers leurs bornes supérieures avec l'algorithme PSO et l'algorithme génétique. On retrouve également la borne maximale sur la limite du traité groupe QS. Sur les deux portefeuilles d'Axa XL, la part réassurée par le traité groupe (au détriment des traités locaux) tend vers le maximum sur le traité B et le minimum sur le traité A. Sur le traité Aggregate l'algorithme

génétique ne présente pas une allure de convergence vers une des bornes, ni pour la limite, ni pour la rétention. L'algorithme PSO tend à minimiser le niveau de cession, par une rétention qui tend vers son maximum et une limite minimisée. Ces résultats sur le traité Aggregate font un contrepoint à la tendance de forte cession observée chez tous les autres paramètres, qui s'explique par le poids important accordé (90%) à la marge cédée dans la calibration de cet algorithme.

Sur l'algorithme génétique, pour chacune des trois fonctions objectif, on calcule sa moyenne à chacune des générations. Les courbes d'évolution sont présentées sur la figure 3.4.

La fonction objectif construite pour l'algorithme PSO est une combinaison des trois indicateurs (marge cédée moyenne, OEP bicentenaire et réduction de volatilité). Sur la figure 3.5 on observe l'évolution des indicateurs en n'appliquant pas de poids aux indicateurs, ce qui revient à $w_{OEP} = w_{MC} = w_{RV} = 1$. La figure 3.6 ci-dessous montre ces mêmes courbes quand des poids sont appliqués dans le calcul de la fonction objectif, $w_{MC} = 0,9$ et $w_{OEP} = w_{RV} = 0,05$.

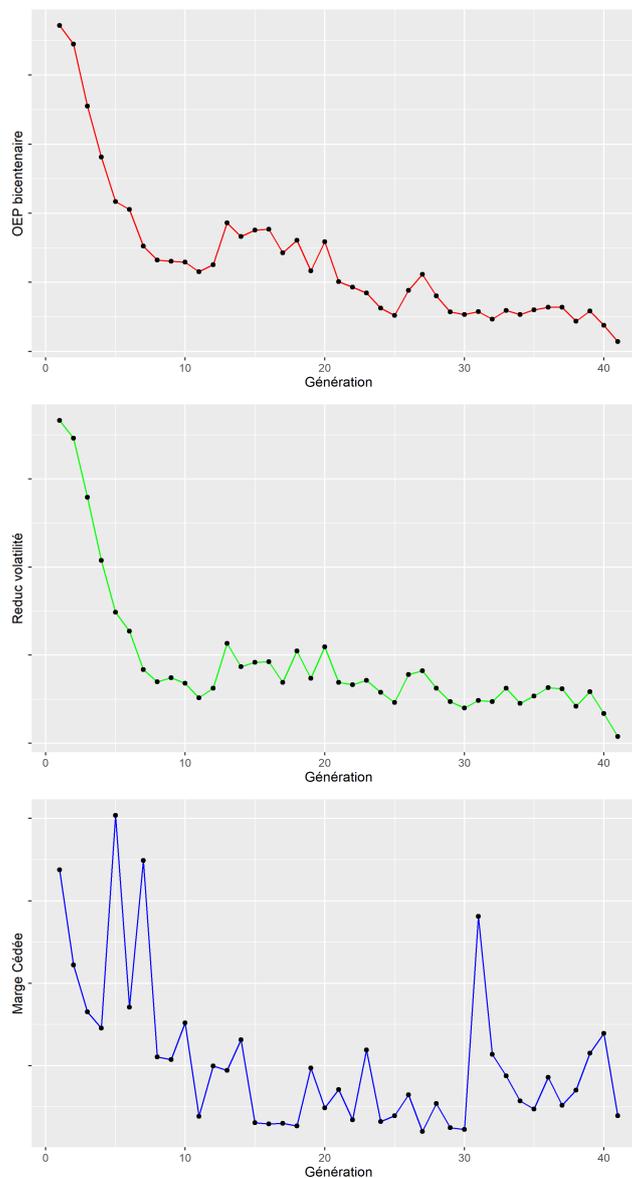


FIGURE 3.4 : Evolution des fonctions objectif pour l'AG

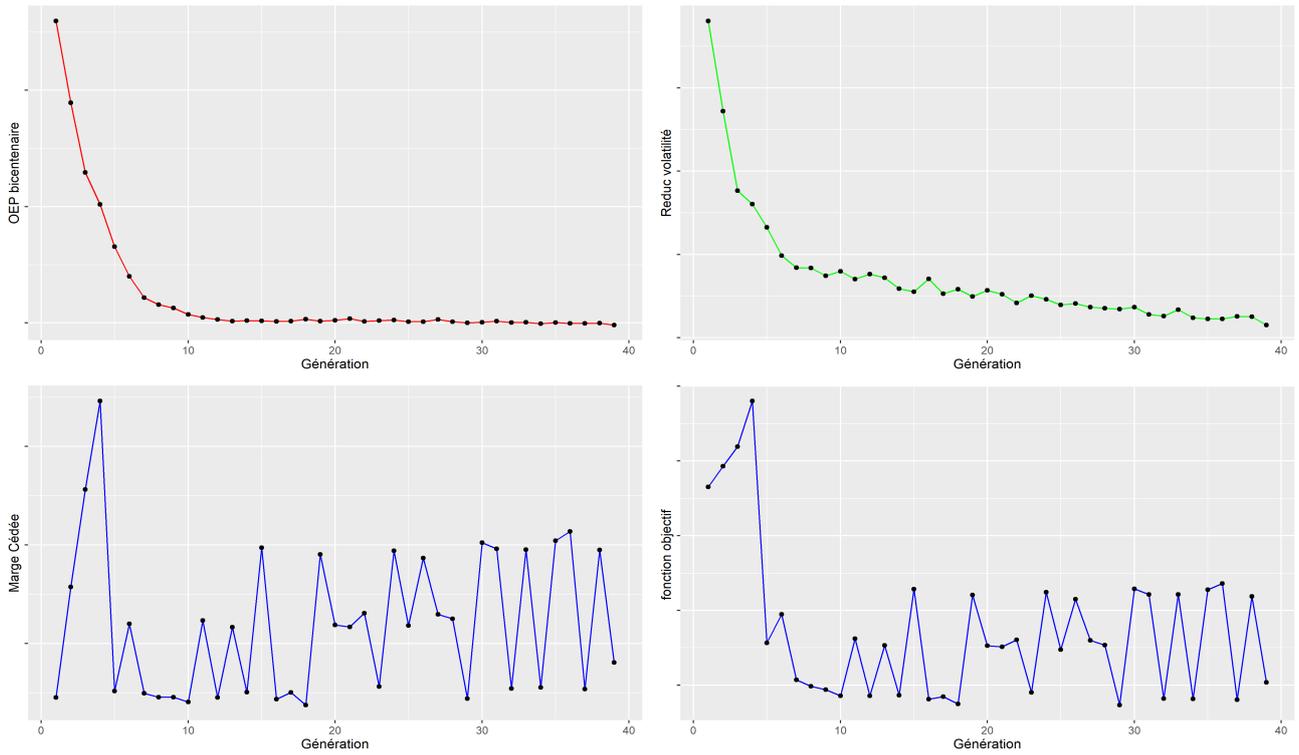


FIGURE 3.5 : Fonctions objectif sur le PSO (même poids pour les trois indicateurs)

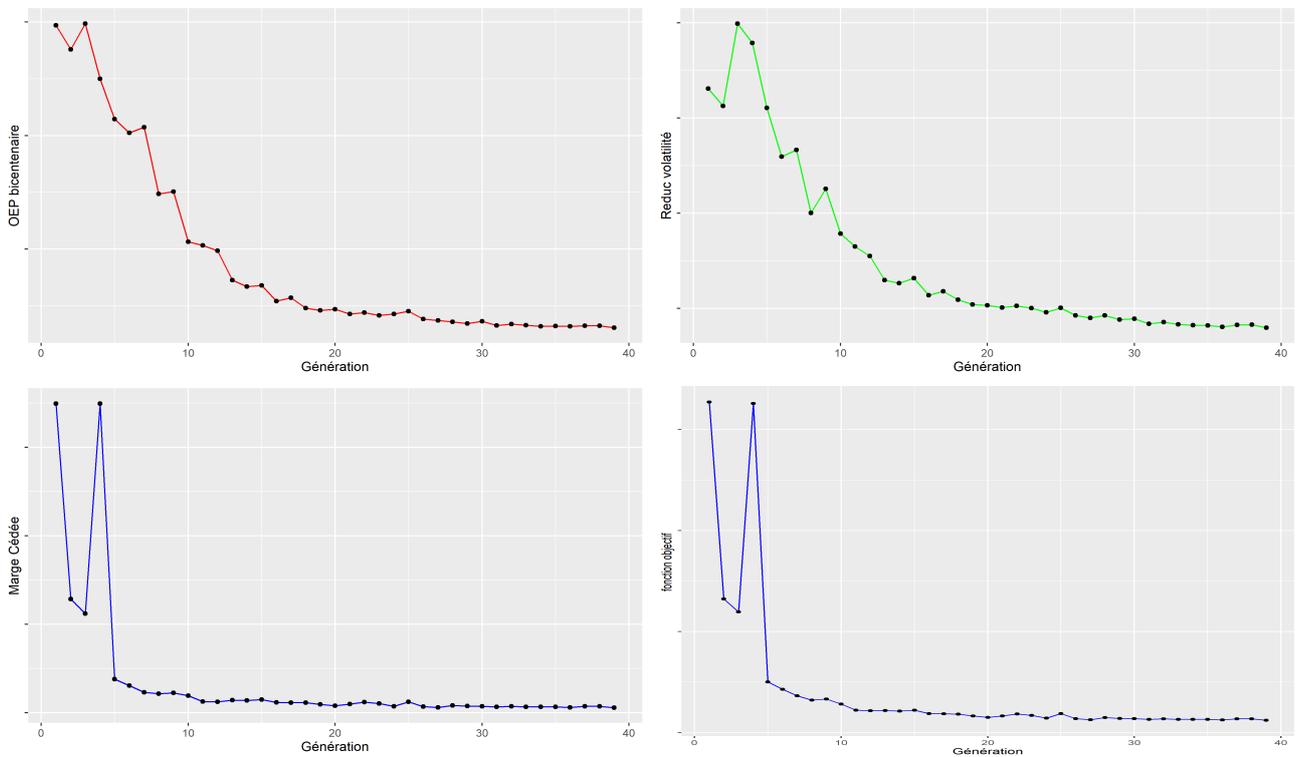


FIGURE 3.6 : Fonctions objectif sur le PSO (poids MC=0,9)

Comme on peut le voir sur les courbes d'évolution 3.4 et 3.5, les 2 algorithmes optimisent en priorité l'OEP puis la réduction de volatilité et optimisent assez mal la marge cédée sans application de poids différenciés sur les indicateurs. Ces courbes montrent une décroissance pour la réduction de volatilité et les pertes bicentenaires qui correspondent à la stratégie de forte cession privilégiée par les algorithmes. La marge cédée a au contraire une décroissance moins visible sur sa courbe et l'algorithme ne semble pas encore converger sur cet indicateur. En appliquant progressivement un poids de plus en plus fort à la marge cédée on parvient à sa convergence avec le poids de 0.9 retenu. Comme le montre la figure 3.6, cette convergence est d'ailleurs très nette voire précoce (dès 10 générations) pouvant laisser suspecter un minimum local atteint. Cependant cette calibration est retenue comme satisfaisante car les deux autres critères continuent à être optimisés après les 10 premières générations.

Nos analyses permettent de conclure que la MC totale dépend presque exclusivement de la MC du traité Grp Aggregate car la Marge Cédée du Grp QS se compense avec la MC de Axa XL.

Une difficulté mentionnée avec les algorithmes d'optimisation pouvant expliquer ces limites est le temps de calcul. Malgré le passage sur des données environ 50 fois moins nombreuses, ces algorithmes doivent tourner plusieurs heures avec les paramètres retenus ; et on n'a pas pu les tester sur un nombre d'itérations plus élevé par manque de temps. La calibration des paramètres suivants : nombre de générations et taille de population pour l'algorithme génétique et nombre d'itérations et taille de l'essaim pour l'algorithme PSO n'est donc pas très précise. La bonne stratégie consisterait à réaliser des tests successifs sur ces algorithmes pour identifier les paramètres (taille de population et nombre de générations/itérations) satisfaisants pour avoir une convergence suffisante. L'approche idéale serait même de définir le critère d'arrêt souhaité, cependant les fonctions prises des packages ne proposent pas directement cette implémentation et en pratique cela pourrait impliquer des temps de calculs encore plus conséquents.

Un sujet de simplification sur les algorithmes s'est posé pour une analyse plus précise de la structure optimale selon chacun des critères. L'idée étant d'optimiser uniquement selon l'OEP avec une contrainte de marge cédée maximale à ne pas dépasser ou inversement de minimiser la marge cédée tout avec une contrainte d'OEP minimale à atteindre. Les fonctions de contrainte à inclure dans la fonction `nsga2` de la librairie `mco` utilisée n'ont pas fonctionné pour aller au bout de cette démarche.

3.5 Optimisation manuelle graphique sur 7 options de structures

Les méthodes présentées, algorithme génétique et essaim particulière, balayent un large panel de points qui représentent des options pour la structure de réassurance, qu'ils font évoluer itérativement pour retenir celle jugée optimale. Ce que nous avons appelé dans notre étude d'optimisation la méthode d'optimisation "manuelle" correspond à une optimisation par force brute.

Cette approche nécessite, comme expliqué en début de chapitre, un nombre d'options à tester suffisamment faible car elle est fondamentalement chronophage. On va l'appliquer à 7 options connues qui sont des versions de la structure plus ou moins ressemblantes. On part de la structure actuelle, et on modifie quelques valeurs de paramètres pour passer d'une option à l'autre.

Les paramètres concernés sont les taux de cessions des portefeuilles A et B chez Axa XL au niveau des traités locaux et au niveau du traité groupe QS (on rappelle que pour Axa XL spécifiquement on a une distinction entre les taux de cessions des traités locaux et ceux du groupe) ainsi que le Loss Ratio Cap du traité groupe QS.

3.5.1 Les options de structure comparées

Le choix de ces 7 options résulte de concertations avec les entités. Elles sont fixées pour être cohérentes avec la volonté de cession des entités. Ce choix est affiné par des discussions avec les

équipes de placement au sein d'AGRe ainsi que les courtiers. Cela permet de savoir quelles options seraient pertinentes tout en restant raisonnables pour être bien reçues sur le marché.

Chez toutes les entités (GIs) à l'exception d'Axa XL, les taux de cessions au niveau du groupe sont à leur maximum. Autrement dit, les taux de cession à la couverture groupe sont déjà à un niveau tel que les entités n'accepteront pas de céder encore plus de business à la réassurance. Comme les taux de cession des traités locaux des entités sont identiques à ceux de la couverture groupe cela ne laisse pas de marge de manœuvre. Axa XL est le cas particulier où la cession sur les traités locaux n'est pas forcément identique à celle sur le traité groupe. Une partie de la cession des portefeuilles cyber sur les traités QS locaux peut être transférée vers la couverture QS groupe. Nous nous sommes focalisés sur les deux traités QS locaux d'XL qui réassurent les principales branches cyber retenus depuis le début : les portefeuilles notés A et B.

Le Loss Ratio Cap est le levier permettant d'agir sur la capacité du traité groupe QS sans pour autant faire varier les primes cédées.

Dans un contexte de réassurance tendu où il est difficile d'obtenir de la capacité supplémentaire, la diminution du loss ratio cap permettrait d'obtenir une meilleure commission pour une meilleure marge cédée finale.

Options	Paramètres				
	Tx cession A	Tx cession A Grp	Tx cession B	Tx cession B Grp	Loss Ratio cap
Opt Exp	α	α'	β	β'	γ
Opt 1a	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	β	β'	γ
Opt 1b	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	β	β'	$\gamma+2$
Opt 2a	α	α'	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	γ
Opt 2b	α	α'	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	$\gamma+2$
Opt 3a	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	γ
Opt 3b	$\alpha-10\%$	$\alpha'+10\%$	$\beta-15\%$	$\beta'+15\%$	$\gamma+2$

TABLE 3.6 : L'évolution des paramètres observés sur les différentes options

Ces options évoluent principalement en agissant sur l'impact d'Axa XL. La première option *Option – as – expiring* dépeint la structure avec les paramètres tels qu'ils sont entrés dans le modèle actuellement. On a 3 doublons d'options qui apportent des changements sur les paramètres du portefeuille A d'Axa XL pour les options 1, du portefeuille B pour les options 2, et des deux portefeuilles A et B à la fois pour les options 3. Pour chaque paramètre X , deux niveaux sont possibles : X et $X + \Delta X$ qui est supérieur à X . Pour l'exemple, on a pris arbitrairement les valeurs de Δ de 10%, 15% et 2. Pour les deux branches des portefeuilles A et B considérées le taux de cession des traités locaux sont directement liés à ceux des traités groupe. La somme $Tx_cession_A + Tx_cession_A_Group$ doit se conserver (de même pour le portefeuille B) d'une option à l'autre dans notre tableau 3.6. La part augmentée sur le taux de cession du traité local est retranchée sur le taux de cession correspondant sur le traité groupe QS. Pour passer d'une option a à une option b c'est uniquement l'effet du paramètre de la limite du traité groupe QS, le LR cap qui est observé. Les valeurs de hausse et de baisse des taux de cessions (10%) et du LR Cap (2) consignées dans le tableau 3.6 sont prises en guise d'exemple, il ne s'agit pas des vraies évolutions sur les options.

3.5.2 Evolution des indicateurs sur les options étudiées

La méthode manuelle va consister à calculer et comparer tous nos indicateurs pour chacune de nos options. On peut comparer les options entre elles pour chaque indicateur, identifier la meilleure

et la pire option et surtout voir l'impact de l'évolution d'un paramètre d'une option à une autre sur l'indicateur. Pour des raisons de confidentialité, on ne reporte pas directement dans les tableaux 3.7 et 3.8 les valeurs calculées sur les indicateurs. On y saisit les variations relatives des 6 options par rapport à l'option de référence *Option-as-expiring*. Chaque valeur de variation du tableau est obtenue en calculant l'écart relatif entre la valeur de l'option sur l'indicateur et celle de l'option de référence *, calculée par la formule

$$Var_option_i = \frac{Indic_option_i - Indic_option_exp}{Indic_option_exp}$$

Options	Bicentenaire			Vingtenaire			Moyenne		
	OEP	AEP	Résultat	OEP	AEP	Résultat	OEP	AEP	Résultat
Opt 1a	-1,39%	-4,08%	-1,49%	-0,75%	-0,63%	-1,49%	1,26%	1,58%	-0,35%
Opt 1b	-15,48%	-16,77%	-1,38%	-0,75%	-0,63%	-1,38%	-1,13%	-0,73%	-0,01%
Opt 2a	-29,37%	-30,91%	-1,77%	0,06%	0,03%	-1,77%	-5,75%	-5,14%	-0,08%
Opt 2b	-29,43%	-31,09%	-1,77%	0,06%	0,03%	-1,77%	-7,40%	-6,75%	0,07%
Opt 3a	-28,84%	-32,00%	-3,30%	-0,65%	-0,53%	-3,30%	-4,84%	-4,09%	-0,42%
Opt 3b	-29,21%	-32,31%	-3,30%	-0,65%	-0,53%	-3,30%	-6,69%	-5,94%	-0,25%

TABLE 3.7 : Résultats sur les indicateurs de pertes et de résultat

Comme le montre le tableau 3.7, les pertes nettes de réassurance baissent sur pratiquement toutes les options par rapport à l'option de référence car la majorité des valeurs d'écart sont des pourcentages négatifs. À l'exception des AEP et OEP sur l'option 1a qui augmentent. Cela indique qu'augmenter la cession sur le traité groupe QS au détriment de celle sur les traités locaux (portefeuilles A et B d'Axa XL) est profitable en termes de pertes nettes conservées. Sur les pertes bicentenaires, on observe que les variations entre les versions a et b ont un grand impact sur l'option 1 (qui passe de -1% à -15%) mais n'apportent rien sur les options 2 et 3. Sur ces options 2 et 3 on a d'ailleurs des pertes d'ordre de grandeur assez similaires ; une baisse autour de 29% pour l'AEP et 31%, 32% pour l'OEP. Le résultat bicentenaire qui a des variations identiques au résultat vingtenaire voit sa baisse se creuser de l'option 1 vers l'option 3. Le résultat moyen au contraire a des variations plus faibles (moins de 0,5 %), qui varient d'une sous option à une autre. Du point de vue des pertes les options 2 et 3 sont les plus intéressantes tandis que du point de vue du résultat c'est l'option 2b qui est meilleure.

*On rappelle que l'option exp/as exp/expiring fait référence à la structure de référence.

Options	SCR	Réduction volatilité	Réduction T_Var	Capacité groupe QS
Opt 1a	-4,29%	-4,53%	1,77%	27,26%
Opt 1b	-17,36%	-2,21%	7,26%	43,17%
Opt 2a	-31,86%	3,11%	13,39%	94,17%
Opt 2b	-31,98%	5,59%	13,47%	118,44%
Opt 3a	-33,03%	-0,55%	13,86%	132,54%
Opt 3b	-33,28%	2,40%	14,00%	161,61%

TABLE 3.8 : Résultats sur les indicateurs complémentaires

Le SCR évolue approximativement comme l'AEP bicentenaire et est minimal pour l'option 3b. La réduction de volatilité augmente pour les options 3b, 2a et surtout 2b mais diminue sur les autres options. La réduction de T_Var augmente pour toutes les options, particulièrement les options 2 et 3 (d'environ 13,5%).

Le dernier indicateur qui est la limite du traité groupe QS explose pour toutes les options, cela correspond à une détérioration car on rappelle qu'on souhaite minimiser cet indicateur. Pour chaque option cet indicateur augmente quand on passe de la version a à la version b car il dépend directement du LR_cap. Il atteint 161,6% sur l'option 3b qui devient la "pire" option pour cet indicateur.

Dans l'ensemble, les indicateurs sont assez discriminants d'une option à l'autre voire parfois sur les deux versions d'une option. Grâce aux différences assez nettes sur les résultats des options, on peut trouver là où les meilleures options pour chaque indicateur. On va mettre en place des méthodes pour classer ces options et identifier lesquelles sont optimales.

3.5.3 Contrôles et justifications de quelques résultats

Dans cette partie, on présente des analyses faites sur les résultats des indicateurs calculés pour les différentes options. Par construction de la structure, on s'attend à certaines évolutions au niveau des indicateurs suivant la modification d'un ou plusieurs paramètres. On a pu se poser des questions quand ces évolutions ne paraissent pas cohérentes par rapport à la déformation des paramètres et y apporter des éléments de justifications. Notamment 3 contrôles ont été effectués :

Pourquoi observe-t-on une diminution quasi négligeable des pertes bicentenaires entre l'option 2a et 2b ?

De l'option 2a vers la 2b, on augmente le LR cap, par conséquent la limite sur le traité groupe QS sera augmentée. Le réassureur s'engage sur un plafond plus élevé à couvrir les pertes cédées par les entités, on s'attend donc à ce que les pertes restant à charge du groupe à terme soient réduites. Plus particulièrement l'AEP devrait diminuer inversement à l'augmentation du LR cap. On s'aperçoit que bien que les sens de variations soient cohérents, à savoir la hausse du LR Cap qui engendre une baisse de l'AEP, l'intensité de ces variations n'est pas similaire.

$$\text{Variation Capacité groupe QS} = 118,44\% - 94,17\% = 24,27\%$$

$$\text{Variation AEP bicentenaire} = -31,09\% - (-30,91\%) = -0,18\%$$

$$\text{Variation OEP bicentenaire} = -29,43\% - (-29,37\%) = 0,06\%$$

Pour comprendre cette différence en variation, on observe les pertes cédées par les entités au traité groupe QS pour différentes périodes de retour, dont le bicentenaire. Ces pertes sont comparées à la limite du traité dans le cas de l'option 2a ainsi que dans celui de l'option 2b. Une limite sur le traité QS n'a d'effet que quand les pertes observées lui sont supérieures.

Comme on peut le lire sur le graphique de gauche de la figure 3.7, les pertes restent inférieures aux capacités fixées par les deux options sur les périodes de retour inférieures à 200. Sur les années dont la perte annuelle brute survient au moins une fois tous les 200 ans, cette perte n'est pas suffisamment importante pour être plafonnée par la limite de l'option 2a (LR cap = γ), il devient inutile d'augmenter cette limite qui n'est jamais atteinte. Cela explique les résultats observés.

La situation où l'effet du LR cap agit de façon impactante sur les pertes, en particulier bicentennaires, est observée sur le passage de l'option 1a vers 1b. Pour une augmentation de la capacité de $43,17\% - 27,26\% = 15,91\%$ on trouve une diminution des pertes bicentennaires du même ordre de grandeur $-16,77\% - (-4,08\%) = 12,69\%$ pour l'AEP et $-15,48\% - (-1,39\%) = 14,9\%$ pour l'OEP. Le graphique de droite de la figure 3.7 représente l'évolution des pertes par période de retour pour les paramètres de l'option 1.

Sur ces graphiques, pour chaque période de retour, figurent en ordonnée les pertes par entité. Les deux droites représentent les limites du traité groupe QS pour les versions a et b des options. On observe que les limites du traité groupe QS sont beaucoup plus faibles que sur l'option 2, visibles sur le graphique de gauche de la figure 3.7. La limite la plus faible qui est celle au LR cap = γ devient supérieure aux pertes à partir de la période de retour 150. Toutes les pertes supérieures à cette limite mais inférieures à la limite du groupe QS de l'option 2b sont réassurées par le traité dans le cas de l'option 1b et pas 1a.

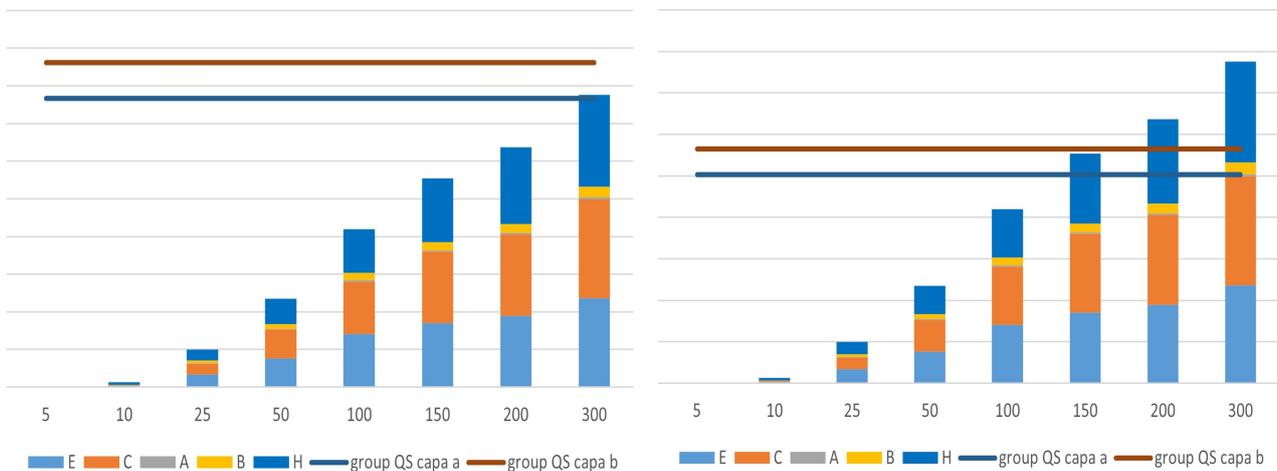


FIGURE 3.7 : Pertes (AEP) par période de retour comparées aux limites du groupe QS (opt 2 à gauche et opt 1 à droite)

Cette comparaison illustre la nécessité de choisir la variation du LR cap dans la mesure où elle apporte une réelle amélioration. Dans l'absolu, une même variation du LR cap n'aura pas le même effet selon la situation de départ. C'est un paramètre à part entière dans notre choix de modélisation mais il reste destiné à fixer la limite du traité groupe QS qui prend aussi en compte les pertes cédées au groupe QS à travers les taux de chaque entité. Ces taux déterminent finalement jusqu'où il devient raisonnable ou intéressant d'augmenter ce LR Cap.

Dans le cas de l'option 2a les primes cédées étant déjà suffisamment importantes, cela justifie que la

hausse de la limite du traité groupe QS et par extension du LR cap n'ait aucun effet sur les pertes couvertes par le réassureur en particulier sur le bicentenaire.

Pourquoi observe-t-on un écart de pertes assez limité entre les options 2a et 3a ?

On retrouve ici le même type de question que précédemment, une forte diminution des pertes bicentenaires attendue mais non observée.

De l'option 2a à 3a, ce sont les paramètres liés à la branche A de l'entité Axa XL qui évoluent. Le taux de cession du traité local est réduit de 10% qui sont basculés vers la cession des pertes de la branche A au traité groupe QS. Ce transfert va conserver un équilibre au niveau des pertes, les pertes cédées sur le traité local de la branche A diminuent d'autant qu'elles augmentent au niveau du groupe. Cependant on rappelle que ce taux de cession $Tx\ cession\ A\ Grp$ modifie également la limite du traité Grp QS qui couvrent les pertes de toutes les entités et pas uniquement celles de Axa XL. Dans le cas ou une perte majeure surviendrait sur une autre entité, l'effet de l'augmentation de cette limite du groupe QS va donc avoir un impact. On vérifie dans cette partie que les entités autres que Axa XL ne connaissent pas de grande différence de pertes entre les deux options 2a et 3a.

Sur les graphiques 3.8, on représente les pertes en entrée du groupe QS par entité avec un seuil constant sur l'ordonnée servant de référence de comparaison entre les deux graphiques. On observe les 4 entités (hors Axa XL) les plus grosses en termes de pertes sur l'histogramme empilé. On voit qu'elles conservent la même allure et ont presque les mêmes pertes d'un graphique à l'autre (du graphique de gauche à celui de droite).

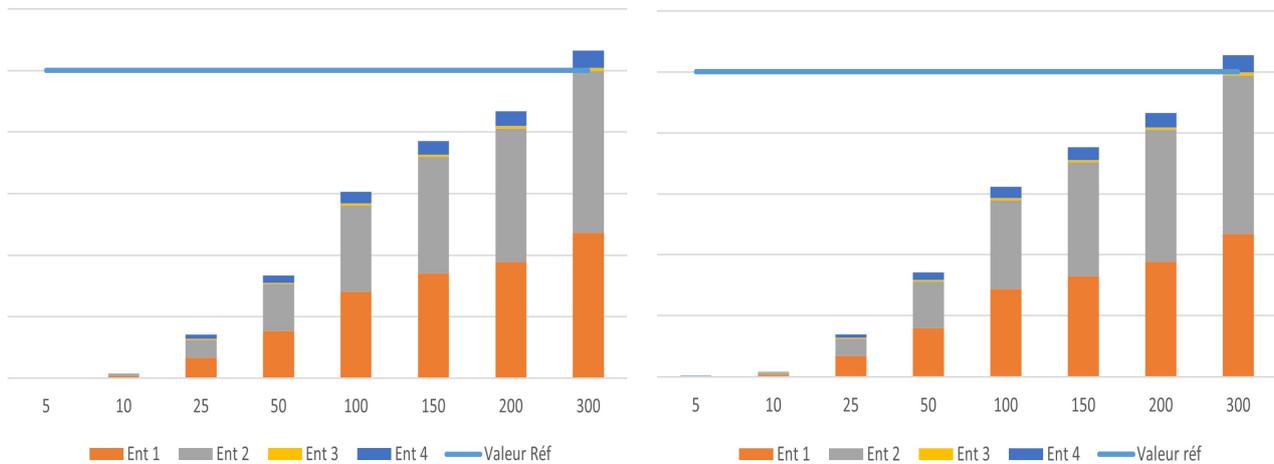


FIGURE 3.8 : Pertes en entrée du Grp QS (Option 2a à gauche et 3a à droite)

Pourquoi les récupérations moyennes du groupe Aggregate sont les mêmes alors que les pertes en entrées augmentent de l'option 3b vers la 3a ? (le sens est bien inversé, ce n'est pas 3a vers 3b)

Il s'agit de nouveau d'un couple d'options dont la seule différence est le LR cap. Sur ces deux options, on a une augmentation des pertes moyennes en entrée du traité Aggregate de 16,27%. Cependant les récupérations en moyenne restent strictement identiques.

Cela peut s'expliquer si sur tous les scénarios concernés par cette augmentation, la capacité de l'Aggregate était déjà complètement consommée dans l'option de départ. L'augmentation des pertes ne rajoutant ainsi qu'une partie non acceptée par le réassureur, donc sans impact sur les récupérations du traité.

Le premier point est de s'assurer que les scénarios différents entre les options 3a et 3b ont tous les récupérations les plus élevées au niveau de l'Aggregate sur l'option 3a. En effet le LR cap baisse de 3b vers 3a donc la limite du groupe QS et par conséquent les récupérations de ce traité baissent. Le traité groupe Aggregate couvrant le reste à charge à la sortie du traité groupe QS aura plus de pertes en entrée et éventuellement plus ou au moins autant de récupérations en sortie de l'option 3a.

Pour vérifier cela, on a observé le scénario à la perte minimale parmi les pertes de l'option 3a (en entrée du traité groupe aggregate) supérieures à celles de la 3b. On observe que cette perte est supérieure au plafond de réassurance du traité qui est la somme de la rétention et de la limite.

3.5.4 Quelle est la meilleure option ?

Selon l'indicateur sur lequel l'accent est mis, l'option à privilégier n'est pas la même comme on peut le lire dans le tableau 3.9.

Analyse des options par indicateur

On calcule ici la meilleure option pour chacun des indicateurs pris comme critère. La meilleure option sera celle de la valeur minimale ou maximale de l'indicateur dépendant de ce dernier. Les indicateurs traduisant un gain pour le groupe devront être maximisés et inversement pour ceux représentant une perte ou un coût.

On remarque que les options 2b et 3b sont celles retrouvées plus souvent en meilleure option. Pour comparer les options plus finement, on s'appuie sur leur classement entier pour chaque indicateur.

Une option qui est première chez un indicateur et dernière chez tous les autres ne sera pas forcément plus intéressante que l'option qui est 2^{ème} pour tous les indicateurs. On classe les options en leur attribuant un score qui est l'inverse de leur position. Pour chaque indicateur, l'option classée première (1) aura le score le plus élevé ici 7, la seconde (2) vaudra 6 et ainsi de suite jusqu'à la dernière option du classement (7) qui aura comme score 1. Ce scoring ne prend pas en compte la distance entre les options mais uniquement leurs positions dans le classement pour être homogène à tous les indicateurs avec un score allant toujours de 1 à 7. Le graphique en radar de la figure 3.9 représente ces scores

Indicateur	Optimisation	Best Option
OEP Bicentenaire	Min	2b
AEP Bicentenaire	Min	3b
Résultat Bicentenaire	Max	Actuelle
OEP Moyen	Min	2b
AEP Moyen	Min	2b
Résultat Moyen	Max	2b
OEP Vingtenaire	Min	1a
AEP Vingtenaire	Min	1a
Résultat Vingtenaire	Max	Actuelle
SCR	Min	3b
Reduction Volatilité	Max	2b
Reduction T_{Var}	Max	3b

TABLE 3.9 : Meilleure option retenue sur chaque indicateur

par options pour les trois indicateurs suivants : l'OEP bicentenaire, le résultat moyen et la réduction de volatilité. Le choix de ces trois indicateurs s'explique par leur pertinence et surtout pour éviter

la redondance dans le graphe qui devient de moins en moins lisible dès que le nombre d'indicateurs augmente. Pour représenter tous les indicateurs de pertes sur le graphe, on choisit l'OEP bicentenaire car la connaissance de la perte maximale pouvant survenir tous les 200 ans permet de rester prudent. En termes de résultat c'est la moyenne annuelle qui est intéressante au niveau du groupe, le résultat contient l'information sur la marge cédée. Pour finir, la réduction de volatilité calcule un rapport d'écart type, elle n'est donc retrouvée dans aucun autre indicateur d'où l'intérêt de la représenter.

On observe que l'option 2b est la plus intéressante sur les trois indicateurs, tandis que l'option 1a n'est pas très performante sur l'ensemble. L'option de la structure actuelle est 2ème en termes de résultat mais n'est pas bien classée sur les deux autres indicateurs. Au vu de ce graphe on va retenir l'option 2b.

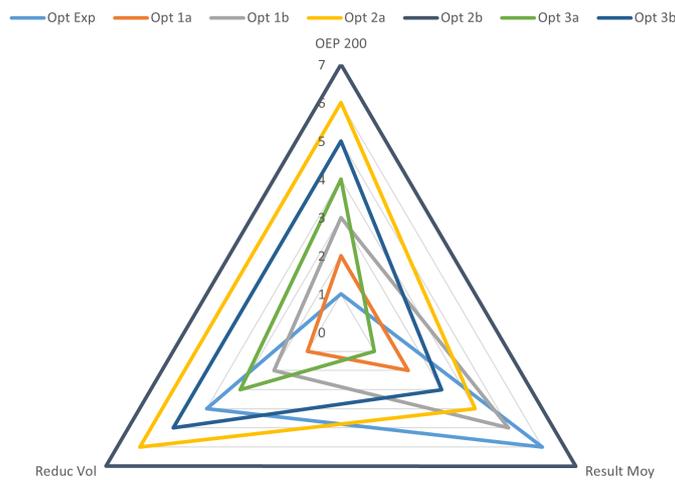


FIGURE 3.9 : Classement des options (sur 3 indicateurs)

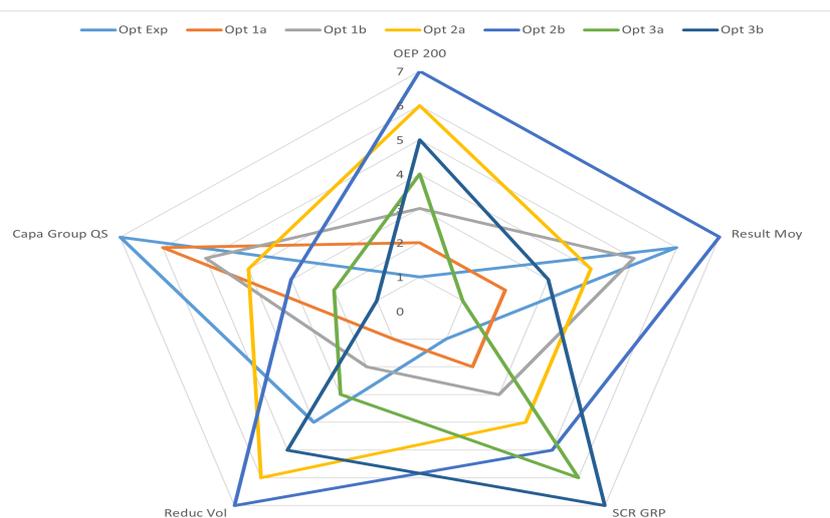


FIGURE 3.10 : Classement des options (sur 5 indicateurs)

Le classement de la figure 3.10 se fait en ajoutant deux nouveaux éléments. Le SCR qui est aussi

égal à l'AEP bicentenaire moins le résultat moyen nous apporte de l'information sur le quantile des pertes totales. La capacité du traité groupe QS nous indique le niveau de primes cédées au traité groupe QS, multipliées par le LR cap. Il est moins pertinent de regarder l'indicateur de primes cédées car cela fait apparaître toutes les options couplées (a-b) comme ex aequo.

Sur le second graphique, l'option 2b reste à envisager en priorité car elle n'apparaît pas catastrophique sur les deux indicateurs ajoutés. Elle est 3ème pour le SCR Grp et 4ème pour la capacité du traité groupe QS. L'option actuelle n'est très mauvaise que sur les indicateurs liés aux pertes bicentennaires (OEP 200 et SCR) où elle est dernière.

Méthode de scoring et classement des options

Pour une comparaison des options qui englobe l'ensemble des indicateurs il faut définir un critère de scoring qui prend en compte toutes les valeurs de ces derniers.

Le score de l'indicateur i pour l'option j sera l'écart à la meilleure valeur de cet indicateur parmi toutes les options. Selon l'indicateur, la valeur optimale sera la valeur minimale pour les OEP, AEP, Marge Cédée, SCR ou maximale pour les résultats, réduction de volatilité/de tail var. Le score s'obtient avec la formule

$$S_{i,j} = i - \text{optim}_{j=1..7}i,$$

avec $\text{optim} = \max$ ou \min selon l'indicateur.

Le score de l'option j est la somme de ses scores sur tous les indicateurs : $S_j = \sum_{i \in \text{Indic}} S_{i,j}$.

Une pondération p_i est attribuée à chaque indicateur selon l'importance qui lui est accordée dans la comparaison. Le tableau 3.10 donne la répartition des pondérations. Ces poids ont été définis par jugement d'experts en concertation avec l'équipe de placement de la couverture groupe Cyber. Le poids le plus important est donné à l'indicateur de rentabilité de la structure qui correspond à la marge cédée, il permet de répondre à la question, « pour une année moyenne est-ce qu'on ne cède pas trop de business à la réassurance ? ». Les deux indicateurs d'OEP bicentenaire et de réduction de volatilité sont des indicateurs de gestion du risque, ils totalisent un poids de 45%. Ce poids est important et permet de tenir compte d'une des premières utilités de la réassurance : limiter le risque de pertes extrêmes. L'OEP bicentenaire correspond également à la métrique observée pour répondre aux contraintes d'appétit au risque du groupe Axa mais se focalise uniquement sur le scénario bicentenaire tandis que la réduction de volatilité permet de prendre en compte toute la distribution de pertes. Enfin, le montant de capacité du groupe QS est un critère de faisabilité du placement de la structure de réassurance qui ne doit pas être négligé car une structure de réassurance qui, sur le papier donne des indicateurs de rentabilité et de réduction de la volatilité optimaux est inutile si elle n'est pas aisée à placer sur le marché. Si la capacité du groupe QS est trop élevée, le traité concerné reviendra très cher au groupe Axa et les entités ne pourront pas s'aligner à ce prix.

Indicateurs	OEP bicentenaire	MC Moyenne	Réduction de Volatilité	Capacité groupe QS
Poids	0,2	0,4	0,25	0,15

TABLE 3.10 : Répartition des poids pour différents indicateurs

L'expression du score devient ainsi : $S_j = \sum_{i \in \text{Indic}} p_i S_{i,j}$.

Cette méthode est utile car pour n'importe quelle option, on peut selon les indicateurs jugés les plus intéressants, la comparer à d'autres options. C'est ainsi qu'on peut décider s'il est utile ou pas de faire évoluer la structure actuelle vers une nouvelle option.

On peut à partir de ces nouveaux scores, définir un nouveau classement qui intègre l'ensemble des indicateurs.

Classement	Option	Ecart
1	Actuelle	
2	1b	6 964 822
3	1a	10 119 017
4	2a	18 090 415
5	2b	27 515 929
6	3a	33 842 997
7	3b	44 938 642

TABLE 3.11 : Classement général des options

Le classement obtenu se rapproche de l'ordre initial des 7 options disponibles, avec une seule inversion des options 1b et 1a. Il n'est pas très cohérent avec les conclusions tirées des graphiques en radar qui renvoyaient des scores plutôt faibles sur l'option *as.expiring* au profit des options 2b et 2a globalement meilleures. Le critère de scoring tel qu'il est défini dans la formule repose sur la distance à la meilleure option pour chaque indicateur. Les ordres de grandeur des indicateurs sont totalement différents, avec la réduction de volatilité comprise entre 0 et 1 et des pertes de l'ordre de 10^8 par exemple. Il s'agit de la même problématique qui entraîne la normalisation réalisée sur les données des modèles d'apprentissage (cf partie 2.2.2). Certains indicateurs auront nettement plus de poids dans le calcul du score final ; ici la capacité groupe QS est largement supérieure aux autres indicateurs. L'ordre des options tend à suivre l'augmentation de cet indicateur d'où le classement de la figure 3.11. Pour pallier ce déséquilibre, on peut utiliser les écarts relatifs dans le calcul du score ou normaliser les valeurs sur chaque indicateur avant de calculer les écarts.

Sur chaque valeur des tableaux de résultats, l'écart relatif se calcule comme suit,

$$\frac{|Valeur - Valeur_Optim|}{Valeur_Optim}$$

On peut lire le nouveau classement avec ces écarts relatifs dans le tableau 3.12 qui reste assez similaire au classement initial dans 3.11. Le fait de diviser les écarts par la valeur optimale ne semble pas effacer suffisamment l'effet de la disproportion des ordres de grandeur.

Classement	Option	Ecart
1	Actuelle	0,0734
2	1b	0,0878
3	2a	0,0994
4	1a	0,1073
5	2b	0,1184
6	3a	0,1469
7	3b	0,1691

TABLE 3.12 : Classement des options avec les écarts relatifs absolus

On observe dans le tableau 3.13 le classement obtenu en standardisant les valeurs avant de calculer les écarts.

Classement	Option	Ecart
1	2b	0,2132
2	2a	0,6641
3	Actuelle	0,8658
4	1b	0,9223
5	3b	1,2233
6	3a	1,7483
7	1a	1,9692

TABLE 3.13 : Classement des options avec les valeurs standardisées

3.6 Analyse des effets de la réassurance

Dans cette partie on étudie les évolutions des pertes résultant de la réassurance chez chaque entité. Ces entités n'étant pas homogènes en terme de taille et donc de pertes subies, il n'est pas pertinent de comparer directement les variations par entité. Une baisse des pertes de 5% sur l'entité B qui est assez petite est plus notable que cette même baisse de 5% sur une "grosse" entité comme l'entité H.

Le critère retenu est la contribution des entités à l'OEP bicentenaire. On compare la part de pertes apportée par une entité à l'OEP sur les pertes brutes (avant réassurance) et sur les pertes nettes (après réassurance). On introduit pour cela une méthode pour rendre plus robuste ce calcul d'OEP avant d'analyser les évolutions des contributions.

3.6.1 Calcul des pertes autour d'une période de retour

Période retour (rp)	Pertes décroissantes	Num Scénario associé	Ordre Scénario
50000	35808	469	1
25000	35700	9620	2
16666,67	35000	14800	3
...
200	4509	542	250
...
1,00002	187	2605	49999
1	0	19	50000

TABLE 3.14 : Pertes ordonnées et périodes de retour

Le tableau 3.14 permet de comprendre comment on accède à un quantile donné dans la distribution de pertes avec des valeurs arbitraires pour l'exemple. L'ensemble des pertes sur les 50000 scénarios sont ordonnées de la plus élevée à la plus faible. On peut dire qu'une perte supérieure ou égale à la perte la plus élevée 35808 ne survient qu'une seule fois sur tous les 50000 scénarios. Ce scénario qui est le numéro 469 a pour période de retour 50000 et est classé 1er dans la distribution des pertes décroissantes. De manière analogue, une perte supérieure ou égale à 35700 ne survient que 2 fois au cours des 50000 simulations, ce qui correspond à une récurrence d'une fois tous les 25000 scénarios. Le scénario 9620 a pour période de retour 25000 et est classé 2ème scénario à la perte la plus importante. À l'opposé, une perte d'au moins 0 survient sur tous les scénarios, le scénario 19 à donc une période de retour de 1. Dans la distribution des pertes par scénario, il faut savoir pour une période de retour

d'intérêt, quel est le scénario et donc la perte associée en identifiant sa position dans la liste des pertes ordonnées. C'est ce lien que fait la relation

$$\text{Ordre_scénario} = \frac{\text{Nb_tot_scenarios}}{rp} = \frac{50000}{rp}.$$

Pour le bicentenaire ($rp = 200$) il s'agira de la 250^{ème} plus grande perte, obtenu grâce à la formule

$$250 = \frac{50000}{200}.$$

On obtient ainsi pour une période de retour donnée, le scénario de retour correspondant. Un changement même léger dans la distribution des pertes peut renvoyer des résultats totalement différents. Par exemple un changement de la valeur du scénario numéro 542, va renvoyer une perte bicentenaire différente. C'est pourquoi l'identification de ces pertes, qu'elles soient bicentenaires ou liées à une autre période de retour, a été revue pour gagner en robustesse. On regarde une moyenne des pertes sur plusieurs scénarios autour du scénario de retour dont plutôt que de prendre l'unique valeur du scénario de retour. Le choix s'est porté sur 100 scénarios autour du scénario retour. Le calcul des pertes associées à une période de retour rp donnée suit toujours les étapes suivantes :

1. Se placer sur les données de pertes concernées, il peut s'agir des pertes brutes ou nettes de réassurance et les ordonner.
2. Identifier la position de la simulation (année) associée à cette période de retour. Il s'agit de l'année parmi les 50000 simulées dont la perte totale survient au moins tous les rp années. Une fois la position du scénario de retour connue, prendre les 100 scénarios autour de ce dernier et moyenner leurs pertes. Pour l'exemple du bicentenaire, on ferait la moyenne des pertes sur les scénarios entre la 200^{ème} et 300^{ème} position des pertes ordonnées.

200 201 ... **250** ... 299 300

3.6.2 Effet de la réassurance sur la contribution aux pertes des entités

On regarde dans cette partie l'OEP bicentenaire avant et après réassurance. Plus précisément, c'est le détail de la contribution de chaque entité à cette perte qui est présenté sur les diagrammes circulaires de la figure. 3.11. On calcule les pertes moyennes sur les 100 scénarios autour du bicentenaire pour chaque entité. Le pourcentage par rapport au total donne la contribution de l'entité à l'OEP bicentenaire.

Pour comparer l'OEP bicentenaire avant et après réassurance, on rappelle qu'on n'observe pas uniquement le scénario bicentenaire des deux situations pour cette comparaison. On observe les scénarios autour de ce scénario bicentenaire et on en fait une moyenne. On a pris 100 scénarios, les 50 avant et les 50 après le bicentenaire sur lesquels on fait la moyenne des pertes pour chaque entité. Comme expliqué précédemment cela permet d'avoir des résultats de pertes plus stables car le scénario bicentenaire peut totalement changer avec la réassurance mais la distribution des pertes elle, reste plutôt cohérente.

Sur les diagrammes on constate que parmi les 8 entités, c'est sur la contribution de Axa H à l'OEP bicentenaire que la réassurance a le plus d'impact. On a une baisse de 6.8 points de pourcentage sur sa part à l'OEP bicentenaire. Bien qu'on ne puisse pas s'appuyer uniquement sur cet indicateur d'OEP pour la qualité de la réassurance, cette importante baisse est un indice que l'entité H serait mieux réassurée. On observe une baisse de la contribution de l'entité C et pas de variation sur l'entité E. Ces deux entités qui sont largement dominantes au sein des GIs contribuent à l'OEP, au final de manière

assez similaire qu'il y ait réassurance ou non. Les petites entités GIs voient leur contribution à l'OEP bicentenaire augmenter d'environ le double pour chacune. Cela compense la baisse de contribution de l'entité H. Il se dégage donc comme tendance une meilleure efficacité de la réassurance sur les plus grosses entités, en particulier Axa XL, plus que sur les petites entités GIs.

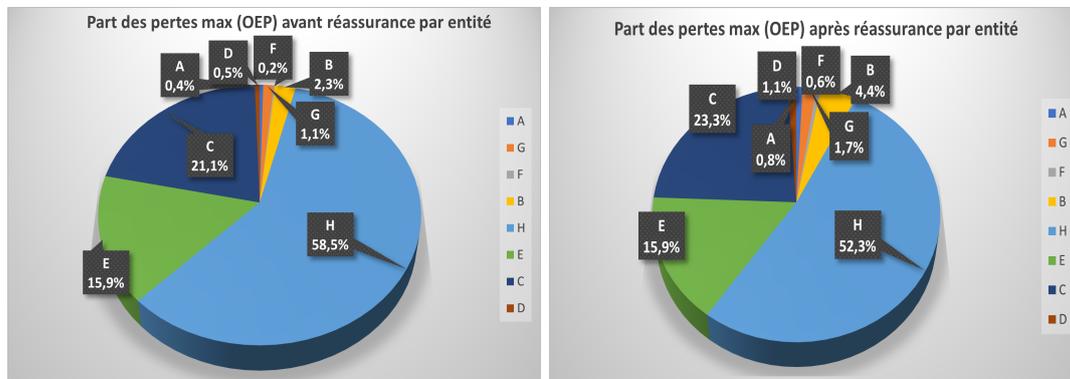


FIGURE 3.11 : Répartition de l'OEP brut (à gauche) et net (à droite) de réassurance

3.7 Impact de l'évolution de facteurs externes à la structure

Cette dernière partie analyse la sensibilité du modèle par rapport à des facteurs cette fois externes à la structure de réassurance.

3.7.1 Les facteurs externes considérés

Les différentes entités concernent plusieurs pays, c'est pourquoi on a un sujet sur le taux de change et l'évolution des expositions anticipées par chacune de ces entités.

Variation des expositions

Chaque entité émet des hypothèses sur ses niveaux d'expositions pour l'année à venir. Selon le risque, First, Third ou retail, ces hypothèses seront différentes. L'entité Juridica qui ne traite que du retail n'aura qu'une hypothèse d'exposition, sur cette branche tandis que Axa Suisse occupant des couvertures First, Third party et retail va proposer des hypothèses pour les 3 périmètres. Pour les hypothèses d'exposition, c'est le choc qui est directement renseigné, c'est-à-dire l'évolution prévue entre le prix actuellement sur le marché et le prix qu'il conviendrait de fixer. On a au total 20 paramètres d'exposition pour l'ensemble des entités.

Variation des taux de change

Toutes les valeurs manipulées dans le modèle sont en euro. Cette uniformisation permet de simplifier le modèle et de comparer les grandeurs directement entre elles. Au sein du groupe on retrouve des couvertures provenant de 8 pays formant 4 zones monétaires différentes : la zone euro (EUR), la Suisse (CHF), les Etats Unis (USD), La Grande Bretagne (GBP). Les taux de change entre ces différentes devises sont pris en compte pour connaître les valeurs en euro des données de pertes et les assiettes de primes de toutes les entités. Autrement dit ce sont grâce aux taux de change que nous passons toutes les données récoltées en euro pour les manipuler, l'évolution de ces taux impacte ainsi les données entrées

dans le modèle et indirectement les résultats en sortie du modèle. Concernant le taux de change, il est plus lisible de saisir directement la nouvelle valeur du taux. On pourrait entrer l'évolution comme il est fait pour l'exposition et recalculer le nouveau taux dans le modèle mais il est plus parlant d'avoir un nouveau taux USD de 1,21 contre 1,1 au préalable plutôt qu'une hausse du taux USD de 10%. On a 3 paramètres pour les taux de change *USD, CHF, GBP* correspondant aux nouveaux taux de change respectifs du dollar, du franc suisse et de la livre.

3.7.2 Réaction de la structure aux chocs appliqués

L'ensemble des "chocs" sont consignés dans un fichier excel .csv représenté sur l'exemple du tableau 3.15.

Paramètre	Choc appliqué
Expo Axa A 1st	0.1
Expo Axa B 1st	0
...	...
Expo Axa A 3rd	0.1
...	...
Expo Axa B Ret	0
...	...
USD	1,2
CHF	0,9
GBP	1

TABLE 3.15 : Format des paramètres d'exposition et de taux de change

On applique les nouveaux taux de change ainsi que les évolutions des expositions, et l'ensemble constitue les chocs retenus sur les paramètres externes. On observe comment se déforment certains indicateurs de performance en réaction à ces chocs. Les valeurs d'AEP et d'OEP bicentennaires sont observées avant et après chocs. On étudie également la variation de la marge cédée et du résultat en moyenne sur une année, les réductions de volatilité et de T_{Var} .

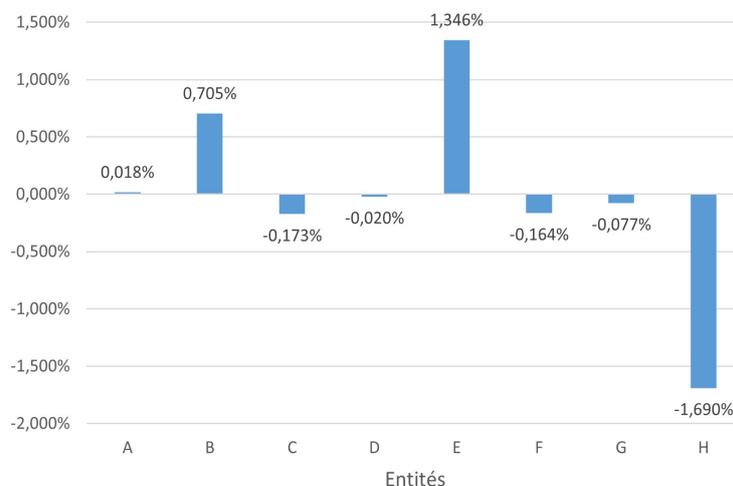


FIGURE 3.12 : Evolution des contributions (par entité) à l'OEP bicentenaire

La marge cédée moyenne diminue de 5,24 M(€) et le résultat moyen de 4,2 M(€). L'AEP bicentenaire se détériore en augmentant de 31,38 M(€) contrairement à l'OEP bicentenaire qui baisse de -27,92 M(€). Les indicateurs de réduction, de volatilité et de T_Var connaissent une diminution respectivement de 0,004% et 0,014%. On fait ensuite un gros plan sur l'OEP bicentenaire en regardant en détail la contribution de chaque ENTITY à cette perte, de nouveau avant et après réassurance, comme le montre la figure 3.12. Avec nos exemples de chocs appliqués, on peut voir comment chaque entité contribue à la nouvelle valeur post-chocs de l'OEP bicentenaire. L'entité H connaît la plus importante baisse de sa part dans l'OEP bicentenaire, 1,69%, tandis que les entités E et F voient leurs parts augmenter respectivement de 0,7% et 1,34%. La variation de la contribution n'est pas notable sur les autres entités.

Les sorties de cet outil permettent d'anticiper l'évolution des résultats en prévision de n'importe quel type de chocs sur les niveaux d'exposition et sur les taux de change.

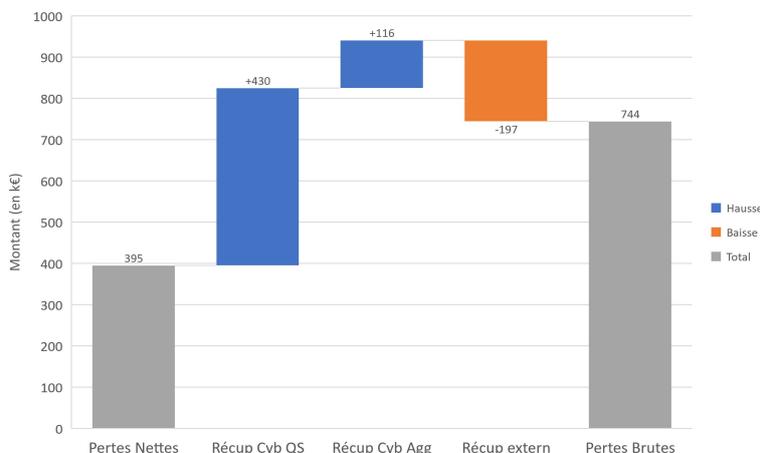


FIGURE 3.13 : Delta de pertes nettes, brutes et récupérations (en k€)

On peut voir sur le graphique 3.13 l'évolution des pertes nettes et de différentes récupérations avant et après application des chocs d'expositions et de taux de change. Le cumul de ces variations donne l'évolution des pertes brutes due aux chocs. Il s'agit ici des indicateurs de pertes et de récupérations moyens. On peut lire que les pertes brutes augmentent de 744000 € tandis que les pertes nettes n'augmentent que de 395000 €. Cet écart s'explique par une augmentation des récupérations sur les traités Group, assez importante sur le groupe QS (430000 €) et plus limitée sur le groupe Aggregate (11527 €). À l'inverse, c'est une baisse de 196000 € des récupérations moyennes qu'on retrouve sur l'ensemble des traités restants.

3.7.3 Analyse de sensibilité par criblage Morris

Les méthodes de criblage (screening) permettent d'évaluer de manière qualitative l'importance des paramètres d'un modèle. Elles sont communément utilisées au début de l'analyse de sensibilité pour identifier les variables d'entrée les moins significatives afin de les écarter et mener des analyses par des méthodes plus précises. La méthode de Morris aussi appelée OAT (one at a time) va étudier pour chaque variable d'entrée observée les distributions des variations du modèle en réponse aux variations de cette variable d'entrée*.

On considère un modèle à n paramètres en entrée dont on souhaite analyser l'importance. Notons

* Approche mathématique de la méthode décrite ici (WICAKSONO, 2016)

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur de paramètres d'entrée et $y(x)$ la réponse du modèle associée. Pour la variable x_i , $i \in [1, n]$, on retrouve l'effet élémentaire en faisant varier x_i de Δ et en calculant la variation sur la sortie du modèle qui en découle par la formule ci-après (WICAKSONO, 2016)

$$EE_i = \frac{y(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta}. \quad (3.3)$$

Dans son implémentation la méthode de Morris fait varier les paramètres sur une zone bien définie de l'espace. On fournit à l'algorithme des bornes minimum et maximum pour chacune des n variables pour délimiter cet espace. À la première étape, un vecteur de paramètres x est fixé aléatoirement, la seule condition étant d'appartenir à l'espace considéré. À chaque itération, on modifie une seule variable, d'où l'appellation One at Time, et on calcule son effet élémentaire avec la formule 3.3 où y est la fonction d'intérêt, ici on retient le calcul d'OEP bicentenaire. On a le premier plan d'expérience une fois que toutes les variables ont subi leur modification isolée. Il est possible de répéter l'action en appliquant de nouveau des variations variable par variable. Le nombre de fois où on répète le plan d'expérience est donné par un paramètre noté R . La matrice qui contient les vecteurs de paramètres pour chaque itération est appelée matrice *Design X*. Elle est de taille $(R \times (n + 1), n)$ pour les n variables en colonne et le nombre de variations pour chaque variable en lignes (R). Pour chaque plan d'expérience on a $n + 1$ au lieu de n car on a le vecteur de départ qui est évalué et ensuite les n variations à chaque ligne faisant varier chacune une unique variable. On obtient une distribution de R effets élémentaires pour chaque variable x_i , $EE_i^1 \dots EE_i^R$. Les paramètres de Morris sont ensuite calculés sur les distributions à l'aide de ces deux formules (WICAKSONO, 2016)

$$\mu_i = \mu(EE_i^r)_{r=1..R} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R EE_i^r,$$

et

$$\sigma_i = \sigma(EE_i^r) = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (EE_i^r - \mu_i)^2}.$$

Le paramètre d'espérance μ mesure une sensibilité des variables, plus μ_i est élevé, plus le modèle est sensible aux variations de la variable x_i . L'écart type des effets élémentaires apporte une information sur la linéarité ou non de la variable ou sur des effets d'interactions avec d'autres variables. Une valeur de σ élevée traduit des effets très différents selon les variations appliquées à la variable s'expliquant par :

1. Des variations qui dépendent fortement de la valeur actuelle de la variable ; on parle d'effet non linéaire. En passant de x_i à $x_i + \Delta$, la sortie de la fonction varie fortement car la variable n'est pas évaluée linéairement dans le modèle mais à la puissance ($x_i^2, x_i^3 \dots$) par exemple.
2. Des variations qui dépendent des valeurs des autres variables, ce sont les effets interactions. En passant de x_i à $x_i + \Delta$, la variation de la fonction est importante car la variation de la variable x_i impacte également les autres variables. Par effet domino, la variation finale sur les variables est plus importante.

On peut voir sur la figure 3.14 un exemple de grille pour un plan d'expérience avec 2 variables.

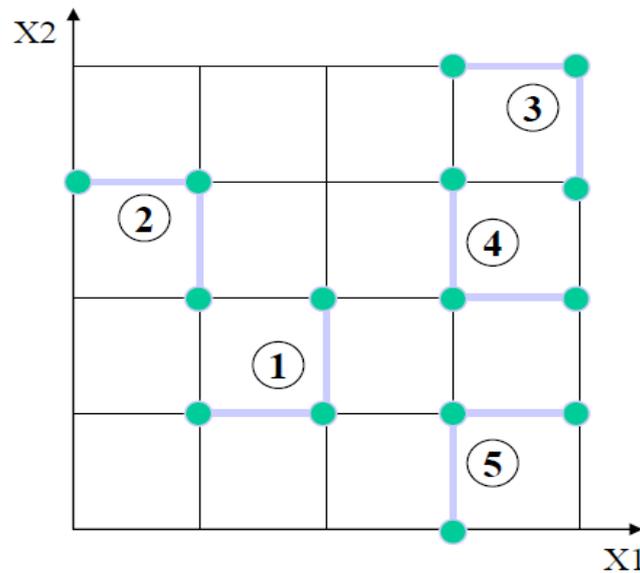


FIGURE 3.14 : 5 plans d'expériences sur 2 variables
(Looss, 2009)

On applique cette méthode de criblage uniquement sur 5 de nos paramètres externes pour le gain en temps. Ces paramètres sont retenus comme les plus susceptibles d'impacter le modèle car agissant sur les plus grosses entités. Il s'agit de 4 paramètres d'exposition, 2 sur des entités d'Axa assez importantes et les 2 autres sur les 2 portefeuilles d'Axa XL. Pour ces 4 hypothèses d'exposition c'est sur le risque First party que les chocs sont étudiés. Le dernier paramètre est le taux de change du dollar vers l'euro qui agit sur les portefeuilles d'Axa XL. Pour les paramètres d'exposition, la plage explorée est définie grâce aux variations de pertes observées historiquement. On a utilisé pour l'étude, l'écart entre les expositions (en pertes bicentenaires) prévues sur l'année 2022 et celles effectivement observées. Pour l'intervalle à retenir sur le taux de change on s'appuie sur l'évolution du taux USD sur les dernières années*. La fonction *morris* du package *sensibility* de *R* permet de calculer ces paramètres. Elle se paramètre avec les éléments du tableau 3.16.

Paramètres	Descriptions	Valeurs choisies
mor.fun	La fonction, le modèle étudiée	morris_oep
r	Le nombre de répétitions du plan d'expérience	10
binf	Bornes inférieures variables en entrée	(min1... min5)
bsup	Bornes supérieures variables en entrée	(max1... max5)
levels	Nombre de niveaux autorisés sur les variables	5
grid.jump	Saut (en nb de "levels") sur une variation élémentaire	3
scale	Normalisation ou non du plan d'expérience	TRUE
lower.bounds	Bornes inférieures	(min1... min9)
upper.bounds	Bornes supérieures	(max1... max9)
constraints	Fonction de contrainte	const_fun

TABLE 3.16 : Paramètres de l'algorithme Morris

On peut lire sur le graphique 3.15 le positionnement de chaque variable dans le plan (μ^*, σ) . Les

*Voir le graphique d'évolution du taux USD en annexe A.5

4 expositions des entités étudiées ont des impacts assez différents sur le modèle comme l'indique la disparité des points sur le graphique. La variation de l'OEP est la plus sensible à une évolution de l'exposition de Axa C, puis de la branche A de XL suivie de celle de Axa E, et finalement elle est moins impactée par l'exposition sur la branche B de XL. On rappelle que l'exposition est le facteur par lequel sont multipliées les pertes brutes ainsi que les primes.

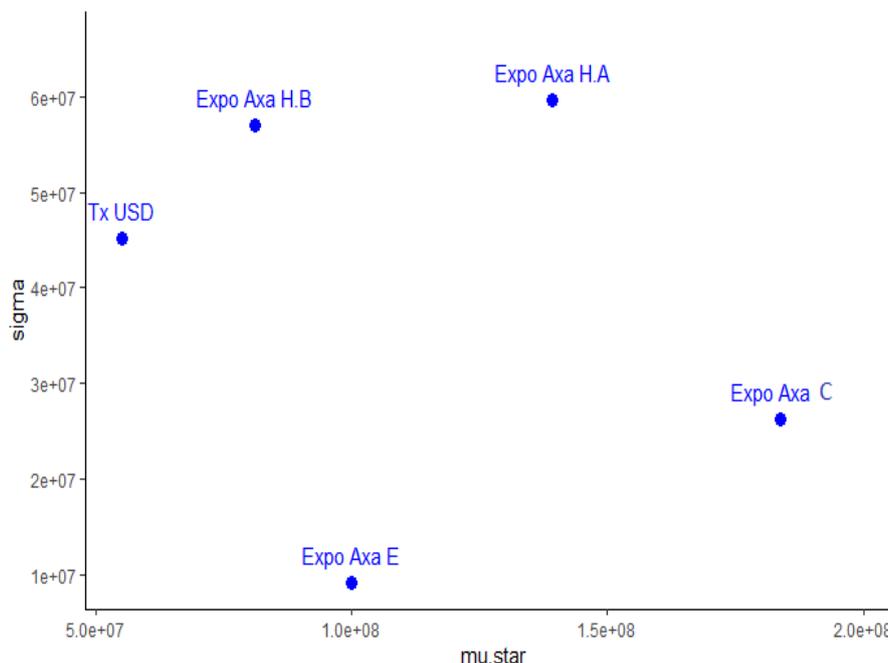


FIGURE 3.15 : Résultats Morris

Le fait d'avoir une grande baisse/hausse des primes et encore plus des pertes va emmener une importante modification de l'OEP en sortie, bien que ce ne soit pas le seul critère déterminant. Il faut également regarder le niveau de réassurance de l'entité car une entité mieux réassurée dans la structure sera moins impactée par une hausse des pertes qu'une entité moins bien réassurée.

Pour appréhender la "qualité" de la réassurance chez une entité, on utilise le ratio $\frac{Pertes_Nettes}{Pertes_brutes}$. Plus ce ratio est faible, plus les pertes nettes sont faibles face aux pertes initiales et meilleur est l'effet de la réassurance. On observe ce ratio chez les différentes entités sur la figure 3.16.

Axa H est la mieux réassurée avec un ratio de 27%, à l'inverse de Axa C qui est la moins bien réassurée des 3 entités. Cela concorde avec les niveaux de sensibilité renvoyés par le criblage de Morris. L'effet des changements d'exposition seront moindres sur les entités les mieux réassurées comme Axa H.

Les expositions sur les deux portefeuilles de Axa H et le taux de change du dollar US ont des valeurs de sigma élevées dans le plan de Morris. On peut penser que ces trois facteurs sont très liés car les portefeuilles A et B sont issus de Axa XL qui convertit ces données du dollar vers l'euro.

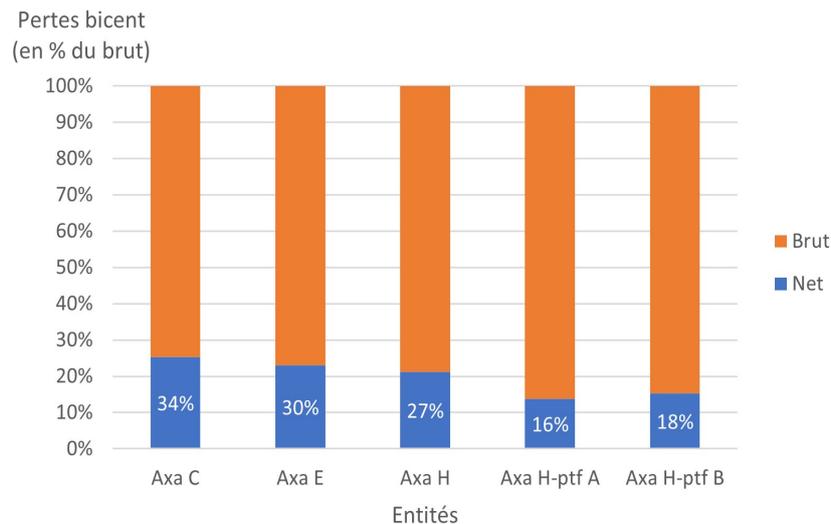


FIGURE 3.16 : Ratio des pertes nettes/pertes brutes

3.8 Analyse qualitative et confrontation des résultats d'optimisation

On a observé dans les différentes sections de ce chapitre plusieurs méthodes permettant d'optimiser certains paramètres de la structure. On a deux types d'indicateurs : les indicateurs de pertes (AEP, OEP, réduction de volatilité) ainsi que les indicateurs de résultat annuel (résultat moyen et marge cédée moyenne). Les meilleures options doivent trouver un juste compromis entre un bon résultat moyen et une perte nette la plus faible possible.

On note dans un premier temps que toutes les méthodes, algorithmiques comme déterministes favorisent la minimisation des pertes plutôt que celle de la marge cédée. Cela se traduit par des paramètres optimaux qui encouragent la cession des pertes en réassurance par les entités observées. Les deux algorithmes tendent notamment à augmenter les taux de couverture des entités GIs bien que ces dernières soient relativement moins bien réassurées (comme le montre la figure 3.16). L'algorithme génétique ne prend pas suffisamment en compte la marge cédée dans l'optimisation ; on observe une décroissance moins importante pour la fonction objectif de la marge cédée par rapport aux autres indicateurs (comme le montre la figure 3.4).

Pour rappel, la spécificité du portefeuille Axa XL vient du fait que la réassurance est répartie pour chacun de ses portefeuilles entre le traité local le traité groupe QS pour parvenir à un taux sur l'ensemble constant. Augmenter le taux du traité groupe QS réduit alors le taux de cession du traité local et inversement.

L'ensemble des méthodes d'optimisation utilisées tranchent en faveur de réassurer le portefeuille B plutôt par le traité groupe QS et le portefeuille A plutôt par le traité local. Selon le portefeuille, on privilégie ou pas, une cession à travers les traités locaux de Axa XL, traités locaux plutôt bien réassurés (cf figure 3.16).

Par l'approche déterministe de comparaison des 7 options, on rappelle que l'option 2 est la plus favorable. Il s'agit de l'option qui transfère une part de la cession du portefeuille B vers le traité groupe. On en déduit que pour le triplet d'indicateurs retenus ici (Marge Cédée moyenne, Pertes bicentennaires maximales et Réduction de volatilité) le transfert de cession, du traité local vers le traité groupe QS est plus intéressant sur le portefeuille B d'Axa XL que sur son portefeuille A. Cela peut venir du pourcentage transféré sur le portefeuille B (15%) qui est plus important que sur le portefeuille

A (10%)*. De plus le portefeuille B est nettement plus gros que le portefeuille A (les primes sont $2,5 \times$ plus élevées pour le portefeuille).

On peut toutefois se demander pourquoi l'option 3 (qui fait le transfert local-groupe à la fois sur les portefeuilles A et B) n'est pas encore plus intéressante que toutes les autres. Cela peut s'expliquer par le fait que les taux de commission sont plus intéressants sur les traités locaux que sur le traité groupe QS. Le taux de commission le plus intéressant est d'ailleurs sur le portefeuille A.

$$Tx\ commis\ A > Tx\ commis\ B > Tx\ commis\ Group_{QS}$$

Plus le taux de commission d'un traité est grand, plus la cédante touche de commissions de la part des réassureurs, donc plus le traité est rentable pour la cédante.

L'option 2b est celle qui fait le compromis entre

- Transférer suffisamment de cession vers le traité groupe QS. On rappelle qu'augmenter la cession au groupe QS ne change pas la cession globale d'Axa XL mais permet de donner plus de capacité mutualisée au traité groupe QS et donc de mieux réassurer les entités GIs.
- Ne pas trop céder vers le traité groupe, en particulier des parts du portefeuille A, car les commissions sont les plus intéressantes sur le traité du portefeuille A et moins intéressantes sur le traité groupe QS.

Les résultats des algorithmes vont bien dans ce sens, car ils minimisent le transfert de cession vers le traité groupe QS sur le portefeuille A de Axa XL et le maximisent sur le portefeuille B de Axa XL. On relève que l'algorithme génétique ne converge pas pour les paramètres du traité groupe Aggregate tandis que l'algorithme PSO tend à minimiser sa limite et maximiser sa rétention. Sur un traité Aggregate, les récupérations moyennes baissent lorsque la rétention augmente ce qui induit donc une baisse de la prime cédée en réassurance. Face à une diminution à la fois des primes et des récupérations, la marge cédée baisse car en moyenne les primes sont plus importantes que les récupérations. Toutefois, pour un certain seuil important de pertes en entrée de l'Aggregate, augmenter la rétention n'aura plus d'impact sur les récupérations. En effet si les pertes en entrée sont très supérieures à la limite autorisée, qu'on augmente ou non la rétention le réassureur couvrira le montant de cette limite. Par exemple un traité 300M€ SL 250M€ et un traité 300M€ SL 400M€ couvriront respectivement 250M€ et 100M face à des pertes de 500M. Cependant pour une perte de 800M€, les deux traités couvriront le maximum contractuel à savoir les 300M€ bien que le second traité ait une rétention plus élevée. Sur les pertes importantes en entrée de l'Aggregate, telles celles des scénarios bicentennaires, à limite fixée, la modification de la rétention sera sans effet. On a donc des comportements dépendants du niveau de pertes en entrée considérées. L'algorithme génétique optimise selon l'OEP bicentenaire et la marge cédée moyenne entre autres, il peut être indécis quant à la question de minimiser ou maximiser la rétention de l'Aggregate car il met vraisemblablement l'accent sur le critère de l'OEP bicentenaire. L'algorithme PSO qui on le rappelle est calibré avec un poids plus important sur la prise en compte de la marge cédée va lui plus naturellement tendre à minimiser la marge cédée et pour ce faire augmenter la rétention de l'Aggregate et même réduire la limite ici. C'est donc à travers le traité groupe Aggregate que la minimisation de la marge cédée est réalisée, on a une limite minimisée et une rétention maximisée. Des analyses permettent de conclure que la marge cédée totale dépend quasi exclusivement de la marge cédée du traité groupe Aggregate. En effet la marge cédée du groupe QS se compense fortement avec celles des portefeuilles A et B de Axa XL qui ont des assiettes de primes (ainsi que des pertes cédées et des récupérations) nettement plus importantes que les GIs. Les impacts sur le groupe QS sont donc très largement portés par ces deux portefeuilles de Axa XL. Cette compensation de marge cédée s'explique par le fait qu'augmenter la cession de Axa XL sur le groupe QS réduit d'autant la cession vers le marché externe (pour rappel c'est un transfert qui s'opère).

*Les valeurs 15% et 10% sont arbitraires mais elles reflètent les vraies valeurs pour lesquelles $TxB > TxA$

La limite (capacité) du traité groupe QS est maximisée tant par les deux algorithmes que par la comparaison des options. Cela est très utile pour augmenter la couverture de réassurance des entités GIs, mais de manière mesurée. A partir d'un certain niveau, les pertes en entrée du traité deviennent inférieures à la capacité si elle est trop élevée. Il y a alors un résidu de capacité qui n'est pas utilisée et qui devient très difficile à placer sur le marché avec de potentielles commissions de la part des réassureurs à la baisse. Les algorithmes sont implémentés sans intégrer le coût d'augmenter la limite par le LR Cap, ils n'optimisent donc pas en terme de facilité ou non à placer le traité sur le marché. Une façon de prendre en compte ce facteur peut être d'intégrer l'indicateur sur la capacité du traité groupe QS dans les objectifs des fonctions d'optimisation*.

* * *

Différents algorithmes d'optimisation proposés permettent de voir comment faire évoluer les paramètres pour aller vers une structure optimale. Grâce à des critères de classement établis on compare aussi différentes versions de la structure pour dégager l'option optimale selon de nombreux indicateurs. L'ensemble de ces éléments permet de confronter les résultats obtenus avec les différentes méthodes. La dernière partie explique comment les facteurs de taux de change et d'exposition modifient l'effet de la réassurance.

*Cet indicateur est intégré dans la méthode par "Scoring" mais avec un poids plus faible que les autres, on peut également optimiser la facilité de placement sur cette deuxième méthode en augmentant ce poids

Conclusion

Les différents traités qui composent la structure de réassurance Cyber doivent être paramétrés avec attention pour avoir une rentabilité optimale à coût minimal.

L'étude présentée ici propose des indicateurs pertinents pour mesurer l'efficacité de la structure : les pertes bicentennaires, moyennes et vingtenaires, le résultat d'assurance en lien direct avec la marge cédée, le SCR, les réductions de volatilité et de T-var ainsi que la capacité du traité quote-part au niveau groupe. Selon l'indicateur objectif, la structure est amenée à évoluer de différentes façons. Avant de faire évoluer ses paramètres, il est important d'analyser la structure dans son état courant ainsi que les données de primes et de pertes considérées. En effet une variation de paramètres n'a pas toujours l'effet escompté et peut s'avérer coûteuse sans rapporter de gain de réassurance si on ne prend pas en compte les effets des limites et des rétentions des traités quote-part et stop loss.

On a mis en place un scoring permettant de classer les options sur la base de plusieurs indicateurs avec des poids différents selon l'importance qui leur est accordée. Ce classement appliqué sur 7 options de structures qui désignent la structure sous sa forme actuelle et 6 évolutions possibles, permet d'identifier les options les plus intéressantes. Il s'agit des structures (notées option 2 dans le mémoire) sur lesquelles on transfère une partie du taux de cession du traité local du portefeuille B de Axa XL vers le taux de cession du traité Groupe quote-part associé à ce même portefeuille.

Dans un second temps, sont utilisés l'algorithme génétique et l'algorithme par essaim particulaire pour optimiser 9 paramètres clés de la structure de réassurance. Ces algorithmes se posent en alternative aux algorithmes classiques d'optimisation (Newton, Gradient Descent) pour lesquels le modèle est trop complexe ici.

L'optimisation porte sur les critères d'OEP bicentenaire, de marge cédée ainsi que de réduction de volatilité comme objectifs ; à eux trois ces indicateurs dépeignent bien la qualité de la réassurance sur une structure.

Les résultats des différentes approches d'optimisation convergent vers une réduction des pertes à travers des cessions maximales sur les traités QS et la réduction de la marge cédée grâce à une cession limitée sur le traité Aggregate.

Dans une dernière partie, on étudie le comportement du modèle face à des chocs sur les niveaux d'expositions des entités ou sur les taux de change. On identifie auxquels de ces paramètres externes, d'exposition et de taux de change, le modèle est le plus sensible. On remarque que la taille de l'entité ou du portefeuille en termes de pertes et de primes cédées est un élément important pour la sensibilité mais pas le plus déterminant. La qualité de réassurance mesurée en termes de ratio Net/Brut d'une entité va aussi indiquer à quel point le modèle sera sensible à l'action d'un facteur externe sur cette entité. Les entités les mieux réassurées seront plus robustes aux chocs que les entités moins bien couvertes par la structure.

Limites et perspectives

- Des études récentes explorent des combinaisons des deux algorithmes utilisés ici pour remédier

au risque de convergence prématurée et également accélérer l'optimisation (CHIADAMRONG et TANGCHAIK, 2021).

On a deux manières de combiner ces algorithmes :

- le HPSOGA (Hybrid Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithm) qui opère l'algorithme PSO classique en appliquant les opérateurs génétiques aux particules de l'essaim à chaque itération.
 - Dans le HGAPSO (Hybrid Genetic Algorithm and Particle Swarm Optimization), c'est l'algorithme génétique qui est l'algorithme de base auquel on introduit une étape de déplacement des individus de la population par la mise à jour du vecteur vitesse de la méthode PSO à chaque itération.
- La méthode de criblage réalisée ici est généralement une première étape de l'analyse de sensibilités. Pour aller plus loin, il serait intéressant de calculer les indices de Sobol ou de Shapley des différents paramètres. Avec les bibliothèques R disponibles, ces valeurs sont aisément calculables sur les modèles classiques de Machine Learning disposant de la fonction *predict* dans R . Cependant pour notre modèle de réassurance particulier, il faudrait calculer ces indices de sensibilité en lançant le modèle plusieurs fois sur les différents paramètres. Une alternative est de transformer notre fonction du modèle en un objet sur R disposant d'une fonction *predict*.

Bibliographie

- ABADIE, A. (2019a). Cyber réassurance, mode d'emploi. L'Argus de l'assurance. URL : <https://www.argusdelassurance.com/les-assureurs/cyber-reassurance-mode-d-emploi.151870>.
- ABADIE, A. (2019b). Réassurance : le marché encore attentiste sur le cyber. L'Argus de l'assurance. URL : <https://www.argusdelassurance.com/les-assureurs/reassurance-le-marche-encore-attentiste-sur-le-cyber.151860>.
- ARNAUD, S. (2019). Optimisation de réassurance par algorithme génétique. Mémoire d'actuariat. Paris : Institut du Risk Management.
- AUBRY, F. (2019). Exploitation actuarielle des modèles catastrophes naturelles pour éclairer et piloter dynamiquement la souscription de risques. Mémoire d'actuariat. Paris : ENSAE ParisTech.
- AXA (2022a). Axa Future Risks Report 2022. Rapport technique Axa.
- AXA (2022b). Cyber Modelling Overview. Présentation Axa.
- AXA (2022c). Profil et chiffres clés. Présentation Axa. URL : <https://www.axa.com/fr/page/chiffres-cles#tab=donnees-financieres>.
- BIENER, C., ELING, M. et WIRFS, J. H. (2015). Insurability of Cyber Risk: An Empirical Analysis. *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice* 40.1.
- CHIADAMRONG, N. et TANGCHAIKUK, C. (2021). Hybrid Simulation-Based Optimization for Production Planning of a Dedicated Remanufacturing System. *International Journal of Knowledge and Systems Science* 12.3.
- COLUMBUS, L. (2020). 2020 Roundup Of Cybersecurity Forecasts And Market Estimates. Rapp. tech. URL : <https://www.forbes.com/sites/louiscolumbus/2020/04/05/2020-roundup-of-cybersecurity-forecasts-and-market-estimates/?sh=2ad76202381d>.
- GRETEIN, J. (2020). Top 5 des cyberattaques les plus marquantes. Mail in Black. URL : <https://www.mailinblack.com/ressources/blog/cybersecurite-top-5-des-cyberattaques-les-plus-marquantes/>.
- Groupe DELTA, L. (2021). Cybersécurité : 10 statistiques choc à retenir en 2021. Article en ligne. Groupe Delta. URL : <https://www.groupe-delta.com/communication/cybersecurite-10-statistiques-choc-a-retenir-en-2021/>.
- HOUAM, Y. (2013). Commande Multi-Objectifs en Utilisant les Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) et les Algorithmes Génétiques. Thèse. Université de Biskra. URL : <http://thesis.univ-biskra.dz/2124/4/chapitre02.pdf>.
- INSTITUTE, P. (2018). 2018 Cost of a Data Breach Study. Rapp. tech. Ponemon Institute. URL : https://www.intlxolutions.com/hubfs/2018_Global_Cost_of_a_Data_Breach_Report.pdf.
- LATTO, N. (2020). Qu'est-ce que WannaCry ? Avast. URL : <https://www.avast.com/fr-fr/c-wannacry>.
- LOOSS, B. (2009). Analyses d'incertitudes et de sensibilité de modèles complexes - Applications dans des problèmes d'ingénierie. Support rencontres "Météo-Maths". Direction de l'Énergie Nucléaire. URL : https://www.math.univ-toulouse.fr/~baehr/meteo_SMAI/Pres/Pres_looss.pdf.
- LOUBIERE, P. (2016). Amélioration des métaheuristiques d'optimisation à l'aide de l'analyse de sensibilité. Theses. Université Paris-Est. URL : <https://theses.hal.science/tel-01565901>.
- MARTINEZ, A. (2019). Modélisation assurantielle du risque cyber. Mémoire d'actuariat. Paris : Conservatoire National des Arts et Métiers.

- R CORE TEAM (2022). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL : <https://www.R-project.org/>.
- SHACKELFORD, J. (2012). Should Your Firm Invest in Cyber Risk Insurance ? Business Horizons. URL : https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1972307.
- SITE DU GOUVERNEMENT (2019). Risques Cyber. URL : <https://www.gouvernement.fr/risques/risques-cyber>.
- SOLVABILITÉ-II (2009). Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil du 25 novembre 2009.
- SÉNAT (2021). Délégation sénatoriale aux entreprises: La France et l'Europe doivent rapidement développer et encadrer l'assurance en cas de cyber-attaque. URL : <https://www.senat.fr/presse/cp20211125d.html>.
- WICAKSONO, D. (2016). Morris Screening Method. GSA - module. URL : https://gsa-module.readthedocs.io/en/stable/implementation/morris_screening_method.html?url_with_underscore.
- YOUSSEF, W. (2011). Optimisation de l'allocation d'actifs - Un algorithme numérique innovant adapté à la problématique. Mémoire d'actuariat. Paris : Euria.

Annexes

A.1 Les garanties cyber, de la plus courante à la moins courante

Cyber Coverage	% of Products Offering this Cover (Sample of 26)
Breach of privacy event	92%
Data and software loss	81%
Incident response costs	81%
Cyber extortion	73%
Business interruption	69%
Multi-media liabilities (defamation and disparagement)	65%
Regulatory and defense coverage	62%
Reputational damage	46%
Network service failure liabilities	42%
Contingent Business Interruption	33%
Liability - Technology Errors & Omissions	27%
Liability - Professional Services Errors & Omissions	23%
Financial theft & fraud	23%
Intellectual property (IP) theft	23%
Physical asset damage	19%
Death and bodily injury	15%
Cyber terrorism	12%
Liability - Directors & Officers	13%
Liability - Product and Operations	8%
Environmental damage	4%

TABLE 17 : Couvertures cyber, de la plus à la moins couramment incluse dans les produits Cyber sur le marché

A.2 Prépondérance des Etats Unis sur le marché de la Cyber assurance

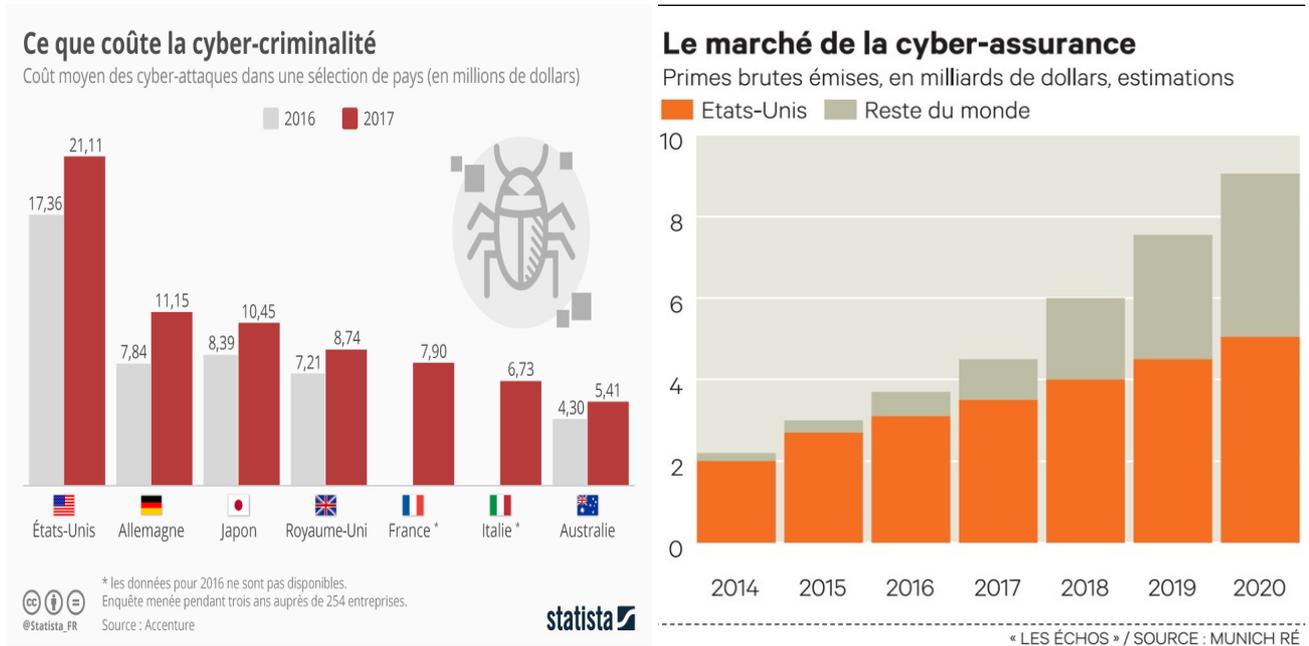


FIGURE 17 : Evolution du coût de la cyber-criminalité (à gauche) et des primes émises en Cyber (à droite)

A.3 Méthodes d'apprentissage pour estimer le RoL du groupe Aggregate

A.3.1 Le modèle linéaire généralisé

Le modèle le plus simple et le plus communément utilisé pour prédire en statistique est le modèle linéaire. Comme son nom l'indique, il s'appuie sur l'hypothèse suivante : la variable observée est une combinaison linéaire des variables explicatives qui s'écrit

$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k + \alpha_0 = \alpha X + \alpha_0.$$

On a deux variables explicatives qui donnent ici

$$Y = \alpha_1 ER + \alpha_2 P(\text{attach}) + \alpha_0.$$

C'est un cas particulier du modèle linéaire généralisé qui se définit selon les conditions suivantes. La variable Y qu'on souhaite prédire, on parle aussi de "variable à expliquer" doit suivre une loi appartenant à la famille des lois exponentielles. Sa densité doit s'écrire

$$f(y) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right),$$

avec θ et ϕ , qui sont des paramètres tandis que a , b et c sont des fonctions.

L'appartenance à cette famille particulière n'est pas une condition très limitante car on y retrouve de

nombreuses lois usuelles (Binomiale, Poisson, Normale, Gamma, Inverse Gaussienne).

Le lien est en réalité établi entre l'espérance de Y et la combinaison linéaire des variables explicatives αX par $g(E[Y]) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$ et g appelée fonction de lien est également à définir. Les différentes fonctions de lien les plus courantes sont :

- $g(x) = b^{-1}(x)$ on parle de fonction de lien canonique. C'est ce cas particulier qui produit le modèle linéaire simple,
- $g(x) = \ln(x)$ donne un modèle multiplicatif,
- $g(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$ c'est la fonction logit qui donne le modèle de régression logistique.

On retiendra pour l'estimation du RoL le modèle linéaire simple, qui prend par défaut la loi normale comme loi de Y .

A.3.2 La méthode des K plus proches voisins (KNN)

Le principe de cette méthode est d'identifier les "individus" les plus proches de l'individu dont on cherche à estimer le RoL et de faire la moyenne de leurs RoL.

Cette notion de proximité se mesure en choisissant une métrique de distance, la plus classique étant la distance euclidienne

$$D_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

soit dans notre cas particulier

$$D_{i,j} = \sqrt{(P_attach_i - P_attach_j)^2 + (ER_i - ER_j)^2}.$$

On retient les K individus qui ont cette distance la plus petite de l'individu d'intérêt, celui dont on cherche à estimer le RoL. $RoL_{KNN} = \frac{1}{K} \sum_{i \in KNN} RoL_i$

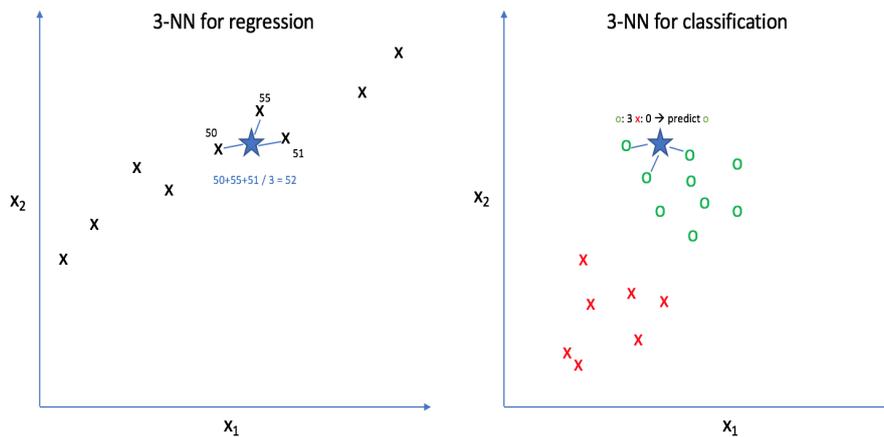


FIGURE 18 : Illustration de régression et classification par KNN

A.3.3 Arbres de régression

Les arbres de décision constituent une méthode d'apprentissage statistique qui s'appuie sur la segmentation successive de l'espace des données et associe une prédiction à chaque sous-ensemble de

cette partition. Selon la nature de la variable Y dont on cherche à prédire la valeur on parle d'arbres de classification ou de régression. Si Y est une variable discrète prenant m modalités $C_k; k \in 1..m$ il s'agit d'un arbre de classification. L'arbre est dit de régression quand Y est une variable quantitative réelle, $Y \in \mathbb{R}$. Chaque noeud de l'arbre correspond à une frontière qui divise les données en ce noeud en deux groupes selon un critère défini sur une des variables (la variable retenue pour le critère de découpage est appelée "split variable"). Pour une variable numérique X_i , ce critère sera de la forme $X_i > \text{seuil}$. Quand la variable permettant cette segmentation est discrète, on a $X_i \in M$ avec M un sous ensemble des modalités de X_i . D'un noeud père qui donne deux noeuds fils sur lesquels on répète le procédé, on construit récursivement les branches jusqu'à l'obtention de l'arbre complet.

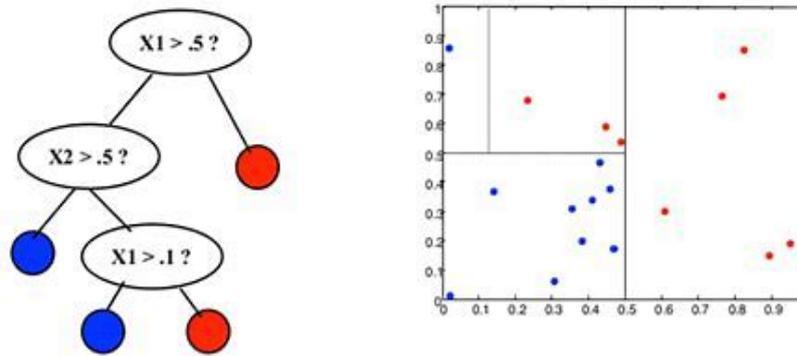


FIGURE 19 : Illustration du fonctionnement d'un arbre de régression

Critère d'arrêt

Un noeud est appelé noeud terminal (ou feuille) quand on n'effectue plus de division.

- Quand il ne reste qu'un individu ou qu'un ensemble d'individus homogène, c'est-à-dire ayant la même valeur de Y . La valeur au noeud sera cette valeur de Y .
- Quand il reste un nombre d'individus jugé suffisamment petit, le seuil est généralement fixé entre 2 et 5 individus. La valeur au noeud sera la moyenne des Y_i s'il s'agit d'une variable quantitative, ou la modalité de Y donnée par un vote majoritaire si la variable est qualitative.

La construction de l'arbre utilise plusieurs critères. Le choix de la division à retenir à chaque noeud n se fait en vue de créer deux noeuds fils n_D et n_G les plus homogènes possibles. Pour cela, on crée une fonction d'hétérogénéité sur ces noeuds fils qu'on cherche à minimiser. En notant D_n l'hétérogénéité calculée au noeud n , on cherche à avoir

$$\min_{\text{divisions de } X^j, j=1..p} D_{n_D} + D_{n_G}.$$

Hétérogénéité

Pour un arbre de régression, l'hétérogénéité est la variance des individus au noeud

$$D_n = \frac{1}{|n|} \sum_{i \in n} (y_i - \hat{y}_n).$$

En classification on a différents critères :

- L'hétérogénéité par entropie où $D_n = -2 \sum_{k=1}^m |n| p_n^k \log(p_n^k)$,
- Le critère de Gini où $D_n = \sum_{k=1}^m p_n^k (1 - p_n^k)$ avec $p_n^k = \frac{\sum_{i \in n} \mathbb{1}_{Y_i \in C_k}}{|n|}$ qui est la proportion d'individus portant la modalité k pour la valeur de Y parmi l'ensemble des individus du noeud n observé.

Pour un nouvel individu I dont on cherche à prédire la valeur de Y , on parcourt l'arbre en partant de la racine et jusqu'à l'identification de la feuille correspondant aux données en entrée. La prédiction \hat{Y} sera la valeur de Y de cette feuille.

Elagage

L'arbre binaire obtenu est dit "complet", il faut procéder à son élagage pour trouver un sous-arbre optimal. Ce procédé consiste à conserver un sous-arbre moins complexe en pénalisant le nombre de feuilles de l'arbre considéré. Notons $QA(A) = \sum_{feuille=1}^n D_{feuille}$ qui est la qualité d'ajustement de l'arbre A à n feuilles, soit la somme des hétérogénéités de toutes ses feuilles.

En pénalisant cette qualité d'ajustement par le nombre de feuilles, on a la complexité de l'arbre A notée $C(A) = QA(A) + \gamma \times n$ qu'on souhaite minimiser.

On part d'une valeur nulle de γ qu'on augmente progressivement. Augmenter γ va nécessiter de diminuer le nombre de feuilles n , il va donc y avoir un regroupement de 2 feuilles sur l'arbre initial pour considérer leur noeud père comme noeud terminal. On veut aussi réduire la qualité d'ajustement $QA(A_n)$ donc ce regroupement sera fait en prenant les feuilles qui amélioreraient le moins cette qualité d'ajustement avant le regroupement.

Pour un ensemble de valeurs de pénalisation (γ) croissantes retenues on obtient une succession de sous arbres de plus en plus élagués.

Pour trouver l'arbre optimal, on peut ensuite selon la quantité de données disponibles procéder par test sur un échantillon de validation ou par validation croisée.

A.4 Pseudo Code des algorithmes d'optimisation

On retrouve dans cet article (CHIADAMRONG et TANGCHAIKUK, 2021) les pseudo-codes des algorithmes génétiques et par essaim particulaire. Se référer également à cette source pour les pseudo-codes des algorithmes HGAPSO et HPSOGA mentionnés comme piste d'ouverture en conclusion.

1	Step 1. L'algorithme génétique commence par définir ses paramètres, qui sont la taille de la population P , le pourcentage de croisement p_c et le pourcentage de mutation p_m ;
2	Step 2. Les chromosomes initiaux de la population sont générés aléatoirement;
3	Step 3. La valeur de la fonction objectif est calculée pour chaque chromosome de la population;
4	Step 4. Les étapes suivantes sont répétées jusqu'à ce que la condition de fin soit remplie;
5	Step 4.1. À chaque itération t , sélectionner une nouvelle population P^t à partir de P^{t-1} ;
6	Step 4.2. Les paires de chromosomes sont sélectionnées par le pourcentage de croisement p_c . Les paires sélectionnées sont traitées par le processus de croisement;
7	Step 4.3. Un chromosome est sélectionné par le pourcentage de mutation p_m . Le chromosome sélectionné est traité par le processus de mutation;
8	Step 4.4. Tous les chromosomes de P^t qu'ils soient des individus de la génération d'avant non altérés ou qu'ils soient des chromosomes mutés, sont évalués pour la fonction objectif $f(x_i)$;
9	Step 4.5. Le processus est répété jusqu'à ce que la condition d'arrêt soit satisfaite;
10	Step 5. La meilleure solution est obtenue;

Algorithme 1 : Pseudo Code : Algorithme Génétique

1	Step 1. L'algorithme PSO commence par définir ses paramètres, qui sont la taille de la population P , le poids w et les constantes d'accélération c_1 , c_2 ;
2	Step 2. La position et la vitesse initiales de chaque particule de la population sont générées par les équations (1) et (2);
3	Step 3. La valeur de la fonction objectif est calculée pour chaque particule de la population ;
4	Step 4. La meilleure solution locale de chaque particule ($pbest_i$) et la meilleure solution globale ($gbest$) sont définies;
5	Step 5. Les étapes suivantes sont répétées jusqu'à ce que la condition d'arrêt soit remplie;
6	Step 5.1. À chaque itération t , la position et la vitesse de chaque particule sont mises à jour à l'aide des équations (3) et (4), respectivement;
7	Step 5.2. La fonction objectif $f(x_i)$ est évaluée pour chaque particule;
8	Step 5.3. $pbest_i$ et $gbest$ sont mis à jour ;
9	Step 5.4. Le processus est répété jusqu'à ce que la condition d'arrêt soit satisfaite;
10	Step 6. La meilleure solution est obtenue.

Algorithme 2 : Pseudo Code : Particle Swarm Optimization

Ci-dessous les équations auxquelles il est fait référence dans l'algorithme PSO

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}), \quad (1)$$

$$v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD}), \quad (2)$$

$$v_i^{(t+1)} = w \times v_i^{(t)} + c_1 r_1 \times (pbest_i^{(t)} - x_i^{(t)}) + c_2 r_2 \times (gbest - x_i^{(t)}), \quad (3)$$

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + v_i^{(t+1)}. \quad (4)$$

A.5 Evolution du taux de change EUR-USD depuis Octobre 2017

On affiche le graphique de l'évolution du taux de change EUR-USD sur les 5 dernières années grâce à *Xe* (<https://www.xe.com/fr/currencycharts/?from=USD&to=EUR>). Comme on peut lire sur la

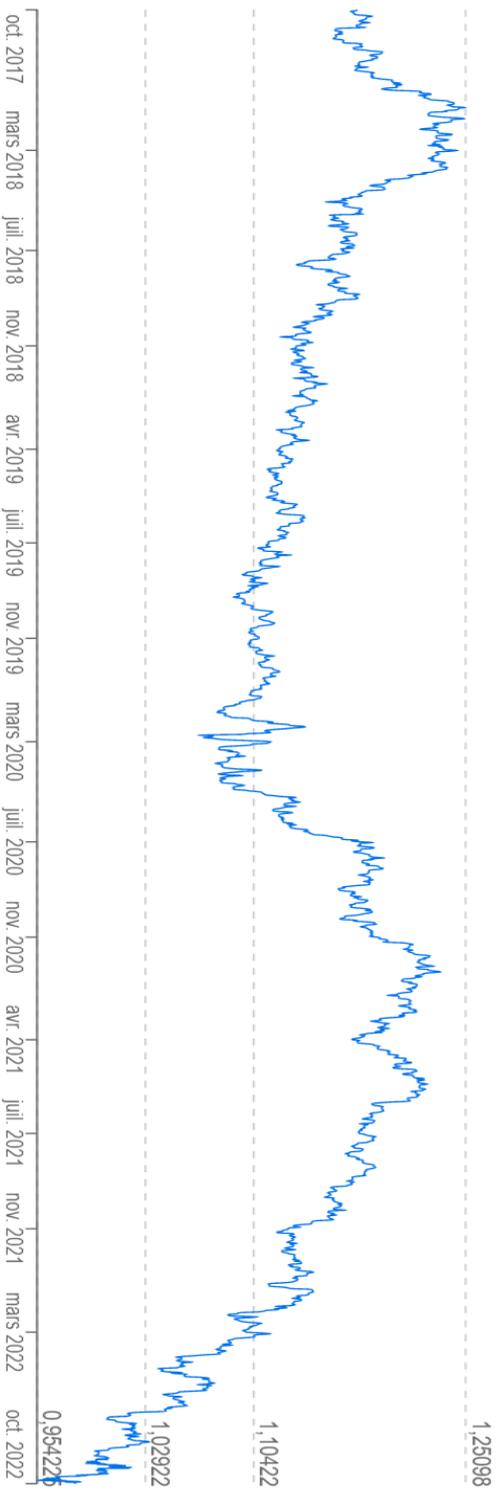
courbe, l'intervalle pris par ce taux est environ $[0,95 - 1,25]$, avec une forte tendance à la baisse depuis presque un an et demi. C'est pourquoi on choisit dans notre criblage un intervalle un peu plus bas de $[0,9 - 1,2]$ pour capturer l'évolution des dernières années tout en anticipant un éventuel maintien de cette tendance à la baisse dans les mois à venir.

Graphique : EUR vers USD

Euro vers Dollar des États-Unis

● 1 EUR = 0,980369 USD 2 oct. 2022, 12:17 UTC

- 12H
- 1D
- 1W
- 1M
- 1Y
- 2Y
- 5Y**
- 10Y



4 oct. 2017, 00:00 UTC - 2 oct. 2022, 12:17 UTC
EUR/USD Fermer: 0,980369 Taux min.: 0,954225 Taux max.: 1,39303