

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Tristan LEWDEN

Titre du mémoire : Modélisation d'investissement en viager immobilier

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la
filiale :

Signature :

Entreprise : Manco Paris
MANCO.PARIS

Nom : 7 rue Roy - 75008 Paris
Tel : +33 1 88 40 45 74 - www.manco-paris.com

Signature : Agrément AMF n° GP-21000001
RCS Paris : 889 423 612

Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires :

Signature :

Directeur de mémoire en
entreprise

Nom : *Tristan Lewden*

Signature :

Invité :

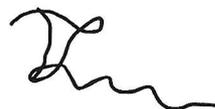
Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable
entreprise :

Signature du candidat :



Résumé

Le marché du viager immobilier, encore sous-exploité à ce jour, présente des opportunités d'investissement intéressantes. L'analyse et la modélisation des risques, tant biométriques qu'économiques, associées à cet investissement requièrent des méthodes actuarielles et financières adaptées. L'élaboration de ce cadre analytique constitue l'objectif de ce mémoire.

Pour modéliser la longévité nous utiliserons les tables de mortalité par générations TGH05/TGF05. Nous ces tables adapterons en fonction du niveau de vie grâce à une étude de l'INSEE sur l'espérance de vie par niveau de vie en utilisant un modèle relationnel de Brass. De plus, nous établirons une table de dépendance basée sur l'étude QalyDays. Cette dernière servira à modéliser le départ du crédentier du bien avant son décès, un scénario important dans l'analyse des contrats viagers.

Pour l'étude des risques économiques nous allons élaborer un générateur de scénarios économiques. Ce dispositif nous permet de projeter les variables économiques pertinentes pour la modélisation d'un investissement en viager immobilier telles que l'inflation (ou un autre indice pour revaloriser les rentes des contrats), le marché immobilier et les taux d'intérêt. Les aspects cruciaux abordés dans ce chapitre incluent le choix des modèles économiques et la détermination de la profondeur des données historiques nécessaires pour leur calibration.

A l'aide des modélisations précédentes, nous analyserons les résultats des projections des flux financiers liés à l'investissement en viager immobilier. Nous démontrerons notamment l'intérêt de la mutualisation, qui réduit la volatilité et les risques associés à cet investissement. En utilisant une génération fictive de vendeurs de viagers, nous évaluons la rentabilité de l'investissement, notamment à travers des indicateurs tels que le Taux de Rendement Interne (TRI) et la Valeur Actuelle Nette (VAN). Il est cependant important de souligner que la variabilité de la rentabilité de l'investissement reste substantielle.

Le dernier chapitre offre l'occasion de revisiter les limites inhérentes à la modélisation. Les résultats attendus de l'investissement en viager immobilier varient considérablement selon les hypothèses de travail adoptées. Des questionnaires expérimentés dans le domaine du viager immobilier peuvent fixer certains paramètres pour atténuer l'incertitude des rendements. Cependant, l'élément clé pour améliorer la modélisation reste l'accès à des données fiables et précises, essentiel pour affiner et valider les modèles utilisés.

Mots-clés : Viager, Immobilier, Inflation, Dépendance, Générateur de scénarios économiques.

Abstract

The real estate life annuity market, still underexploited to date, offers interesting investment opportunities. The analysis and modeling of risks, both biometric and economic, associated with this investment require appropriate actuarial and financial methods. The development of this analytical framework constitutes the objective of this dissertation.

To model longevity, we will use the generational mortality tables TGH05/TGF05. We will adapt these tables based on the standard of living through a study by INSEE on life expectancy by standard of living using a Brass relational model. Moreover, we will establish a dependency table based on the QalyDays study. This will be used to model the annuitant's departure from the property before death, an important scenario in the analysis of life annuity contracts.

For the study of economic risks, we will develop an economic scenario generator. This tool allows us to project the economic variables relevant for modeling an investment in real estate annuities such as inflation (or another index to adjust the annuities in contracts), the real estate market, and interest rates. Crucial aspects addressed in this chapter include the choice of economic models and the determination of the depth of historical data necessary for their calibration.

With the help of the previous models, we will analyze the results of the financial flow projections related to the investment in real estate annuities. We will demonstrate the interest of pooling, which reduces the volatility and risks associated with this investment. Using a fictional generation of life annuity sellers, we assess the profitability of the investment, in particular through indicators such as the Internal Rate of Return (IRR) and the Net Present Value (NPV). However, it is important to emphasize that the variability of investment profitability remains substantial.

The last chapter offers the opportunity to revisit the inherent limitations of modeling. The expected outcomes of the investment in real estate annuities vary considerably depending on the working assumptions adopted. Experienced managers in the field of real estate annuities can set certain parameters to mitigate the uncertainty of returns. However, the key element to improve modeling remains access to reliable and accurate data, essential for refining and validating the models used.

Keywords : Life annuity, Real estate, Inflation, Dependency, Economic scenario generator.

Note de Synthèse

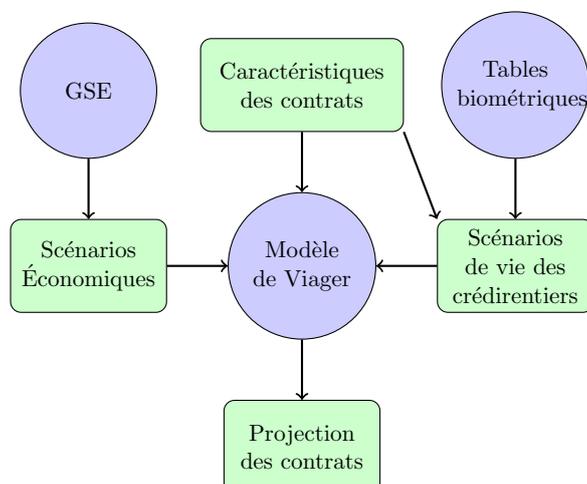
Contexte

Environ trois quarts des seniors français sont propriétaires de leur logement. Le viager immobilier offre une option pour monétiser leur capital immobilier, générant ainsi un revenu régulier tout en leur permettant de continuer à vivre dans leur domicile. Cela peut-être une solution adaptée aux défis démographiques et économiques actuels.

Dans un contrat viager immobilier, l'acheteur, nommé débirentier, acquiert la nue-propiété d'un bien immobilier. En échange, il verse un capital initial, appelé bouquet, suivi d'une rente viagère jusqu'au décès du vendeur, ou crédientier.

L'évaluation d'un contrat viager immobilier nécessite des calculs financiers et actuariels spécifiques en raison de l'incertitude liée à la durée de paiement de la rente et au moment de la restitution de l'usufruit du bien. Ces calculs nécessitent la modélisation des risques biométriques et des risques économiques.

L'objectif de ce mémoire sera donc de modéliser un fonds d'investissement en viager immobilier et d'en analyser les risques. La modélisation prendra cette forme :



Risques biométriques

Lors de l'examen des contrats viagers, la question centrale est souvent celle du risque de longévité. Le viager représente un engagement financier continu jusqu'au décès du crédirentier. Il est donc crucial d'évaluer précisément la mortalité des personnes susceptibles de vendre leur bien en viager afin de calculer correctement la valeur actuelle des rentes à payer. Un autre facteur influençant la valeur du contrat viager est la dépendance. De nombreux contrats viagers incluent une clause de revalorisation de la rente ou le versement d'une prime en cas de départ du crédirentier du domicile, souvent dû à une perte d'autonomie et à l'intégration dans une maison de retraite.

Les tables de mortalité prospectives par génération, TGH05/TGF05, constituent la base de la modélisation de la longévité des crédirentiers. Elles incluent autant de tables de mortalité qu'il y a d'années de naissance entre 1886 et 2005, ce qui permet d'observer l'évolution de la mortalité en fonction des générations. Ces tables fournissent des données essentielles sur les taux de survie des individus, permettant ainsi de projeter la durée probable des versements de rentes.

L'approche adoptée intègre le niveau de vie des crédirentiers pour affiner les prévisions de mortalité. Pour cela, nous utiliserons un modèle relationnel de Brass, qui ajuste les tables de mortalité en fonction des différences de niveau de vie. Cette adaptation est fondamentale car elle reflète l'impact du niveau de vie sur la longévité, un facteur déterminant dans l'évaluation des contrats viagers.

Vient ensuite l'établissement d'une table d'entrée en dépendance. Nous utiliserons l'étude QalyDays pour cela. La perte d'autonomie signifiera dans le modèle le départ du logement.

Générateur de scénarios économiques

Après avoir abordé les aspects démographiques, nous nous pencherons sur les variables économiques. Ces variables seront modélisées en utilisant un générateur de scénarios économiques.

Les variables économiques pertinentes pour évaluer un contrat viager sont les indices pour indexer les rentes, l'immobilier, et les taux d'intérêt sans risque. Une version modifiée du modèle d'Ahlgrim est utilisée, excluant le rendement des actions.

Deux types d'indices sont largement utilisés dans le cadre des viagers pour indexer les rentes et qu'il faut donc modéliser :

- l'indice des prix à la consommation (IPC) ou inflation
- l'indice du coût de la construction (ICC)

Les deux seront modélisées par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de retour à la moyenne et leurs paramètres seront calibrés avec les historiques de l'INSEE.

L'indice Notaires-Insee des prix des logements anciens est utilisé pour étudier l'évolution du prix de l'immobilier. Après analyse, j'ai choisi de modéliser l'immobilier avec un modèle de Black et Scholes classique plutôt qu'avec un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (comme proposé par le modèle d'Ahlgrim).

Pour les taux d'intérêts, le modèle d'Ahlgrim utilise un modèle de Hull et White à deux facteurs. Il a été calibré avec les taux interbancaires Euribor à un mois pour les taux courts et avec les taux

moyens des emprunts d'État français à 10 ans pour les taux longs.

Enfin, pour la structure de dépendance, on utilise une matrice de corrélation entre les résidus des modèles calibrés des différentes variables.

Modélisation du fonds viager

Avec les travaux précédents, nous pouvons à présent modéliser les flux du fonds viager. Le calcul de la valeur actuelle des rentes dans différents scénarios utilise le générateur de scénarios économiques présenté dans le chapitre 3 et des scénarios de vie aléatoires basés sur les tables construites dans le chapitre 2. Ce processus permet d'obtenir des estimations détaillées de la valeur des rentes pour chaque contrat dans différents scénarios.

En l'absence de données suffisantes, des contrats sont générés aléatoirement en respectant les données de marché. Ces données incluent la répartition des vendeurs de viagers par âge et sexe, ainsi que des informations sur le type de contrats viagers et les caractéristiques des biens immobiliers impliqués.

Cela permet de calculer la valeur actuelle nette (VAN) du fonds suivant différents scénarios, on peut même introduire un choc, de longévité par exemple. Un indicateur important est le taux de rentabilité interne (TRI) qui permet de connaître le taux minimal d'actualisation pour que la VAN soit positive. Le TRI médians calculé est de 5.4%.

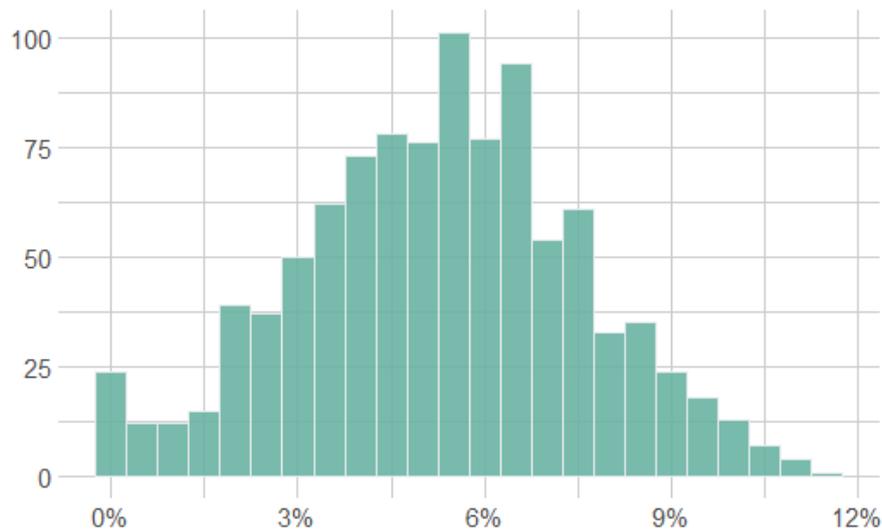


FIGURE 1 – répartition des TRI par scénarios

On illustre aussi la pertinence de l'établissement d'un fonds pour l'investissement en viager immobilier par la baisse du coefficient de variation des rentes avec l'augmentation du nombre de contrats.

Cela illustre la diversification du risque de longévité, les contrats viagers étant indépendants. Le risque économique n'est lui pas diversifiable, car tous les contrats sont soumis au même contexte.

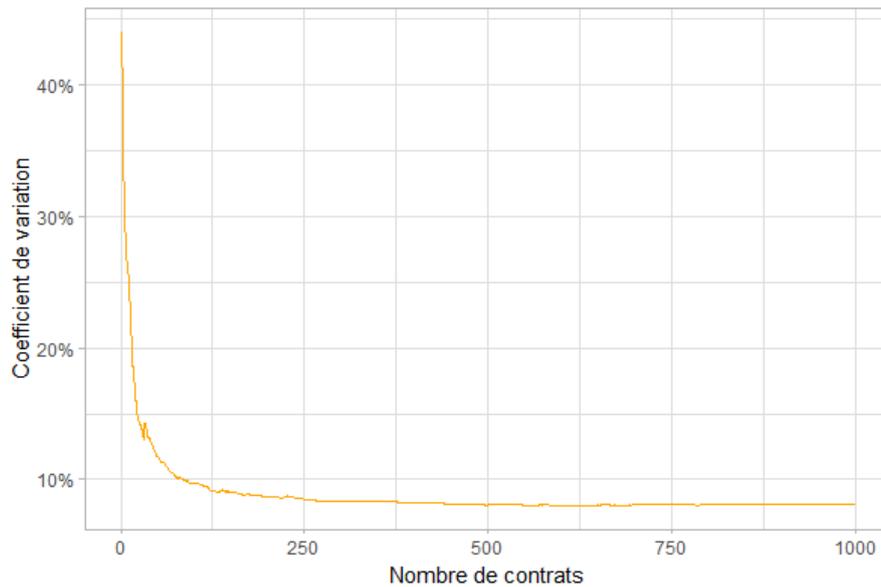


FIGURE 2 – Convergence du coefficient de variation des rentes

Limites de la modélisation

L'établissement de scénarios fiables pour les contrats viagers nécessite l'adoption de nombreuses hypothèses, souvent sujettes à débat en raison de leur nature conjecturale et de l'incertitude inhérente à toute prévision à long terme.

Par exemple, pour la modélisation économique, il est difficile de choisir une profondeur historique pertinente pour anticiper l'évolution future des variables. De plus, un changement structurel de l'environnement économique peut rendre les modèles basés sur des données passées obsolètes. Le passé n'est pas toujours un prédicteur fiable de l'avenir.

Le manque de données spécifiques sur le marché du viager oblige à formuler de nombreuses hypothèses. Des données fiables seraient cruciales pour élaborer des tables de mortalité adaptées et pour une meilleure compréhension des comportements des créditeurs, ainsi que pour identifier d'éventuels risques d'antisélection.

Synthesis note

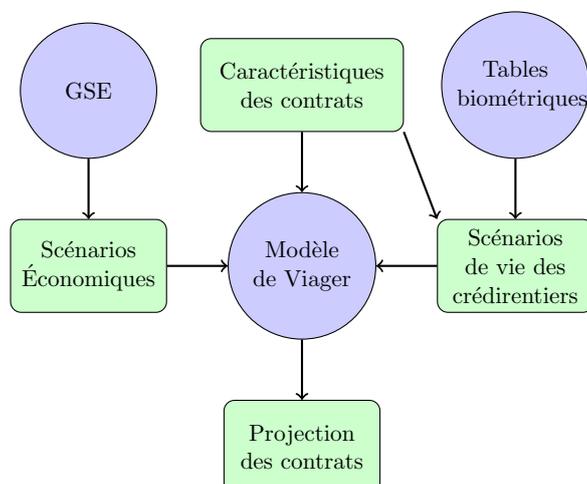
Context

Approximately three-quarters of French seniors own their home. The real estate life annuity offers an option to monetize their real estate capital, thereby generating a regular income while allowing them to continue living in their home. This can be a solution adapted to current demographic and economic challenges.

In a real estate life annuity contract, the buyer, named "debirentier", acquires the bare ownership of a property. In exchange, they pay an initial capital, called a "bouquet", followed by a life annuity until the death of the seller, or "crédirentier".

The evaluation of a real estate life annuity contract requires specific financial and actuarial calculations due to the uncertainty related to the duration of the annuity payments and the timing of the restitution of the usufruct of the property. These calculations require the modeling of biometric risks and economic risks.

The objective of this dissertation will therefore be to model a real estate life annuity investment fund and to analyze its risks. The modeling will take the following form:



Biometric Risks

When examining life annuity contracts, the central issue is often that of longevity risk. The life annuity represents a continuous financial commitment until the death of the *crédirentier*. It is therefore crucial to accurately assess the mortality of individuals likely to sell their property in a life annuity in order to correctly calculate the present value of the annuities to be paid. Another factor influencing the value of the life annuity contract is dependency. Many life annuity contracts include a clause for the revaluation of the annuity or the payment of a premium in case of the *crédirentier*'s departure from the home, often due to a loss of autonomy and integration into a nursing home.

The generational mortality tables TGH05/TGF05 serve as the foundation for modeling the longevity of annuitants. They include as many mortality tables as there are birth years between 1886 and 2005, allowing for the observation of mortality trends across generations. These tables provide crucial data on individuals' survival rates, thus enabling the projection of the probable duration of annuity payments.

The adopted approach incorporates the standard of living of the *crédirentiers* to refine mortality forecasts. For this, we will use a Brass relational model, which adjusts mortality tables according to differences in standard of living. This adaptation is fundamental as it reflects the impact of standard of living on longevity, a determining factor in the evaluation of life annuity contracts.

Next comes the establishment of a dependency entry table. We will use the QalyDays study for this purpose. In the model, the loss of autonomy will signify leaving the home.

Economic Scenario Generator

After addressing demographic aspects, we will focus on economic variables. These variables will be modeled using an economic scenario generator.

The relevant economic variables for evaluating a life annuity contract are indices for indexing annuities, real estate, and risk-free interest rates. A modified version of the Ahlgrim model is used, excluding stock returns.

Two types of indices are widely used in the context of life annuities for indexing annuities and therefore need to be modeled:

- the Consumer Price Index (CPI) or inflation
- the Construction Cost Index (CCI)

Both will be modeled by a mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck process and their parameters will be calibrated with INSEE historical data.

The Notaires-Insee index of prices for old homes is used to study the evolution of real estate prices. After analysis, I chose to model real estate with a classic Black and Scholes model rather than with an Ornstein-Uhlenbeck process (as proposed by the Ahlgrim model).

For interest rates, the Ahlgrim model uses a two-factor Hull and White model. It has been calibrated with the Euribor one-month interbank rates for short rates and with the average rates of

French government loans at 10 years for long rates.

Finally, for the dependence structure, a correlation matrix between the residuals of the calibrated models of the different variables is used.

Modeling of the Life Annuity Fund

With the preceding work, we can now model the flows of the life annuity fund. The calculation of the present value of the annuities in different scenarios uses the economic scenario generator presented in Chapter 3 and random life scenarios based on the tables constructed in Chapter 2. This process allows obtaining detailed estimates of the value of the annuities for each contract in different scenarios.

In the absence of sufficient data, contracts are generated randomly while respecting market data. These data include the distribution of life annuity sellers by age and sex, as well as information on the types of life annuity contracts and the characteristics of the involved real estate properties.

This allows for the calculation of the net present value (NPV) of the fund following different scenarios; one can even introduce a shock, such as longevity, for example. An important indicator is the internal rate of return (IRR), which allows determining the minimum discount rate for the NPV to be positive. The calculated median IRR is 5.4%.

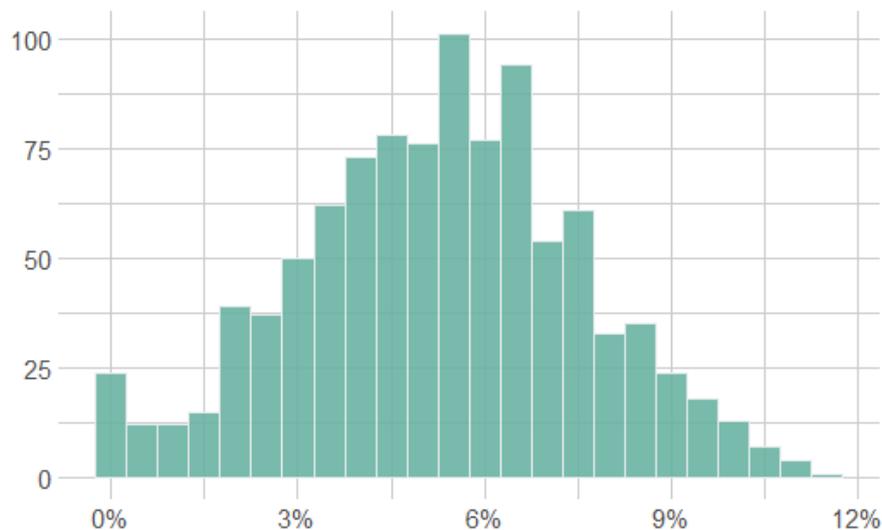


Figure 3 – répartition des TRI par scénarios

We also illustrate the relevance of establishing a fund for investing in real estate life annuities by the decrease in the coefficient of variation of the annuities with the increase in the number of contracts. This illustrates the diversification of longevity risk, as life annuity contracts are independent. The economic risk, however, is not diversifiable, because all contracts are subject to the same context.

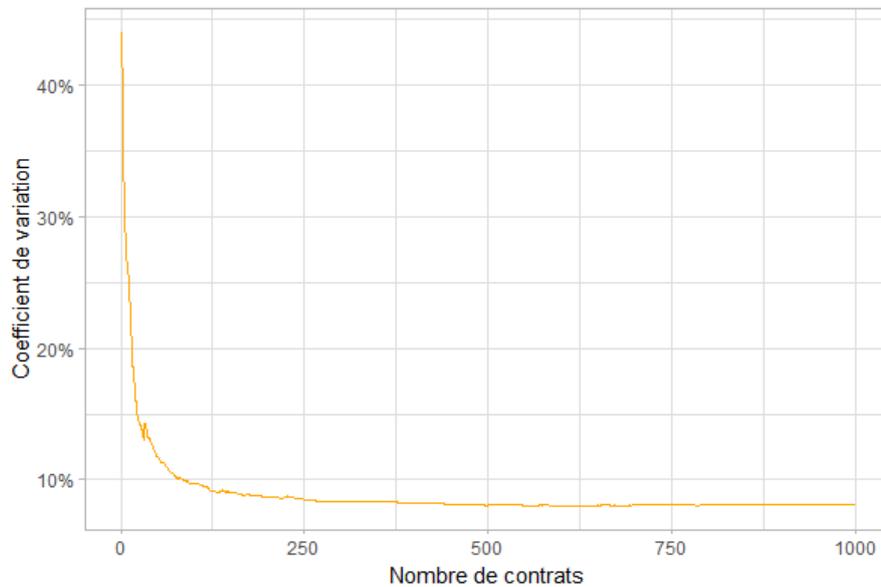


Figure 4 – Convergence du coefficient de variation des rentes

Limitations of the Modeling

Establishing reliable scenarios for life annuity contracts requires the adoption of numerous assumptions, often subject to debate due to their conjectural nature and the uncertainty inherent in any long-term forecast.

For example, in economic modeling, it is challenging to choose a relevant historical depth to anticipate the future evolution of variables. Moreover, a structural change in the economic environment could render models based on past data obsolete. The past is not always a reliable predictor of the future.

The lack of specific data on the life annuity market necessitates formulating numerous assumptions. Reliable data would be crucial for developing suitable mortality tables and for a better understanding of the behaviors of *crédirentiers*, as well as for identifying potential risks of adverse selection.

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements à toute l'équipe de Manco Paris, entreprise au sein de laquelle j'ai réalisé mon alternance et rédigé ce mémoire. Je suis particulièrement reconnaissant envers André Mayens, qui m'a proposé ce sujet de mémoire et m'a conseillé tout au long de sa réalisation.

Je souhaite également remercier Corentin et Jean pour leurs conseils ainsi que mon père pour sa relecture.

Table des matières

Note de Synthèse	5
Synthesis note	9
Remerciements	13
Table des matières	15
Introduction	17
1 Généralités sur le viager immobilier	19
1.1 Présentation	19
1.2 Le viager, une solution complémentaire pour financer sa retraite	20
1.3 Le marché du viager en France	21
1.4 Analyse prospective d'un régime viager immobilier	23
2 Risques biométriques	25
2.1 Table de mortalité	25
2.2 Dépendance	29
3 Les risques économiques	33
3.1 Générateur de scénarios économiques	33
3.2 Indice de prix	35
3.3 Immobilier	43
3.4 Facteur d'actualisation	48
3.5 Structure de dépendance	52
4 Modélisation du fonds viager	55

4.1	Présentation du modèle complet	55
4.2	Exemple sur un portefeuille	58
4.3	Génération de contrats	61
4.4	Valeur Actuelle Nette	62
4.5	Diversification du risque longévité	64
4.6	Value at Risk	65
4.7	Taux de rentabilité interne	66
4.8	Choc de longévité	67
4.9	Indice	68
4.10	Differentiation suivant le niveau de vie	69
5	Limites du modèles	71
5.1	Longévité	71
5.2	Modélisation économique	71
5.3	Gestion du fonds	72
5.4	Politique	72
5.5	Données	72
	Conclusion	75
	Bibliographie	77
	Annexes	79
A	Calcul de rentes viagère	79
A.1	Rente dans un scénario	79
A.2	Rente probable	80

Introduction

Le viager immobilier est une forme de vente immobilière dans laquelle un vendeur, souvent une personne âgée, cède un bien immobilier à un acheteur, qui obtiendra généralement l'usufruit du bien seulement au décès dudit vendeur, en échange d'une rente viagère, c'est-à-dire une rente versée à vie. Le prix de vente est ainsi converti en une série de paiements réguliers, dont le montant est calculé en fonction de divers paramètres, principalement l'âge du vendeur et la valeur du bien.

Le viager est inscrit dans les articles du code civil ayant trait aux contrats aléatoires en raison de l'incertitude liée à la vie du crédientier. Le viager peut potentiellement présenter l'avantage d'acquérir un bien à un prix inférieur à sa valeur réelle, tout comme il peut conduire à acheter le bien à un montant supérieur. La valeur du contrat viager est en effet fonction de la date de décès du crédientier et est à ce titre perçue comme immoral car elle consiste en un "pari sur la mort", l'acheteur serait supposé souhaiter la mort rapide du vendeur pour accroître la rentabilité de son investissement.

Cependant, dans un contexte socio-économique marqué par le vieillissement de la population et les enjeux liés au financement des retraites, le viager offre des avantages notables. Il permet aux personnes âgées de bénéficier d'un revenu complémentaire, améliorant leur qualité de vie dans une période marquée par l'incertitude. Avec ses différentes formules, libre ou occupé, le viager s'adapte aux besoins et aux souhaits du vendeur, notamment la possibilité de continuer à vivre dans son logement. En outre, cette transaction représente une opportunité d'investissement attrayante avec un potentiel de rendement élevé. La conjoncture peut paraître favorable au développement de ce marché.

La mise en place de fonds d'investissement spécialisés en viager immobilier vient répondre aux problématiques apportées par cet investissement et pourrait également jouer un rôle dans l'expansion de ce marché. En effet, un fonds permet de mutualiser les risques, de longévité notamment, difficiles à assumer pour un particulier qui achète un unique contrat. Le cas de Jeanne Calment, morte deux ans après le débitrentier qui lui avait acheté son bien, en est l'exemple le plus connu. Un fonds qui réalise de nombreuses opérations permet, grâce à la loi des grands nombres, de lisser les risques et de raisonner en termes de moyenne. La mutualisation se limite cependant au risque de longévité, un fonds spécialisé restera exposé aux risques économiques qui touchent le marché du viager : l'évolution des taux d'intérêts, l'inflation et l'évolution des prix de l'immobilier.

L'ambition principale de ce mémoire est de développer un cadre cohérent et structuré pour la gestion d'un fonds d'investissement spécialisé en viager immobilier. Ce cadre est essentiel pour une compréhension approfondie des divers paramètres biométriques et économiques qui influencent la valorisation des contrats viagers. Il vise également à fournir une évaluation rigoureuse des risques financiers associés et à offrir des orientations stratégiques pour l'établissement efficace d'un fonds et la constitution d'un portefeuille diversifié. L'objectif est de baliser un chemin permettant aux gestionnaires de fonds de prendre des décisions éclairées et pertinentes, optimisant ainsi les performances du fonds tout en minimisant les risques.

Chapitre 1

Généralités sur le viager immobilier

1.1 Présentation

Le contrat viager immobilier est une transaction spécifique où l'acheteur, nommé débirentier, acquiert la nue-propriété d'un bien immobilier. En contrepartie, il verse un capital initial, communément appelé "bouquet", lors de la signature du contrat, suivi d'une rente viagère jusqu'au décès du vendeur, qui est le crédirentier. Dans le cadre d'un viager occupé, le crédirentier conserve le droit d'usage du bien, lui permettant ainsi de bénéficier d'un complément de revenus pour sa retraite, en convertissant la valeur de son patrimoine immobilier en flux de revenu régulier tout en continuant à habiter son logement. Il existe le viager libre, dans lequel le bien est immédiatement cédé en totalité au débirentier, tout en continuant à percevoir la rente. Une autre forme de viager, sans rente, implique uniquement le versement du bouquet, dans lequel l'incertitude repose sur la date à laquelle l'acheteur obtiendra la pleine propriété du bien. Voici ci-dessous un schéma qui illustre le déroulement d'un contrat viager classique.

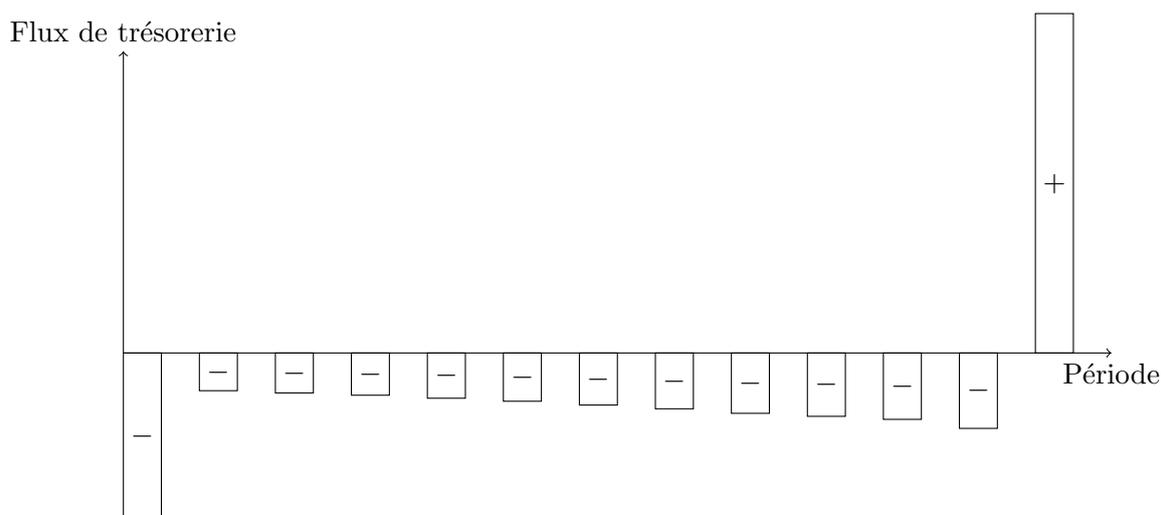


FIGURE 1.1 – Cash Flow du contrat viager immobilier du point de vue du débirentier

L'incertitude inhérente au contrat viager réside dans le moment du décès du crédirentier, étant donné que cette occurrence fixe la période de paiement de la rente ainsi que le moment où l'acquéreur obtient la propriété complète du bien immobilier. Certains types de contrats, le viager libre ou le

viager sans rente qui sont cités plus haut, offrent la possibilité de limiter l'exposition à une seule de ces incertitudes.

En raison des incertitudes liées à la durée du versement de la rente et au moment de l'acquisition de l'usufruit du bien, l'évaluation d'un contrat viager immobilier nécessite des calculs financiers et actuariels spécifiques. Ces calculs doivent prendre en considération plusieurs variables, notamment l'âge et, potentiellement, l'état de santé du crédientier, qui influencent directement l'espérance de vie et donc la durée prévue de paiement de la rente. Une anticipation erronée de cette durée peut avoir des conséquences significatives sur la rentabilité de l'investissement pour l'acheteur. De plus, la valeur actuelle du bien immobilier et les taux d'actualisation doivent être intégrés pour ajuster les flux financiers futurs à leur valeur présente. Ces taux d'actualisation, souvent basés sur les conditions du marché et les prévisions économiques, ajoutent un niveau supplémentaire d'incertitude. L'utilisation de méthodes actuarielles et financières est essentielle pour apprécier adéquatement les risques associés à l'investissement en viager immobilier.

1.2 Le viager, une solution complémentaire pour financer sa retraite

1.2.1 Une solution technique

En France, selon [Masson \(2015\)](#), environ trois quarts des seniors sont propriétaires de leur logement. Ces propriétés immobilières ont souvent pris de la valeur depuis leur acquisition, constituant ainsi un patrimoine significatif mais sous-utilisé. Face au vieillissement de la population et aux défis croissants liés au financement des retraites, qui exigent un effort accru de la part de la population active, des solutions financières alternatives ou complémentaires sont explorées. Le viager immobilier se présente comme une option avantageuse à cet égard. Il permet non seulement de monétiser immédiatement le capital immobilier en générant un revenu régulier pour le vendeur, mais aussi de répondre au souhait de nombreux retraités de continuer à vivre dans leur domicile. Ainsi, le viager immobilier offre une solution adaptée aux enjeux économiques et démographiques actuels, en valorisant le patrimoine immobilier des seniors tout en respectant leur choix de vie.

1.2.2 Des réticences morales

Le concept de viager souffre d'une perception négative en France, en grande partie due à son association avec le "pari sur la mort". Cette dimension, qui implique de monétiser l'espérance de vie du vendeur, est souvent considérée comme immorale ou du moins inconfortable pour de nombreux potentiels vendeurs. Ils peuvent répugner à l'idée d'introduire des considérations économiques dans la gestion de leur fin de vie, préférant maintenir la mort et l'économie dans des sphères distinctes.

De plus, l'attachement émotionnel à un bien immobilier, souvent chargé de souvenirs personnels et familiaux, peut constituer un obstacle supplémentaire. Le désir de léguer le bien à la génération suivante renforce cette réticence. Ainsi, au-delà des considérations économiques, c'est aussi une dimension émotionnelle forte qui peut freiner l'adoption du viager comme option financière pour les seniors.

1.3 Le marché du viager en France

1.3.1 Un état du marché

Selon [Coulomb et al. \(2021\)](#), le marché potentiel du viager en France est estimé à 1 059 milliards d'euros, représentant environ 19% du parc immobilier total. Cependant, le marché actif du viager ne s'élève qu'à environ 2.5 à 3 milliards d'euros, indiquant ainsi une sous-exploitation manifeste de ce secteur. De plus, la distribution géographique des ventes en viager est inégale à travers le territoire.

Les réticences morales mentionnées précédemment peuvent partiellement expliquer cette sous-utilisation. Une autre raison potentiellement plus influente est le système de retraite français, qui offre un taux de remplacement des revenus relativement élevé, réduisant ainsi le besoin pour les retraités d'explorer des sources de revenus alternatives.

L'entreprise Renée Costes, leader du viager en France, rapporte que l'âge moyen des vendeurs en viager est de 74,3 ans, avec 70% des vendeurs âgés entre 70 et 85 ans. De plus, 36% des vendeurs sont des couples, 39% sont des femmes seules, et 25% sont des hommes seuls.

Bien que le viager ne représente actuellement que 0.5% à 1% des transactions immobilières en France, le marché est en croissance, avec une augmentation annuelle d'environ 6%. Des changements économiques ou politiques, notamment concernant le système de retraite, pourraient considérablement augmenter la part du viager dans les transactions immobilières à l'avenir.

1.3.2 Précision sur le fonctionnement d'un contrat viager

La rente viagère, dans les contrats viagers, est habituellement indexée sur un indice de prix. Cette indexation vise à préserver le pouvoir d'achat du crédientier au fil du temps en ajustant la rente en fonction de l'évolution des prix. Comme nous le verrons par la suite, il existe plusieurs indices sur lesquels les rentes peuvent être indexées. Cette protection du crédientier crée, en contrepartie, un risque pour le débirentier qui est alors exposé à la variation de ces indices.

Dans de nombreux contrats viagers, il est prévu qu'en cas de libération du bien avant le décès, à cause d'une perte d'autonomie ou pour d'autres raisons, la rente viagère soit revalorisée. Cette revalorisation se fait selon un montant de prime spécifique déterminé et stipulé dans les termes du contrat.

La rente viagère bénéficie d'un régime fiscal particulièrement favorable en France. Bien qu'elle soit soumise à l'impôt sur le revenu, la rente est éligible à un abattement significatif, dont le taux varie en fonction de l'âge du crédientier au moment du premier versement de la rente. En pratique, cela signifie que seule une portion de la rente est effectivement imposable. Les modalités de cet abattement sont définies comme suit :

- 70 % pour un premier versement à moins de 50 ans
- 50 % pour un premier versement de 50 à 59 ans
- 40 % pour un premier versement de 60 à 69 ans
- 30 % pour un premier versement à plus de 69 ans

Le bouquet est quant à lui exonéré d'impôt.

Une caractéristique notable de la rente viagère est sa reversabilité au conjoint survivant. En cas de décès du crédirentier, le conjoint survivant continue de percevoir l'intégralité de la rente, ce qui offre une protection financière, en particulier si le conjoint dépendait des revenus de la rente.

Dans le cadre d'un contrat viager, le crédirentier, malgré le fait qu'il continue d'occuper le bien, est exonéré de certaines charges habituellement associées à la propriété. Notamment, il n'est pas tenu de payer la taxe foncière ni de contribuer aux travaux décidés par le syndic de l'immeuble. Ces frais seront payés par le débiteur. Cependant, si le crédirentier occupe toujours le bien, il reste tenu de payer la taxe d'habitation. Cette distinction des responsabilités fiscales et financières est un élément clé des accords viagers, soulignant le transfert partiel des charges du crédirentier au débirentier, tout en préservant certaines obligations pour le vendeur occupant.

1.3.3 Pratiques

Lors de l'évaluation d'un bien immobilier en viager, l'approche traditionnelle commence par la détermination de la Valeur Vénale Libre (VVL) du bien, qui est essentiellement sa valeur sur le marché libre. À partir de cette valeur, on soustrait une décote pour le droit d'usage et d'habitation (DUH). Cette décote DUH est calculée en considérant la valeur locative potentielle du bien si celui-ci était libre, ajustée en fonction de l'espérance de vie (EV) du crédirentier, du rendement locatif (RL) et du taux d'actualisation (tx). La formule pour calculer le DUH est donc :

$$DUH = EV * RL * tx$$

Une fois la décote appliquée, on obtient la Valeur Occupée (VO) du bien en soustrayant la DUH de la VVL. Cette valeur occupée est ensuite répartie entre le bouquet (paiement initial) et les rentes viagères, selon les accords entre les parties prenantes :

$$VO = VVL - DUH = \text{bouquet} + \text{rentes}$$

Pour effectuer les calculs relatifs aux contrats viagers, une majorité de professionnels (environ 90%) s'appuient sur le barème Daubry. Ce barème, élaboré par Maître Jacques Daubry après l'étude approfondie de près de 20 000 dossiers, fournit une méthode standardisée pour déterminer la valeur de la nue-propriété (ou VO) d'un bien immobilier et le taux de rente viagère. À partir de l'âge et du sexe du ou des vendeurs, le barème Daubry utilise les données d'espérance de vie de l'INSEE pour établir le pourcentage de la valeur de la nue-propriété. Une fois choisie la part pour le bouquet, la rente est calculée à l'aide d'un taux de rente. On obtient alors la rente avec ce calcul :

$$\text{rente} = (VO - \text{bouquet}) * \text{tauxderente}$$

Cette méthode permet ensuite de répartir aisément la valeur de la nue-propriété entre le bouquet (somme initiale versée) et les rentes viagères. Le barème Daubry est un outil essentiel pour les professionnels du viager, leur permettant de réaliser de manière efficace et précise tous les calculs nécessaires dans le cadre de leurs activités quotidiennes.

Bien que le barème Daubry soit largement utilisé dans le secteur du viager, il présente des limitations significatives. L'un des principaux problèmes est la nature déterministe de ses calculs. Ceux-ci ne reflètent pas l'aspect intrinsèquement aléatoire des contrats viagers, ce qui peut conduire à une évaluation inexacte des risques associés. En outre, la méthode de calcul utilisée dans ce barème manque de transparence. En particulier, le taux d'actualisation appliqué est fixe et n'est pas explicitement

divulgué. Il est aux alentours de 4.5% et a été choisi pour refléter le ratio entre les loyers annuels et la valeur du bien immobilier, et donc le rendement locatif. Ces problèmes soulèvent des questions sur la rigueur et la vérifiabilité de la méthode. Ainsi, malgré sa popularité, le barème Daubry peut être considéré comme une 'boîte noire', rendant difficile pour les utilisateurs de vérifier l'exactitude et la pertinence des calculs qu'il produit.

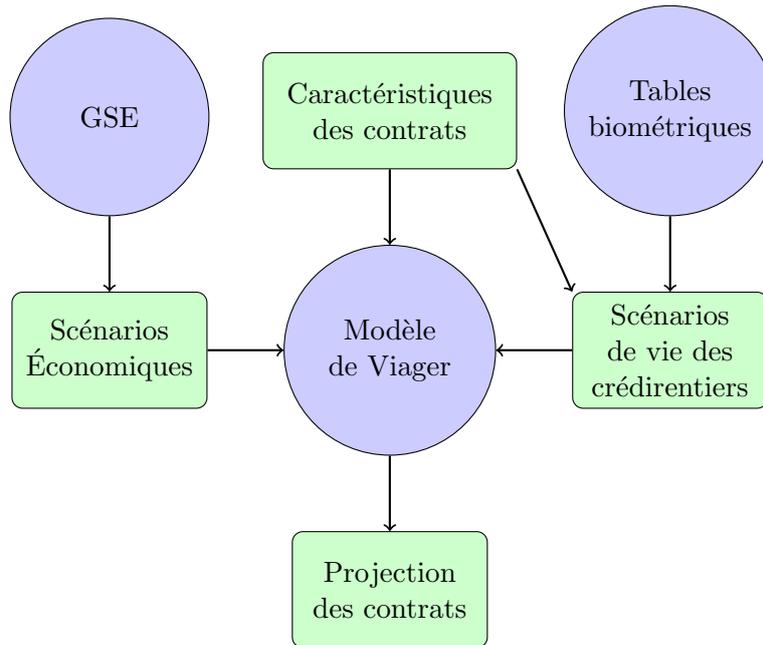
1.4 Analyse prospective d'un régime viager immobilier

Le viager représente un investissement à long terme. Afin d'en évaluer la pertinence, il est essentiel de projeter les variables clés sur un horizon temporel étendu, ces variables étant déterminantes pour l'évolution de l'investissement. La modélisation de ces variables est cruciale pour valoriser les contrats viagers. Elle permet non seulement de déterminer un rendement attendu, mais aussi d'anticiper les risques associés dans des scénarios adverses. La suite de ce mémoire sera consacrée à l'élaboration de cette modélisation, en mettant l'accent sur l'importance de comprendre et de quantifier les facteurs influençant la rentabilité et les risques des contrats viagers.

Lors de l'examen des contrats viagers, la question centrale est souvent celle du risque de longévité. Comme nous l'avons mentionné précédemment, dans un viager, le débirentier s'engage à verser une rente au crédirentier aussi longtemps que ce dernier est en vie (dans la majorité des cas), et il n'acquiert généralement l'usufruit du bien qu'après le décès du crédirentier. Par conséquent, pour l'investisseur, le viager représente un engagement financier continu jusqu'au décès du crédirentier. Il est donc crucial d'évaluer précisément la mortalité des personnes susceptibles de vendre leur bien en viager afin de calculer correctement la valeur actuelle des rentes à payer. Un autre facteur influençant la valeur du contrat viager est la dépendance ou perte d'autonomie. Comme soulignés auparavant, de nombreux contrats viagers incluent une clause de revalorisation de la rente ou le versement d'une prime en cas de départ du crédirentier du domicile, souvent dû à une perte d'autonomie et à l'intégration dans une maison de retraite. Ces deux aspects, la longévité et la dépendance, seront analysés en profondeur dans le Chapitre 2.

Après avoir abordé les aspects démographiques, nous nous pencherons sur les variables économiques. Ces variables seront modélisées en utilisant un générateur de scénarios économiques, présenté en détail dans le Chapitre 3. Un focus particulier sera mis sur l'évolution de l'inflation (et d'un autre indice : l'ICC), un facteur clé puisque les rentes viagères sont souvent indexées sur cet indice. Dans le contexte économique actuel, marqué par une hausse notable de l'inflation, cette analyse revêt une importance accrue. En outre, il est impératif de réaliser une analyse approfondie de l'évolution de la valeur des actifs immobiliers, compte tenu de la nature unique de cet actif. Enfin, nous examinerons l'évolution des taux d'intérêt et la courbe des taux, qui sont cruciaux pour actualiser les flux financiers des contrats viagers. Ces éléments économiques constituent des composantes essentielles pour une compréhension complète et précise de la valorisation et des risques associés aux contrats viagers.

Suite à la présentation détaillée des variables influençant les contrats viagers, le Chapitre 4 de ce mémoire sera consacré à l'exposition complète du modèle de fonds viager. Voici un schéma simplifié du fonctionnement du modèle :



Ce modèle permet de projeter les flux financiers concernant les contrats viagers grâce aux tables biométriques construites au chapitre 2 et au GSE construit au chapitre 3. Le modèle offre un cadre d'analyse pour valoriser les rentes viagères et évaluer le rendement potentiel d'un investissement en viager, tout en permettant de quantifier et d'appréhender les risques associés. L'objectif est de fournir une vision intégrée et approfondie de la dynamique financière et des implications d'un investissement viager.

Nous reviendrons dans le Chapitre 5 sur les limites du modèle et des calculs pour appréhender l'ensemble des risques d'un fonds en viager immobilier.

Chapitre 2

Risques biométriques

Le but de ce chapitre est de modéliser les aléas de vie des crédientiers qui influent sur les contrats viagers, à savoir la mortalité et la dépendance.

2.1 Table de mortalité

Afin d'intégrer de manière efficace le risque de longévité dans notre analyse actuarielle, il est indispensable de développer et d'appliquer des tables de mortalité spécifiquement adaptées à la population cible des crédientiers. Les tables de mortalité, en tant que séries de données exhaustives, fournissent une représentation détaillée de la probabilité de survie d'individus à différents âges, appartenant à un groupe démographique précis.

2.1.1 Les tables TGH05 et TGF05

Le marché du viager étant encore relativement petit et opaque, il est compliqué de construire des tables de mortalité d'expérience adaptées. Le plus prudent est de partir de tables éprouvées. Nous utiliserons donc les tables TGH05/TGF05 qui sont des tables de mortalité de référence en France pour les produits d'assurances viagers.

Les tables TGH05/TGF05 sont des tables par génération, elles sont donc prospectives et prennent en compte l'évolution de la mortalité dans le temps pour chaque génération. Ces tables d'expérience ont été construites grâce aux méthodes retenues par Daniel Serant au sein du laboratoire SAF (ISFA). Les données utilisées pour construire les tables sont composées d'observations de rentiers sur 19 portefeuilles, couvrant 700 000 rentes liquidées pour environ 2 millions de lignes au total durant la période 1993-2005. La méthodologie de calcul est décrite précisément dans la note [Planchet \(2005\)](#).

Cependant, ces tables donnent la mortalité de la population française en général, et il n'est pas évident que les vendeurs de viagers aient une mortalité identique au reste de la population française. Il y a de fortes disparités d'espérance de vie au sein de la population ([Denuit & Trufin \(2019\)](#)). Nous allons donc chercher à adapter les tables en fonction des données disponibles sur les crédientiers. L'acheteur dispose souvent du niveau de vie des crédientiers. C'est une donnée intéressante, car elle permet de différencier les taux de mortalité suivant les contrats. En effet, les crédientiers disposant d'un niveau de vie plus élevé sont susceptibles de vivre plus longtemps, grâce à un meilleur accès aux soins ou un cadre de vie plus favorable, par exemple. Ils bénéficient par ailleurs généralement de

traitements plus élevés, car la valeur de leur bien est plus élevée. Ces faits sont importants, car si les rentes les plus élevées sont versées plus longtemps, cela affectera négativement la rentabilité du fonds viager sans que l'espérance de vie moyenne des créditeurs change. L'utilisation d'une seule table pour tous les créditeurs induit donc un biais.

2.1.2 L'espérance de vie par niveau de vie

Une étude de l'INSEE, [Blanpain \(2018\)](#), partant de l'observation que plus on est aisé, plus l'espérance de vie est élevée, a pour objet de quantifier la différence de mortalité de la population par niveau de vie. Cette étude aboutit à un chiffre de 13 ans d'écart d'espérance de vie à la naissance entre les 5% les plus pauvres et les 5% les plus riches. Ce qui nous intéressera pour notre étude est plutôt la différence d'espérance de vie résiduelle à partir de l'âge auquel les ventes en viager se font, donc vers 70-80 ans.

Les résultats de l'étude se présentent sous la forme de vingt tables de mortalité statique, correspondant à vingt tranches de niveau de vie dont les montants sont dans le tableau ci-dessous. Les niveaux de vie correspondent au niveau de vie mensuel moyen du vingtile.

TABLE 2.1 – Niveau de vie par tranche

Vingtile de niveau de vie (%)	Niveau de vie mensuel moyen
0 - 5%	466 €
5 - 10%	762 €
10 - 15%	910 €
15 - 20%	1 024 €
20 - 25%	1 122 €
25 - 30%	1 215 €
30 - 35%	1 302 €
35 - 40%	1 387 €
40 - 45%	1 471 €
45 - 50%	1 556 €
50 - 55%	1 646 €
55 - 60%	1 742 €
60 - 65%	1 846 €
65 - 70%	1 963 €
70 - 75%	2 098 €
75 - 80%	2 264 €
80 - 85%	2 477 €
85 - 90%	2 781 €
90 - 95%	3 309 €
95 - 100%	5 796 €

Dans le cadre de l'étude, les revenus disponibles comprennent le salaire ou revenu professionnel (net de cotisation), les revenus du patrimoine, les transferts et prestations sociales. Le niveau de vie est le revenu disponible divisé par unité de consommation, on compte le nombre d'unités de consommation de la façon suivante : une unité pour le premier adulte, 0.5 pour chaque personne de plus de 14 ans supplémentaire et 0.3 par enfant de moins de 14 ans. Le niveau de vie est calculé à partir de la déclaration fiscale de 2011 et la mortalité mesurée de 2012 à 2016.

2.1.3 Modèle relationnel de Brass

Pour extraire l'information fournie par l'étude de l'INSEE qui nous renseigne sur les écarts de mortalités (données avec des tables statiques) par niveau de vie et d'intégrer cette information aux tables de références par générations, TGH05/TGF05, nous utiliserons le modèle relationnel de Brass.

Le modèle de Brass ([Brass \(1971\)](#)) est un modèle de régression sur le logit ($\text{logit}(p) = \log \frac{p}{1-p}$) du taux instantané de mortalité $\text{logit}(q_x(t))$ sur le logit du taux instantané de mortalité d'une table de référence $\text{logit}(q_x^{\text{ref}}(t))$:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \alpha + \beta * \text{logit}(q_x^{\text{ref}}(t)) + \epsilon_{x,t}$$

Ce modèle sert en général à ajuster une table de mortalité sur des données avec peu d'observation à l'aide d'une table de référence. Ici, le but sera d'estimer les paramètres des régressions entre la table moyenne et les tables par niveaux de vie fournies par l'étude de l'INSEE mentionnée plus haut, puis d'ajuster les tables prospectives TGH05/TGF05 suivant les niveaux de vie considérés. Ainsi, on extrait la relation entre le niveau de vie et les quotients de mortalités observés dans les tables statiques de l'étude pour répercuter ladite relation sur les tables prospectives utilisées.

On pose :

$$\text{logit}(q_x^{\text{niv.rev.}}(t)) = \alpha + \beta * \text{logit}(q_x^{\text{ensemble}}(t)) + \epsilon_{x,t}$$

On estime alors $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ à l'aide d'une régression linéaire. Puis on estime les nouveaux coefficients de mortalités avec pour tables de référence les tables TGH05 et TGF05 (suivant le sexe du crédientier) :

$$\hat{q}_x(t) = \frac{\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} * \text{logit}(q_x^{\text{ref}}(t)))}{1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} * \text{logit}(q_x^{\text{ref}}(t)))}$$

On reconstruit alors les tables prospectives ajustées au niveau de vie considéré grâce aux coefficients de mortalités calculés pour chaque vingtile de niveau de vie.

Avec cette méthode, on fait l'hypothèse, discutable, que les différences de mortalités observées par niveaux de vie restent stables par génération.

Dans l'intervalle $]0, 1/2[$ la fonction logit est concave, donc par l'inégalité de Jensen : $\mathbb{E}[\text{logit}(\hat{q}_x(t))] \leq \text{logit}(q_x(t))$. Les probabilités de décès sont donc sous-estimées lorsque $q_x(t) < 1/2$ et surestimées réciproquement. Il faut donc rester prudent quant à leurs utilisations. Dans le cas du viager, on fait face au risque de survie, les logit entraînent donc une marge de sécurité.

Dans l'étude de l'INSEE la relation entre les quotients de mortalité et les niveaux de vie est solidement établie, ce qui conforte l'utilisation du modèle relationnel de Brass. Toutefois, les quotients de mortalité par niveau de vie détaillés âge par âge doivent être utilisés avec précaution du fait des nombreuses opérations nécessaires à leur calcul qui peuvent en réduire la précision, en particulier aux âges élevés ou les échantillons sont nécessairement plus faibles. J'ai donc fait le choix de garder les coefficients de mortalités originaux (ceux des tables TGH05/TGF05) à partir de 100 ans.

2.1.4 Résultats

Le graphique ci-dessous illustre la variation des taux de survie pour une femme de 70 ans selon son appartenance soit au premier (les plus pauvres), soit au dernier vingtile (les plus riches) de la distribution des revenus dans la population. Cette représentation met en évidence les disparités en

termes de mortalité, reflétant l'impact du niveau de revenu sur la longévité, tel que modélisé dans notre étude.

Par ailleurs, notre analyse à partir des tables de mortalité reconstruites révèle une différence notable d'espérance de vie résiduelle en fonction de la richesse. Pour un homme de 70 ans, l'écart d'espérance de vie entre le premier et le dernier vingtile est supérieur à 7 ans. Pour une femme du même âge, cette différence est d'environ 6 ans. Ces statistiques démontrent clairement que les disparités économiques ont un impact significatif sur la longévité, un facteur crucial à considérer dans la valorisation des contrats viagers.

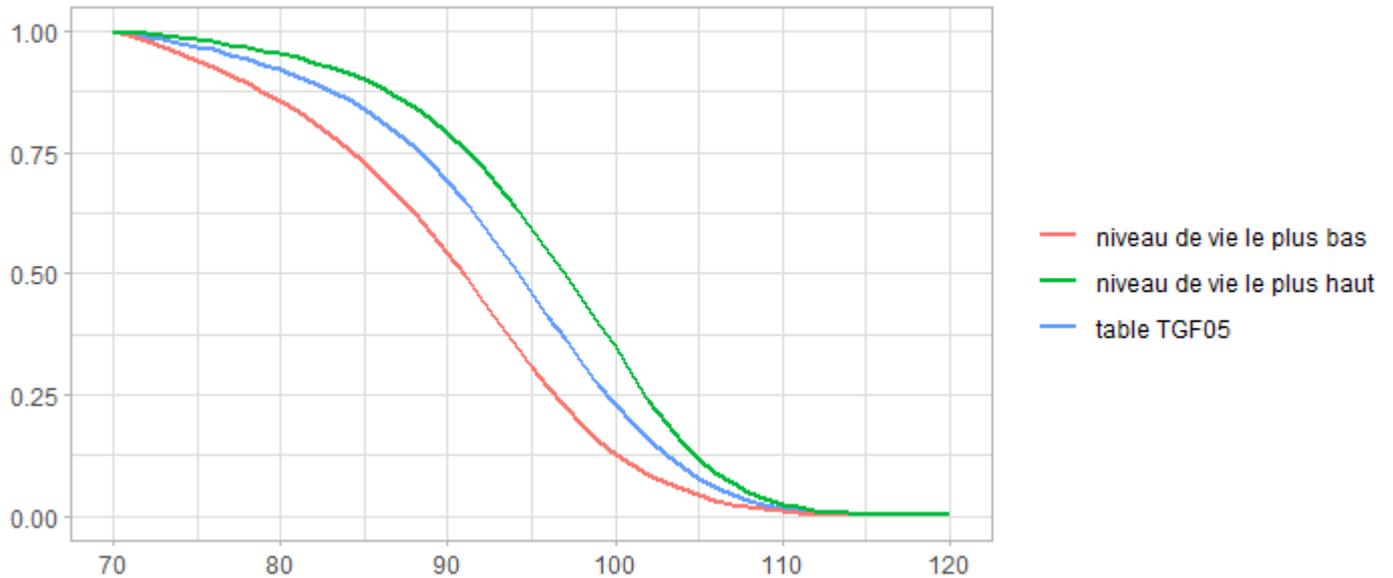


FIGURE 2.1 – Taux de survie d'une femme âgée de 70 ans

TABLE 2.2 – Différence d'espérance de niveau de vie

Esperance de vie résiduelle	d'un homme de 70 ans	d'une femme de 70 ans
TGH05/TGF05	20.17 ans	23.5 ans
0 - 5%	16.04 ans	20.24 ans
5 - 10%	16.68 ans	20.55 ans
10 - 15%	17.19 ans	21.43 ans
15 - 20%	17.67 ans	21.92 ans
20 - 25%	18.16 ans	22.34 ans
25 - 30%	18.62 ans	22.72ans
30 - 35%	19.01 ans	23.04 ans
35 - 40%	19.39 ans	23.35 ans
40 - 45%	19.74 ans	23.59 ans
45 - 50%	20.03 ans	23.82 ans
50 - 55%	20.34 ans	24.01 ans
55 - 60%	20.63 ans	24.22 ans
60 - 65%	20.97 ans	24.40 ans
65 - 70%	21.17 ans	24.59 ans
70 - 75%	21.51 ans	24.77 ans
75 - 80%	21.81 ans	24.98 ans
80 - 85%	22.16 ans	25.20 ans
85 - 90%	22.56 ans	25.45 ans
90 - 95%	23.10 ans	25.73 ans
95 - 100%	23.62 ans	26.03 ans

Après avoir construit des tables de mortalité adaptées, il faut également modéliser l'entrée en dépendance de la population des crédentiers.

2.2 Dépendance

Une personne est en état de dépendance lorsqu'elle a besoin de faire appel à un tiers pour accomplir un ou plusieurs actes de la vie quotidienne (Castaneda & Lusson (2018)). L'origine de cet état peut être physique ou psychique et entraîne une perte d'autonomie.

L'évaluation de la perte d'autonomie servira à modéliser le départ de crédentiers toujours en vie de leur logement, pour aller en ehpad par exemple. Le départ du logement, comme précisé au chapitre 1, peut donner lieu à l'application d'une augmentation de la rente pour départ anticipé. Il peut y avoir d'autres raisons de partir du logement, cependant, en l'absence de données sur ce sujet spécifique, cela semble une bonne approximation du comportement des crédentiers bien que cela puisse entraîner une sous-estimation des probabilités de départ des logements.

2.2.1 Etude QalyDays

Il n'existe pas de table d'entrée en dépendance de référence comme pour le risque de longévité. Il faut donc se baser sur des études de ce risque pour l'estimer. Nous utiliserons l'étude QalyDays dont l'objectif est d'améliorer la connaissance du risque de perte d'autonomie. Cette étude, [Schwarzinger \(2018\)](#), utilise les données des bases nationales d'hospitalisation (PMSI) 2008-2013 pour construire des lois d'expérience du risque de perte d'autonomie pour la population habitant en France métropolitaine âgée de plus de 50 ans.

L'étude distingue le risque d'entrée en dépendance physique (grabataire) et mentale (démence). Pour le viager cette distinction n'est pas très importante car dans les deux cas les crédientiers partiront probablement du logement. La mesure de perte d'autonomie totale est expliquée dans cet article [Guibert et al. \(2018\)](#).

Les données de l'étude distinguent les taux de survie des hommes et des femmes, mais il n'y a pas de différenciation par niveau de vie. On devra donc supposer que le risque de perte d'autonomie est le même pour tous les niveaux de vie, ce qui est sujet à caution. L'impact financier est tout de même plus faible pour la dépendance que pour la mortalité, l'hypothèse paraît donc acceptable.

Une autre limite de cette étude est son caractère instantané, les données sont issues d'une observation sur un temps limité. Les résultats ne traduisent donc pas l'évolution des taux d'incidence de la dépendance, mais fournissent seulement une image fixe, de manière similaire à une table de mortalité statique.

2.2.2 Probabilités

Nous utiliserons les taux d'entrée en dépendance pour calculer le taux de perte d'autonomie. Pour simplifier les calculs, il faut supposer que la mortalité est la même, que l'on soit dépendant ou non.

On note :

- ${}_t p_x$ la probabilité de survie entre l'âge x et $x + t$
- v_x la probabilité d'entrée en dépendance entre l'âge x et $x + 1$ si l'on a survécu
- ${}_t v_x$ la probabilité d'entrée en dépendance entre l'âge x et $x + t$ si l'on a survécu
- ${}^t \nu_x$ la probabilité d'être en dépendance à l'âge $x + t$ si on ne l'est pas à l'âge x

On a immédiatement la probabilité d'être valide en $x + 1$ si on l'est en x et qu'on a survécu : $1 - v_x$

On pose la probabilité d'être valide à l'âge $x + t$ si on a survécu :

$$1 - {}_t v_x = \prod_{j=x}^{i-1} (1 - v_j) \quad (2.1)$$

On obtient la probabilité d'être en dépendance à l'âge $x + T$ si on est valide à l'âge x :

$${}^t \nu_x = {}_t p_x \times \left(\sum_{i=x}^{x+t} v_i \times \prod_{j=x}^{i-1} (1 - v_j) \right) \quad (2.2)$$

Ces probabilités permettront d'intégrer le départ du viager dans le modèle et de déterminer la valeur de la prime de départ du logement, bien que par manque de données spécifiques, les résultats ne seront pas très fiables.

Le graphique ci-dessous montre l'allure du taux de survie et du taux de dépendance pour une femme de 70 ans que nous donne la modélisation.

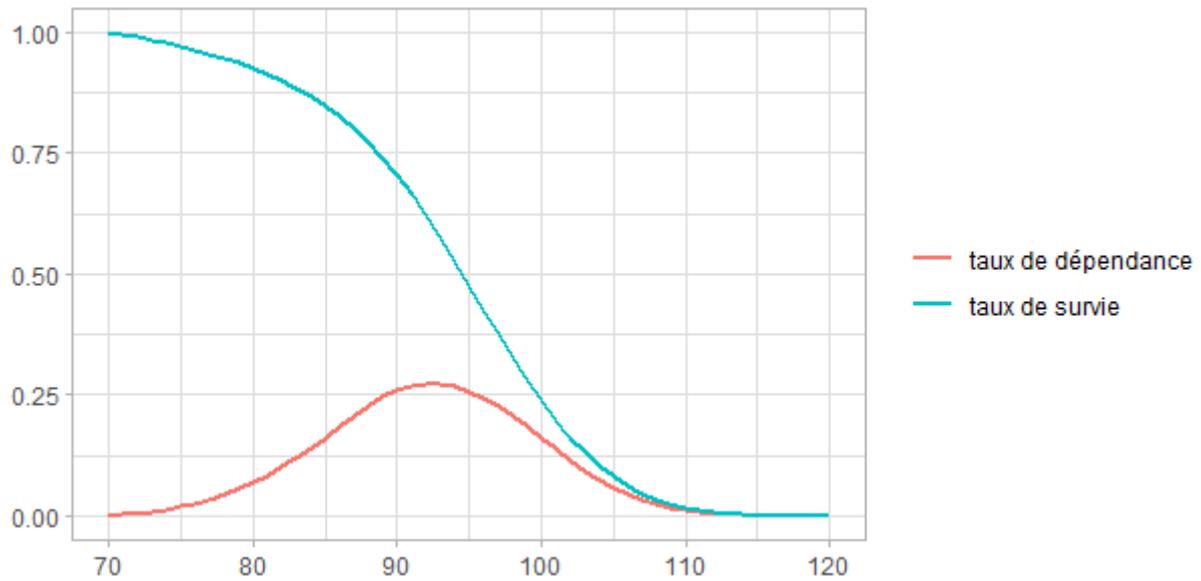


FIGURE 2.2 – Taux de survie et de dépendance d'une femme âgée de 70 ans

Chapitre 3

Les risques économiques

Nous allons à présent nous pencher sur les risques économiques liés à l'investissement dans le viager immobilier. L'intégration des variables économiques sera faite à l'aide d'un générateur de scénarios économiques.

3.1 Générateur de scénarios économiques

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est constitué par un ensemble de modèles reliés par une structure de dépendance. Ils permettent de simuler une vaste gamme de conditions économiques futures afin d'évaluer l'impact potentiel sur des actifs, des passifs, ou des stratégies d'investissement spécifiques. Cette simulation se fait en tenant compte de la nature aléatoire et de l'incertitude inhérente aux marchés financiers et aux économies mondiales. Les GSE permettent donc d'étudier les performances de l'actif en fonction des évolutions du marché et de valoriser les flux financiers d'un contrat.

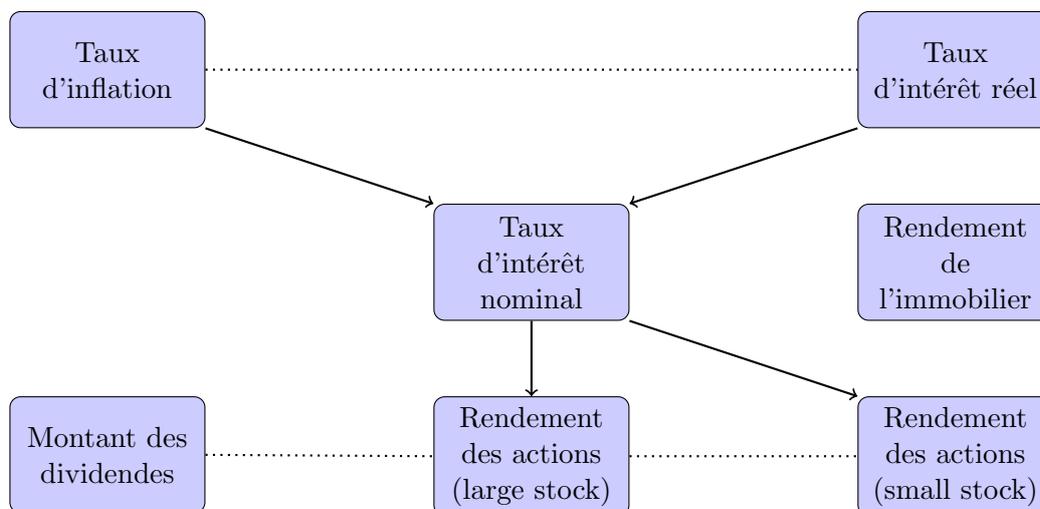
Les scénarios sont construits au moyen d'équations stochastiques, ayant pour objectif de modéliser fidèlement la dynamique des variables économiques ciblées. Les équations sont assorties d'une structure de dépendance, élaborée de manière à respecter les relations économiques fondamentales, sous réserve des hypothèses sous-jacentes émises.

Enfin, les modèles sont calibrés à l'aide d'un ensemble de données historiques pertinents. Ces données permettent d'estimer les paramètres du modèle. Une fois les paramètres estimés, les scénarios sont générés en fonction de ces derniers et des conditions initiales établies.

3.1.1 Les différents modèles

Il existe différents modèles de GSE intégrés de référence : [Wilkie \(1984\)](#), [Hibbert et al. \(2001\)](#) et [Ahlgrim et al. \(2005\)](#). Nous concentrerons notre attention sur le modèle proposé par Ahlgrim qui couvre les taux d'intérêt, d'inflation, de dividendes, le rendement des actions et les revenus de l'immobilier. Après une revue de la littérature existante, l'article d'Ahlgrim ambitionne de répondre aux limites des approches précédentes et de fournir une approche accessible. Le schéma ci-dessous reprend la structure du modèle.

Structure du modèle d'Ahlgrim



3.1.2 La démarche

On va par la suite décrire les particularités des variables qui vont intégrer le modèle et présenter les modèles que l'on utilisera pour projeter les variables. Ensuite, nous allons comparer les prévisions du modèle d'Ahlgrim présenté et calibré dans [Planchet et al. \(2009\)](#) et l'évolution de ces variables depuis. Confronter les prévisions avec les données réelles va nous permettre de déterminer ce qui fonctionne ou non dans les modèles. A la suite de cette analyse, nous allons adapter et calibrer les modèles en fonction des résultats obtenus.

Le calibrage des modèles est une étape critique pour garantir que les projections futures soient à la fois crédibles et utiles pour la prise de décision.

3.1.3 Le modèle pour le viager

Tel que mentionné précédemment, les variables économiques pertinentes pour la valorisation d'un contrat viager et l'évaluation de ses performances sont l'inflation, l'immobilier et les taux d'intérêt sans risque. L'inflation sera utilisée pour indexer les rentes, on utilisera également un autre indice : l'indice du coût de la construction (ICC). L'indice immobilier sera utilisée pour valoriser les biens à l'actif et les taux sans risque pour actualiser les flux. Nous utiliserons une version modifiée du modèle d'Ahlgrim, excluant le rendement des actions et ajoutant un second indice de prix au côté de l'inflation. Une attention particulière sera accordée au modèle des revenus immobiliers. Dans le contexte d'un contrat viager, il est crucial de modéliser l'évolution des prix immobiliers jusqu'à la fin du contrat. Étant donné que le créancier occupe généralement le bien, les loyers ne sont pas pertinents dans cette étude, ce qui pourrait nécessiter une adaptation du modèle immobilier proposé par Ahlgrim.

L'espérance de vie résiduelle des vendeurs de viager est d'environ 11 à 12 ans (cf [Coulomb et al. \(2021\)](#)). Par conséquent, cet horizon temporel est le plus critique pour notre analyse. Néanmoins, il est nécessaire de projeter les variables économiques au-delà de cet horizon pour accompagner les trajectoires jusqu'à la fermeture des tables actuarielles pour les créanciers les plus jeunes (la vie résiduelle maximale prise en compte par les tables). Cela permet de prendre en compte et d'actualiser les flux financiers de tous les scénarios générés.

Pour chaque scénario, nous générerons une valeur chaque année jusqu'à l'horizon maximal pour pouvoir actualiser tous les flux possibles des contrats viagers.

3.2 Indice de prix

L'inflation est définie en économie par la hausse générale et continue des prix des biens et services sur une période donnée, la monnaie perd alors de son pouvoir d'achat avec le temps. On comprend donc qu'une rente viagère est généralement indexée sur l'inflation, cela permet de protéger le pouvoir d'achat du crédientier qui compte sur cette rente pour maintenir son niveau de vie. L'indexation de la rente sur un indice d'inflation est donc une protection pour le crédientier, mais crée un risque pour le débientier.

L'inflation est mesurée par un indice de prix, l'indice des prix à la consommation (IPC) calculé par l'INSEE. Les rentes des contrats viagers sont souvent indexées sur cet indice, mais un autre est très utilisé en viager immobilier : l'indice du coût de la construction des immeubles à usage d'habitation (ICC), aussi calculé par l'INSEE. Cet indice relève les variations tarifaires dans le temps du secteur du bâtiment. L'idée est d'avoir un indice lié à l'immobilier, ainsi une hausse de l'indice des coûts à la construction à des chances de se produire en même temps qu'une hausse de la valeur de l'immobilier, traduisant un marché tendu, et inversement. L'actif variant dans le même sens que le passif, cela pourrait réduire le risque pour le débientier.

On modélisera par la suite les deux indices de prix (IPC et ICC) pour pouvoir indexer les rentes des contrats en fonction de l'indice sélectionné.

3.2.1 Modélisation

On suppose que la variation des prix (pour les deux indices) suit une dynamique stochastique. Le taux de variation des prix π (avec $\pi_t = \ln(\frac{IPC_t}{IPC_{t-1}})$) est modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$d\pi_t = \kappa_\pi(\mu_\pi - \pi_t)dt + \sigma_\pi dW_\pi$$

Avec μ_π la moyenne des rendements, κ_π la vitesse de retour à la moyenne, σ_π la volatilité et W_π un processus de Wiener. Le processus de Wiener est un mouvement Brownien standard monodimensionnel, démarrant à l'origine, et à valeurs réelles.

Après discrétisation exacte (Planchet et al. (2010)) on obtient :

$$\pi_{t+1} = \pi_t \times \exp(-\kappa_\pi) + \mu_\pi \times (1 - \exp(-\kappa_\pi)) + \epsilon_{\pi,t} \times \sigma_\pi \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_\pi)}{2\kappa_\pi}} \quad (3.1)$$

Avec $\epsilon_{\pi,t}$ un bruit blanc gaussien.

On estime les paramètres à l'aide d'une régression linéaire simple. En effet, l'équation 3.1 est de la forme :

$$\pi_{t+1} = \alpha_\pi + \beta_\pi \times \pi_t + \epsilon_{\pi,t}$$

On a $\beta_\pi = \exp(-\kappa_\pi)$, donc $\kappa_\pi = -\ln(\beta_\pi)$.

Aussi $\alpha_\pi = \mu_\pi \times (1 - \exp(-\kappa_\pi))$, donc $\mu_\pi = \frac{\alpha_\pi}{1 - \exp(-\kappa_\pi)} = \frac{\alpha_\pi}{1 - \beta_\pi}$.

La volatilité du modèle est égale à la volatilité de la régression divisée par $\sqrt{\frac{1-\exp(-2\kappa_\pi)}{2\kappa_\pi}}$.

La calibration des modèles est l'estimation de α_π et β_π et nécessite un historique pour effectuer la régression linéaire. C'est à ce moment qu'interviennent les indices de prix.

3.2.2 Indice des prix à la consommation

On commence par comparer l'inflation réalisée aux projections mises en place dans [Planchet et al. \(2009\)](#).

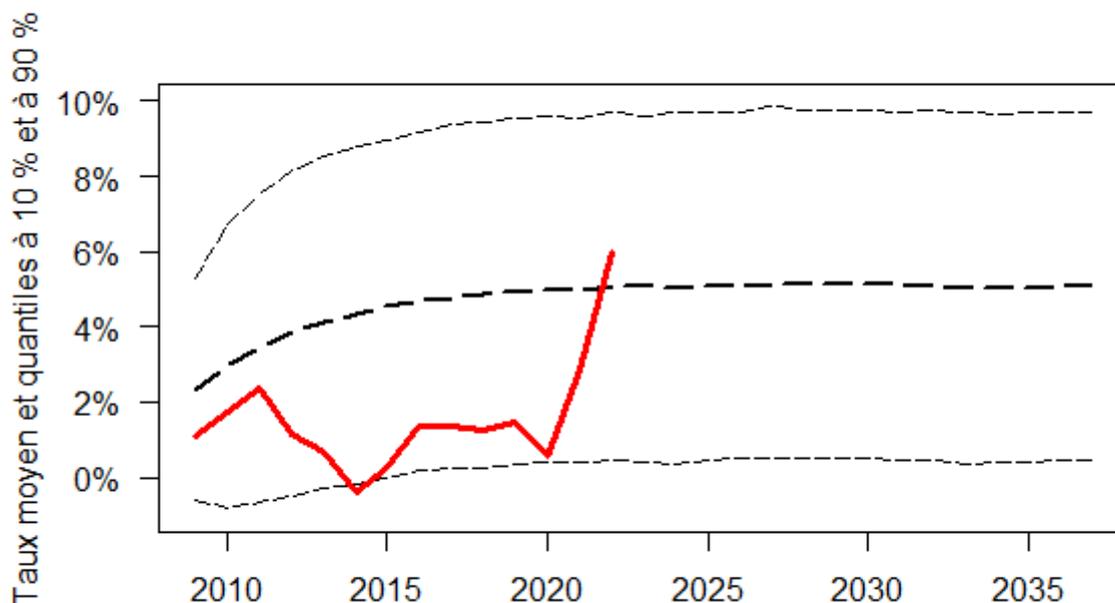


FIGURE 3.1 – Projection d'inflation de Planchet et al

On voit sur le graphique que l'inflation réalisée (en rouge) est principalement dans la partie basse des projections, en dessous de la moyenne de long terme et proche des scénarios les plus bas sauf pour la dernière valeur en 2022. Le problème vient du fait que le modèle a été calibré à partir de données anciennes pour avoir de la profondeur d'historique. Cependant le contexte économique a changé dans les années 1990, avec notamment la fondation de la Banque Centrale Européenne (BCE) en 1998 qui a pour principal objectif de maintenir la stabilité des prix et l'inflation annuelle au-dessous, mais à un niveau proche, de 2%. [Planchet et al. \(2009\)](#) conseillait d'ailleurs de prendre en compte cette contrainte à la suite du traitement purement statistique, une démarche pour intégrer des informations exogènes est présenté dans [CAJA et al. \(2009\)](#).

On observe en effet (3.2) que l'inflation a effectivement été contenue depuis le milieu des années 1980 au alentour de 2% jusqu'en 2022. Le redressement de l'économie après les confinements causé par la pandémie de covid-19 a été à l'origine de pressions inflationnistes : la demande accumulée pendant les confinements, les problèmes de chaîne d'approvisionnement et l'augmentation du prix des matières

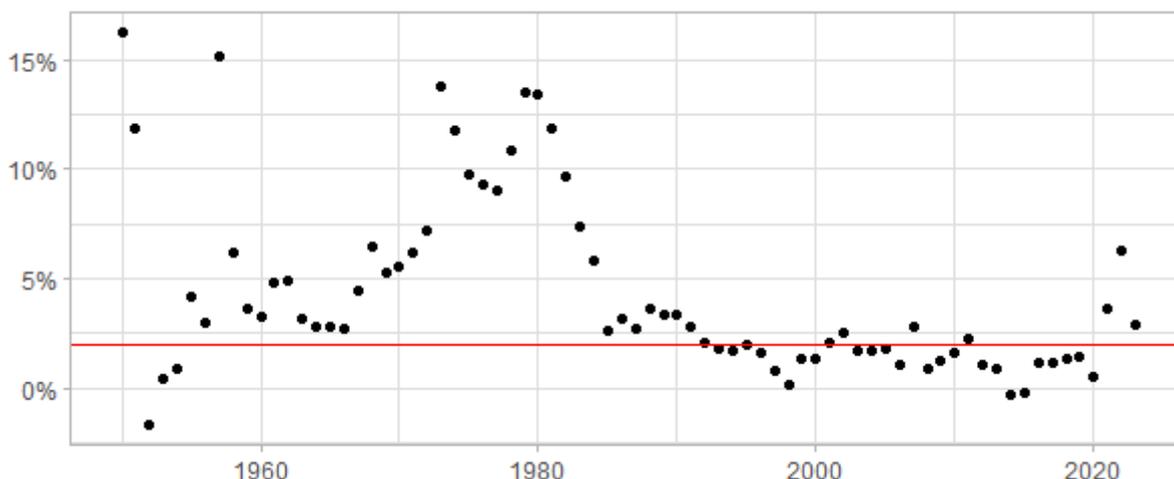


FIGURE 3.2 – Taux d’inflation historique

premières se sont conjugués. Par la suite, les tensions géopolitiques avec la guerre en Ukraine et ses conséquences ont participé à la poursuite de la hausse. La question est donc de savoir si la hausse de l’inflation est conjoncturelle, auquel cas, on pourra se baser sur les objectifs de la BCE pour calibrer le modèle, ou si le retour d’un haut niveau d’inflation est structurel.

Avec un graphique (3.3), produit avec les données de l’INSEE, qui montre l’évolution du taux d’inflation sur un an glissant depuis début 2022, on voit que le taux baisse depuis mai 2023 après une hausse continue. Cela semble montrer que la hausse du taux d’inflation a été jugulée, notamment par l’action de la BCE. L’hypothèse d’un retour au régime d’inflation d’avant 2022 paraît donc acceptable et est cohérente avec la théorie macroéconomique classique : l’inflation a augmenté à cause des crises et de l’action du gouvernement pour soutenir l’économie puis a baissé à la suite des hausses des taux directeurs décidée par la Banque Centrale. Il faut tout de même porter une attention particulière à cette variable.

Paramètres

Pour évaluer l’impact de l’historique sur l’estimation des paramètres, nous allons calculer les paramètres sur des périodes glissantes de 30 ans entre 1963 et 2023. On voit les résultats sur le graphique suivants (3.4).

On voit que la moyenne de l’inflation se stabilise clairement et que le paramètre μ est proche de l’objectif de 2%. La volatilité a aussi baissé ces dernières années. Le paramètre κ de vitesse de retour à la moyenne est assez instable et dépendant des dernières valeurs.

Au vu des remarques précédentes, si on anticipe un retour durable aux conditions macro-économiques d’avant covid, la prise en compte de l’historique des données depuis le milieu des années 1980 apparaît pertinente. Cette période correspond à la fin de l’instabilité monétaire des années 1975-1985 consécutive aux chocs pétroliers et à l’affirmation du système monétaire européen.

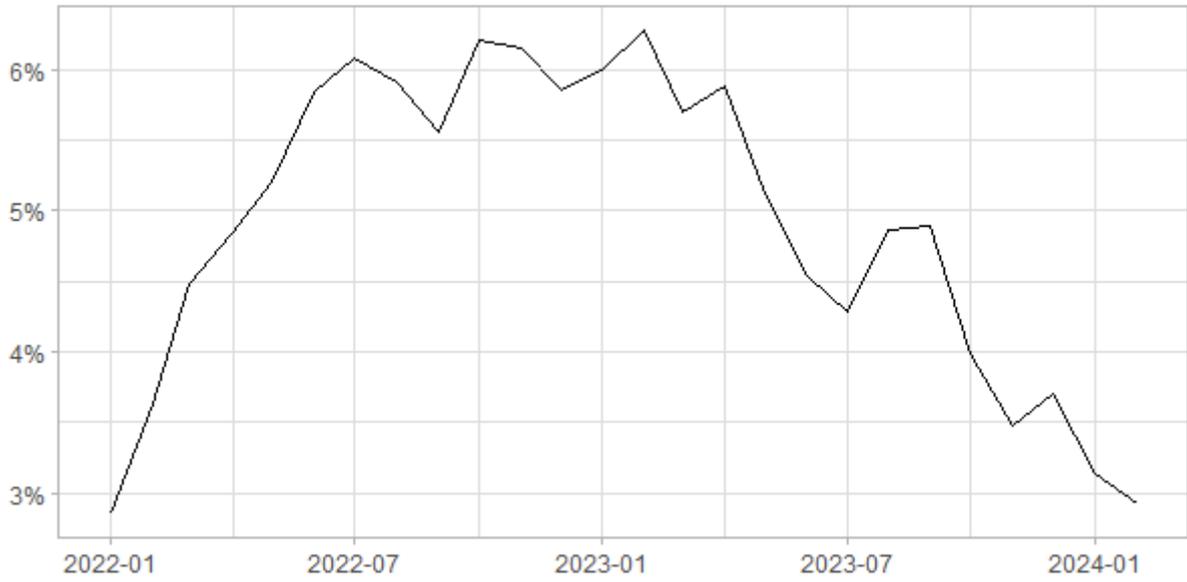


FIGURE 3.3 – Taux d’inflation sur 1 année glissante depuis 2022

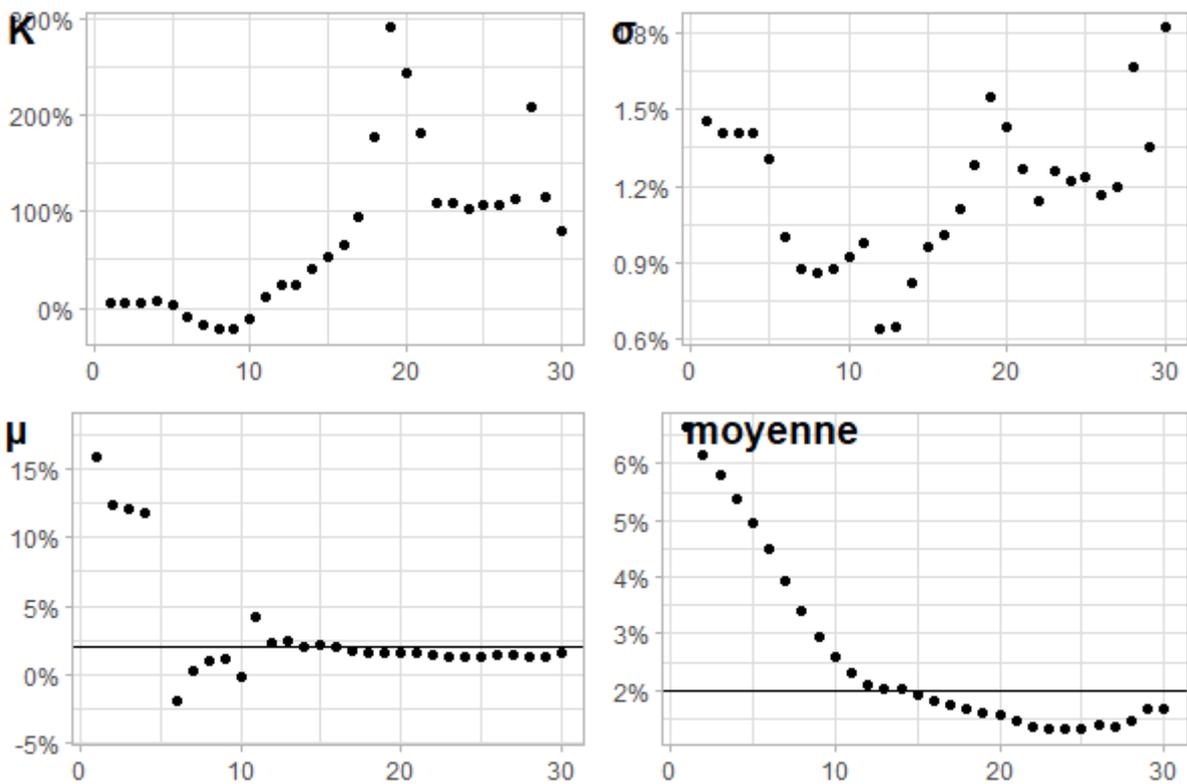


FIGURE 3.4 – Evolution des paramètres en fonction de l’historique

Evaluation du modèle

La régression linéaire sur l'historique depuis 1985 nous donne les résultats suivants :

TABLE 3.1 – Résultats de la calibration du modèle IPC

Moyenne de long terme : μ	1.87%
Vitesse de retour à la moyenne : κ	0.567
Volatilité : σ	1.33%

Les résultats d'[Ahlgrim et al. \(2005\)](#) sont : $\mu = 4.8\%$, $\kappa = 0.47$ et $\sigma = 3\%$ aux Etats-Unis sur la période 1946-2001. Les différences s'expliquent par la différence d'historiques.

Le tableau suivant présente le résultat des tests d'adéquation qui ont été effectués sur le modèle :

TABLE 3.2 – Résultats des tests d'adéquations du modèle IPC

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0.0.3055	Le pouvoir explicatif du modèle est de 31%
Fisher	P = 0.0001904	Le modèle global est significatif
α	P = 0.01206	Le paramètre est significatif
β	P = 0.00019	Le paramètre est significatif
Moyenne des résidus	0.01025	La moyenne des résidus est proche de zéro
Breusch-Godfrey	P = 0.721	Absence d'autocorrélation d'ordre p = 1
ARCH(0,1)	P = 0.9207	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre q = 1
Jarque Bera	P = 7.121e-08	L'hypothèse de normalité des résidus n'est pas vérifiée

Le test de Fisher est un test de nullité de l'ensemble des variables, le rejet de l'hypothèse nulle montre la pertinence de la relation linéaire. Le R^2 ajusté de 31% montre cependant que le pouvoir explicatif du modèle est modeste et qu'une grande part de la variabilité de l'inflation reste inexpliquée.

Le non-rejet du test de Breusch-Godfrey montre l'absence d'autocorrélation entre les résidus. Le non-rejet du test ARCH(0,1) montre lui l'absence d'hétéroscédasticité (on parle d'hétéroscédasticité lorsque les variances des résidus sont différentes).

Les tests sont vérifiés sauf le test de normalités des résidus (le code du test de Jarque Bera est repris de [Planchet et al. \(2009\)](#)). La normalité des résidus n'étant pas vérifiée, il faudra être prudent quant aux intervalles de confiances des projections, les grands écarts à la moyenne peuvent par exemple être sous-estimés.

Projection

Les scénarios projetés, représentés dans le graphique ci-dessous, prévoient un retour immédiat de l'inflation vers la moyenne de long terme. Le modèle donne des scénarios qui paraissent assez juste dans un cadre économique tel qu'il existait avant les tensions (pandémie de Covid-19 et guerre en Ukraine) récentes. Le modèle peut présenter de rare pics d'inflation, dont un à 6%, mais il reste limité pour les scénarios stressés et pour simuler des chocs extérieurs.

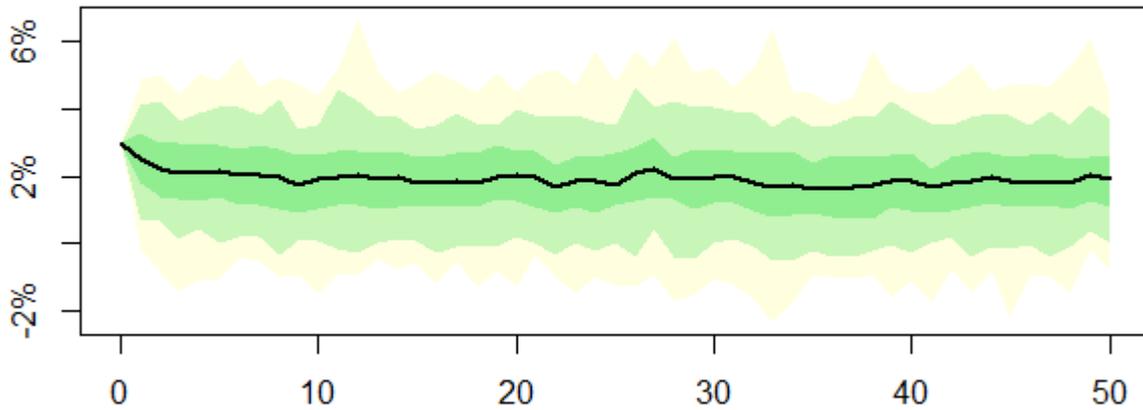


FIGURE 3.5 – Taux d'inflation (IPC) projeté

Aussi, on voit qu'il y a des scénarios, rares (la partie jaune du graphique correspondant aux quantiles 5% et 95%), dans lesquels l'inflation est négative. Cela peut également arriver dans la réalité, cependant les rentes viagères ne peuvent généralement pas être réindexer à la baisse. Dans le modèle, on remplacera donc les valeurs inférieures à zéro par zéro.

3.2.3 Indice du coût de la construction

Pour décrire l'évolution de l'ICC on utilisera le même modèle que pour l'IPC, les paramètres seront cependant différents car les valeurs de l'indice sont différentes de celle de l'IPC, comme on le voit dans le graphique ci-dessous.

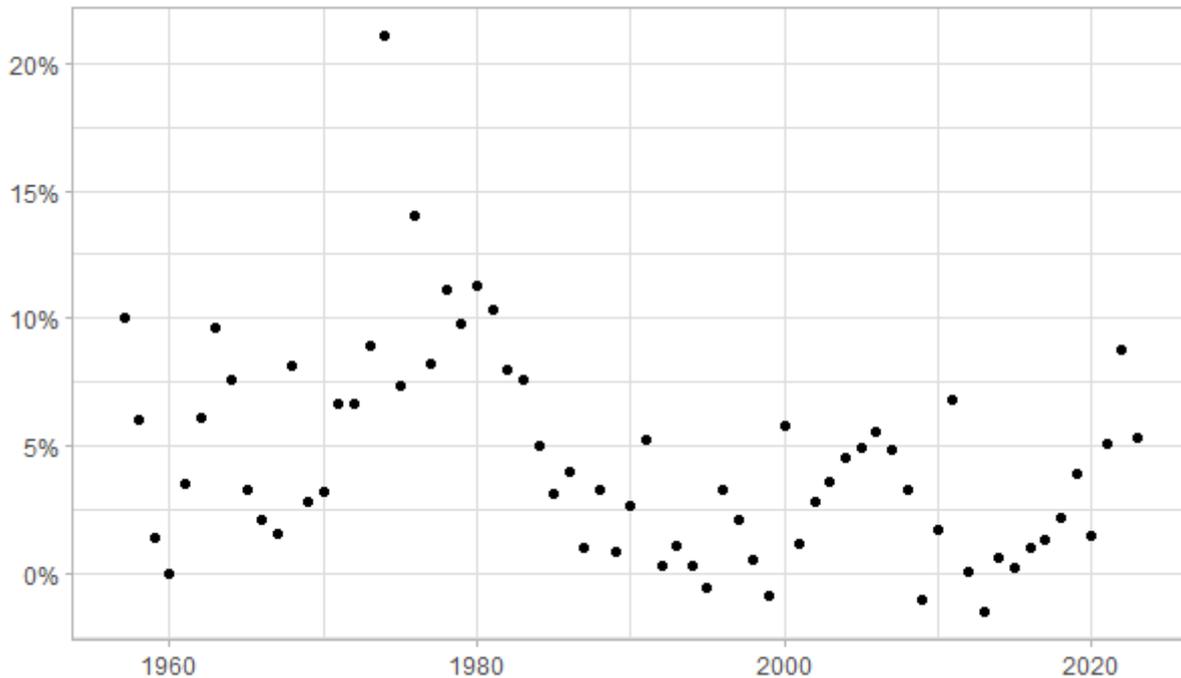


FIGURE 3.6 – Taux de variation de l'ICC historique

On voit ici également un changement de régime des taux depuis le milieu des années 1980, la volatilité semble malgré tout rester assez importante. L'ICC est un indice plus spécifique que l'IPC, ce qui explique qu'il est plus volatile, car très sensible aux événements touchant le secteur du bâtiment, contrairement à l'IPC où une augmentation des prix dans un secteur peut être compensée par la stabilité des prix dans les autres secteurs.

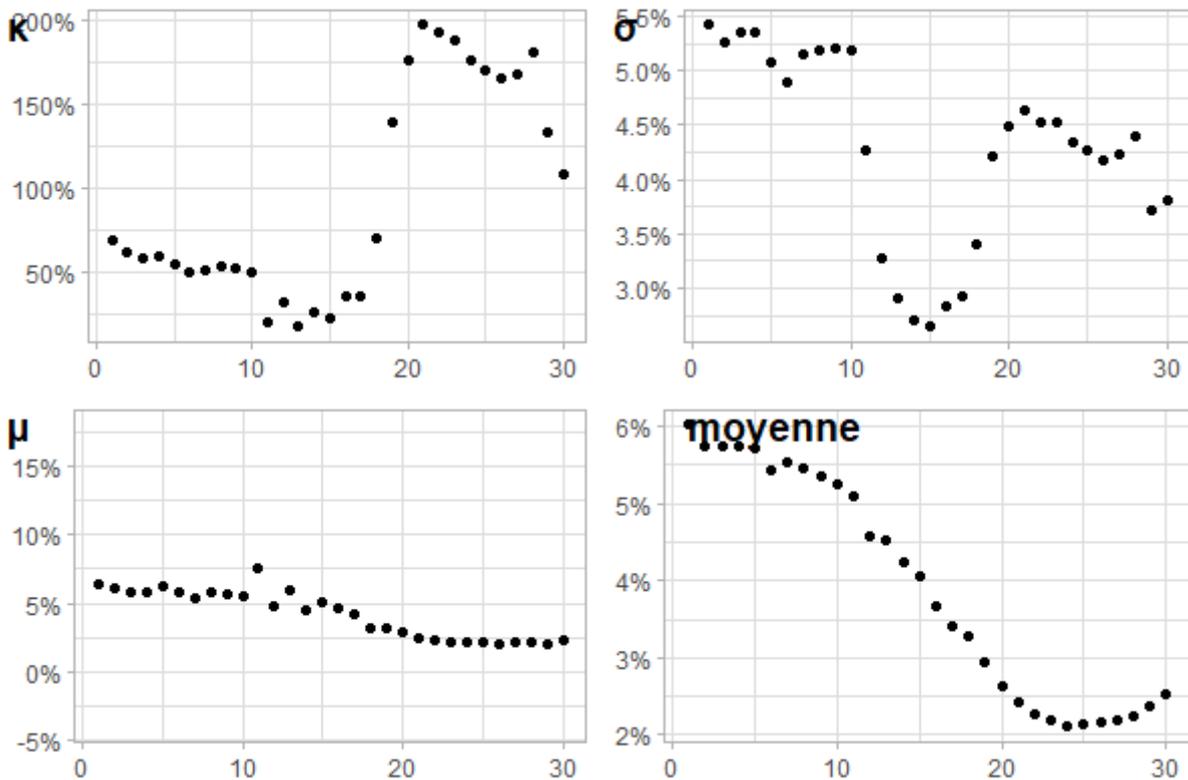


FIGURE 3.7 – Evolution des paramètres en fonction de l'historique

En utilisant la même technique de calcul des paramètres sur une période glissante de 30 ans que pour l'IPC, on voit aussi la moyenne et le paramètre μ se stabiliser. On peut donc utiliser la même profondeur d'historique que pour l'IPC, à savoir depuis le milieu des années 1980.

La régression linéaire sur l'historique depuis 1985 nous donne les résultats suivants :

TABLE 3.3 – Résultats de la calibration du modèle ICC

Moyenne de long terme : μ	2.28%
Vitesse de retour à la moyenne : κ	1.05
Volatilité : σ	3.72%

La moyenne de long terme est plus élevée que pour l'ICC. La volatilité est également bien plus élevée que pour l'ICC comme pressenti à la vue des taux (3.6). L'utilisation de l'ICC à la place de l'IPC est donc susceptible d'apporter des revalorisations de rentes viagères plus élevées et une variation plus grande dans les résultats.

De même que pour l'ICC, on fait les tests d'adéquation au modèle.

TABLE 3.4 – Résultats des tests d'adéquations du modèle ICC

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0.1249	Le pouvoir explicatif du modèle est de 12%
Fisher	P = 0.04114	Le modèle global est significatif
α	P = 0.0221	Le paramètre est significatif
β	P = 0.0511	Le paramètre est significatif
Moyenne des résidus	0.002404	La moyenne des résidus est proche de zéro
Breusch-Godfrey	P = 0.3685	Absence d'autocorrélation d'ordre p = 1
ARCH(0,1)	P = 0.8655	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre q = 1
Jarque Bera	P = 0.4569	L'hypothèse de normalité des résidus n'est pas vérifiée

Les tests sont tous vérifiés. Cependant le R^2 ajusté est de 12%, ce qui montre que le pouvoir explicatif du modèle est très modeste. Ce modèle est donc assez peu satisfaisant.

3.3 Immobilier

3.3.1 Particularités de l'actif immobilier

L'immobilier est un actif particulier, il n'existe pas de marché d'échanges comme pour les actions. Les biens sont hétérogènes, donc peu substituables contrairement aux actions et aux obligations. La liquidité est aussi très faible, on estime la vitesse de rotation à 3,2% par an contre 75% pour les actions. Le prix des biens immobiliers est très liés à leur localisation, l'évolution de l'attractivité du territoire peut impacter fortement le prix des biens.

Le premier enjeu important est de choisir un indice immobilier pertinent, les particularités de l'actif immobilier rendent la construction d'indices complexe. Pour le viager, on s'intéressera à l'immobilier d'habitation. On prendra un indice pour toute la France, l'indice Notaires-Insee des prix des logements anciens. Cet indice utilise les bases notariales et les compétences méthodologiques de l'INSEE.

La vente en viager n'est pas présente partout sur le territoire dans les mêmes proportions. Il peut être judicieux de choisir un indice différent si l'on des informations précises sur la localisation des achats ou le type de bien, les données seront cependant probablement moins fiable ou avec un plus petit historique (l'indice INSEE-Notaire par exemple ne fournit une différenciation géographique que depuis les années 1990). Il est nécessaire que les achats soient faits sur des biens aux caractéristiques variées pour que l'utilisation d'un indice général comme celui de l'INSEE soit adapté. Il faut donc s'assurer que l'ensemble des biens achetés ne soit pas exposé à un risque spécifique.

Un modèle immobilier peut, en plus de la dynamique des prix, chercher à retranscrire les revenus perçus à travers les loyers. Pour notre modèle, nous nous intéresserons uniquement aux prix, le bien en viager étant souvent occupé.

Ces particularités de l'actif rendent complexe la modélisation de la dynamique des prix de l'immobilier, il n'y a donc pas de modèle de référence spécifique au marché immobilier. Nous allons commencer par une analyse du marché immobilier français qui reprend, entre autres Jacques Friggit ([Friggit \(2010\)](#)).

3.3.2 Analyses de Jacques Friggit

Analyse

Jacques Friggit a reconstitué un indice des prix de l'immobilier depuis 1200. On ne s'intéressera cependant qu'aux données depuis les années 1960, années à partir desquelles l'impact du contrôle des loyers de la première moitié du XX^{ème} siècle a été estompé.

Un résultat important de son analyse est appelé "Tunnel de Friggit", c'est l'observation de la stabilité des prix de l'immobilier par rapport au revenu disponible des ménages (avec une marge de $\pm 10\%$) depuis le milieu des années 1960 jusqu'à l'an 2000 environ. Ce phénomène est empirique et ne constitue pas une preuve de causalité directe. Différents facteurs ont pu contribuer à une évolution conjointe des deux variables, la relation étant d'ailleurs sensible aux choix des indices. La relation a tout de même été observée dans d'autres pays (Etats-Unis et Royaume-Uni) et apparaît "naturelle", en effet, même si la proportion du revenu des ménages consacrée aux dépenses de logement peut varier, c'est bien le revenu des ménages qui conditionne la demande.



FIGURE 3.8 – évolution des prix de l'immobilier rapporté au revenu disponible par ménage

On observe cette relation dans le graphique ci-dessus. On remarque aussi que la stabilité a été cassée dans les années 2000 avec une hausse des prix par rapport au revenu disponible et une stabilisation à un niveau supérieur depuis. Plusieurs tentatives d'explications ont été avancées pour expliquer cette divergence depuis. La baisse des taux d'intérêts qui permet une plus grande capacité d'endettement de la part des ménages pourrait être une explication. Certains ont avancé le vieillissement de la population comme explication, l'immobilier serait vu comme un placement pour la retraite.

Propriétés dégagées par l'analyse

Avec les données depuis 1965, on trouve une forte autocorrélation des variations de prix avec un pas de temps d'un an. Cela tend à montrer que la variation du prix serait cyclique. Ce résultat est cependant peu robuste à un changement d'historique.

Frigit trouve un faible lien entre taux d'intérêt de long terme et évolution des prix immobiliers. Ce résultat est contre intuitif. En effet, une diminution de taux d'intérêt entraîne une augmentation du capital pouvant être emprunté, et donc du prix auquel les biens peuvent être achetés. Les données empiriques donnent à penser que le lien entre ces deux variables est plus complexe.

Éléments de perspectives

L'évolution des prix immobiliers dans un "couloir" parallèle au revenu par ménage apparaît assez crédible. Le changement de palier de ce tunnel est à ce titre assez surprenant. On peut l'expliquer par un changement de comportement des ménages ou des conditions économiques particulières. La question est de savoir si le palier actuel peut se maintenir ou si le retour à l'ancien palier, brutal ou progressif, risque de se produire.

Il faut aussi rappeler qu'une régularité observée dans le passé peut nous aider à comprendre le comportement d'une variable, mais n'est pas une prédiction. De plus, la période d'observation retenue reste limitée, on ne peut donc en tirer des conclusions définitives.

3.3.3 Modélisation

Le cours de l'immobilier est généralement modélisé selon le modèle classique de Black & Scholes (ou mouvement brownien générique). Les paramètres μ et σ sont fixés :

$$S_t = S_0 * \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma * W_t\right)$$

Où W_t est un processus de Wiener μ la moyenne de la croissance des prix, σ la volatilité et S_0 le prix de l'immobilier à l'origine de la période.

Après la discrétisation, on obtient :

$$s_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s \times \varepsilon_{s,t}$$

On a alors seulement à mesurer les paramètres μ_s et σ_s .

[Ahlgrim et al. \(2005\)](#) propose de modéliser les taux de rendements immobiliers, comme l'inflation plus haut, à l'aide d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de retour à la moyenne :

$$ds_t = \kappa_r(\mu_s - s_t)dt + \sigma_m dB_{s,t}$$

Il existe des modélisations plus complexes, [Gallet \(2017\)](#) par exemple cherche à expliquer la dynamique des prix à partir d'une modélisation de l'offre et de la demande.

3.3.4 Choix du modèle

Les rendements réel de l'immobilier (3.9, en rouge) sont dans la partie basse des projections de [Planchet et al. \(2009\)](#), ceux-ci ont l'air surestimés. C'est cohérent avec ce que l'on a constaté sur l'inflation, l'immobilier a lui aussi subit l'inflation générale des prix.

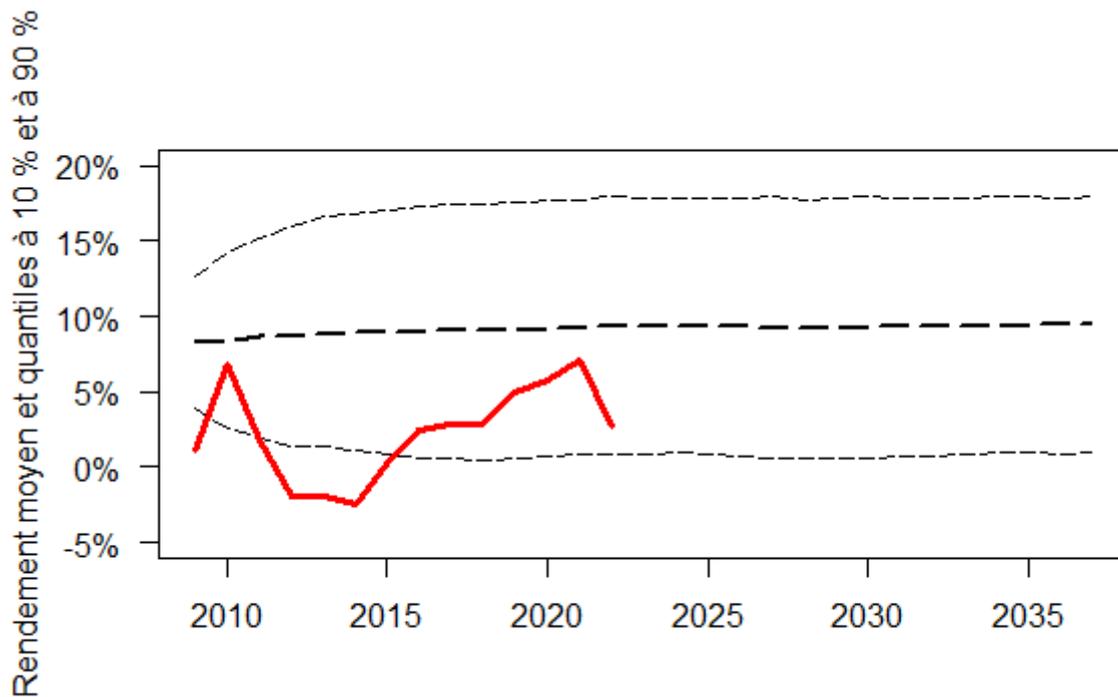


FIGURE 3.9 – Projection de l'immobilier de Planchet et all

On peut projeter le taux de rendement de l'immobilier corrigé de l'inflation (3.10), ou taux réel, pour voir si les prévisions sont meilleures. On utilise des taux logarithmiques donc il suffit de prendre : $r_t = s_t - \pi_t$.

Le modèle est plus conforme aux données réelles, malgré des valeurs très basse en 2008, 2009 et 2023. Ce sont les répercussions de la crise de 2008 qui expliquent le premier choc. Le rendement de l'immobilier corrigé de l'inflation apparaît plus facilement mobilisable, nous allons donc l'utiliser par la suite.

Aussi, ce qui nous intéresse n'est pas le taux de rendement de l'immobilier, mais son prix, qu'on va prendre en base 100. Pour avoir le prix en t on fait le calcul suivant : $S_t = 100 \times \exp\left(\sum_{i=1}^t s_i\right)$

Nous allons donc comparer l'évolution des prix obtenus avec les modèles de Black & Scholes et d'Ornstein-Uhlenbeck (ou Vasiceck).

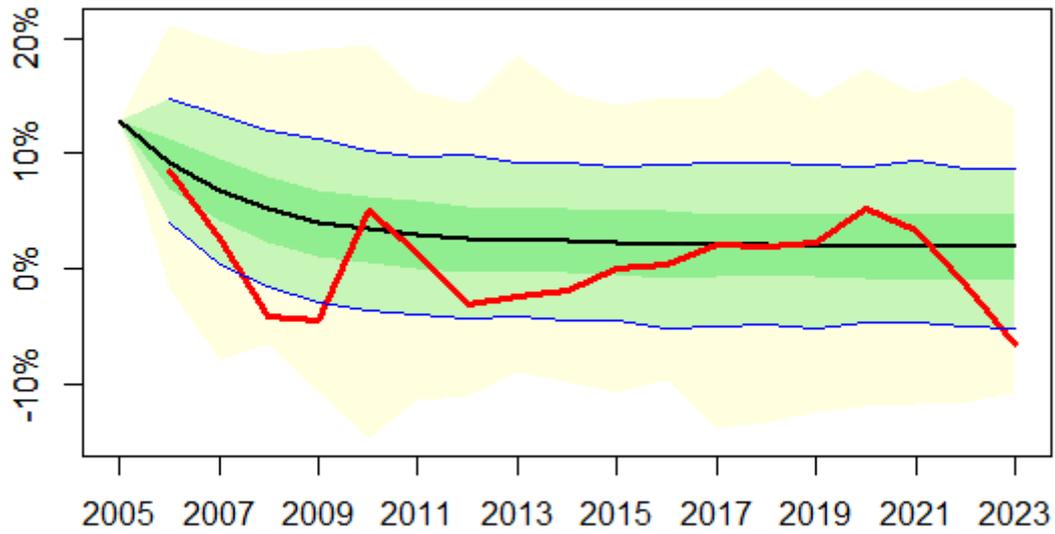


FIGURE 3.10 – Projection du taux de rendement de l’immobilier corrigé de l’inflation

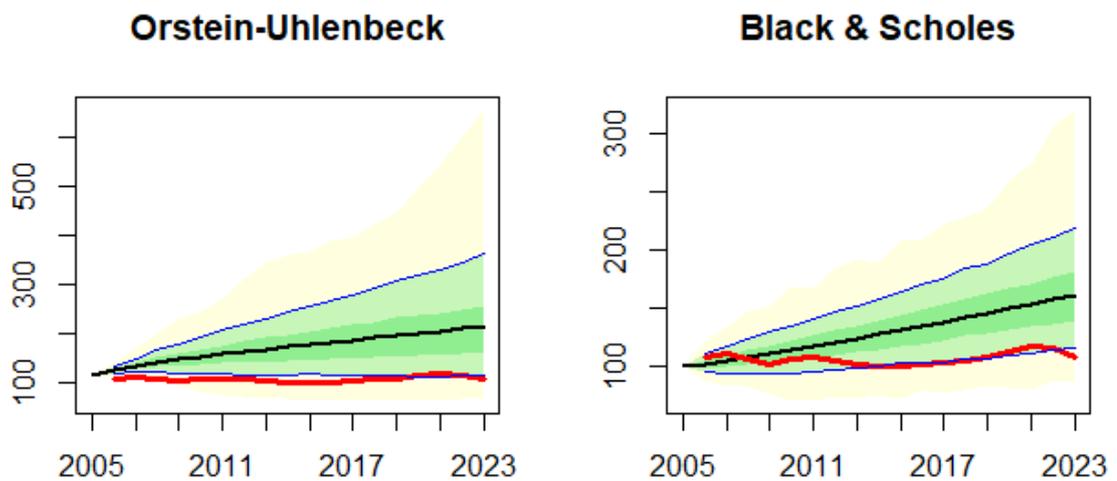


FIGURE 3.11 – Projection des prix de l’immobilier

Les données réalisées du marché (ligne rouge dans les graphiques) sont dans les deux modélisations dans la partie basse des prévisions des modèles (la ligne bleue du bat délimite les 5% de scénarios les plus bas). Ce biais est sans doute dû à la très bonne performance de l'immobilier dans les années précédant la crise de 2008 et au changement du régime de l'inflation dont il a été question plus haut. On arrive malgré tout à une modélisation plus proche de la réalité avec le modèle de Black & Scholes (3.11) et avec une moins grande amplitude des résultats (un modèle plus précis), c'est donc ce modèle que nous conserverons. Avec le modèle de Black & Scholes on abandonne l'autocorrélation qui paraissait pourtant pertinente.

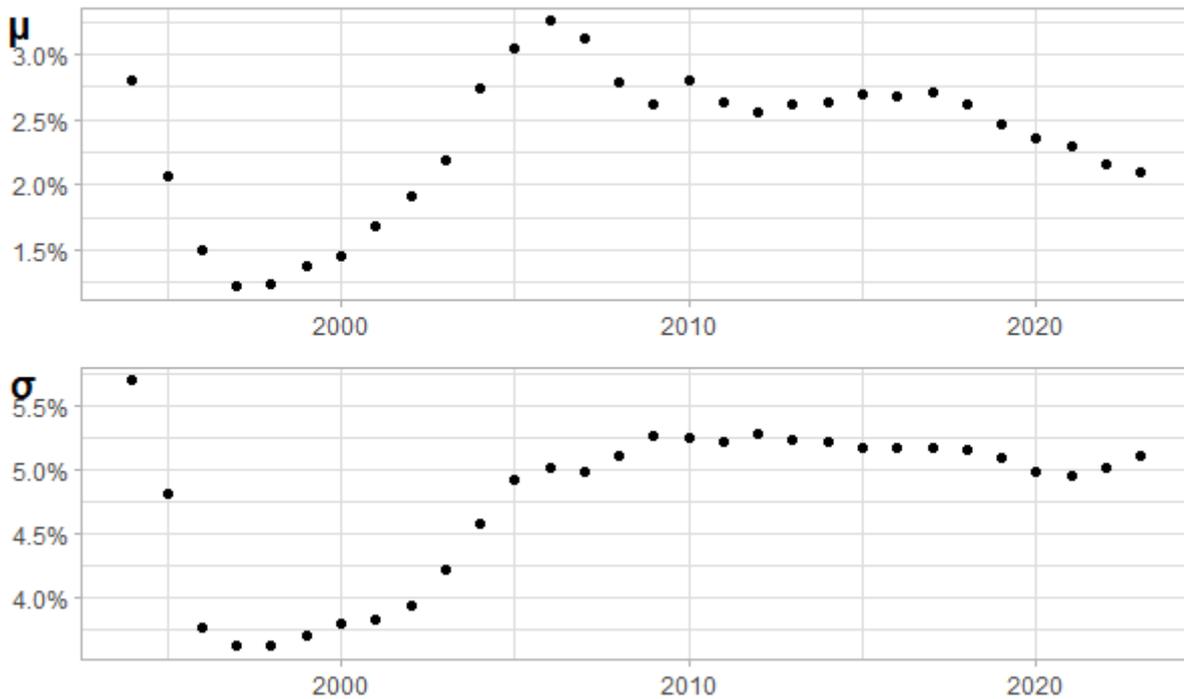


FIGURE 3.12 – Evolution des paramètres en fonction de l'historique

Les paramètres du modèle se stabilisent avec des historiques de calcul de 30 ans glissant. On obtient avec les 30 dernières années :

TABLE 3.5 – Résultats de la calibration du modèle immobilier

Moyenne de long terme : μ	2.09%
Volatilité : σ	5.12%

3.4 Facteur d'actualisation

3.4.1 Actualisation des flux

Pour valoriser un flux financier futur, il faut l'actualiser, c'est-à-dire calculer la valeur actuelle d'un montant dont on disposera seulement dans le futur. Pour ce faire, on utilise un taux d'actualisation appelé taux zéro-coupon. Ce taux est le taux d'intérêt obtenu avec un investissement donnant lieu au paiement d'une unique unité monétaire au terme de n années.

Le prix d'une obligation donnant lieu au paiement d'une unité monétaire à maturité T à la date t est noté $B(t, T)$. On calcul $B(t, T)$ avec le taux actuariel r_a , le taux d'actualisation qui appliqué à tous les flux, donne le prix de marché :

$$B(t, T) = \frac{1}{(1 + r_a(t, T))^{T-t}}$$

et avec les taux continus : $B(t, T) = \exp(-r_c(t, T) * (T - t))$

La courbe des taux zéros coupon est la représentation graphique des taux zéro-coupon en fonction de leurs maturités. Disposer de cette courbe permet d'actualiser chaque flux financier en fonction de leur maturité. Il existe plusieurs courbes : la courbe des taux d'emprunts d'Etat (généralement considérés sans risque), la courbe des taux interbancaire ou les courbes "corporate".

3.4.2 Risque de taux

Dans le cadre d'un GSE, la modélisation de la courbe des taux sert à modéliser les produits de taux. Le prix d'un produit obligataire est, en effet, obtenu avec une combinaison linéaire de zéro-coupons.

Pour modéliser la courbe, on commence par modéliser les taux d'intérêts, réels ou nominaux. A partir de cette modélisation, on peut reconstruire la courbe des taux avec les paramètres des facteurs et les valeurs des taux. Il existe différents modèles, Cox, Ingersoll et Ross (1985) ou Heath, Jarrow et Morton (1987 parmi les plus connus.

[Ahlgrim et al. \(2005\)](#) utilise le modèle de HULL et White (1994) à deux facteurs, qui utilise une modélisation classique de retour à la moyenne pour les taux court et les taux long. C'est cette méthode que nous utiliserons.

Dans le cadre d'un fonds viager, l'évaluation de produits de taux n'est pas pertinente. Il faut tout de même construire une courbe des taux pour actualiser les différents flux financiers, le taux d'intérêts déterminant la valeur future de la monnaie.

3.4.3 Courbe de marché

Le marché fournit diverses courbes de taux. Bien qu'il soit possible d'utiliser directement l'une de ces courbes pour l'actualisation, l'adoption d'une approche de modélisation offre l'avantage de générer différents scénarios d'évolution de ces courbes. Ceci permet, par conséquent, d'actualiser les flux financiers en tenant compte de divers scénarios relatifs au coût de la monnaie.

Voici ci-dessous la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA. Cette courbe est publiée mensuellement. Elle est construite à partir de l'indice des taux swap sur EURIBOR 6 mois, euribor désignant un groupe de taux interbancaire de référence en Europe. La courbe est calculée à l'aide de la méthode d'extrapolation de Smith-Wilson.

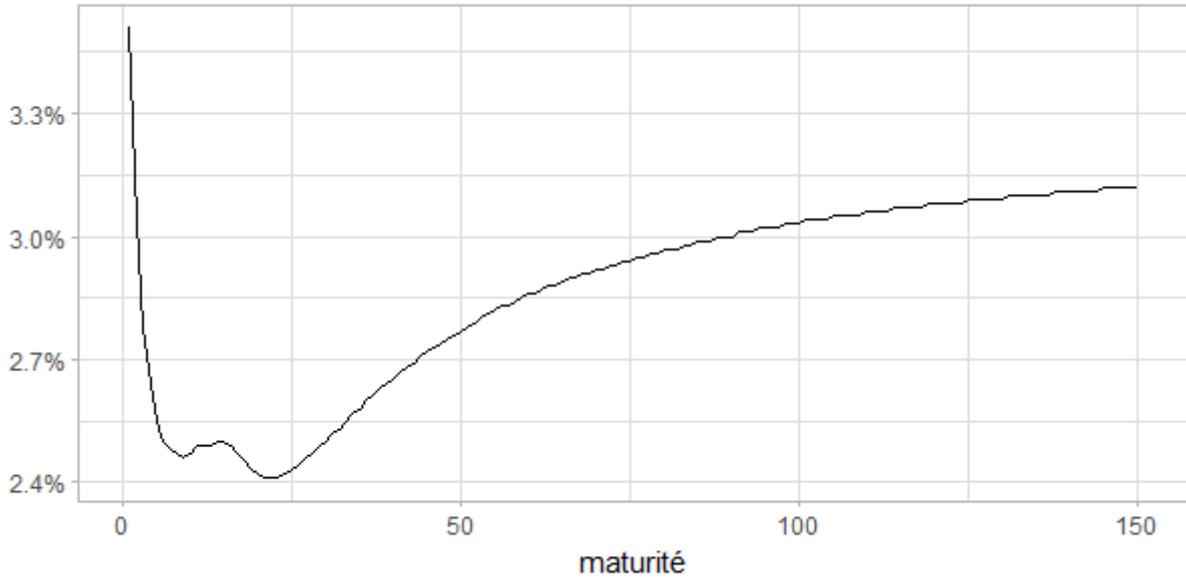


FIGURE 3.13 – Courbe Zéro-Coupon EIOPA publié le 4 avril 2024

3.4.4 Modèle de Hull et White

Le modèle présente des dynamiques de taux, court (r_t) et long (l_t), qui suivent l'approche de retour à la moyenne de Vasicek déjà présenté plus haut pour l'inflation :

$$dr_t = \kappa_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dW_r$$

$$dl_t = \kappa_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dW_l$$

On mesure à nouveau les paramètres à l'aide de régressions linéaires. Le principal changement est l'absence de moyenne de long terme pour l'équation des taux courts et l'utilisation à la place de la valeur des taux à long terme

Le prix du zéro coupon se calcule de la façon suivante (pour les détails voir [Hibbert et al. \(2001\)](#)) :

$$ZC(t, T) = \exp(A(T - t) - B_2(T - t)r_t - B_1(T - t)l_t)$$

Avec :

$$B_1(s) = -\frac{\kappa_r}{\kappa_r - \kappa_l} \times \left(\frac{1 - \exp(-\kappa_l s)}{\kappa_l} - \frac{1 - \exp(-\kappa_r s)}{\kappa_r} \right)$$

$$B_2(s) = \frac{1 - \exp(-\kappa_r s)}{\kappa_r}$$

$$A(s) = (B_2(s) - s) \left(\mu_l - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa_r^2} \right) + B_1(s)\mu_l - \frac{\sigma_r^2 B_2(s)^2}{4\kappa_r} - \frac{\sigma_l^2}{2} \left(\frac{s}{\kappa_l^2} - 2 \frac{B_1(s) + B_2(s)}{\kappa_l^2} + \frac{1 - \exp(-2\kappa_r s)}{2\kappa_r \times (\kappa_l - \kappa_r)^2} \right) - \frac{2\kappa_r}{\kappa_l(\kappa_l - \kappa_r)^2} \times \frac{1 - \exp(-(\kappa_l + \kappa_r)s)}{\kappa_l + \kappa_r} + \frac{\kappa_r^2}{\kappa_l(\kappa_l - \kappa_r)^2} \times \frac{1 - \exp(-2\kappa_l s)}{2\kappa_l} \quad (3.2)$$

3.4.5 Calibration

Il y a ainsi 5 paramètres qui sont : les vitesses de retour à la moyenne de court terme κ_r et de long terme κ_l , les volatilités de court terme σ_r et long terme σ_l , et le taux d'intérêt à long terme μ_l .

Pour estimer les paramètres historiques, nous utiliserons, en ce qui concerne les taux à court terme, les taux interbancaires Euribor à un mois. Pour les taux à long terme, nous nous référerons aux taux moyens des emprunts d'État français à 10 ans.

Avec la modélisation, les taux suivent la dynamique de Vasicek, on peut donc de nouveaux estimer les paramètres avec une régression linéaire comme pour l'inflation.

Les résultats sont les suivants :

TABLE 3.6 – Résultats de la calibration du modèle immobilier

Moyenne de long terme du taux long : μ_l	3.91%
Volatilité du taux long : σ_l	0.749%
Vitesse de retour à la moyenne du taux long : σ_l	0.184
Volatilité du taux court : σ_r	1.04%
Vitesse de retour à la moyenne du taux court : σ_r	0.0665

De nouveau, on effectue les tests :

TABLE 3.7 – Résultats des tests d'adéquations des taux long

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0.8225	Le pouvoir explicatif du modèle est de 82%
Fisher	P = 2.543e-10	Le modèle global est significatif
α	P = 0.381	Le paramètre n'est pas significatif
β	P = 2.54e-10	Le paramètre est significatif
Moyenne des résidus	0.00725	La moyenne des résidus est proche de zéro
Breusch-Godfrey	P = 0.8557	Absence d'autocorrélation d'ordre p = 1
ARCH(0,1)	P = 0.5643	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre q = 1
Jarque Bera	P = 5.917e-08	L'hypothèse de normalité des résidus n'est pas vérifiée

Le test du R^2 ajusté montre ici la pertinence du modèle avec un pouvoir explicatif de 82%. Cependant, l'hypothèse de normalité des résidus n'est pas vérifiée, de même que la significativité de la constante. Il faut donc interpréter le taux long moyen avec prudence.

Pour être plus conforme aux courbes de marché, nous allons choisir de prendre 3.1%, le taux de long terme de la courbe EIOPA, comme taux moyen de long terme.

TABLE 3.8 – Résultats des tests d'adéquations des taux court

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0.1277	Le pouvoir explicatif du modèle est de 13%
Fisher	P = 0.04845	Le modèle global est significatif
β	P = 0.0484	Le paramètre est significatif
Moyenne des résidus	0.009485	La moyenne des résidus est proche de 0
Breusch-Godfrey	P = 0.8299	Absence d'autocorrélation d'ordre p = 1
ARCH(0,1)	P = 0.1277	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre q = 1
Jarque Bera	P = 0.4816	L'hypothèse de normalité des résidus est vérifiée

Pour les taux courts, le pouvoir explicatif du modèle est faible, de l'ordre de 13%, mais les autres tests sont valides.

3.4.6 Reconstruction de la courbe des taux

Si on utilise directement les prix à terme $ZC(0, T)$ on aura une unique courbe. Pour avoir différents scénarios, on utilisera les prix $ZC(t-1, t)$ pour reconstruire une courbe des taux par scénario pour avoir l'impact de variation des taux :

$$ZC(0, T) = \prod_{t=1}^T ZC(t-1, t)$$

3.5 Structure de dépendance

Pour modéliser la dépendance entre les variables, nous utiliserons une matrice de corrélation entre les résidus des modèles calibrés des différentes variables. Cette méthode est limitée et ne permet de décrire que des relations linéaires, or les liens entre les variables peuvent être différents dans des situations extrêmes. L'utilisation de copules peut améliorer la description des relations entre les variables. Cependant, avec une utilisation de données annuelle, nous disposons d'un historique trop faible pour mettre en œuvre ces méthodes plus complexes. La modélisation de la dépendance avec des corrélations a l'avantage de pouvoir être mis en place plus simplement.

TABLE 3.9 – Matrice de Corrélation

	tx IPC	tx ICC	rdmt immo	tx long	tx court
tx IPC	1.00	0.53	0.08	0.49	0.28
tx ICC	0.53	1.00	0.32	0.36	0.19
rdmt immo	0.08	0.32	1.00	-0.08	-0.34
tx long	0.49	0.36	-0.08	1.00	0.49
tx court	0.28	0.19	-0.34	0.49	1.00

On observe que la corrélation entre les deux taux d'inflation est assez forte, la corrélation entre l'immobilier et l'IPC est nécessairement réduite du fait de la modélisation choisie pour l'immobilier (l'immobilier est corrigé de l'inflation). Le rendement immobilier est négativement corrélé avec les taux d'intérêts, cela peut s'expliquer par la variation de la capacité d'emprunt due aux changements de taux qui impacte la demande de biens.

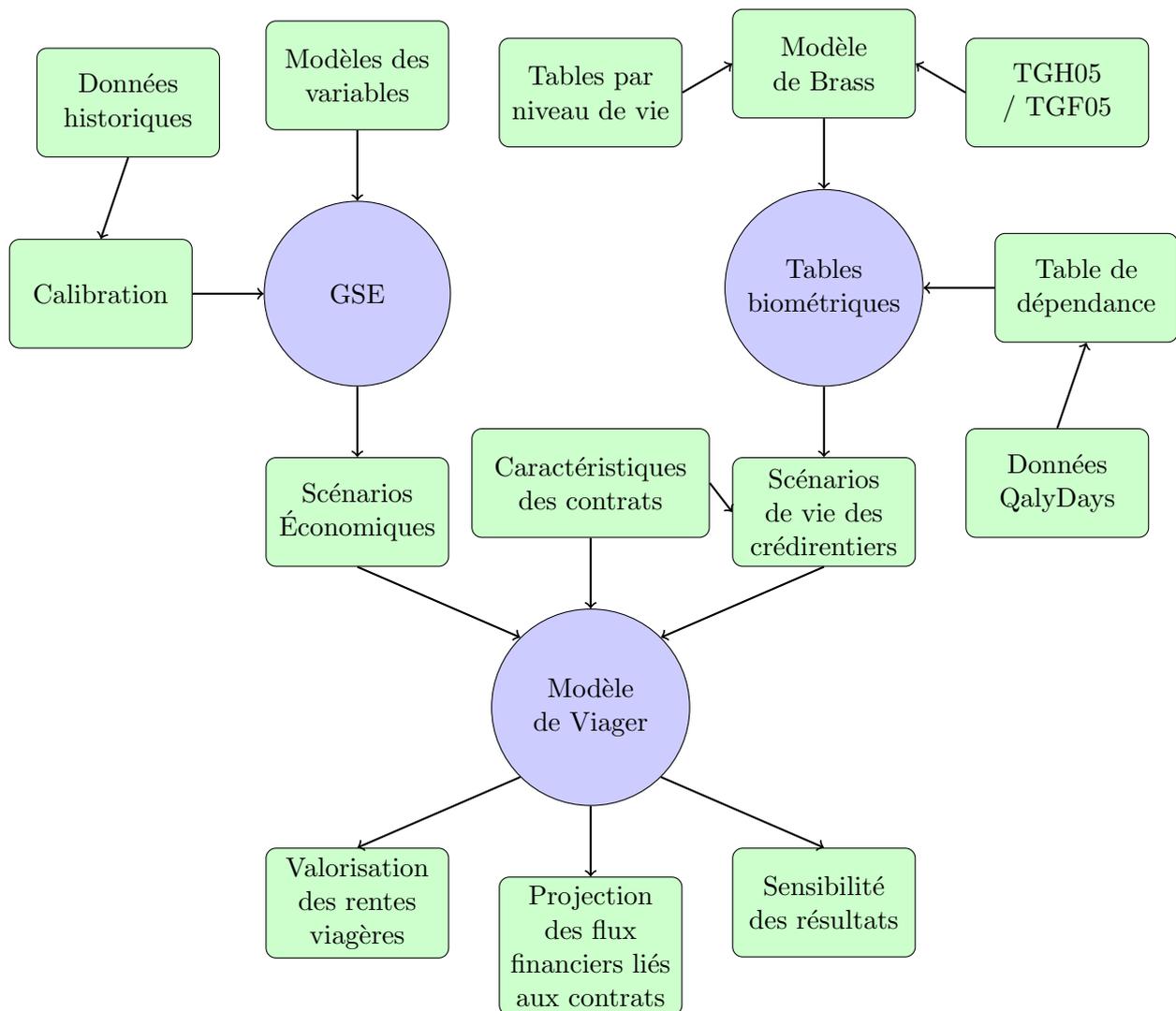
L'objectif est de représenter les erreurs de projection des modèles comme une combinaison linéaire de bruits blancs et de construire ainsi les erreurs projetées des actifs dans chaque scénario. Cela permet de reproduire les corrélations des résidus des modèles dans chaque scénario.

La factorisation de Cholesky consiste à déterminer une matrice triangulaire inférieur L tel que $\Sigma = L \times L^T$. Cette factorisation permet de déterminer les coefficients de la combinaison linéaire utilisée dans la construction des erreurs projetées.

Chapitre 4

Modélisation du fonds viager

4.1 Présentation du modèle complet



Un contrat viager est caractérisé par les informations suivantes :

- Couple ou personne seule
- Sexe
- Date de naissance
- Niveau de vie
- Statut du bien : libre ou occupé
- Valeur vénale du bien
- Valeur de la rente et du bouquet
- Indice de revalorisation de la rente utilisé : IPC ou ICC
- Valeur de revalorisation de la prime en cas de départ

Les tables construites dans le chapitre 2 permettent de générer des scénarios de vie cohérents, c'est-à-dire tirer aléatoirement une date de décès et éventuellement une date d'entrée en dépendance par contrat suivant les tables de mortalité et de dépendance. Pour les couples, on prend en compte la date de décès du dernier conjoint survivant et pour la perte d'autonomie le dernier à entrer en dépendance ou l'entrée en dépendance du conjoint survivant dans le cas où le premier est décédé.

Le générateur de scénarios économiques construit aux cours du chapitre 3 permet de générer des évolutions cohérentes des variables (taux d'intérêts, évolution de la valeur de l'immobilier, de l'ICC et l'IPC) économiques qui permettront d'évaluer la valeur des flux financiers générés par les contrats lors de différents scénarios.

Pour chaque contrat, on génère alors un nombre n de scénarios de vie respectant les caractéristiques du contrat. Ensuite, on génère n scénarios économiques qu'on attribue aux différents scénarios de vie et qui sont donc les mêmes pour chaque contrat.

Une fois les projections faites, on peut projeter les flux financiers attendus dans les n différents scénarios. On a n scénarios de vie par contrat et n scénarios économiques ce qui permet de connaître la valeur des flux financiers engendrés par chaque contrat ou portefeuille de contrats dans chaque scénario. On actualise et revalorise la valeur des rentes annuellement suivant l'indice du contrat jusqu'au décès du ou des créditeurs. On ajoute la prime en cas de perte en autonomie. La vente du bien est aussi actualisée et indexée sur l'indice immobilier projeté.

Il est également nécessaire de prendre en compte les frais associés aux contrats. Ces frais peuvent changer selon les circonstances, mais il est nécessaire d'avoir une valeur approximative générale. Nous allons utiliser les hypothèses suivantes :

- Frais d'acquisition : on va les fixer à 7% de la valeur du bien.
- Frais de gestion du contrat : on les fixe à 2% de la valeur des rentes par an.
- Frais de gestion de l'immobilier : on les fixe à 2% du prix du bien par an.

Ces hypothèses se basent sur les avis d'experts. Les frais d'acquisition, composés de taxes et de frais de notaire, sont relativement stables. Les frais de gestion du contrat sont faibles et ont donc peu d'impact sur la rentabilité. Cependant, les frais de gestion de l'immobilier, qui dépendent des travaux à entreprendre, sont très variables. Ils dépendent du type de bien et des rénovations nécessaires pour la vente, et donc des biens achetés par le fonds. Les montants peuvent être importants, et l'hypothèse retenue se situe dans la fourchette haute pour rester conservatrice.

Avec les scénarios, on peut connaître la valeur moyenne des flux, donc la valeur actuelle probable des flux. On peut aussi connaître la variabilité des résultats, et donc les risques engendrés par le contrat. Les calculs des valeurs actuelles probables des rentes sont décrits en annexes.

Les calculs nécessitent de faire l'hypothèse d'indépendance des conditions économiques et des espérances de vie.

Voici un tableau pour récapituler l'ensemble des flux financiers dans le viager immobilier :

TABLE 4.1 – Flux financiers générés par un contrat

Flux	Explication
Versement du bouquet	Le bouquet en une fois est versé à la signature du contrat. La valeur du bouquet est un pourcentage de la valeur totale du bien après la décote d'occupation si ce n'est pas un viager libre. Ce pourcentage est décidé à la signature du contrat.
Versement de la rente	La rente est versée tous les mois jusqu'au terme du contrat, c'est à dire la mort du crédientier. La valeur est décidée à la signature du contrat en fonction de la valeur totale du bien (après décote d'occupation) et du pourcentage du bouquet. La rente est revalorisée chaque année avec un indice d'évolution des prix (IPC ou ICC).
Versement de la rente augmenté	La rente peut-être augmentée d'une prime lors du départ du bien avant le décès. Dans le modèle l'augmentation de la rente à lieu lors de l'entrée en dépendance des crédientiers.
Vente du bien	La valeur de revente du bien. La vente peut avoir lieu à trois moments : l'année suivant la mort du crédientier dans le cas général, l'année suivant son départ ou lors de la première année pour un viager libre. On se servira de l'indice immobilier projeté dans le modèle pour valoriser le bien à partir de la valeur totale d'achat.
Frais d'acquisition	Ces frais sont payés la première année, ce sont les frais d'achat, de notaire, ...
Frais de gestion du contrat	Ces frais couvrent l'activité administrative et la relation client.
Frais de gestion immobilier	Ces frais comprennent taxe foncière et les travaux à charge du débirentier.

4.2 Exemple sur un portefeuille

Nous disposons d'un portefeuille composé de 14 contrats, sur lesquels il est possible d'effectuer les calculs afin d'évaluer la valeur actuelle nette des rentes.

4.2.1 Valeur des rentes

Les contrats du portefeuille sont anonymisés.

TABLE 4.2 – Calcul des valeurs actuelles probable d'un Portefeuille anonymisé

Identifiant	E. de vie résiduelle	Rente mensuelle	Indice	VAP rente
a	6.58	1036.99	ICC	85,908.43
b	10.93	778.91	IPC	102,571.26
c	10.24	415.41	ICC	52,242.89
d	4.01	519.27	ICC	26,059.25
e	3.50	1609.75	ICC	70,649.39
f	13.95	310.32	IPC	56,104.69
g	7.84	778.91	ICC	75,979.83
h	7.85	934.69	ICC	92,457.19
i	4.64	1038.55	ICC	60,365.77
j	10.85	1765.54	ICC	244,303.20
k	10.21	465.60	ICC	58,809.15
l	10.23	404.42	ICC	51,906.79
m	6.76	777.57	ICC	66,174.08
n	11.71	760.03	ICC	110,336.40
Ensemble du portefeuille	8.52	11,595.96		1,153,868.32

On a donc pour chaque contrat la valeur actuelle probable indexée sur l'indice du contrat correspondant.

4.2.2 Coefficient de variation

Grâce aux scénarios stochastiques, on peut également calculer les Value at Risk (VaR) des valeurs des rentes, c'est-à-dire déterminé le montant des rentes dans les scénarios les plus défavorables. Ici, nous calculons une VaR à 95%, c'est-à-dire le montant des rentes qui n'est dépassé que dans 5% des cas.

Nous allons également calculer un indicateur de dispersion, ici le coefficient de variation $\frac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}}$. Ce coefficient permet d'avoir une idée de l'étendue des valeurs des rentes dans les différents scénarios.

TABLE 4.3 – Value at Risk et coefficient de variation des contrats

Identifiant	VaR 5%	Coef. Variation (%)
a	230,808.25	69.51
b	196,670.93	42.90
c	112,649.76	58.90
d	87,026.63	80.29
e	202,915.58	81.74
f	116,943.84	46.42
g	192,933.43	65.77
h	238,106.68	67.13
i	178,772.58	77.79
j	544,527.54	54.7
k	131,950.80	58.19
l	116,020.33	57.45
m	186,011.61	77.43
n	230,352.61	47.30
Ensemble du portefeuille	1,724,730.40	18.45

Ce tableau illustre l'avantage de la mutualisation du risque de longévité. Il révèle, en effet, un coefficient de variation nettement inférieur pour le portefeuille dans son ensemble par rapport à celui observé pour chaque contrat individuellement. Cela démontre que la mutualisation contribue effectivement à réduire la variabilité des résultats, soulignant ainsi l'intérêt de la création de fonds d'investissement dédiés au viager immobilier en comparaison avec l'acquisition en viager par des investisseurs individuels.

4.2.3 Choc de longévité

Nous pouvons aussi introduire un choc de longévité en baissant de 20% les taux de mortalité. Ce choc permet de prendre en compte une éventuelle sous-estimation de la longévité future par les tables de mortalité utilisées.

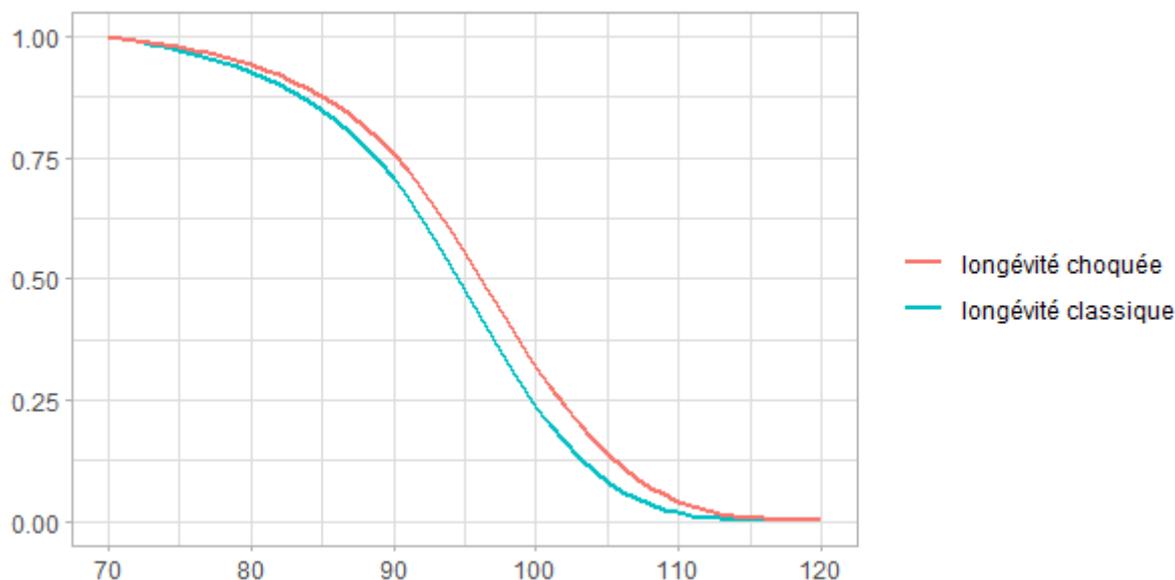


FIGURE 4.1 – Impact du choc de longévité de 20% sur le taux de survie sur une femme de 70 ans

TABLE 4.4 – Données Actuarielles du Portefeuille

Identifiant	VAP avant le choc	VAP après le choc	Variation (%)
a	85 908.43	100,574.10	17.07
b	102 571.26	116,834.32	13.91
c	52 242.89	59,416.39	13.73
d	26 059.25	31,809.71	22.07
e	70 649.39	86,670.17	22.68
f	56 104.69	63,137.77	12.54
g	75 979.83	88,037.90	15.87
h	92 457.19	107,212.56	15.96
i	60 365.77	72,505.29	20.11
j	244 303.20	275,670.89	12.84
k	58 809.15	66,793.78	13.58
l	51 906.79	59,145.34	13.95
m	66 174.08	77,562.98	17.21
n	110 336.40	126,126.98	14.31
Ensemble du portefeuille	1,153,868.32	1,331,498.19	15.39

L'introduction du choc augmente la valeur des rentes de l'ordre de 15%. Le choc de longévité, en plus de la rente à verser durant une période plus longue, signifie que le bien sera acquis par le fonds plus tard (dans le cas des viagers occupé).

4.3 Générations de contrats

Étant donné que nous ne disposons pas de portefeuilles suffisants pour poursuivre l'étude d'investissement en viager immobilier, il est nécessaire de générer aléatoirement des contrats en respectant les données du marché. En l'absence de bases de données disponibles, nous nous appuyons sur les informations fournies par l'entreprise Renée Costes Viager et sur le mémoire de [Vergnaud \(2018\)](#). L'entreprise Renée Costes, leader du viager et de la nue-propriété en France, accompagne chaque année près de 2000 opérations sur un total de 5500. Les chiffres sont tirés du Baromètre Renée Costes 2022.

Tout d'abord, on a les profils suivants pour les vendeurs de viagers :

- 36% vendent en couple
- 39% sont des femmes seules
- 25% sont des hommes seuls

Pour ce qui est de l'âge, on a :

- 15% de moins de 70 ans
- 32% de 70 à 75 ans
- 39% de 76 à 85 ans
- 14% de plus de 86 ans

Pour simplifier, il faut poser l'hypothèse d'indépendance entre l'âge et le sexe du vendeur. De plus, nous simulerons l'âge en utilisant des distributions uniformes conformes aux données observées. Pour les couples, l'âge du premier conjoint sera simulé selon les mêmes distributions que pour les célibataires, tandis que l'âge du second conjoint sera généré à partir d'une distribution uniforme dans un intervalle de plus ou moins 4 ans autour de l'âge du premier conjoint.

En l'absence de données sur l'indice d'indexation, et considérant sa dépendance aux choix du fonds d'investissement, j'ai opté pour une répartition équitable entre l'IPC et l'ICC, attribuant 50% à chacun.

Faute de données concernant la prime de départ du logement, j'ai décidé de la fixer à 25% de la rente.

Nous simulerons la valeur vénale des biens à l'aide d'une distribution Gamma. Les données indiquent une moyenne des biens vendus en viager de 270 000 € et un mode d'environ 170 000 €, ce qui permet de calibrer les paramètres de la loi :

$$E(Val) = k\theta = 270000$$

$$mode = (k - 1)\theta = 170000$$

On obtient le paramètre d'échelle $\theta = 100000$ et le paramètre de forme $k = 2.7$. Cela donne la répartition de la valeur des biens suivante :

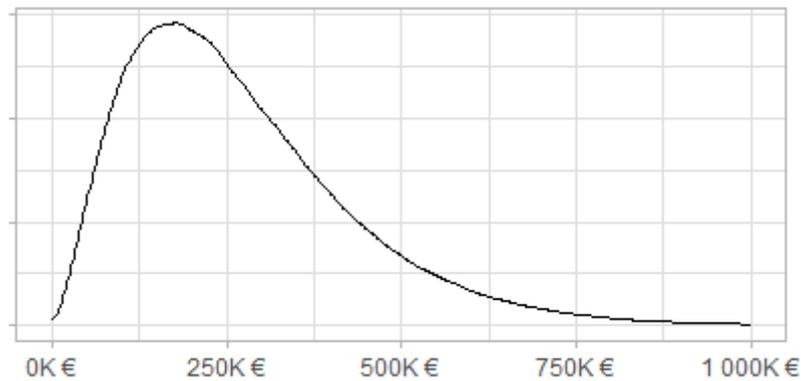


FIGURE 4.2 – Distribution des valeurs vénales des biens

Pour attribuer un niveau de vie aux vendeurs des contrats, nous nous appuyerons sur la valeur vénale du bien.

Les types d'opérations sont les suivants :

- 8% de viager libre, on dispose immédiatement du bien
- 23% en nue-propiété sans rentes
- 69% de viager occupé avec rente

Pour les viagers libres, on va comptabiliser directement le flux financier du bien.

La valorisation de la nue-propiété du bien à partir de la valeur vénale et des caractéristiques du/des crédientier(s) sera faite avec le barème Daubry (évoqué au Chapitre 1). L'adoption de ce barème, largement répandu, assure une cohérence avec les offres du marché.

Concernant la répartition entre rente et bouquet (pour les contrats avec rentes), nous emploierons une distribution uniforme de la rente variant de 40% à 100%, le reste revenant au bouquet.

On peut désormais générer aléatoirement des contrats suivant ces paramètres. Pour la suite, nous allons en générer 1000. En générer plus peut augmenter à l'excès la durée des calculs.

4.4 Valeur Actuelle Nette

La Valeur Actuelle Nette, ou VAN, est la somme des flux attendu actualisé d'un investissement. On a donc :

$$VAN = \sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1+i)^n}$$

avec CF_t le flux net de trésorerie et i le taux d'actualisation (on utilisera la courbe zéro-coupons).

La VAN est une mesure de la rentabilité d'un investissement, elle indique si un investissement est rentable avec le taux d'actualisation utilisé.

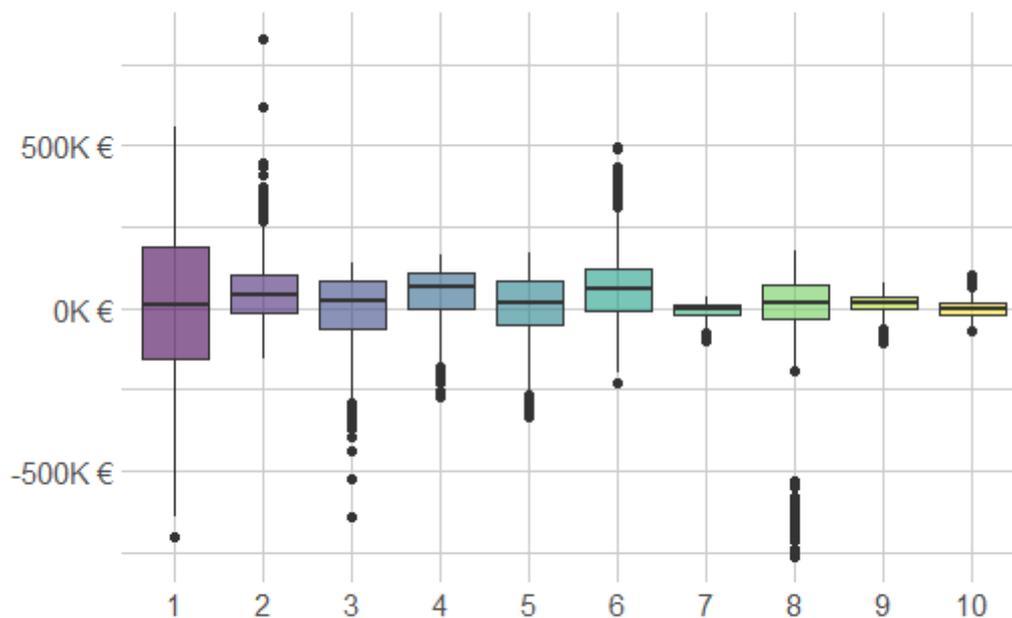


FIGURE 4.3 – Répartition des VAN par scénario pour les 10 premiers contrats

On voit avec le graphique du dessus que la VAN de chaque contrat est très instable suivant les scénarios (économiques et biométriques). Il y a de nombreux scénarios adverses suivant les contrats. On peut notamment voir des scénarios où la VAN dépasse les -500 000 € sur certains contrats. Cela montre l'intérêt de la mutualisation.

4.5 Diversification du risque longévité

Comme mentionné précédemment, le coefficient de variation diminue à mesure que le nombre de contrats augmente, un effet attribuable à la mutualisation. Cette tendance s'accroît davantage lorsque le nombre de contrats est particulièrement élevé. J'ai opté pour le calcul du coefficient en me basant uniquement sur les rentes, car l'inclusion de l'ensemble des flux financiers rend le coefficient excessivement sensible.

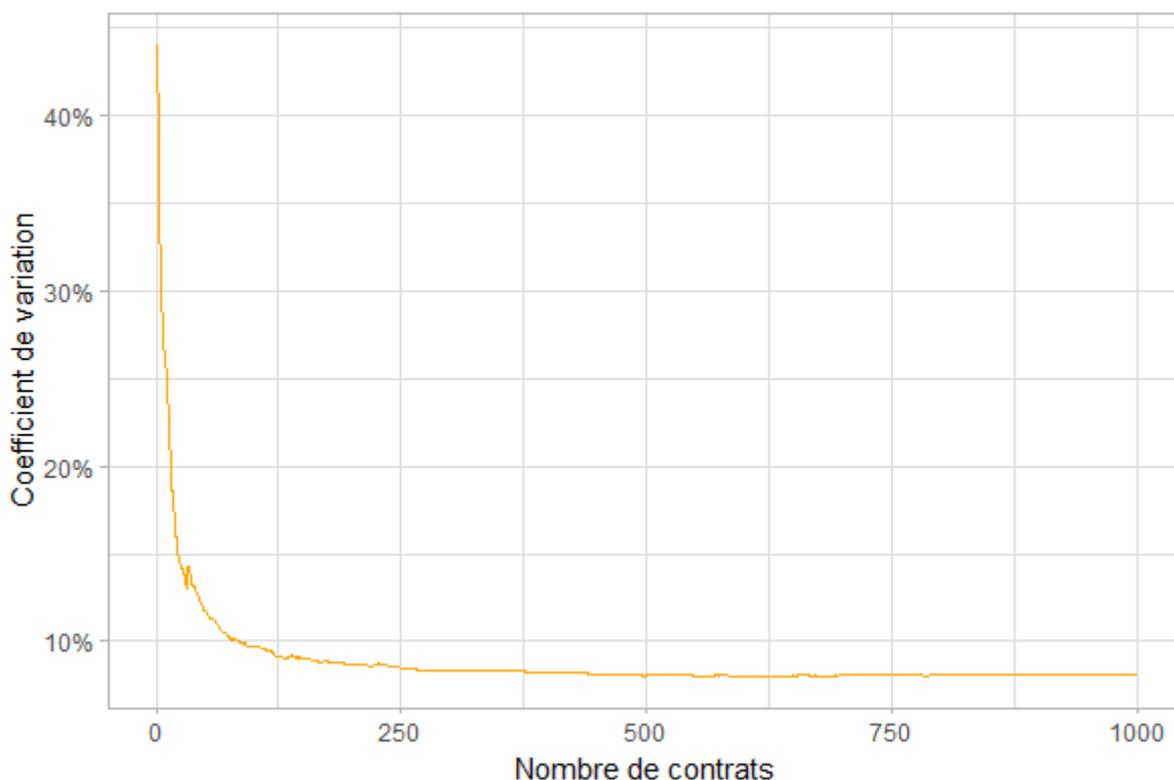


FIGURE 4.4 – Convergence du coefficient de variation

Le coefficient de variation baisse rapidement avec les premiers contrats. Le coefficient passe sous 10% à partir de 100 contrats et continue à baisser légèrement ensuite jusqu'à 5%. L'ajout de contrats contribue principalement à la réduction de la volatilité associée aux risques biométriques, tandis que l'environnement économique demeure inchangé pour l'ensemble des contrats.

Ces résultats indiquent la taille minimale nécessaire pour un fonds d'investissement en viager afin de diversifier les risques biométriques. Pour atteindre un coefficient de variation inférieur à 10%, un fonds doit inclure au moins 100 contrats, avec une valeur vénale moyenne des biens de 270 000 €, soit une valeur totale de 27 millions d'euros. Il est également nécessaire de prévoir des fonds propres supplémentaires pour garantir le versement des rentes et le paiement des frais divers.

4.6 Value at Risk

La Value at Risk (VaR) est une mesure de risque qui indique le montant de perte qui est dépassé avec une probabilité donnée. Ici, nous calculons une VaR à 95%, c'est-à-dire le montant de perte qui n'est dépassé que dans 5% des cas. De plus, la VaR est ici normalisée par le nombre de contrats dans le portefeuille pour pouvoir observer l'évolution des pertes encourues par contrats en moyenne.

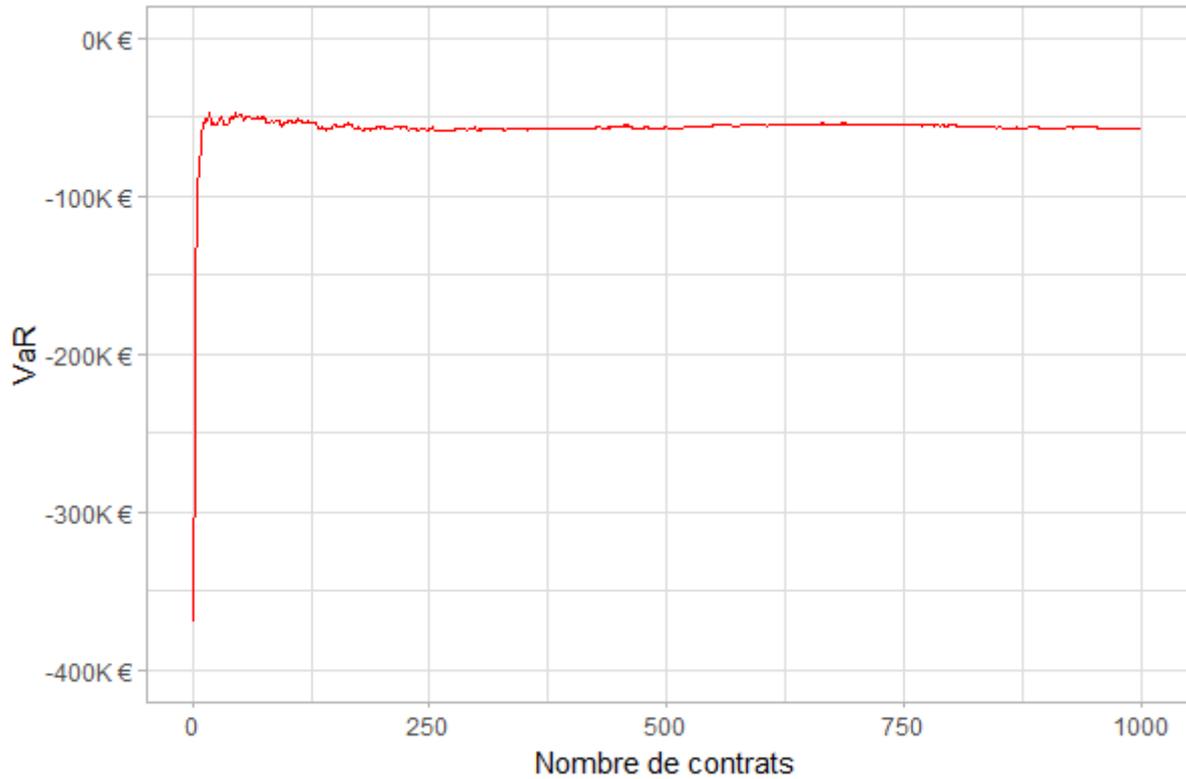


FIGURE 4.5 – Convergence de la VaR

Ce graphique illustre la réduction en valeur absolue et la convergence de la VaR vers 50 000€, se stabilisant avec l'augmentation du nombre de contrats. Cela met en évidence, une fois de plus, l'importance de la mutualisation dans la réduction des risques.

4.7 Taux de rentabilité interne

Le taux de rentabilité interne (TRI) est le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle nette (VAN) des flux financiers. C'est le taux d'actualisation minimal à partir duquel un investissement devient rentable. On trouve i tel que :

$$VAN(i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1+i)^t} = 0$$

On calcule d'abord les flux non actualisés dans chaque scénario (pour les flux de l'ensemble des contrats), puis on détermine le taux qui annule la valeur actuelle de ces flux pour chaque scénario.

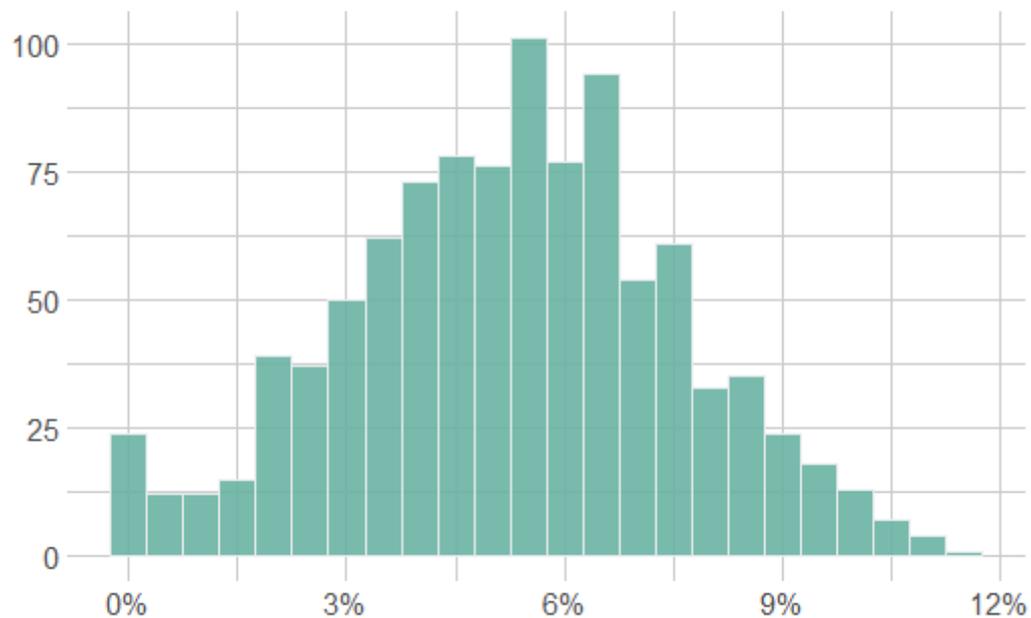


FIGURE 4.6 – répartition des TRI par scénarios

Les TRI à zéros dans le graphique sont tous les scénarios dans lesquels aucun taux positifs ne permettait d'obtenir une VAN positive, il y en a 16 sur les 1000 scénarios économiques.

En excluant les TRI égaux à zéro, on obtient un taux médian de 5,4% et un écart-type de 2,2%. L'étendue des résultats indique que l'investissement demeure risqué malgré la mutualisation. Le rendement ne semble pas très élevé au regard des risques encourus.

4.8 Choc de longévité

Voici ci-dessous la répartition (pour les 1000 scénarios) des VAN totales avec et sans choc de longévité.

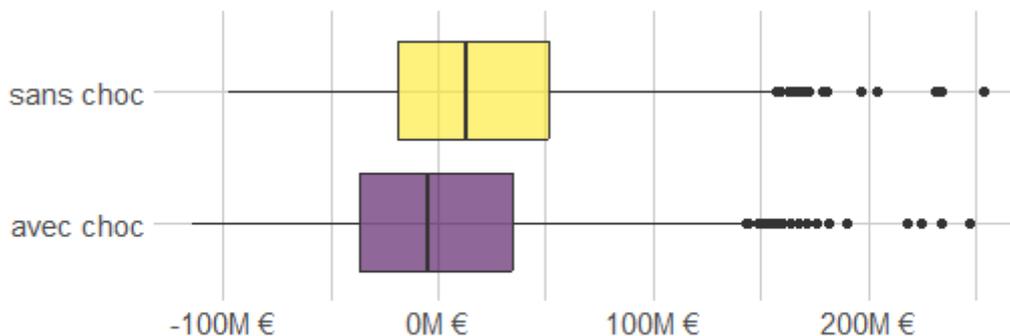


FIGURE 4.7 – Répartition des VAN suivant les scénarios

On constate clairement l'impact négatif du choc, avec une médiane des VAN devenant négative (bien que la moyenne reste positive). La répartition des TRI après le choc est également visible ci-dessous, avec un TRI médian de 4,5%.

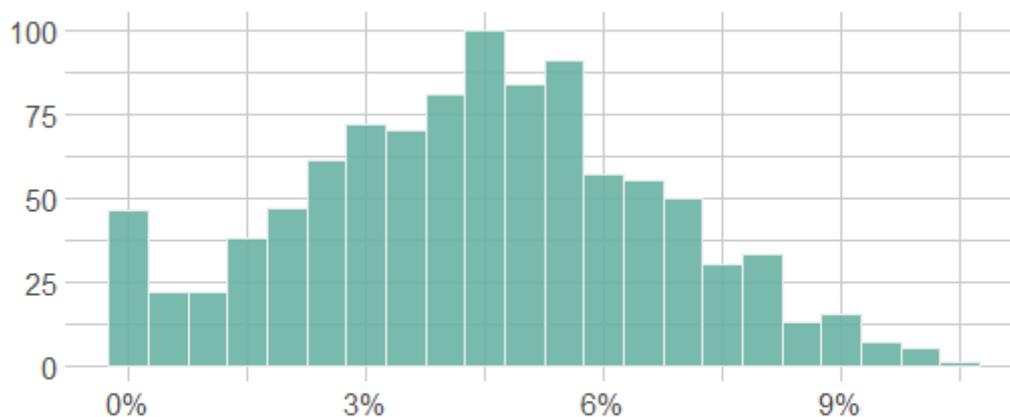


FIGURE 4.8 – Répartition des TRI avec le choc de longévité

Un choc sur les hypothèses de mortalité peut donc avoir un impact significatif sur la rentabilité escomptée. Néanmoins, les tables TGH05/TGF05 sont déjà conservatrices, rendant un tel choc peu probable.

4.9 Indice

Le modèle permet aussi de séparer les contrats selon les caractéristiques voulues. Ici, on cherche à connaître l'impact du choix de l'indice sur la performance et à le comparer aux contrats sans rente. Voici les TRI dans les différents cas :

Indice	TRI médian (%)
Sans rente	5.64
ICC	5.00
IPC	5.44

TABLE 4.5 – Comparaison des TRI selon différents indices

Le TRI le plus élevé est obtenu avec les contrats sans rentes et le TRI est plus élevé avec l'indice IPC qu'avec l'indice ICC. On le comprend rapidement avec le graphique ci-dessous qui illustre la différence d'évolution moyenne projetée de l'IPC et l'ICC :

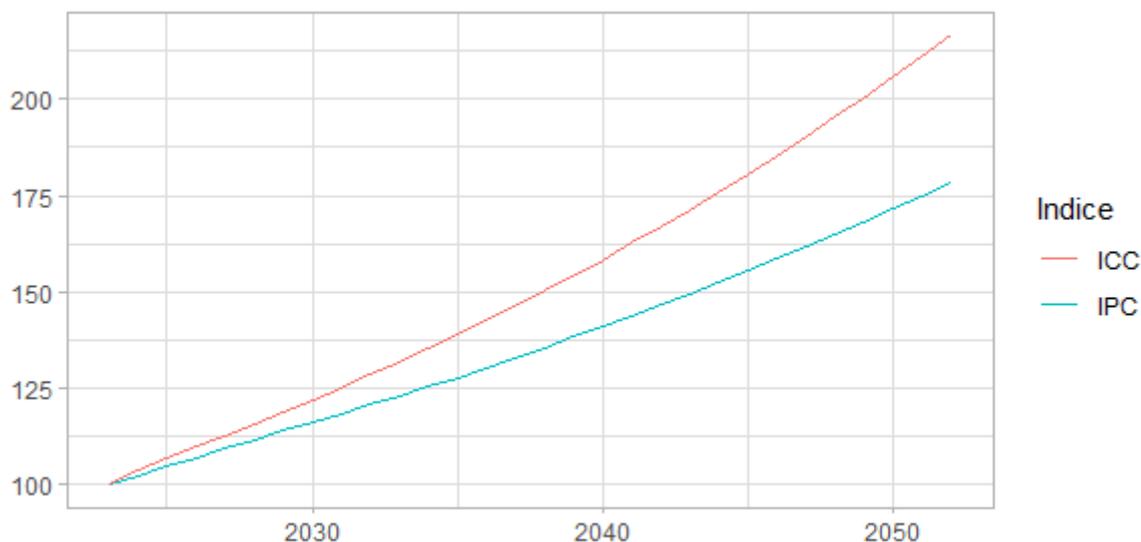


FIGURE 4.9 – Evolution moyenne IPC et ICC en base 2023

Au vu de ces résultats, il pourrait être pertinent de réviser la tarification des contrats en fonction de l'indice de revalorisation choisi. Une autre option serait de proposer uniquement l'IPC, dont la croissance est plus faible, ce qui entraînerait des revalorisations moins coûteuses.

4.10 Differentiation suivant le niveau de vie

En regroupant les contrats par niveau de vie, on peut avoir la différence de TRI suivant le niveau de vie. Au vu du nombre de classe (20), il faut générer un nombre de contrats plus grand pour avoir des résultats. Les chiffres du tableau ci-dessous ont été obtenus à l'aide de 10000 contrats générés.

TABLE 4.6 – TRI en fonction du niveau de vie

Niveau de vie	TRI médian (%)
1	8.00
2	7.68
3	7.25
4	6.92
5	6.83
6	6.39
7	6.22
8	5.98
9	5.84
10	5.74
11	5.66
12	5.58
13	5.45
14	5.42
15	5.24
16	5.19
17	5.10
18	4.80
19	4.72
20	4.52

On constate que les niveaux de vie les plus bas ont les TRI les plus élevés, et sont donc les plus rentables. En effet, les espérances de vie des personnes avec un revenu plus faible sont plus basses. La différenciation des tables de mortalité a un impact direct sur la rentabilité attendue.

A partir du quinzième vingtile les TRI médians par groupe de niveau de vie passe en dessous du TRI médian calculé plus haut sur l'ensemble des niveaux de vie. Cela montre l'impact disproportionné des crédentiers au plus haut niveau de vie, et donc bénéficiant des traitements les plus élevés, sur la rentabilité de l'investissement. On peut donc espérer augmenter la rentabilité du viager immobilier en segmentant le marché.

Ce résultat montre qu'il est crucial de prêter attention à la sélection des profils des vendeurs lors de la constitution d'un fonds en viager immobilier. Une stratégie pourrait consister à cibler les biens appartenant à des vendeurs ayant un faible niveau de vie, ou à proposer des conditions d'achat adaptées en fonction du niveau de vie des vendeurs.

Chapitre 5

Limites du modèles

La modélisation et la prévision à long terme, exigences clé dans l'étude des contrats viagers, se confrontent à une multitude de défis. L'établissement de scénarios fiables pour de tels contrats nécessite l'adoption de nombreuses hypothèses. Ces hypothèses, bien que cruciales pour la modélisation, sont souvent sujettes à débat en raison de leur nature conjecturale et de l'incertitude inhérente à toute prévision à long terme. Cette complexité souligne la nécessité de la remise en question de ces hypothèses.

5.1 Longévité

Il est légitime de s'interroger sur la validité des tables de mortalité prospectives utilisées. Ces tables sont de nature générale et ne prennent pas en compte les spécificités de la population susceptible de vendre en viager. On peut envisager, par exemple, que cette population opte pour le viager parce qu'elle a des raisons de croire qu'elle bénéficiera d'une longévité supérieure à la moyenne, introduisant ainsi un risque d'antisélection. Cela aggraverait le risque de longévité et impacterait négativement la rentabilité attendue, comme le montre le choc de longévité sur la VAN des contrats dans le Chapitre précédent. Aussi, nous ne disposons pas des données nécessaires pour établir des tables de mortalité spécifiques à cette population.

De plus, le risque de longévité contient une composante non-diversifiable (cf [El Karoui & Loisel \(2017\)](#)), les projections de mortalités peuvent se révéler fausses. Par exemple des avancées médicales imprévisibles, bénéfique par ailleurs, pourraient bousculer les horizons de vie envisagée et ainsi bouleverser la rentabilité de contrat en viager.

Toutefois, les tables utilisées sont conservatrices par rapport à la plupart des travaux sur le viager qui utilisent des tables de mortalité fixes.

5.2 Modélisation économique

Nous avons vu dans le chapitre dédié que la modélisation des variables n'est pas toujours satisfaisante. Il est difficile de choisir une profondeur d'historique pertinente pour anticiper l'évolution future des variables. Le lien entre les variables est aussi compliqué à mesurer précisément.

De plus, les modèles sont basés sur l'évolution passée des variables étudiées. Un changement

structurel de l'environnement économique est donc par nature compliqué à intégrer. Le passé n'est pas toujours un prédicteur fiable de l'avenir, surtout en présence de perturbations économiques, démographiques ou réglementaires significatives. Dans un contexte économique incertain, les modèles peuvent être obsolètes.

5.3 Gestion du fonds

Une grande partie des résultats obtenus par un fonds dépend des choix en amont pour lesquels nous avons fait des hypothèses fortes dans l'intérêt de l'étude.

Par exemple, j'ai fait l'hypothèse d'une répartition équiprobable des indices de prix pour indexer la rente. Cependant, ce choix est d'une grande importance et influe beaucoup sur la rentabilité. En effet, nous avons au chapitre précédent quel impact ce choix pouvait avoir sur la rentabilité.

Une sélection judicieuse de paramètres spécifiques, combinée à une expertise en matière de viager immobilier, peut conduire à une augmentation notable de l'espérance de gain de l'investissement. En effet, une grande part de la rentabilité possible en viager immobilier est la résultante de la performance de l'immobilier. Au cours de ce mémoire, nous avons modélisé cette performance par un indice unique, mais suivant la localisation des biens achetés et la connaissance du marché, on peut espérer augmenter sensiblement la rentabilité possible.

Les gestionnaires du fonds peuvent aussi choisir de mettre les biens acquis en location, ce qui changera la structure des flux financiers. L'intégration de loyer complexifie la modélisation, car il nécessite l'intégration de la valeur des loyers, de coûts de gestion accrus et le risque de vacance.

5.4 Politique

Non seulement l'évolution des variables dont on a parlé tout au long de ce mémoire peut grandement être affectée par des décisions politiques, mais également par le cadre réglementaire qui sous-tend le contrat viager immobilier.

Le problème est que les décisions politiques sont compliquées à anticiper et à quantifier comme risque, et ce même pour des experts. Selon [Tetlock \(2005\)](#), 15% des événements dont les experts sont sûrs qu'ils n'allaient pas survenir arrivent finalement, et 25% des événements dont les experts sont sûrs qu'ils n'allaient pas arriver finissent par se produire. Ces statistiques, réalisées avec des sondages auprès d'experts, soulignent la difficulté de prévoir les décisions politiques, rendant la gestion des risques associés particulièrement complexe.

5.5 Données

La contrainte principale de ce mémoire réside dans le déficit de données relatives au marché du viager, ce qui nécessite de formuler de nombreuses hypothèses quant à son fonctionnement.

Des données fiables concernant les vendeurs en viager immobilier pourraient permettre l'élaboration de tables de mortalité adaptées et une meilleure compréhension des comportements des créditeurs, notamment en ce qui concerne leur départ du logement. Ces données seraient également cruciales pour identifier d'éventuels risques d'antisélection.

Il est également essentiel d'acquérir une connaissance détaillée des frais de gestion immobilière relatifs aux biens occupés. Cette information est cruciale pour évaluer de manière précise les coûts opérationnels associés à l'investissement en viager immobilier. En effet, les frais de gestion peuvent varier significativement en fonction de divers facteurs tels que l'état du bien, la localisation géographique, et la nature des accords passés avec les créditeurs. Une compréhension approfondie de ces coûts permettrait d'affiner les modèles financiers et d'améliorer l'exactitude des prévisions de rentabilité et de flux de trésorerie. De plus, cela aiderait à identifier les stratégies de gestion immobilière les plus efficaces pour maximiser les retours sur investissement tout en maintenant un niveau de risque acceptable.

Conclusion

Ce mémoire a permis d'établir un cadre de modélisation robuste pour un fonds d'investissement en viager immobilier. L'examen minutieux des sources de risque, tant économiques que biométriques, offre une vision holistique des variables clés influençant la constitution d'un contrat viager. Ces variables, en particulier les aspects biométriques et économiques, jouent un rôle prépondérant dans l'évaluation de la valeur des contrats viagers.

La modélisation exhaustive du régime viager, intégrant ces divers facteurs de risque, constitue une base solide pour la gestion efficace d'un fonds viager immobilier. Cette approche permet une estimation approfondie de la rentabilité potentielle de l'investissement. La rentabilité attendue est d'ailleurs plus basse (un taux de rentabilité interne de 5.4%) que ce que les études précédentes pouvaient laisser espérer. Cela est probablement dû à l'adoption d'hypothèses plus conservatrices, notamment en ce qui concerne la mortalité. La variabilité du rendement, liée à la sensibilité aux évolutions des conditions économiques, ne contribue pas à promouvoir l'investissement en viager immobilier.

Malgré cela, cette modélisation complétée par une expertise pointue pour la spécification des paramètres cruciaux, peut aider les gestionnaires de fonds à prendre des décisions éclairées. Elle contribue ainsi à l'optimisation des performances du fonds tout en minimisant les risques. Choisir les profils les plus pertinents, notamment en fonction du niveau de vie qui influence la longévité, est crucial. Par exemple, les vendeurs ayant un niveau de vie élevé, et donc une espérance de vie plus longue, sont susceptibles de réduire les rendements attendus. Nous avons précédemment observé que l'écart de TRI attendu entre des contrats conclus avec les personnes les plus pauvres et les plus riches peut atteindre 3,5%. La sélection judicieuse des biens, qui nécessite une expertise métier approfondie, est également très importante. Enfin, proposer les bonnes options pour les indices d'indexation et la prime de départ peut améliorer les perspectives de l'investissement.

Il est également nécessaire de remettre en question certaines pratiques du marché, telles que l'utilisation généralisée du barème Daubry. Une tarification plus transparente et plus souple pourrait, en effet, mieux prendre en compte les risques et adapter la tarification de la valeur de la nue-propriété en conséquence.

L'intérêt de la mutualisation pour réduire la variance des résultats et les risques encourus est un point crucial. La mutualisation atténue les risques biométriques, distincts pour chaque contrat, réduisant ainsi la variabilité des résultats. En revanche, les risques économiques affectent uniformément l'ensemble des investissements et ne sont donc pas diversifiables. Nous avons constaté qu'un fonds comprenant environ une centaine de contrats, représentant environ 30 millions d'euros, est nécessaire pour diversifier efficacement ces risques. Cependant, l'efficacité de la prise en compte du risque biométrique est aujourd'hui limitée par le manque de données spécifiques, ce qui empêche l'élaboration de tables de mortalité et de dépendance parfaitement adaptées.

Le principal défi rencontré lors de la rédaction de ce mémoire réside dans l'accès restreint à des

données spécifiques au marché du viager immobilier. La relative opacité et l'étroitesse de ce marché limitent l'acquisition de données fiables, nécessitant le recours à des hypothèses de travail qui, bien que rigoureuses, pourraient être affinées avec des informations plus complètes.

Un point important qui n'a pas été abordé au cours de ce mémoire est la possibilité de louer les biens achetés au lieu de les vendre. Certains fonds d'investissement achètent effectivement des biens en viager dans le but d'acquérir un parc locatif. Cela implique la gestion d'un parc locatif, ce qui modifie naturellement la structure des flux financiers attendus des investissements. C'est une possibilité à explorer pour des études ultérieures.

Un autre axe de développement possible pour ce mémoire est la segmentation géographique. En effet, le marché du viager est encore très inégalement réparti sur le territoire. En fonction des biens achetés par un fonds, il pourrait être pertinent de considérer les dynamiques d'évolution du marché immobilier spécifiques à chaque région. Il serait également judicieux d'adapter les tables de mortalité en fonction des particularités territoriales.

Bibliographie

- Ahlgrim, K. C., D'Arcy, S. P. & Gorvett, R. W. (2005), Modeling financial scenarios : A framework for the actuarial profession, in 'Proceedings of the Casualty Actuarial Society', Vol. 92, Citeseer, pp. 177–238.
- Blanpain, N. (2018), 'L'espérance de vie par niveau de vie—méthode et principaux résultats', *Documents de travail* (F1801), 1–47.
- Brass, W. (1971), 'On the scale of mortality', *Biological aspects of demography* .
- CAJA, A., CARVAS, P., ROUSSEAU, V. & JUILLARD, M. (2009), 'Intégrer des informations exogenes dans un modele d'actifs'.
- Castaneda, F. & Lusson, F. (2018), 'Un panorama de l'assurance dépendance en france', *Bulletin Français d'Actuariat* .
- Coulomb, J.-B., Languillon-Aussel, R. & Simon, A. (2021), 'Le viager en france : un dispositif au service du développement des territoires vieillissants?', *Revue d'Économie Régionale & Urbaine* (3), 421–449.
- Denuit, M. & Trufin, J. (2019), 'Des tables de mortalité, espérances de vie, durées de vie moyennes et probables et de leur bon usage dans l'évaluation des droits viagers', *Revue du Notariat Belge* **3142**, 574–608.
- El Karoui, N. & Loisel, S. (2017), 'Le risque de longévité est-il assurable?', *Revue d'économie financière* (2), 107–122.
- Friggit, J. (2010), 'Le prix des logements sur le long terme', *Structure* **3**(1).
- Gallet, S. (2017), 'Proposition d'une nouvelle modélisation de l'actif immobilier pour les générateurs de scénarios économiques'.
- Guibert, Q., Planchet, F. & Schwarzingler, M. (2018), 'Mesure du risque de perte d'autonomie totale en france métropolitaine', *Bulletin Français d'Actuariat* .
- Hibbert, J., Mowbray, P. & Turnbull, C. (2001), A stochastic asset model & calibration for long-term financial planning purposes, in 'Finance and investment conference'.
- Masson, A. (2015), 'L'épargnant propriétaire face à ses vieux jours', *Revue française d'économie* **152**(2), 129–177.
- Petauton, P. & Fromenteau, M. (2012), *Théorie et pratique de l'assurance-vie-4e éd : Cours complet et synthétique, exercices corrigés*, Dunod.
- Planchet, F. (2005), 'Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentiers', *note méthodologique de l'Institut des Actuaire* .

- Planchet, F., Thérond, P.-E. & Juillard, M. (2010), *Modèles financiers en assurance - Analyses de risque dynamiques*, Assurance Audit Actuariat, Economica.
- Planchet, F., Thérond, P.-E. & Kamega, A. (2009), *Scénarios économiques en assurance-Modélisation et simulation*, Assurance Audit Actuariat, Economica.
- Schwarzinger, M. (2018), 'Étude qalydays : données source et retraitements pour l'étude du risque de perte d'autonomie', *Bulletin Français d'Actuariat* .
- Tetlock, P. E. (2005), *Expert Political Judgment : How Good Is It ? How Can We Know ?*, Princeton University Press.
- Vergnaud, C. (2018), Le viager immobilier est-il une opportunité de développement pour un assureur ?, Master's thesis.
- Wilkie, A. D. (1984), 'A stochastic investment model for actuarial use', *Transactions of the Faculty of Actuaries* **39**, 341–403.

Annexe A

Calcul de rentes viagère

A.1 Rente dans un scénario

Pour calculer la valeur des rentes dans différents scénarios, on utilise le générateur de scénarios économiques présenté aux Chapitre 3 pour avoir des valeurs de l'évolution des variables d'intérêts. De plus, on tire aléatoirement des scénarios de vie (et de dépendance) à partir des tables construite dans le Chapitre 2.

Voici le calcul de la valeur actuelle de la rente pour un contrat c sur une tête dans le scénario n :

$$\begin{aligned} VA_{c,n} = R_c \times 12 \times & \left(\sum_{t=1}^{\lfloor X_{c,n} \rfloor} B(t, n) \times \prod_{i=1}^t (1 + \tau_{n,i}) + (X_{c,n} - \lfloor X_{c,n} \rfloor) \times B(\lceil X_{c,n} \rceil, n) \times \prod_{t=1}^{\lceil X_{c,n} \rceil} (1 + \tau_{n,t}) \right. \\ & + \mathbb{1}_{\psi_{c,n} < X_{c,n}} \times P_c \times \left((\lceil \psi_{c,n} \rceil - \psi_{c,n}) \times B(\lceil \psi_{c,n} \rceil, n) \times \prod_{t=1}^{\lceil \psi_{c,n} \rceil} (1 + \tau_{n,t}) + \sum_{t=\lceil \psi_{c,n} \rceil}^{\lfloor X_{c,n} \rfloor} B(t, n) \right. \\ & \left. \left. \times \prod_{i=1}^t (1 + \tau_{n,i}) + (X_{c,n} - \lfloor X_{c,n} \rfloor) \times B(\lceil X_{c,n} \rceil, n) \times \prod_{t=1}^{\lceil X_{c,n} \rceil} (1 + \tau_{n,t}) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Avec les notations suivantes :

- $X_{c,n}$ la durée de vie résiduelle du crédientier dans le scénario n
- R_c le montant de la rente mensuelle du contrat
- $\tau_{n,t}$ le taux de l'indice de revalorisation de la rente (IPC ou ICC) dans le scénario n à la date t
- $B(t, n)$ le prix du zero coupon à échéance t dans le scénario n
- $x_{c,n}$ la durée de vie résiduelle (âge de la mort - âge actuel) du crédientier (du dernier crédientier dans le cas d'un contrat sur deux têtes) du contrat c dans le scénario n
- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \lceil x \rceil - 1 \leq x \leq \lceil x \rceil$
- P_c la prime de revalorisation ajouté à la rente quand le/les crédientiers quitte le logement

- $\psi_{c,n}$ donne la date d'entrée en dépendance (si dépendance il y a, $\psi_{c,n} = X_{c,n}$) du crédirentier (dans le cas d'un contrat sur deux têtes de la date à partir de laquelle il ne reste que des crédirentiers dépendants) du contrat c dans le scénario n

Dans le calcul, $X_{c,n}$ donne la durée de versement de la rente. $ZC(n, t) \times \prod_{i=1}^t (1 + \tau_{n,i})$ permet d'indexer et d'actualiser la rente en t . Enfin $\psi_{c,n}$, s'il est inférieur à $X_{c,n}$, donne la date à partir de laquelle on ajoute la prime de départ du logement.

Pour avoir le calcul de la valeur actuelle de la rente pour un contrat c sur deux têtes dans le scénario n , il faut partir de la même structure. On ajoute la notation $Y_{c,n}$, qui représente la durée de vie résiduelle du second crédirentier dans le scénario n et $\phi_{c,n}$, qui donne la date d'entrée en dépendance du second crédirentier. On prend alors $\max(X_{c,n}, Y_{c,n})$ à la place de $X_{c,n}$ comme durée de versement de la rente. Également, on prend $\max(\min(X_{c,n}, \psi_{c,n}), \min(Y_{c,n}, \phi_{c,n}))$ comme date de départ du versement de la prime de départ.

A.2 Rente probable

Pour avoir directement la valeur actuelle probable de la rente, il faut raisonner en termes de moyenne pour les variables économiques avec les probabilités de survie et d'état de dépendance pour les risques biométriques. Pour les calculs de rentes, je m'appuie sur le livre "Théorie et pratique de l'assurance vie" (Petauton & Fromenteau (2012)).

Le calcul pour une rente individuelle :

$$VAP_c = R_c \times 12 \times \left(\sum_{t=1}^{\omega-x} \left({}_t p_x + \frac{13}{24} \times q_{x+t-1} \times {}_{t-1} p_x \right) \times \prod_{i=1}^t (1 + \bar{\tau}_i) \times B(t) \right) + P_c \times \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t \nu_x \times \prod_{i=1}^t (1 + \bar{\tau}_i) \times B(t) \quad (\text{A.2})$$

Avec les notations suivantes :

- x désigne l'âge du crédirentier
- ω l'âge de fermeture de la table
- ${}_t p_x$ la probabilité de survie dans t années à l'âge x
- q_t la probabilité de décès entre t et $t + 1$
- $\bar{\tau}_t$ la moyenne des scénarios pour le taux de revalorisation de la prime à date t
- ${}_t \nu_x$ la probabilité d'être en dépendance dans t années
- $B(t)$ le prix du zero coupon à échéance t , on prend la courbe de marché EIOPA pour le calcul de valeur actuelle probable

Le calcul sur deux têtes :

$$\begin{aligned}
VAP_c &= R_c \times 12 \\
&\times \left(\sum_{t=1}^{\omega - \min(x,y)} \left(\left({}_t p_{\overline{xy}} + \frac{13}{24} \times q_{\overline{xy}+t-1} \times {}_{t-1} p_{\overline{xy}} \right) \times \prod_{i=1}^t (1 + \bar{\tau}_i) \times B(t) \right) + P_c \times \left(\sum_{t=1}^{\omega - \min(x,y)} {}_t \nu_{\overline{xy}} \right. \right. \\
&\left. \left. \times \prod_{i=1}^t (1 + \bar{\tau}_i) \times B(t) + \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t \nu_x \times {}_t q_y \times \prod_{i=1}^t (1 + \bar{\tau}_i) \times B(t) + \sum_{t=1}^{\omega-y} {}_t \nu_y \times {}_t q_x \times \prod_{i=1}^t (1 + \bar{\tau}_i) \times B(t) \right) \right) \\
&\hspace{15em} (A.3)
\end{aligned}$$

Avec les notations suivantes :

- y l'âge du second crédirentier
- ${}_t p_{\overline{xy}}$ la probabilité qu'au moins un des deux crédirentier survive
- $q_{\overline{xy}+t}$ la probabilité les deux crédirentiers soient morts en $t + 1$ alors qu'au moins un des deux était en vie en t
- ${}_t \nu_{\overline{xy}}$ la probabilité que les deux crédirentiers soient en dépendances dans t années