

Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris  
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuares  
le 02/01/2023

Par : **Saffar Mohamed**

Titre : **Réconciliation entre les données de tarification  
et de provisionnement en réassurance afin d'analyser  
les risques par cédante et d'explorer des nouvelles  
méthodes de calcul des réserves**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de la filière*

*Entreprise : AXA Global RE*

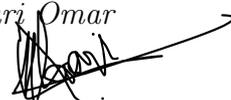
*Nom : Pierre Picard*

*Signature :* 

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuares*

*Directeur du mémoire en entreprise :*

*Nom : El Warari Omar*

*Signature :* 

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :



Bibliothèque :

Signature du candidat

*Saffar Mohamed*

---

# Résumé

Mots clés : provisionnement, tarification, fréquence, sévérité, IBNR, vieillissement de la loi de la fréquence, ajustement des lois

Chez AXA Global Re, le processus du provisionnement est quasi indépendant du processus de la tarification. Le premier se base sur une approche a posteriori et utilise majoritairement les triangles de développement alors que le deuxième se base sur une approche a priori et utilise principalement le modèle fréquence / sévérité. En outre, les réserves en réassurances sont calculées par ligne de business. Celle-ci regroupe plusieurs traités de risques homogènes pour bénéficier de l'effet de mutualisation. Par conséquent, il n'existe pas de modèle qui permet d'estimer les montants de réserves au niveau de chaque traité.

Nous rapprochons, dans le cadre de ce mémoire, les deux processus, plus particulièrement la base de données tarification qui regroupe les lois de fréquences et de sévérités pour chaque risque souscrit et la base de données provisionnement qui regroupe toutes les informations sur les sinistres recensés. Ce rapprochement nous servira par la suite afin d'analyser dans un premier temps les risques souscrits en fonction des cédantes et de proposer dans un second temps deux nouvelles méthodes de provisionnement basées sur une approche fréquence / sévérité. La première méthode permet d'estimer le montant des provisions par traité alors que la deuxième estime les réserves par ligne de business. Enfin, une comparaison est effectuée afin de situer nos estimations par rapport à celles d'AXA.

---

# Abstract

At AXA Gloabl Re, the reserving process is almost independent of the underwriting process. The former is based on an a posteriori approach and uses mainly development triangles, whereas the latter is based on an a priori approach and uses mainly the frequency/severity model. In addition, reinsurance reserves are calculated by business line. This line groups several treaties. The contractual provisions do not have the same importance as the total reserves of the business line

In this thesis, we reconcile the two processes to propose two new provisioning methods based on a frequency/severity approach. The first method allows us to estimate the amount of reserves per treaty while the second one estimates the reserves per business line. Finally, a comparison is made in order to situate our estimates in relation to those of AXA.

---

# Remerciements

Je remercie avant tout El Warari Omar pour son encadrement, ses bons conseils, sa patience et ses relectures attentives.

Je remercie également toute l'équipe d'AXA Global Re qui m'a accueilli chaleureusement et m'a assuré l'environnement de travail idéal, ainsi que toutes les personnes qui ont, lors de nos échanges, alimenté ma réflexion.

Je remercie également mon tuteur de l'ENSAE Pierre Picard pour ses conseils.

Je remercie enfin ma famille et mes amis pour leur soutien sans failles.

---

# Note de Synthèse

## Problématique

Le processus de tarification et de provisionnement d'AXA Global RE sont très détachés. Les seules informations échangées en ce moment sont les ratios S/P (loss ratio) a priori modélisés. Toutefois, les données de tarification sont très utiles pour l'équipe de provisionnement puisque cette base permet de refléter l'évolution du risque par cédante et par ligne de business et de mener des analyses du type espéré/réalisé. En deuxième lieu, ces données permettent aussi de proposer des nouvelles méthodes de provisionnement par traité et par ligne de business à l'opposé des méthodes classiques utilisées par AGRE. En effet, celles-ci reposent principalement sur les triangles de développement des sinistres appartenant à une ligne de business. Ainsi, puisqu'il n'y a pas de modèle de provisionnement spécifique par traité, les montants de réserves individuelles sont par conséquent proportionnels au montant estimé pour toute la ligne de business. Finalement, étant donné que la majorité des méthodes de provisionnement en non-vie sont fondées sur les triangles, on a pensé dans le cadre de ce mémoire à explorer les méthodes utilisant une approche fréquence/sévérité. À la lumière de ces remarques, on propose dans le cadre de ce mémoire de :

- Rapprocher les données de tarification et de provisionnement
- Analyser les risques souscrits par cédante et par ligne de business
- Proposer deux nouvelles méthodes de provisionnement qui estiment les montants des réserves par traité et par ligne de business en utilisant une approche fréquence/sévérité

## Rapprochement entre les données tarification et provisionnement

Les données tarification sont composées majoritairement des générateurs de risques. Ces derniers représentent une distribution statistique qui réplique un risque couvert par un traité de réassurance. De plus, le traité de réassurance est composé de plusieurs tranches. Chaque tranche comporte de 1 à plusieurs générateurs de risque et possède ses propres conditions contractuelles.

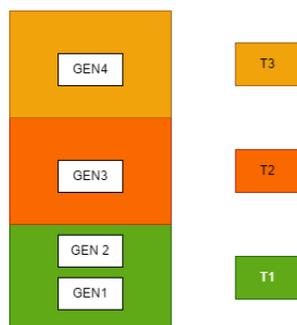


FIGURE 1 – Composition d'un traité de réassurance XL

Compte tenu de ces remarques, les données tarification sont constitués des générateurs de risques ainsi que le mappage entre ces distributions et les tranches de chaque traité signé. En contrepartie, la base de données provisionnement regroupe toutes les informations sur les sinistres réalisés par tranche de chaque traité.

À la lumière de ces deux points le rapprochement est fait en utilisant une jointure de ces deux bases données et en utilisant la clé traité/tranche.

### Analyse qualitative des risques souscrits

La base de données obtenue permet de suivre l'évolution des risques souscrits entre deux années consécutives. A titre d'exemple pour un traité donné on a :

	Évolution
Coût moyen	15%
Prime acquise	6.4%
Loss ratio	-11%

TABLE 1 – *Évolution du traité entre 2021 et 2022*

En outre, ce rapprochement permet aussi de comparer le nombre de sinistres a priori par rapport au réalisé :

Année	Nombre de sinistres espérés	Nombre de sinistres déclarés
2021	0.11	0
2022	0.13	0

TABLE 2 – *Nombre de sinistres espérés et reportés des traités signés en 2021 et 2022*

Finalement, on peut aussi analyser les risques par cédante :

Cédante	Traité	Loss ratio modélisé
Belgique	1	51%
Belgique	2	55%
Irlande	1	73%
Irlande	2	67%

TABLE 3 – *Fréquence espérée par région*

Compte tenu de ces remarques, le rapprochement réalisé permet de rapporter un ensemble d'informations supplémentaires à l'équipe de provisionnement.

---

# Méthode de provisionnement par traité en utilisant une approche fréquence/sévérité

## Description de la méthode

Cette méthode est définie de la façon suivante : pour chaque année de développement  $t$  le montant des réserves pour les sinistres survenus mais non déclarés est donné par :

$$C_t = \sum_{i=0}^{N_{tardifs}} c_i$$

- $N_{tardifs}$  : nombre de sinistres tardifs
- $c_i$  : coût du sinistre tardif

## Calibration des distributions de fréquence et sévérité par traité

La loi de fréquence des traités est donnée par la formule suivante :

Si  $N \sim Pois(\lambda)$  alors  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t \sim Pois(\lambda(1 - p_t))$

Si  $N \sim NB(M, x)$  alors  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t \sim BN(M + N_t, 1 - (1 - x)(1 - p_t))$

- $N$  : loi de fréquence initiale de traité
- $N_t$  : nombre de sinistres déclarés après  $t$  années de développement
- $p_t = P(\text{le sinistre est réglé avant } t \text{ années de développement})$

La loi de sévérité est calibrée en agrégeant les lois de sévérité de chaque générateur composant en lui associant à sa tranche correspondante.

## Présentation des résultats

La comparaison des résultats trouvés avec la méthode traditionnelle utilisée par AXA est résumée dans ce tableau :

	Méthode proposée	Méthode traditionnelle
Utilisation des données tarification	(x)	
Utilisation des données provisionnement	(x)	(x)
Utilisation du triangle de développement		(x)
Provisionnement traité par traité	(x)	
Provisionnement en se basant sur des traités regroupés		(x)
Prise en compte de la durée entre la survenance et la déclaration	(x)	(x)
Prise en compte de la durée de fixation du coût final	(x)	(x)
Prise en compte de la durée de règlement du sinistre	(x)	(x)
Cadence de développement calibrée par traité	(x)	
Cadence développement calibrée par ligne de business		(x)
Prise en compte de la mutualisation		(x)
Rapidité de relâchement des IBNRs	(x)	
Facilité d'implémentation		(x)
Rapidité d'exécution		(x)

TABLE 4 – Comparaison entre les deux méthodes

---

# Méthode de provisionnement par ligne de business en utilisant une approche fréquence/sévérité

## Description de la méthode

Il s'agit d'une méthode inspirée de l'article de Pietro Parodi. Celui-ci propose une estimation du nombre de sinistres tardifs de la façon suivante :

$$N_{\widehat{tardifs}(t)} = \left( \frac{t}{\sum_{k=0}^t F(t-k)} - 1 \right) r_t$$

- $r_t$  : nombre des sinistres déclarés
- $F$  : fonction de répartition de la variable qui mesure le délai entre la survenance et la déclaration

Concernant la distribution de la sévérité. A l'opposé de la méthode présentée ou l'auteur calibre une loi en se basant sur la sinistralité observée, notre distribution est calibrée en agrégeant tous les générateurs de risque de la ligne de business. Au final, le montant des réserves est donné par la formule classique :

$$C_t = \sum_{i=0}^{N_{\widehat{tardifs}}} c_i$$

## Présentation des résultats

Les résultats trouvés ainsi que la comparaison avec la méthode traditionnelle implémentée chez AXA sont résumés dans la figure suivante :

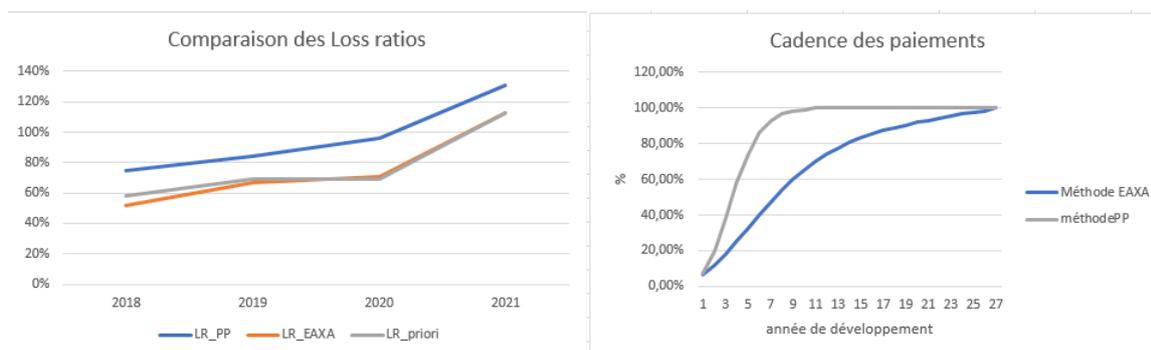


FIGURE 2 – Résultats et comparaisons

À la lumière de ce qui précède, nous remarquons que notre méthode permet d'obtenir des estimations de charges ultimes supérieures à celles d'AXA suite à une sur-estimation de la fréquence. En outre, on constate que la cadence de paiement obtenue n'est pas adaptée avec la cadence observée dans la pratique. Par conséquent, on constate que notre méthode n'est pas adaptée à cette ligne de business.

---

## Summary Note

### Problématique

AXA Global RE's pricing and reserving process is very detached. The only information exchanged at this time is the a priori modeled S/P (loss ratio). However, the pricing data is very useful for the reserving team since it allows them to reflect the evolution of the risk by cedant and by business line and to conduct expected/realized type analyses. Secondly, this data also allows us to propose new provisioning methods by treaty and by business line, as opposed to the traditional methods used by AGRE. Indeed, these methods are mainly based on the development triangles of the claims belonging to a business line. Thus, since there is no specific reserving model per treaty, the individual reserve amounts are consequently proportional to the amount estimated by the whole business line. Finally, given that the majority of non-life reserving methods are based on triangles, this thesis explores methods using a frequency/severity approach. In light of these remarks, we propose in this thesis to :

- Reconcile pricing and provisioning data
- Analyze the risks underwritten by cedant and by business line
- Propose two new provisioning methods that estimate reserve amounts by treaty and by business line using a frequency/severity approach

### Reconciliation of pricing and provisioning data

The pricing data is composed mainly of risk generators. These represent a statistical distribution that replicates a risk covered by a reinsurance treaty. Moreover, the reinsurance treaty is composed of several tranches. Each tranche has from 1 to several risk generators and has its own contractual conditions.

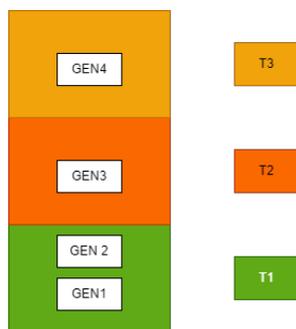


FIGURE 3 – *Composition of an XL reinsurance treaty*

With these remarks in mind, the pricing data consists of the risk generators as well as the mapping between these distributions and the tranches of each signed treaty.

In return, the reserving database gathers all the information on the claims occurred by tranche for each treaty.

In light of these two points the reconciliation is done using an inner join of these two databases by treaty/tranche

### Qualitative analysis of underwritten risks

The database obtained allows to follow the evolution of the underwritten risks between two consecutive years. As an example, for a given treaty, we have :

	Evolution
mean cost	15%
Premium	6.4%
Loss ratio	-11%

TABLE 5 – *Treaty evolution between 2021 and 2022*

In addition, this reconciliation also makes it possible to compare the number of claims a priori with the actual number :

Year	Number of expected claims	Number of realized claims
2021	0.11	0
2022	0.13	0

TABLE 6 – *Number of expected and realized claims from treaties signed in 2021 and 2022*

Finally, we can also analyze the risks by cedant :

Cedant	Treaty	Loss ratio modeled
Belgique	1	51%
Belgique	2	55%
Irlande	1	73%
Irlande	2	67%

TABLE 7 – *Expected frequency per region*

In view of these remarks, the reconciliation carried out makes it possible to report a set of additional information to the provisioning team.

## Method of provisioning by treaty using a frequency/severity approach

### Description of the method

This method is defined as follows : for each development year  $t$ , the amount of reserves for incurred but not reported claims is given by

$$C_t = \sum_{i=0}^{N_{lateclaims}} c_i$$

- $N_{tardifs}$  : number of late claims
- $c_i$  : cost of late claim

### Calibration of frequency and severity distributions by treaty

The frequency law of the treaties is given by the following formula :

If  $N \sim Pois(\lambda)$  then  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t \sim Pois(\lambda(1 - p_t))$

If  $N \sim NB(M, x)$  then  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t \sim BN(M + N_t, 1 - (1 - x)(1 - p_t))$

- $N$  : initial treaty frequency law
- $N_t$  : number of claims reported after t years of development
- $p_t = P(\text{the loss is declared before t years of development})$

The severity law is empirically calibrated by aggregating the severity laws of each component generator and associating it with its corresponding bracket.

### Presentation of the results

The comparison of the results found with the traditional method used by AXA is summarized in this table :

	Proposed method	Traditional method
Use of pricing data	(x)	
Use of reserving data	(x)	(x)
Use of the development triangle		(x)
Provisioning treaty by treaty	(x)	
Provisioning on the basis of grouped treaties		(x)
Consideration of the time between occurrence and reporting	(x)	(x)
Consideration of the duration of the final cost fixation	(x)	(x)
Taking into account the duration of settlement of the claim	(x)	(x)
Development rate calibrated by treaty	(x)	
Development rate calibrated by business line		(x)
Consideration of mutualization		(x)
Speed of release of IBNRs	(x)	
Ease of implementation		(x)
Speed of execution		(x)

TABLE 8 – Comparison between the two methods

# Method of provisioning by business line using a frequency/severity approach

## Description of the method

It is a method inspired by the article by Pietro Parodi. He proposes an estimate of the number of late claims in the following way :

$$N_{lateclaims}(t) = \left( \frac{t}{\sum_{k=0}^t F(t-k)} - 1 \right) r_t$$

- $r_t$  : number of claims reported
- $F$  : distribution function of the variable that measures the time between occurrence and reporting

Concerning the severity distribution. Contrary to the method presented where the author calibrates a law based on the observed loss experience, our distribution is calibrated by aggregating all the risk generators of the business line. In the end, the amount of reserves is given by the classical formula :

$$C_t = \sum_{i=0}^{N_{lateClaims}} c_i$$

## Presentation of the results

The results found and the comparison with the traditional method implemented at AXA are summarized in the following figure :

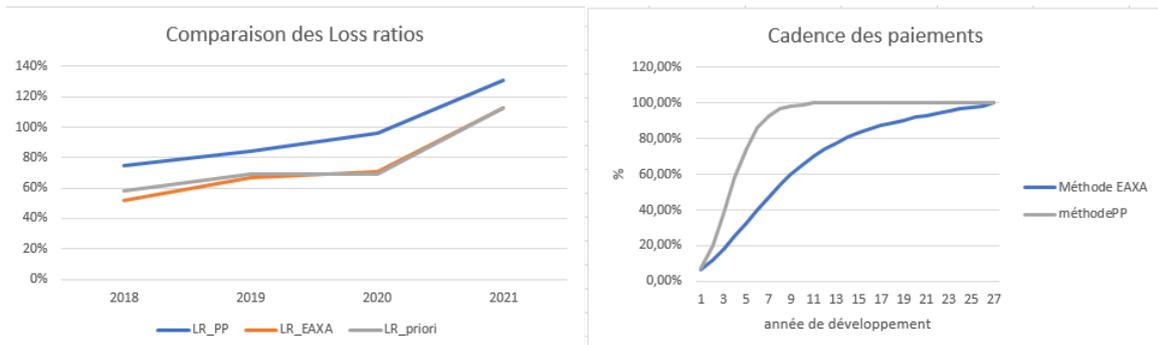


FIGURE 4 – Results and comparisons

In light of the above, we note that our method yields higher ultimate load estimates than AXA’s estimates of ultimate loads higher than AXA’s due to an overestimation of the frequency. In addition, we note that the payment rate obtained is not adapted to the rate observed in practice. Consequently, we find that our method is not adapted to this line of business. to this line of business.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la réassurance et Présentation d'AXA Global Re</b>	<b>17</b>
2.1	Définition . . . . .	17
2.2	Les différentes formes d'un contrat de réassurance . . . . .	18
2.2.1	Réassurance facultative . . . . .	18
2.2.2	Réassurance facultative-obligatoire . . . . .	18
2.2.3	Réassurance proportionnelle . . . . .	18
2.2.3.1	Quote part . . . . .	19
2.2.3.2	Excédent de plein . . . . .	19
2.2.4	Réassurance non-proportionnelle . . . . .	20
2.2.4.1	Excédent de sinistre XL . . . . .	21
2.2.4.2	Stop Loss . . . . .	21
2.3	Présentation d'AXA Global Re . . . . .	22
2.3.1	Rôle d'AXA global Re . . . . .	22
2.3.2	Création et rôle des pools . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Présentation du processus de provisionnement et les générateurs de risques chez AXA Global Re</b>	<b>24</b>
3.1	Processus de provisionnement . . . . .	24
3.1.1	Présentation de quelques notions importantes . . . . .	24
3.1.1.1	Cycle de vie d'un sinistre . . . . .	24
3.1.1.2	But du processus de provisionnement . . . . .	25
3.1.1.3	Notions de triangles . . . . .	26
3.1.2	Méthodes déterministes . . . . .	27
3.1.2.1	Méthode de Chain Ladder . . . . .	27
3.1.2.2	Méthode de Bornhuetter-Ferguson . . . . .	29
3.1.3	Méthodes stochastiques . . . . .	29
3.1.3.1	Modèle de Mack . . . . .	30
3.1.3.2	Méthode de bootstrap non paramétrique . . . . .	31
3.1.3.3	Modèle linéaire généralisé GLM . . . . .	31
3.1.4	Application sur les données d'AGRE . . . . .	33
3.2	Présentation des générateurs de risque . . . . .	35
3.2.1	Calibration des lois de fréquence . . . . .	36
3.2.1.1	Loi de Poisson . . . . .	36
3.2.1.2	Loi négative binomiale . . . . .	36
3.2.2	Calibration des lois de sévérité . . . . .	37
3.2.2.1	Loi Pareto généralisée . . . . .	37
3.2.2.2	Loi Weibull . . . . .	38

3.2.2.3	Loi log-normalle . . . . .	38
3.2.2.4	Loi Pareto tronquée . . . . .	39
3.2.2.5	Loi Custom . . . . .	39
3.2.3	Méthode de simulation des lois de sévérité . . . . .	40
3.2.4	Tests de validation de la qualité d'ajustement des lois . . . . .	40
3.2.4.1	Test d'iso-dispersion . . . . .	40
3.2.4.2	Test de Kolgomorov-Smirnov . . . . .	40
3.2.4.3	Test de Cramér-von Mison . . . . .	41
3.2.4.4	Test d'Anderson-Darling . . . . .	41
3.2.5	Critères de quantification des risques modélisés par les générateurs .	41
3.2.5.1	Courbe de la probabilité globale de dépassement AEP . .	42
3.2.5.2	Courbe de la probabilité de dépassement d'occurrence OEP	42
3.2.6	Application sur les données d'AXA GRE . . . . .	42
3.2.6.1	Loi de la fréquence . . . . .	42
3.2.6.2	Loi de la sévérité . . . . .	43
3.2.6.3	Analyse de l'évolution de l'AEP et OEP . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Mappage liant les traités et les générateurs de risques</b>	<b>45</b>
4.1	Décomposition d'un traité XL . . . . .	45
4.2	Présentation des bases de données . . . . .	46
4.2.1	Base de données de l'équipe de provisionnement . . . . .	46
4.2.2	Base de données de l'équipe de tarification . . . . .	46
4.2.3	Construction de la base finale . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Analyse qualitative</b>	<b>48</b>
5.1	Présentaion du Pool Moteur . . . . .	48
5.2	Présentation du traité étudié . . . . .	49
5.3	Évolution des générateurs . . . . .	50
5.4	Analyse du profitabilité du traité . . . . .	51
5.5	Comparaison de la charge ultime entre la vision tarification et provision- nement . . . . .	52
5.6	Comparaison qualitative des risques transmis par les cédantes . . . . .	53
5.7	Conclusion . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Méthode de provisionnement par traité en utilisant une approche fré- quence/sévérité</b>	<b>56</b>
6.1	Calibrage de la loi de la fréquence par traité . . . . .	56
6.1.1	Changement du seuil atypique . . . . .	56
6.1.2	Agrégation des lois des fréquences . . . . .	58
6.1.3	Exemple de calibrage d'une loi de fréquence d'un traité de réassurance	58

6.1.3.1	Cas d'un traité composé de générateurs qui ont la loi Poisson comme loi de fréquence : . . . . .	58
6.1.3.2	cas d'un traité composé de générateurs qui des lois de fréquence mixtes . . . . .	59
6.2	Calibrage de la loi de la sévérité par traité . . . . .	60
6.2.1	Adaptation de la loi de la sévérité . . . . .	60
6.2.2	Exemple de calibrage de la loi de la sévérité . . . . .	60
6.2.3	Utilité de la loi de la sévérité dans le processus de provisionnement	62
6.2.4	Caractérisation des courbes AEP/OEP par traité . . . . .	62
6.3	Vieillessement de la loi de la fréquence du traité . . . . .	63
6.4	Calibrage de la loi de la durée . . . . .	64
6.5	Estimation des IBNYRs par traité . . . . .	67
6.6	Méthodes d'estimation Actuelles des réserves futures par traités . . . . .	68
6.7	Analyses des résultats . . . . .	68
6.8	Amélioration du modèle proposé . . . . .	71
6.9	Conclusion . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Méthode de provisionnement utilisant une approche fréquence/sévérité par ligne de business (Pietro Parodi 2014)</b>	<b>74</b>
7.1	Motivations derrière cette méthode . . . . .	74
7.2	Description de la méthode . . . . .	74
7.2.1	Projection de la fréquence dans le cas d'un délai continu . . . . .	75
7.2.2	Projection de la fréquence dans le cas d'un délai discret . . . . .	75
7.2.3	Estimation de la distribution du délai . . . . .	75
7.2.4	Modèle de la sévérité . . . . .	75
7.3	Analyse des résultats . . . . .	76
7.3.1	Comparaison des IBNRs . . . . .	76
7.3.2	Analyse des bonis-malis . . . . .	77
7.3.3	Comparaison des Loss ratios . . . . .	78
7.3.4	Comparaison des montants des réserves dans une perspective solvabilité II . . . . .	79
7.3.5	Comparaison des cadences des paiements . . . . .	80
7.3.6	Conclusion . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>

# 1 Introduction

En assurance, l'objectif du processus de tarification est de déterminer un prix pour couvrir un risque particulier. En contrepartie le but du processus de provisionnement est de fournir une estimation de la charge ultime totale des engagements . Chez AXA Global RE, ces deux processus se détachent presque complètement. Les seuls renseignements qui sont partagés entre les deux équipes qui gèrent ces deux rôles sont les rapports sinistres sur primes (S/P). Celui-ci donne une intuition a priori sur le coût final. De plus, cette indépendance repose principalement sur plusieurs raisons :

- La finalité de ces deux processus (mentionnée ci-dessus)
- la nature des méthodes utilisée : en effet en tarification la méthode utilisée est une approche a priori c'est-à-dire avant l'observation de sinistres alors qu'en provisionnement, il s'agit d'une approche a posteriori puisque les estimations se basent sur les observations.
- Le niveau de granularité utilisé dans l'étude : en tarification, la prime estimée concerne un contrat d'assurance bien précis alors qu'en provisionnement, la charge ultime estimée représente en général le coût final d'une ligne de business. celle-ci peut regrouper de multiples contrats assortis de garanties qui peuvent varier d'une police à l'autre.

Toutefois, les données de tarification constituent un puits d'informations qui n'est pas encore assez exploitable par l'équipe de provisionnement chez AGRE. À titre d'exemple, ces données permettent de tracer une cartographie des risques ainsi que leurs évolutions en fonction de la cédante ce qui aidera par conséquent les actuaires dans leurs revues de réserves. En outre, cette information non exploitée permet aussi de faire des analyses de type "réalisé/espéré" afin de contester d'avoir un retour supplémentaire de l'équipe de provisionnement sur la calibration des cédantes

En deuxième lieu, chez AXA Global Re, les montants de réserves sont estimés par ligne de business. Cette démarche permet de profiter de l'effet de mutualisation qui permet d'améliorer le ratio S/P global. En contrepartie, le niveau de réserves par traité est par conséquent inconnu. Pour contourner ce problème, une méthode naïve est implémentée qui consiste à multiplier la somme provisionnée par le ratio défini comme le rapport des primes acquises par traité de réassurance sur le montant total des primes acquises au niveau de la ligne de business. Cette approche est fondée sur l'hypothèse qui stipule que le risque est proportionnel aux montants des primes. toutefois, celle-ci ne tient pas compte de toute l'information disponible dont on peut citer à titre d'exemple les données de tarification ainsi que les données sur le développement historique de chaque traité.

Finalement, la plupart des méthodes de provisionnement reposent sur des triangles de développement. Ceci est une conséquence de leur mise en oeuvre facile. Ces triangles sont

construits en agrégeant tous les traités qui appartiennent à la même ligne de business. Il apparaît donc clairement que les données relatives à chacun des contrats ne sont pas exploitées.

À la lumière de ces constats on se propose dans ce mémoire de rapprocher les données de tarification et de provisionnement afin de :

- mener une analyse qualitative sur l'évolution des risques souscrit par entité cédante
- proposer une méthode se basant sur une approche fréquence/sévérité qui calcule les réserves par traité
- proposer une méthode se basant sur une approche fréquence/sévérité qui calcule les réserves par ligne de business

D'abord, nous présentons brièvement la réassurance et AXA Global Re. Puis, nous décrivons les méthodes utilisées par les équipes de provisionnement et tarification. Ensuite, nous créons le lien entre la base de données des deux équipes. En outre, nous présentons une étude de cas d'évolution de risques souscrits de deux cédantes. Enfin, nous présentons deux méthodes d'estimation des montants des réserves : une qui donne une estimation par traité et une autre qui donne une estimation par secteur d'activité.

## 2 Introduction à la réassurance et Présentation d'AXA Global Re

### 2.1 Définition

Un contrat de réassurance est un engagement signé entre deux contrepartie (assureur et réassureur) par lequel les deux entités s'engagent à payer des flux financiers :

- Du côté de l'assureur : celui-ci paie des primes de réassurance fixes et déterminées au moment de la signature du contrat qui lui permettent d'être couvert contre certains risques.
- Du côté du ré-assureur : Il s'engage à payer une partie ou bien la totalité du montant des sinistres relatives aux polices d'assurances mentionnées dans le contrat.

La différence majeure entre un contrat d'assurance et celui de la réassurance réside dans la nature des contreparties. Dans le premier cas, cet engagement est en général signé entre un assureur et une personne physique ou morale qui ne pratique pas l'activité de l'assurance. Cependant, dans le deuxième cas, il s'agit d'un contrat engageant un assureur et un réassureur.

Avec l'implémentation de la réglementation solvabilité II, la réassurance a acquis une grande importance dans le marché assurantiel. En effet, ce mécanisme permet aux assureurs de réduire leurs expositions aux différents risques souscrits ce qui se traduit par une diminution du capital immobilisé SCR. Par conséquent, les entités cédantes (les assureurs) bénéficieront d'une flexibilité supplémentaire dans l'allocation de leurs capitaux propres. La figure ci-dessous met en relief cette importance. En l'examinant de proche, on constate que la réassurance joue un rôle dans toutes les branches d'assurance et les montants des primes encaissés par les réassureurs est en général entre 10% et 20% de la prime totale des risques assurés.

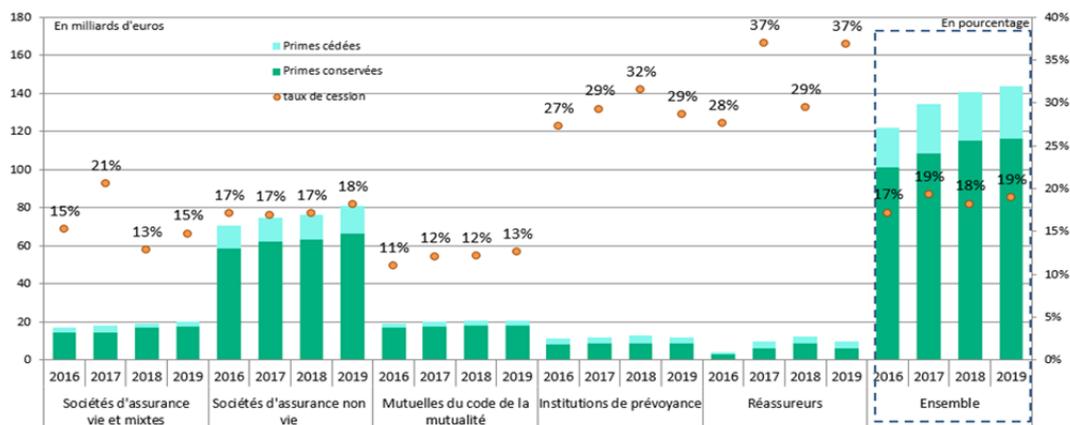


FIGURE 5 – Taux de cession en réassurance des primes acquises en assurance non vie par forme juridique

Finalement, en réassurance les risques sont catégorisés de la manière suivante :

- Risques événementiels : ils comprennent les catastrophes naturelles (inondations, tremblement de terre etc ...) et les risques "Man Made" (terrorisme, incendies etc ...). Étant donné que ces risques provoquent en général une accumulation des dommages, l'assureur s'assure alors contre ce cumul de pertes.
- Risques individuels : il s'agit de risques portant sur des expositions qui ont un coût très élevé.
- Risques de sur-fréquence : c'est le cas des risques qui surviennent à des fréquences anormalement élevées.
- Risques d'erreurs : cette catégorie comporte les risques liés à une potentielle mauvaise modélisation des risques assurés.
- Risques de déviation adverse : ces risques impactent les branches à développement long puisque le modèle utilisé risque de devenir obsolète dans le futur.

## 2.2 Les différentes formes d'un contrat de réassurance

Il existe plusieurs formes de réassurance dans le marché dont on va les présenter dans les sections qui suivent.

### 2.2.1 Réassurance facultative

Dans cette forme de réassurance, l'accord s'établit pour chaque risque, police par police. Ainsi, la cédante est libre de proposer les risques qu'elle souhaite au réassureur, libre à lui de les accepter ou non. L'inconvénient majeur de ce type de contrat réside dans la complexité de sa tarification puisque la prime dépend de facteurs spécifiques à chaque risque.

### 2.2.2 Réassurance facultative-obligatoire

Pour ce mode de réassurance, la symétrie est brisée entre la cédante et le réassureur. Comme pour la réassurance facultative, l'assureur est libre de céder ou non les risques. En revanche, le réassureur est obligé d'accepter les risques qui lui sont proposés. L'inconvénient majeur de ce type de contrat est qu'il entraîne un risque d'antisélection pour le réassureur puisque la cédante est tentée de garder les bons risques.

### 2.2.3 Réassurance proportionnelle

Dans cette branche les primes et les sinistres sont partagés proportionnellement entre l'assureur et le réassureur. Dans le marché on observe majoritairement deux types de traités :

### 2.2.3.1 Quote part

les deux contreparties fixent une constante de proportionnalité qui permet à ces deux entités de se partager les primes et les sinistres. Le tableau suivant résume le fonctionnement de ce contrat.

	Rétention	Cession
Primes	$\alpha * \sum Primes$	$(1 - \alpha) * \sum Primes$
Sinistres	$\alpha * \sum Sinistres$	$(1 - \alpha) * \sum Sinistres$

TABLE 9 – Fonctionnement du contrat quote-part du point de vue de l'assureur

Ce type de contrat présente plusieurs avantages. D'une part on voit qu'il est d'application facile. D'autre part il réduit les risques auxquels l'assureur est exposé d'un facteur de proportionnalité  $\alpha$ .

Cependant, cet engagement englobe aussi plusieurs inconvénients. En premier lieu, la cession des primes au réassureur est assez élevée ce qui limite la profitabilité de l'assureur. En deuxième lieu, ce dernier reste toujours exposé à des montants de sinistres élevés puisque les clauses du contrat ne prédéfinissent pas une limite de perte.

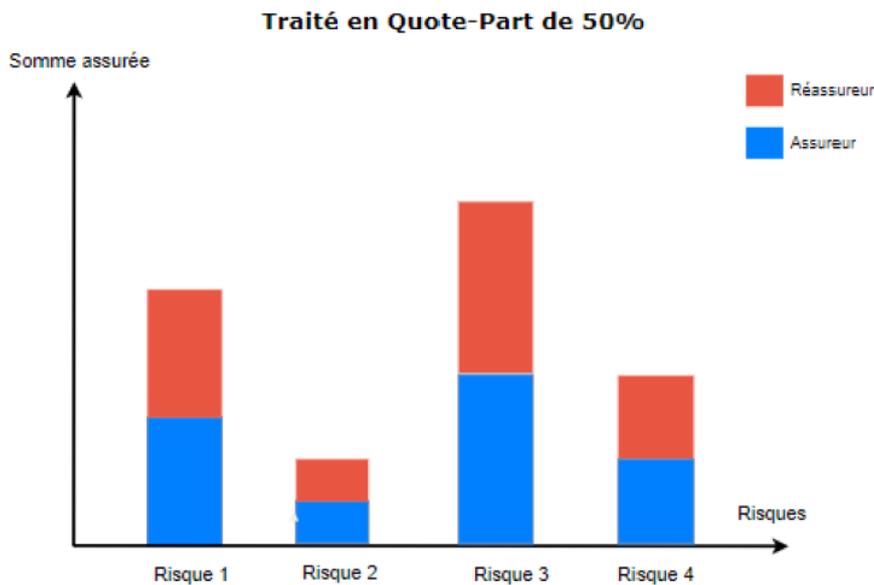


FIGURE 6 – Fonctionnement d'un traité quote-part

### 2.2.3.2 Excédent de plein

Cette fois-ci le paramètre de cessions est variable et dépend du risque en question. Le taux de cession est défini de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{\max(0, \min(\text{Capitaux assurés}, \text{Plein Rétention} + \text{Capacité}) - \text{Plein de rétention})}{\text{Capitaux assurés}} \quad (1)$$

- Plein de rétention : l'exposition maximale que l'assureur compte garder sur chaque risque.
- Capacité : la limite des paiements de la réassurance.

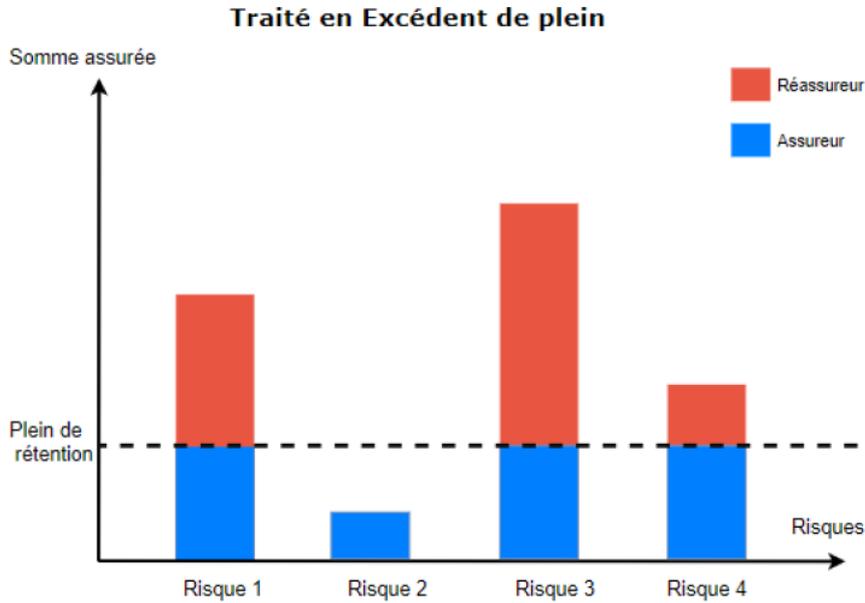


FIGURE 7 – Fonctionnement d'un traité excédent de plein

l'exemple suivant détaille le fonctionnement de ce contrat.

On suppose un portefeuille contenant plusieurs catégories de risques couverts par un contrat en excédent de plein de rétention 100 et capacité 500.

Risques	1	2	3	4
capitaux assurés	400	250	300	20
Sinistres	100	120	150	20
Primes Brutes	150	100	200	15
taux de cession	0.75	0.60	0.67	0
Charges réassureurs	75	72	100.5	0
Primes réassureurs	112.5	60	134	0

TABLE 10 – Fonctionnement d'un contrat Excédent plein

Par ailleurs si les capitaux assurés sont inférieurs à la somme de la rétention et la capacité, l'assureur bénéficiera d'une limite de perte bien déterminée. Dans le cas échéant, le surplus de capitaux n'est pas pris en compte ce qui laisse le portefeuille exposé à un risque atypique.

### 2.2.4 Réassurance non-proportionnelle

Dans le cas de la réassurance non proportionnelle, le réassureur n'intervient que lorsque le montant du sinistre dépasse un certain seuil que l'on appelle priorité et son intervention est limitée d'une certaine somme appelée protée.

### 2.2.4.1 Excédent de sinistre XL

Ce traité permet à l'assureur de se couvrir contre les montants de pertes qui dépassent la priorité sans franchir la limite.

$$\boxed{\text{Rétention} = \max(\min(\text{limite}, \text{perte}) - \text{priorité}, 0)} \quad (2)$$

Il est important de distinguer entre deux situations :

- Couverture par risque : les critères du contrat s'applique à chaque sinistre causé par un contrat d'assurance
- Couverture par évènement : les critères du contrat sont appliqués à la sinistralité globale causée par un seul évènement ( catastrophe naturelle par exemple).

Ce type de contrat permet d'amortir les coûts des sinistres atypiques. Néanmoins, dans le cas d'une grosse perte l'impact de l'intervention de la réassurance est limité.

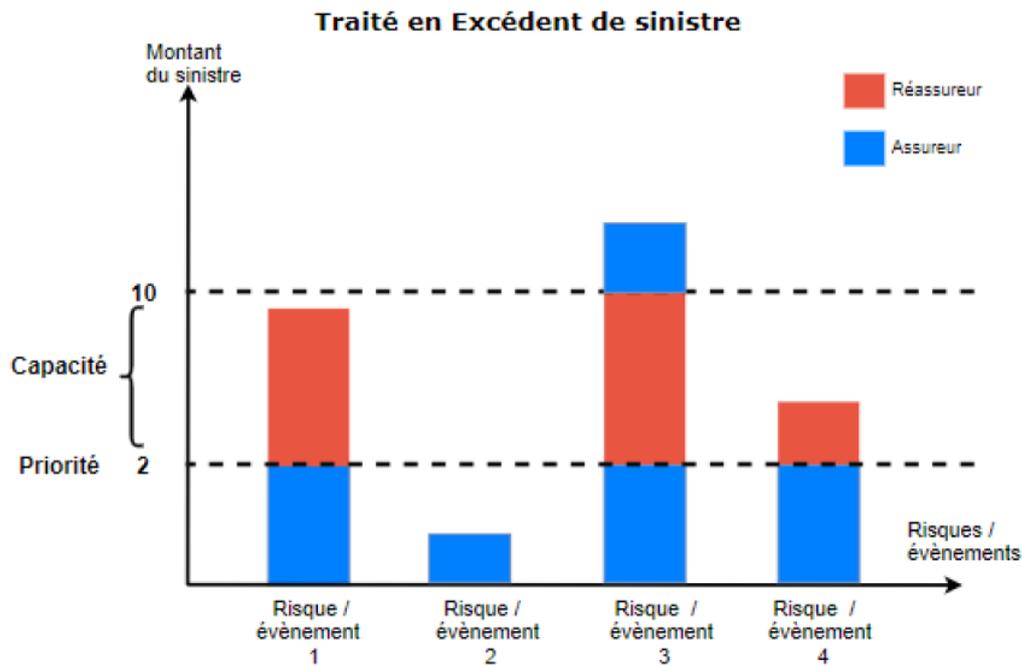


FIGURE 8 – Fonctionnement d'un traité XS

### 2.2.4.2 Stop Loss

L'intervention de la réassurance est activée seulement que lorsque le loss ratio (somme des sinistres/ sommes des primes) atteint un seuil qu'on appelle priorité. La prestation de la réassurance peut être soit limitée soit illimitée. Dans le premier cas on définit une limite qui restreint cette intervention.

$$\boxed{\text{Rétention} = \max(\min(\text{limite}, \frac{S}{P}) - \text{priorité}, 0)} \quad (3)$$

Ce contrat permet de couvrir le résultat global de l'assureur en fixant un ratio de perte

bien déterminé . Cependant, dans le cas d'une déviation importante et étant donné que la rétention de la réassurance peut être limitée, l'assureur assume le reste de la perte qui dépasse la limite.

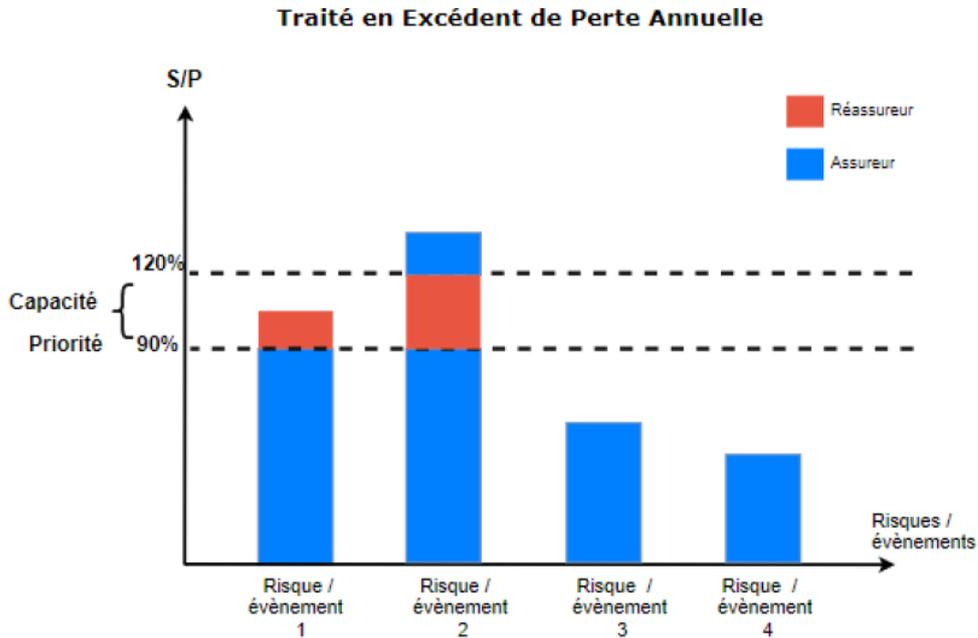


FIGURE 9 – Fonctionnement d'un traité stop loss

## 2.3 Présentation d'AXA Global Re

### 2.3.1 Rôle d'AXA global Re

AXA Global Re est née suite à la fusion d'AXA Global PC and AXA Global Life. Cette nouvelle entité représente la réassurance du groupe AXA. Son rôle principal consiste à proposer des contrats de réassurance aux différentes entités d'AXA afin de réduire leurs expositions. Par la suite, AGRE choisit soit de garder les risques acceptés, soit de céder une partie ou la totalité de ces potentielles pertes aux différents réassureurs existant sur le marché. La figure ci-dessous donne une idée générale sur son activité.

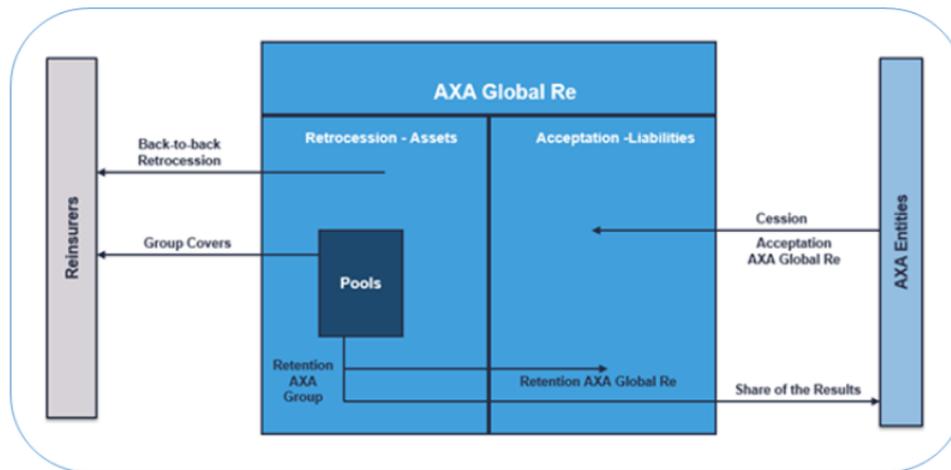


FIGURE 10 – *Modèle de business d'AXA Global Re*

En examinant ce schéma, on distingue trois activités majeures :

- Rétrocession miroir : le traité accepté par AGRE est rétrocédé à 100% sur le marché de la réassurance.
- Réassurance en utilisant les fonds propres : le traité est assuré exclusivement par AGRE.
- Pool de réassurance : les traités homogènes sont regroupés dans un pool de réassurance. Une première partie de celui-ci est ensuite cédée sur le marché de la réassurance alors que le deuxième reste dans la charge d'AGRE. Finalement si AGRE réalise un profit, le résultat est partagé avec les autres entités.

### 2.3.2 Création et rôle des pools

Historiquement, les pools ont été créés pour répondre à la hausse du prix de la réassurance. Cette augmentation a été majoritairement due à :

- Une motivation à court terme qui consiste à la récupération d'une partie de la somme dépensée suite à la survenance de sinistres majeurs ( catastrophe naturelle, événement "Man Made" etc...)
- Une motivation à long terme : Les réassureurs sont de plus en plus averses aux risques. Par conséquent la plupart des modèles ont été revus à la hausse.

En conséquence, étant donné ces augmentations, le groupe AXA a eu l'idée de créer des pools. Ce dernier groupe plusieurs traités homogènes ce qui permet de profiter de l'effet de mutualisation et ainsi de diminuer les montants des primes à payer.

## 3 Présentation du processus de provisionnement et les générateurs de risques chez AXA Global Re

Dans ce chapitre on se propose dans un premier temps de présenter le processus de calcul de réserves chez AGRE. Ensuite, nous allons décrire les générateurs de risques calibrés par les équipes de tarification des cédantes.

### 3.1 Processus de provisionnement

#### 3.1.1 Présentation de quelques notions importantes

##### 3.1.1.1 Cycle de vie d'un sinistre

La vie d'un sinistre se matérialise par plusieurs moments importants :

- $t_1$  la date de la survenance : c'est le moment ou le sinistre a eu lieu.
- $t_2$  la date de la déclaration : c'est le moment de la déclaration de ce sinistre à l'assureur.
- $t_3, \dots, t_{n-1}$  Au cours de ces dates, il y'a échange de flux entre l'assureur et l'assuré. Dans la plupart des cas, c'est ce dernier qui perçoit la somme versé. Néanmoins, il peut y avoir des cas où ce processus est inversé. On peut citer l'exemple d'une sur-évaluation du coût du sinistre. Dans ce cas, c'est l'assuré qui doit verser l'écart à l'assureur.
- $t_n$  la date de la clôture : c'est le moment ou le sinistre est considéré comme clôturé. En ce moment, il n'y aura plus d'échange de flux entre les deux parties.

Considérons un sinistre qui a eu lieu, les termes suivants sont employés pour décrire son cycle de vie :

- $[t_0, t_1[$  : Il s'agit d'un sinistre encouru mais pas encore déclaré. La notation utilisée pour le décrire est "Incurred but not yet reported claim (IBNYR)"
- $[t_1, t_2[$  : C'est un sinistre déclaré mais pas encore payé. On le nomme "Reported but not paid claim"
- $[t_3, t_n[$  : le sinistre est déclaré mais il n'est pas encore réglé entièrement. On parle de sinistre "Reported but not Settled claim".

Si on note  $X_{t_i}$  le flux échangé entre l'assureur et l'assuré à la date  $t_i$ , le montant cumulé payé à jusqu'à l'instant  $t$  est défini de la façon suivante :

$$C(t) = \sum_{2 < k \leq n, t_k < t} X_{t_k} \quad (4)$$

En conséquence, le montant final réglé est appelé "Charge ultime" et qui correspond à la date  $t_n$ .

On définit aussi le montant des provisions à la date  $t$  de la manière suivante.

$$R(t) = c(t_n) - c(t) \tag{5}$$

### 3.1.1.2 But du processus de provisionnement

Le processus de provisionnement a pour but d'estimer le montant des réserves ultimes qui permet à l'assureur d'honorer tous ces obligations. De toute évidence, ce travail sera appliqué à l'ensemble du portefeuille de contrats d'assurance. Afin de fournir une formule précise pour le calcul du montant à estimer, les notions suivantes sont définies :

- Paid claims : représente la somme totale payée par l'assureur.
- Incurred but not paid claims : représente la somme des montants des sinistres déclarés à l'assureur mais pas encore payés.
- Incurred claims : représente la somme des 'Paid claims' et les 'Incurred but not paid claims'
- Incurred but not yet reported claims : représente la somme totale des montants des sinistres qui ont eu lieu et qui ne sont pas encore déclarés.
- Incurred but not enough reported claims : représente la somme totale des variations des montants des sinistres suite à une réévaluation des pertes.
- Incurred but not reported claims : représente la somme des IBNYRs et de IBNERs
- Ultimate claims : représente le coût final de tous sinistres qui ont eu lieu

En conséquence, le montant des réserves ultimes est le suivant :

$$\boxed{\text{Ultimate Reserves} = IBNYR + IBNER + \text{Incurred claims}}$$

Dans cette équation, l'IBNYR et l'IBNER correspondent à des quantités aléatoires. Ainsi l'actuaire doit proposer des modèles statistiques afin de les estimer. Bien entendu, toute la difficulté du processus de provisionnement tient à cette modélisation.

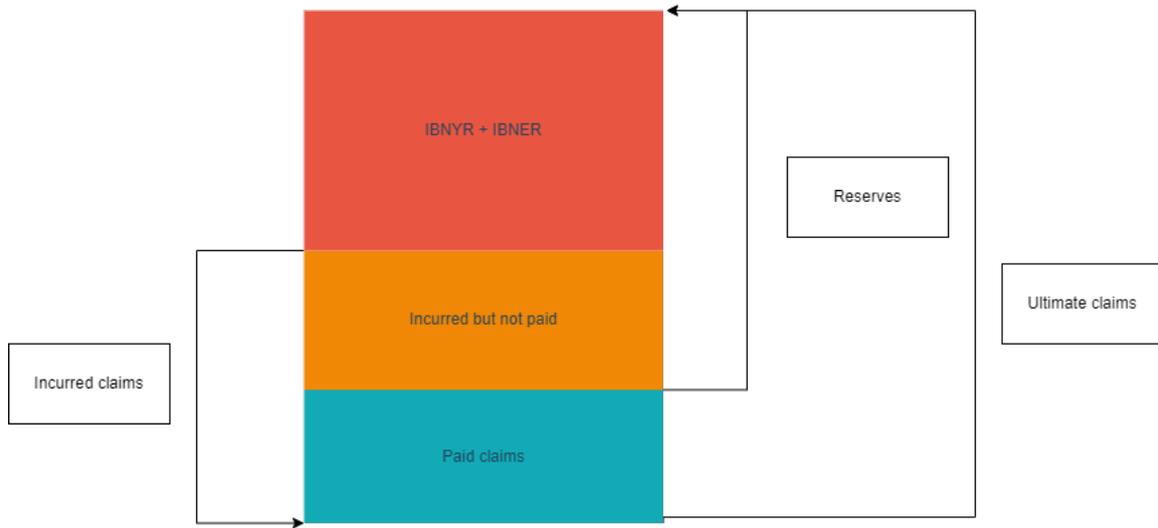


FIGURE 11 – Schéma explicatif du calcul des réserves

### 3.1.1.3 Notions de triangles

En pratique, la majorité des méthodes de provisionnement utilisent les triangles de développement. Ces derniers permettent d’avoir une idée agrégée sur le montant payé par l’assureur ainsi que les charges enregistrées.

Afin de construire ces triangles, On définit les deux quantités suivantes :

- $X_{ij}$  : le montant payé par l’assureur au cours de l’année  $j$  pour les sinistres qui ont eu lieu durant l’année  $i$ .
- $C_{ij}$  : le montant cumulé payé par l’assureur jusqu’à l’année  $j$  pour les sinistres qui ont eu lieu durant l’année  $i$

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^j X_{ik}, i \in \{1, I\}, j \in \{1, J\} \quad (6)$$

Par conséquent, le triangle de développement (trapèze) est la matrice incomplète suivante :

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	C <sub>ij</sub> i+j ≤ l							
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

FIGURE 12 – Triangle de développement

### 3.1.2 Méthodes déterministes

#### 3.1.2.1 Méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain ladder [1] est la technique de calcul de provisionnement la plus connue et la plus répandue sur le marché de l'assurance non-vie. Ceci est conséquence de sa simplicité. Cette méthode déterministe repose sur l'hypothèse suivante :

- (H1) : Les ratios  $C_{i,j+1}/C_{i,j}, i \in \{0, I - j - 1\}$  sont constants et indépendants de l'année d'origine  $i$ . Ainsi on a :

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \dots = \frac{C_{I-j-1,j+1}}{C_{I-j-1,j}} \approx \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad (7)$$

Dans le cas où il y a une stabilité dans les conditions qui influencent la sinistralité et le processus de déclaration, cette hypothèse peut être admise puisqu'elle suppose que les montants cumulés après  $j$  années se développent de la même manière indépendamment de leurs années d'origine.

#### Remarque

Un test simple qui permet de valider l'hypothèse (H1) est de tracer le diagramme  $(C_{ij}, C_{i,j+1})_{i=0:I-1-j}$ . Cette courbe doit être suffisamment bien linéaire sur une droite qui passe par l'origine. La figure ci-dessus donne exemple qui satisfait l'hypothèse (H1)

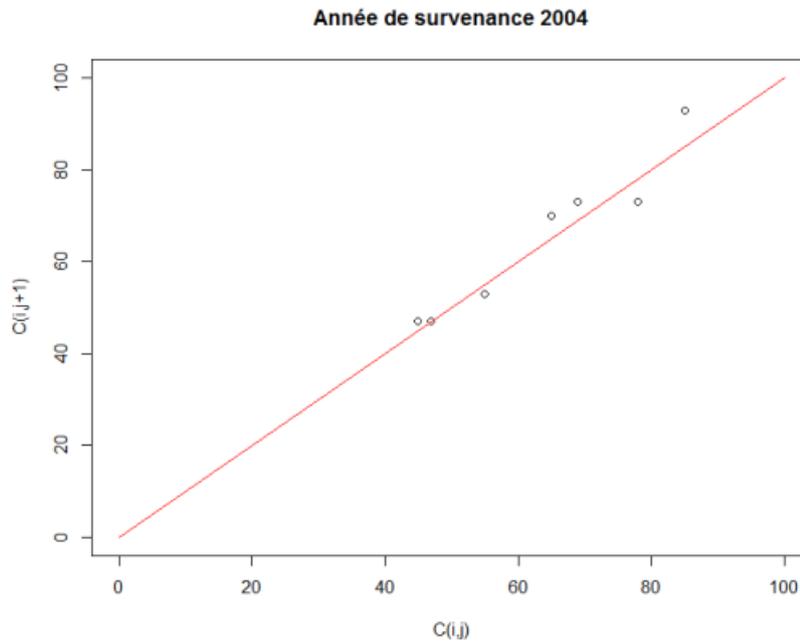


FIGURE 13 – *diagramme*  $(C_{ij}, C_{i,j+1})_{i=0:I-1-j}$

Si, on définit le facteur de développement de l'année  $j$  comme suit :

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad (8)$$

Une estimation des montants cumulés (payé ou incurred) jusqu'à l'année de développement  $j$  pour les sinistres qui ont eu lieu dans l'année d'origine  $i$  est donnée par la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} \prod_{k=I-i}^{k=j-1} f_k \quad (9)$$

La charge ultime pour l'année d'origine  $i$  est alors estimée de la manière suivante :

$$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I-i} \prod_{k=I-i}^{I-1} f_k \quad (10)$$

En outre, les montants des provisions sont donnés par la formule suivante :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I-i} \quad (11)$$

Par conséquent, on peut finalement compléter le triangle de provisionnement.

L'exemple suivant illustre la méthode de Chain Ladder :

Surv/Dév	0	1	2	3
0	$C_{00}$	$C_{01}$	$C_{02}$	$C_{03}$
1	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$\hat{C}_{13}$
2	$C_{20}$	$C_{21}$	$\hat{C}_{22}$	$\hat{C}_{23}$
3	$C_{30}$	$\hat{C}_{31}$	$\hat{C}_{32}$	$\hat{C}_{33}$

TABLE 11 – *Illustration de la méthode de Chain Ladder*

Enfin, en dépit de sa simplicité, cette méthode présente des inconvénients majeurs :

- L'hypothèse de l'indépendance des facteurs de développement individuels des différentes années est assez forte. En général, les conditions de sinistralité et de déclaration peuvent changer ce qui mettra en question son adéquation. À titre d'exemple il ne devrait pas y avoir des modifications majeures en matière de gestion des sinistres.
- Les facteurs de développement  $f_j$  peuvent être influencés par les sinistres atypiques de faibles fréquences. Dans ce cas, l'actuaire doit altérer la méthode de calcul afin résoudre ce problème.
- Cette technique ne prend pas en compte l'estimation a priori des coûts moyens des sinistres faites par l'équipe qui gère la tarification des contrats. En conséquence, dans le cas d'une branche historique cette méthode ignore une information précieuse qui peut améliorer l'estimation des réserves.
- Les données du portefeuille doivent être nombreuses et fiables pour obtenir des estimations adéquates.

### 3.1.2.2 Méthode de Bornhuetter-Ferguson

La méthode Bornhuetter-Ferguson [1] permet d'intégrer les estimations du loss ratio (S/P) a priori relevées par l'équipe de la tarification ou par un historique dans le calcul des réserves. À l'instar de la méthode de Chain Ladder, cette technique repose sur la même hypothèse de départ (H1).

Si on définit les cadences  $\rho_j$  (indépendant de l'année de survenance) de la façon suivante :

$$\rho_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,I}} = \frac{1}{\prod_{k=j}^{I-1} f_k} \quad (12)$$

et si on suppose que la charge ultime est donnée par la formule suivante :

$$\text{Charges ultimes}_i = LR_i^{\text{apriori}} * E_i \quad (13)$$

avec :

- $LR_i = \frac{\text{coûts des sinistres totales estimés}}{\text{somme des primes collectées}}$
- $E_i =$  somme des primes collectées.

Une estimation des montants cumulés (paid ou incurred) jusqu'à l'année de développement j pour les sinistres qui ont eu lieu dans l'année d'origine i est comme suit :

$$C_{i,j+1}^{\hat{}} = C_{i,j} + (\rho_{j+1} - \rho_j) LR_i^{\text{apriori}} E_i \quad (14)$$

Ensuite, on estime la charge ultime par :

$$C_{i,I}^{\hat{}} = C_{i,I-i} + (1 - \rho_{I-i}) LR_i^{\text{apriori}} E_i \quad (15)$$

Finalement, le montant des réserves est égal à :

$$\hat{R}_i = C_{i,I}^{\hat{}} - C_{i,I-i} = (1 - \rho_{I-i}) LR_i^{\text{apriori}} E_i \quad (16)$$

Néanmoins, cette méthode présente aussi des inconvénients :

- Dans le cas d'une branche d'assurance récente, l'estimation du loss ratio n'est pas fiable. Par conséquent, cette méthode n'est pas applicable à cet égard.
- Vu que les cadences sont estimées à partir des estimations des facteurs de développement obtenues avec la méthode de Chain Ladder, on peut affirmer qu'elles sont influencées par les sinistres atypiques.

### 3.1.3 Méthodes stochastiques

Contrairement aux méthodes de reserving déterministes, les méthodes stochastiques donnent la possibilité d'estimer l'incertitude des prévisions. En conséquence, ces techniques s'avèrent

très utiles notamment dans le cadre de la réglementation solvabilité II qui impose le calcul du ainsi que le suivi des risques encourus par les entités. Ces méthodes sont divisées en deux catégories :

- Modèles non paramétriques : ils permettent de quantifier l'incertitude sans faire de suppositions quant à la répartition de la quantité aléatoire en question, ces méthodes sont généralement plus précises. Toutefois, leur mise en œuvre est plus difficile.
- Modèles paramétriques : ces modèles proposent des hypothèses sur la distribution des quantités à estimer. Ceci permet d'estimer l'incertitude. Toutefois, dans la plupart des cas, cette valeur est moins précise que les valeurs estimées à l'aide de méthodes non paramétriques.

### 3.1.3.1 Modèle de Mack

Le modèle de Mack [1] est une méthode non paramétrique développée par Thomas Mack. Afin d'obtenir une estimation de l'incertitude, l'auteur fait une hypothèse sur le moment d'ordre 2. Les hypothèses initiales sont les suivantes :

- Les montants cumulés sont des variables aléatoires indépendantes des années de survenances :  $\forall i, k \in \{1, I\}, C_{i,j} \perp C_{k,j}$
- $(C_{i,j})_j$  est une chaîne de Markov et il existe  $f_0 \dots f_{I-1} > 0$  et  $\sigma_0^2 \dots \sigma_{j-1}^2 > 0$  tels que pour tout  $i, j$  :  $E(C_{ij}|C_{ij-1}) = f_{j-1}C_{ij-1}, Var(C_{ij}|C_{ij-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{ij-1}$

D'après l'hypothèse (H2), l'estimation des  $f_j$  par la méthode de Chain Ladder est sans biais. Ainsi, ces coefficients et la méthode de calcul des montants cumulés seront retenus. Quant à la variance conditionnelle, un estimateur sans biais est donné comme suit :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} (f_{ij} - f_j^{\hat{C}L})^2 \quad (17)$$

Si on définit  $D_i = \{C_{i,j}, i+j \leq I\}$  comme étant l'information disponible. L'erreur quadratique moyenne de l'estimation de la charge ultime est donnée par :

$$M\hat{S}EP_{|D_I}(C_{iI}^{\hat{C}L}) = \hat{E}[(C_{iI}^{\hat{C}L} - C_{ij})^2 | D_I] = (C_{iI}^{CL})^2 \sum_{j=I-i}^{I-1} \frac{\sigma_{j-1}^2}{(f_j^{\hat{C}L})^2} \left( \frac{1}{\sum_{l=0}^{I-j-1} C_{lj}} + \frac{1}{C_{ij}^{\hat{C}L}} \right) \quad (18)$$

En conséquence, l'erreur globale d'estimation est égale à :

$$M\hat{S}EP_{|D_I}(\sum_i C_{iI}^{\hat{C}L}) = \sum_i M\hat{S}EP_{|D_i}(C_{iI}^{\hat{C}L}) + \sum_{i < m} C_{iI}^{\hat{C}L} C_{mI}^{\hat{C}L} \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\sigma_j^2}{(f_j^{\hat{C}L})^2 \sum_{l=0}^{J-1} C_{lj}} \quad (19)$$

Bien que ce modèle permette de donner une estimation de l'incertitude, les hypothèses initiales sont assez fortes et généralement non applicables en pratique. En outre, cette technique ne permet pas de donner une estimation de la "value at risk" qui est nécessaire pour le calcul du SCR.

### 3.1.3.2 Méthode de bootstrap non paramétrique

Préalablement à la présentation de cette méthode, il est nécessaire d'introduire la technique bootstrap. En effet, elle consiste à un tirage avec remise de  $k$  éléments parmi  $n$ . Dans le cas d'observations indépendantes et identiquement distribuées, le fait de répéter ce tirage plusieurs fois et ensuite estimer une quantité qui est une fonction de l'échantillon permet d'obtenir une distribution de probabilité.

Par ailleurs, afin que le bootstrap soit applicable sur notre jeu de données  $D_i$ , il est nécessaire de calculer les résidus du modèle de Mack dont on suppose qu'ils sont IID à l'opposé de  $C_{ij}$ .

$$Z_{ij} = \frac{f_{ij} - \hat{f}_j}{\hat{\sigma}^2} \left(1 - \frac{C_{ij}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{ij}}\right)^{-1/2} \quad (20)$$

En conséquence, la famille des  $(Z_{ij})_{i+j \leq I}$  constitue nos observations.

Si on note  $k \in \{1, \dots, N\}$  l'indice de l'échantillon, les facteurs de développement individuels "bootstrap" pour  $j = 0, \dots, J - 1$  et  $i = 0, \dots, I - j - 1$  est donnée par :

$$f_{ij,k}^* = \hat{f}_j + \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{C_{ij}}} Z_{ij,k}^* \quad (21)$$

Ainsi, on en déduit une estimation "bootstrap" des  $f_j$

$$f_{j,k}^* = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij} f_{ij,k}^*}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} \quad (22)$$

la charge ultime "bootstrap" sera donnée par la formule suivante :

$$C_{iI,k}^{\hat{*}} = C_{i,I-i} \prod_{l=I-i}^{I-1} \hat{f}_{l,k}^* \quad (23)$$

Finalement, la famille  $(C_{iI,k}^{\hat{*}})_{k \leq N}$  nous permet d'obtenir une distribution de la charge ultime et ainsi de déterminer la Value at risk.

En pratique, lorsque les hypothèses du modèle de Mack ne sont pas vérifiées, les observations des résidus qu'on a à disposition ne sont pas IID. En conséquence, la méthode de bootstrap ne sera pas appliquée de façon rigoureuse.

### 3.1.3.3 Modèle linéaire généralisé GLM

Le cadre GLM [1] peut être appliqué dans le calcul des réserves. Le problème est formulé de la façon suivante :

$$E(X_{ij}) = x_{ij} = g(\eta_{ij}) \quad (24)$$

$$\eta_{ij} = \Gamma_{ij}^T \beta \quad (25)$$

$$Var(X_{ij}) = \frac{\phi_{ij}}{w_{ij}} V(x_{ij}) \quad (26)$$

- $g$  fonction de lien
- $\beta$  vecteur contenant les paramètres systématiques.
- $\phi_{ij}$  paramètre de dispersion
- $w_{ij}$  paramètre de volume
- $V$  fonction de variance.

Ensuite en supposant la structure de la moyenne suivante :  $x_{ij} = \gamma_j \mu_i$  avec  $\mu_i$  représente la charge ultime de l'année de souscription  $i$  et  $\gamma_j$  représente une cadence de paiement. Par conséquent le nombre de paramètres à estimer est  $I+J+2$ . Pour cette structure multiplicative, il est judicieux de considérer la fonction logarithme comme étant la fonction de lien. En outre, afin que le modèle soit identifiable, on adopte les deux hypothèses suivantes :  $\sum_j \gamma_{ij}$  avec  $i \in [0, J]$  et  $\mu_0 = 1$ .

Suite à ces considérations :

$$\beta = (\log(\mu_1), \dots, \log(\mu_I), \log(\gamma_0), \dots, \log(\gamma_J)) \quad (27)$$

$$\Gamma_{0,j} = (0, \dots, 0, e_{I+j+1}, \dots, 0) \quad (28)$$

$$\Gamma_{i,j} = (0, \dots, e_i, \dots, 0, e_{I+j+1}, \dots, 0) \text{ avec } e_{ij} = 1 \quad (29)$$

Afin d'estimer les paramètres du vecteur  $\beta$ , on utilise la méthode du maximum de vraisemblance. Pour cela, il faut supposer que les  $X_{ij}$  suivent une distribution bien définie. En particulier, on choisit la famille exponentielle sur-dispersée. Elle est définie de la manière suivante :

$$f(x_{ij}, \theta_{ij}, \phi_{ij}, w_{ij}) = a(x_{ij}, \frac{\phi_{ij}}{w_{ij}}) \exp\left(\frac{x\theta_{ij} - b(\theta_{ij})}{\frac{\phi_{ij}}{w_{ij}}}\right) \quad (30)$$

- $b$  : fonction deux fois dérivable tel que  $(b')^{-1}$  existe.
- $\phi_{ij}$  : paramètre de dispersion.
- $w_{ij}$  : paramètre d'exposition.
- $a$  : fonction de normalisation

Sous l'hypothèse de cette famille, on a par conséquent :

$$E(X_{ij}) = x_{ij} = b'(\theta_{ij}) \quad (31)$$

$$Var(X_{ij}) = \frac{\phi_{ij}}{w_{ij}} b''(\theta_{ij}) \quad (32)$$

**Remarque** : la fonction variance est ainsi définie :  $V(x) = b''((b')^{-1}(x))$   
Une fois la distribution des incréments est spécifiée, l'estimateur du maximum de vrai-

semblance s'écrit comme suit :

$$l(\beta) = \log\left(\prod_{i+j \leq I} f(x_{ij}, (b')^{-1}(x_{ij}), \phi_{ij}, w_{ij})\right) \text{ avec } b'(\theta_{ij}) = \exp(\eta_{ij}) = \mu_i \gamma_j \quad (33)$$

Ainsi la maximisation de cette quantité par rapport au vecteur  $\beta$  donne une estimation des I+J+1 paramètres du modèle.

Par la suite, une estimation de la charge ultime est définie comme suit :

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1} \hat{X}_{ij} = C_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1} \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j \quad (34)$$

### 3.1.4 Application sur les données d'AGRE

Considérons le triangle de développement correspondant à une branche d'activité d'AGRE. Ces données représentent les incréments des montants de sinistres déclarés durant chaque année de développement.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	3792	261212	2286989,35	4921328,10	6297658,60	7222186,09	7176759,56	8040446,39	9842008,89	10950893,92	6150646,06	7599468,96	7168116,01	7171282,01	9686137,27	9239021,21
2006	1733109,35	12164360,60	14915652,55	3228000,39	4601815,91	8251616,18	9551088,75	9938455,94	11935795,93	9157541,31	9157684,18	9576819,28	9586909,40	9734854	9926203,21	
2007	0	0	0	0	0	0	537729,20	537729,20	226353,18	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01		
2008	0	0	1618712,98	2000000	2000000	2053816	2029273	2000000	2000000	2000000	2000000	2000000	2049472,13			
2009	9838586	5755550	12916136,16	12609495,68	21413186,51	21926222,90	23343958,08	22558061,83	23052723,99	27313862,74	26224721,94	27971951,60				
2010	5000000	0	1407865,15	1407865,15	411906,44	0,00	3986257,92	3581861,67	5418322,61	4850379,64	6182252,61					
2011	0	0	1252371	1304303	4410256	4719679	4533929,14	4533929,14	6023551,14							
2012	1303090,03	6571240,33	4395689,94	4799717,61	4298326,40	6844149,95	10224062,35	11917883,38	13683827,09							
2013	0	932064,18	998979,79	998979,79	8971066,06	16015386,31	16104832,78	19442668,94								
2014	590200,53	9857553,71	11698859,23	35088392,94	20677746,12	22443093,52	23063872,87									
2015	50000000	50090531,9	74197265,34	78139696,4	72372245,5	74283845,5										
2016	510000	93323,336	572235,7147	5691956,72	6605418,29											
2017	15308874,7	25121412,56	16003818,63	15623832,7												
2018	7052186,18	17823461,5	15160877,6													
2019	3275865,82	7117495,44														
2020	343864,343															
2021																

FIGURE 14 – *triangle de développement de la branche d'activité*

Les études actuarielles menées par AXA ont montré que cette branche est à développement long. Par conséquent, on s'attend à des montants de réserves non nulles pour les années antérieures. La figure ci-dessous donne une estimation des réserves en utilisant les méthodes Chain ladder et Bornhuetter Ferguson.

### 3 PRÉSENTATION DU PROCESSUS DE PROVISIONNEMENT ET LES GÉNÉRATEURS DE RISQUES CHEZ AXA GLOBAL RE

Year	BF	CL
2005	-2 071 672,24 €	-14 227 255,38 €
2006	-3 190 830,71 €	-15 679 536,50 €
2007	-2 752 840,52 €	-17 378 685,86 €
2008	-3 288 072,35 €	-19 041 868,91 €
2009	-4 276 126,49 €	-21 379 159,82 €
2010	-3 814 139,31 €	-23 947 641,07 €
2011	-8 037 536,75 €	-26 580 166,17 €
2012	-10 230 687,48 €	-30 140 409,91 €
2013	-8 132 606,22 €	-30 997 248,97 €
2014	-11 626 989,52 €	-31 562 192,56 €
2015	-15 925 860,51 €	-32 523 595,64 €
2016	-15 195 522,63 €	-33 098 998,52 €
2017	-14 767 325,09 €	-30 936 687,81 €
2018	-19 167 825,82 €	-25 447 557,05 €
2019	-21 925 170,75 €	-14 498 158,48 €
2020	-26 923 698,77 €	-2 963 315,66 €
2021	-52 369 803,56 €	-118 727,38 €

FIGURE 15 – *Comparaison des montants de réserves*

A la lumière de cette table on remarque que :

- Une corrélation positive entre l'année de souscription et les montants de réserves ce qui est conforme à la pratique. En effet, le développement des années antérieures se ralentit puisqu'il est sur le point d'arrivée à son expiration. Ainsi les montants de réserves ont tendance à baisser.

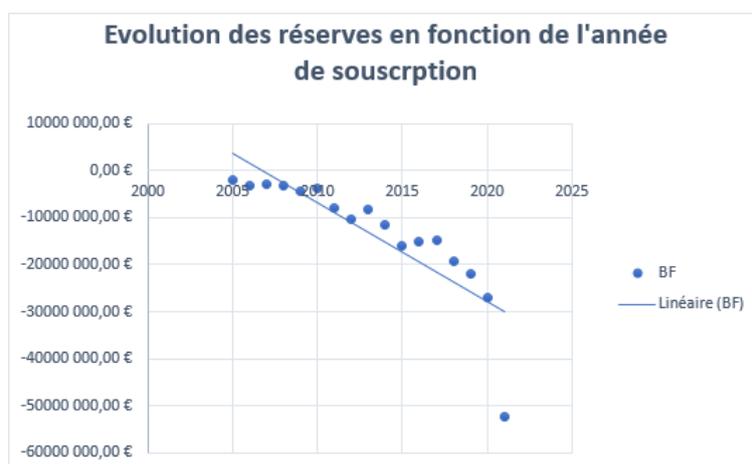


FIGURE 16 – *Évolution des réserves en fonction de l'année de souscription*

- Pour l'année 2021, on constate que le montant des réserves estimé par la méthode CL est médiocre. En effet, étant donné que la charge reportée durant la première année de développement est très faible l'estimation est faible par conséquent ce qui représente une limite majeure cette méthode.
- Dans le cas de cette branche à développement long, les montants estimés par la méthode CL sont assez élevés pour les années antérieures par rapport aux estima-

tions de la méthode BF. Cela provient du fait que les charges payées jusqu'à l'année présente sont assez importantes. Toutefois, dans le cas où les Loss ratios a priori sont sous-estimés les réserves BF risquent d'être non suffisantes.

À la lumière de ces remarques on constate que la méthode BF est mieux adapté pour les années de souscription les plus récentes. En contrepartie, il est difficile de juger la méthode la plus adéquate à utiliser pour les années antérieures puisque cela dépend de la qualité de l'estimation des Loss ratios a priori.

Par ailleurs, une analyse de la charge ultime montre qu'il existe une corrélation positive entre cette quantité et les primes acquises. La figure ci-dessous en relief ce point.

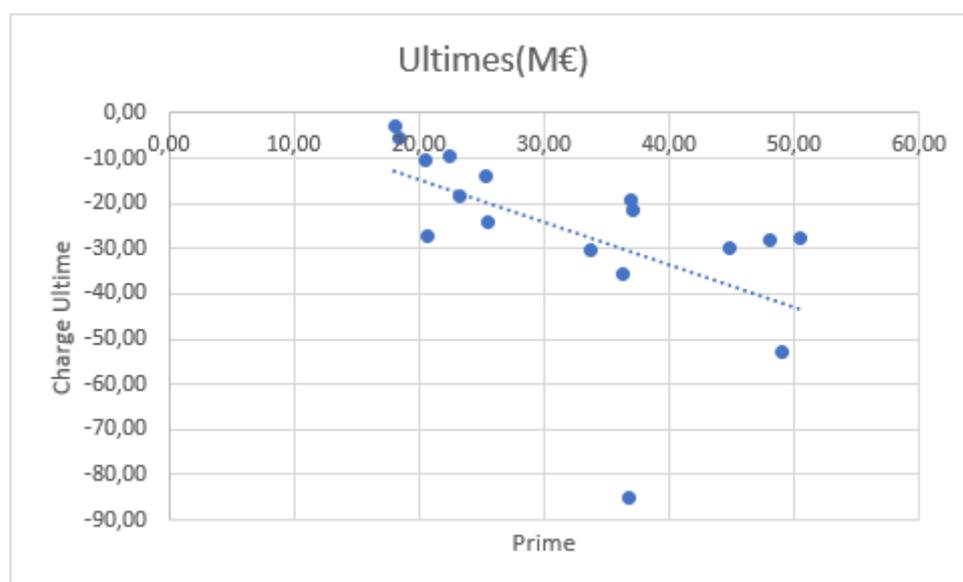


FIGURE 17 – Évolution de la charge ultime en fonction des primes

Cela est de toute évidence cohérent avec la pratique puisque le risque est positivement corrélé avec les primes acquises.

### 3.2 Présentation des générateurs de risque

Rappelons qu'en réassurance, il existe trois méthodes principales de tarification des traités XL :

- Burning cost
- Modélisation des risques
- Tarification par exposition

Chez AGRE, la technique principale employée est la deuxième méthode.

Un générateur de risques fait référence à une garantie fournie par l'assureur dans le contrat d'assurance. Par exemple, dans le cas d'une police multirisques habitation (MRH), plusieurs garanties sont offertes dont on peut citer la protection contre les incendies, le vol, les catastrophes naturelles etc... Cela étant dit, il est nécessaire de modéliser ces risques

potentiels par des générateurs. Ces derniers décrivent une distribution statistique qui se prête le mieux à chaque type de risque.

Les générateurs de risques sont en général caractérisés par une approche fréquence/coût. Les données nécessaires pour effectuer le calibrage sont fournies par l'assureur. Cependant, ce dernier ne renseigne que les sinistres dont le coût est supérieur à un seuil prédéterminé dans le traité de la réassurance. Dans le cas d'AGRE, ces générateurs sont calibrés par les cédantes puisque toutes ces entités appartiennent aux même groupe AXA. Ensuite ils sont revus par l'équipe de la tarification au sein d'AGRE. Finalement, vu que la réassurance XS traite les scénarios extrêmes, on s'attend à des lois de fréquences qui caractérise des évènements rares et des lois sévérités à queue épaisse.

### 3.2.1 Calibration des lois de fréquence

Dans cette section, on traitera les différentes distributions utilisées pour estimer la fréquence des risques atypiques.

#### 3.2.1.1 Loi de Poisson

C'est une loi très utilisée pour modéliser les évènements de fréquence rare. Elle est décrite de la façon suivante :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda E) \quad (35)$$

Cette loi est calibrée en estimant le paramètre  $\lambda$ [4] :

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{\sum_{i=1}^N E_i} \quad (36)$$

$E_i$  : représente la durée du temps au cours de laquelle le contrat d'assurance a été actif.

Cet estimateur est efficace puisqu'il est déterminé à partir de de la méthode du maximum de vraisemblance et sans biais (en utilisant le lemme de Slutsky)

#### 3.2.1.2 Loi négative binomiale

Il s'agit d'une autre loi très utilisée dans le but de modéliser la fréquence. Elle est décrite de la façon suivante :

$$P(X = K) = C_{k+r-1}^k (1 - ep)^r (ep)^k \quad (37)$$

Les paramètres du modèle sont estimés de la façon suivante :

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{(\sum_{i=1}^N E_i) - 1} \quad (38)$$

$$v\hat{ar} = \frac{1}{\sum_i E_i} \sum_i E_i (X_i - \hat{m})^2 \quad (39)$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{m}}{v\hat{ar}}, \quad \hat{r} = \frac{\hat{m} - \hat{p}}{1 - \hat{p}} \quad (40)$$

Finalement, il faut noter que ces estimateurs obtenus sont sans biais.

### 3.2.2 Calibration des lois de sévérité

Dans cette section, on traitera les distributions utilisées pour modéliser les risques atypiques.

#### 3.2.2.1 Loi Pareto généralisée

Cette loi est fréquemment utilisée pour modéliser les distributions des valeurs extrêmes. En conséquence, elle est d'une grande importance dans la réassurance qui s'intéresse dans la majorité des cas aux sinistres atypiques de coût élevés. La fonction de répartition de cette loi est comme suit [9] :

$$F_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi > 0 \quad \text{et } x \geq \mu \\ 1 - (1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi < 0 \quad \text{et } \mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\xi} \\ 1 - \exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}) & \text{si } \xi = 0 \quad \text{et } x \geq \mu \end{cases} \quad (41)$$

$\mu$  : paramètre de localisation

$\sigma$  : paramètre d'échelle

$\xi$  : paramètre de forme

Afin de calibrer cette loi, AXA utilise deux méthodes :

— Méthode des moments MME :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{perte}_i \quad (42)$$

$$var = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\text{perte}_i - m)^2 \quad (43)$$

$$\hat{\xi} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(m - \mu)^2}{var} \right) \quad (44)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{m - \mu}{2} \left( 1 + \frac{(m - \mu)^2}{var} \right) \quad (45)$$

— Méthode du maximum de vraisemblance :

$$(\hat{\xi}, \hat{\sigma}) = \underset{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmin}} N * \ln(y) + (1 + \frac{1}{x}) \sum_i \ln(1 + \frac{x}{y} (\text{perte}_i - \mu)) \quad (46)$$

### 3.2.2.2 Loi Weibull

Cette loi est très répandue dans la théorie des valeurs extrêmes puisqu'elle appartient à la famille GEV (Generalized extrême value distribution). Sa fonction de répartition est donnée par la formule suivante [13] :

$$F_{(\mu,\beta,k)}(x) = 1 - \exp(-b(x - \mu)^k) , x \geq \mu \quad (47)$$

$\mu$  : Paramètre de localisation

$b$  : Paramètre d'échelle

$k$  : Paramètre de forme

L'estimation des paramètres de la loi se fait de la manière suivante :

— Méthode des moments :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{perte}_i \quad (48)$$

$$\text{var} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\text{perte}_i - m)^2 \quad (49)$$

$$\hat{k} = f^{-1}(0) , f(x) = \left(1 + \frac{\text{var}}{(m - \mu)^2}\right) \gamma \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \gamma \left(1 + \frac{2}{x}\right) \quad (50)$$

$$\hat{\beta} = \frac{m - \mu}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\hat{k}}\right)} \quad (51)$$

— Méthode du maximum de vraisemblance :

$$(\hat{\xi}, \hat{\sigma}) = \underset{i=1}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^N \ln(f_{(\mu,\sigma,k)}) \quad (52)$$

En dérivant par rapport aux variables d'intérêt, on retrouve les expressions suivantes :

$$\hat{k} = f^{-1}(0) , f(x) = \frac{\frac{1}{N} \sum_i \log(\text{perte}_i - \mu)(\text{perte}_i - \mu)^x}{\frac{1}{N} \sum_i (\text{perte}_i - \mu)^x} - \frac{1}{x} - \sum_i \log(\text{perte}_i - \mu) \quad (53)$$

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{N} \sum_i (\text{perte}_i - \mu)^{\hat{k}}\right)^{\frac{1}{\hat{k}}} \quad (54)$$

### 3.2.2.3 Loi log-noramble

Cette distribution est aussi répandue en réassurance puisqu'elle permet de donner de l'importance aux sinistres qui ont des coûts élevés. Elle est calibrée de la façon suivante :

— Méthode des moments :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N perte_i \quad (55)$$

$$var = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (perte_i - m)^2 \quad (56)$$

$$sdlog = \sqrt{\log\left(1 + \frac{var}{(m - \mu)^2}\right)} \quad (57)$$

$$meanlog = \log(m - \mu) - \frac{sdlog^2}{2} \quad (58)$$

— Méthode du maximum de vraisemblance :

$$meanlog = \frac{1}{N} \sum_i \log(perte_i - \mu) \quad (59)$$

$$sdlog = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (\log(perte_i - \mu) - meanlog)^2} \quad (60)$$

### 3.2.2.4 Loi Pareto tronquée

La loi Pareto tronquée est très utilisée en réassurance. elle permet de modéliser les expositions limitées. Sa fonction de répartition est donnée de la façon suivante [14] :

$$F_{(L,H,\alpha)}(x) = \frac{1 - (\frac{L}{x})^\alpha}{1 - (\frac{L}{H})^\alpha}, \quad x \in [L, H] \quad (61)$$

$\alpha$  : paramètre de forme

Cette loi est calibrée de la façon suivante :

— Méthode des moments :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N perte_i \quad (62)$$

$$\alpha = f^{-1}(0), \quad f(x) = m - \frac{l}{1 - \frac{1}{x}} * \frac{1 - (\frac{L}{H})^{x-1}}{1 - (\frac{L}{H})^x} \quad (63)$$

### 3.2.2.5 Loi Custom

Dans des cas où aucun calibrage ne donne un résultat satisfaisant, une loi peut être créée spécifiquement pour la distribution en question si l'entité possède un nombre important

d'observations. Pour ce faire, il suffit de déterminer les quantiles qui correspondent à une répartition très granulaire de l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 3.2.3 Méthode de simulation des lois de sévérité

Afin de simuler des réalisations selon les lois mentionnées ci-dessus. on utilise le théorème de la fonction inverse.

**Théorème :**

Soit  $F$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[0, 1]$  croissante et continue à droite d'inverse généralisé  $F^{-1}$  et soit  $U$  une variable uniforme sur  $[0, 1]$ . alors

$$F^{-1}(u) \sim X \text{ avec } X \text{ possède comme fonction de répartition } F \quad (64)$$

Cette fonction inverse peut être définie pour toutes les lois y compris pour la loi custom.

### 3.2.4 Tests de validation de la qualité d'ajustement des lois

Afin de choisir la loi la plus adaptée, il existe plusieurs tests statistiques qui aident à la prise de décision. Dans ce qui suit, on présentera quelques-uns qui sont utilisés en réassurance.

#### 3.2.4.1 Test d'iso-dispersion

Dans le but de déterminer la loi de la fréquence la plus adaptée, le test d'iso-dispersion permet de discerner si la variable en question est une loi de poisson [18].

Sous  $H_0$ , si  $(X_i)_n \sim Pois(\lambda)$ , alors  $D = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{\bar{y}} \sim \chi^2(n - 1)$

Par conséquent, pour un niveau de confiance  $\alpha$  si  $q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \hat{D} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$  cette hypothèse est acceptée.

#### 3.2.4.2 Test de Kolgomorov-Smirnov

Il s'agit d'un test non paramétrique qui permet de valider si un échantillon est obtenu selon une distribution statistique bien précise. Celui-ci est basé sur le théorème Glivenko-Cantelli [11] :

Si  $H_0 : (X_i)_n \sim X$  avec  $X$  a comme fonction de répartition  $F$  et si on pose :

$$F_n(x) = \sum_i \mathbf{1}_{X_i < x} \quad (65)$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0 \text{ avec } D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (66)$$

En outre si  $F$  est continue sous  $H_0$  alors :

$$\sqrt{n}D_n \sim_{n \rightarrow \infty} K \text{ avec } K : \text{distribution de Kolmogorov} \quad (67)$$

Par conséquent, le test est construit de la façon suivante :

$$H_0 \text{ est rejetée à niveau de confiance } \alpha \text{ si } : \sqrt{n}D_n > K_\alpha \text{ avec } K_\alpha : P(K < K_\alpha) = 1 - \alpha \quad (68)$$

En pratique, la taille de l'échantillon doit être important afin d'avoir un résultat crédible.

### 3.2.4.3 Test de Cramér-von Mison

Il s'agit d'un autre test qui mesure la qualité d'ajustement des lois. Il est basé sur le théorème suivant [17] : Si  $H_0 : (X_i)_n \sim X$  avec  $X$  a comme fonction de répartition  $F$  :

$$\text{si } w_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)|^2 dF(x) \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0 \quad (69)$$

La statistique de test est définie de la façon suivante :

$$T = nw_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i-1}{n} - F(x_i) \right)^2 \quad (70)$$

Cette valeur est comparée par la suite aux quantiles d'une distribution statistique connue mais qui n'est pas explicite. Cette comparaison donne par conséquent le résultat du test.

### 3.2.4.4 Test d'Anderson-Darling

Si  $H_0 : (X_i)_n \sim X$  avec  $X$  a comme fonction de répartition  $F$ . Ce test est basé sur la métrique suivante [12] :

$$A_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x) \quad (71)$$

Sous l'hypothèse  $H_0$   $A_n^2$  converge vers une distribution qui dépend de la loi de départ (normale, exponentielle, etc ...) et le test est construit de la même manière que précédemment.

### 3.2.5 Critères de quantification des risques modélisés par les générateurs

Dans cette section on introduit quelques critères utilisés pour quantifier les risques modélisés par les générateurs. Ceux-ci nous permettront dans la suite de suivre l'évolution des générateurs.

### 3.2.5.1 Courbe de la probabilité globale de dépassement AEP

La courbe AEP trace la charge totale des sinistres en fonction de la période de retour. Celle-ci est construite de la façon suivante : pour un niveau de perte fixé  $x$ , on calcule la probabilité que la charge totale dépasse ce seuil. La période de retour est l'inverse de cette quantité.

### 3.2.5.2 Courbe de la probabilité de dépassement d'occurrence OEP

La courbe OEP trace le coût du sinistre maximal en fonction de la période de retour. Celle-ci est construite comme suit : pour un niveau de coût prédéterminé, on calcule la probabilité que le coût du sinistre maximal dépasse ce seuil. La période de retour est l'inverse de cette quantité.

## 3.2.6 Application sur les données d'AXA GRE

Dans cette section on se propose de calibrer des lois de fréquence et de sévérité sur des données de pertes d'un risque couvert par AXA. Le seuil atypique est égale à 3 500 000€ déterminé par la cédante.

### 3.2.6.1 Loi de la fréquence

Le graphe ci-dessous résume le nombre de sinistres par année de souscription.

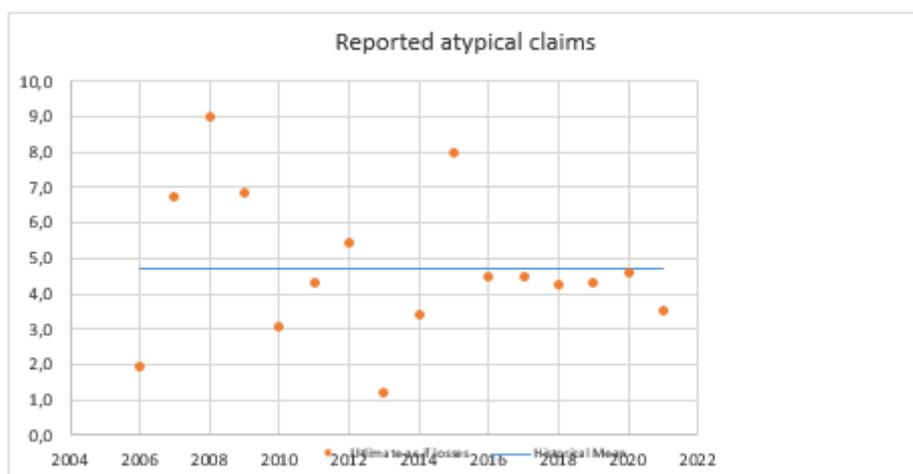


FIGURE 18 – Nombre de sinistres par année de souscription

Moyenne historique	4,73
Variance historique	4,17
p-value du test d'iso-dispersion	0.216

TABLE 12 – Calibrage de la loi de la fréquence

L'hypothèse  $H_0$  est retenue d'après le test d'iso-dispersion. La distribution en question est une loi poisson de paramètre  $\lambda$  égale 4.73.

Finalement, on peut aussi modéliser le taux d'arrivée des sinistres par année de développement.

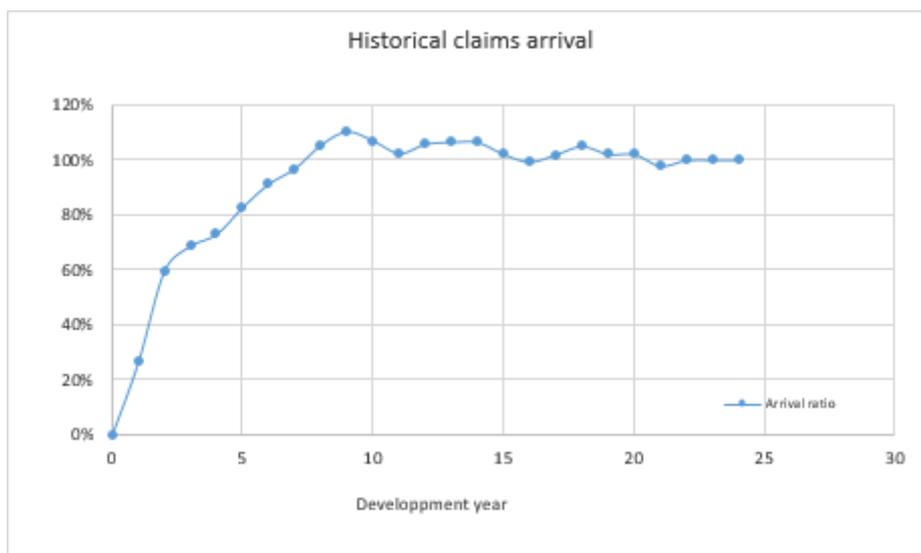


FIGURE 19 – *taux d'arrivée en fonction de l'année de développement*

D'après la courbe on constate qu'au bout de 9 ans, 100% des sinistres sont reportés ce qui représente une durée assez longue.

### 3.2.6.2 Loi de la sévérité

Dans cette section on se propose de calibrer la loi de la sévérité. Le tableau ci-dessous résume les tests faits afin de la caractériser :

Severity quantiles	Empirical	LogNormal MME	LogNormal MLE	Weibull MME	Weibull MLE	RTPareto MME	RTPareto MLE	GPareto MME	GPareto MLE
Q_50	346 174	359 075	341 230	338 488	361 309	339 998	356 486	358 804	352 557
Q_80	571 005	523 391	533 989	555 898	562 340	510 497	569 785	539 492	531 446
Q_90	720 964	691 957	764 147	768 326	734 323	694 235	812 278	710 793	709 380
Q_95	823 111	907 115	1 089 403	1 013 634	918 521	944 039	1 157 605	919 075	934 969
Q_99	1 935 099	1 632 851	2 355 254	1 688 316	1 381 981	1 925 707	2 625 730	1 592 878	1 719 846
Q_99.5	1 935 099	2 065 800	3 197 764	2 018 133	1 594 065	2 615 402	3 721 101	1 991 586	2 216 057
KS distance	0	0,103	0,069	0,116	0,074	0,075	0,06	0,059	0,042
CVM distance	0	770	854	-1	830	709	-1	507	430

FIGURE 20 – *Test de calibrage de la loi de la sévérité*

Le test CVM donne parfois des valeurs non significatives. Par conséquent, le test KS sera pris en considération. La distribution la plus probable est la "General Pareto" avec les paramètres estimés avec la méthode du maximum de vraisemblance. Les paramètres de la loi sont résumés dans ce tableau :

seuil atypique	3500000
paramètre d'échelle	2009725.91
paramètre de forme	0.32

TABLE 13 – *Paramètres estimés de la loi GPareto*

### 3.2.6.3 Analyse de l'évolution de l'AEP et OEP

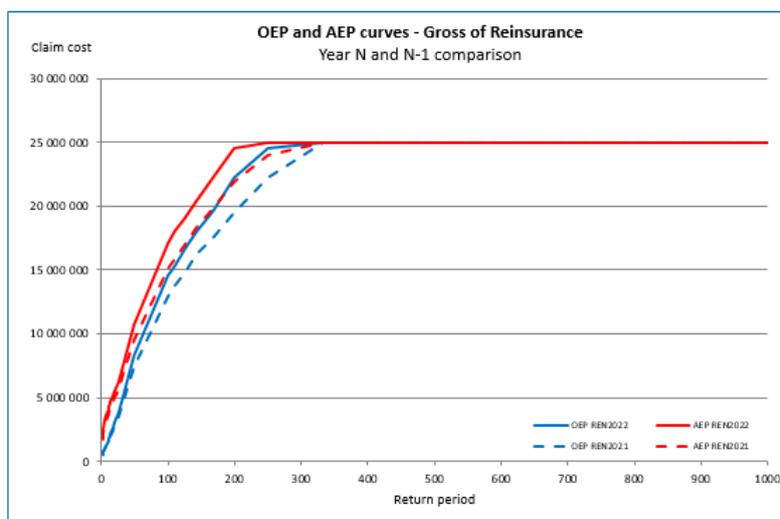


FIGURE 21 – Évolution de l'AEP et de l'OEP entre l'année 2021 et l'année 2022

D'après ce graphe, on constate que :

- La courbe AEP est supérieure à la courbe OEP étant donné que la première traite la somme agrégée des pertes y comprises la perte maximale.
- Pour un niveau de perte donné, la période de retour a diminué pour l'année 2022 par rapport à l'année 2021. Par conséquent le niveau de risque a augmenté par rapport à l'année antérieure.
- La perte maximale dans le scénario le plus pessimiste est égale 25M€. Celui-ci correspond à une période de retour égale à 300 ans.

On se propose dans cette section d'établir une réconciliation entre la base de données de l'équipe de provisionnement avec celle de l'équipe de tarification. Ce lien créé nous permettra éventuellement de mener une analyse qualitative sur les risques souscrits par AXA en fonction des entités cédantes ainsi que leurs évolutions. Par ailleurs, cette liaison nous permettra aussi de tester quelques méthodes qui se basent sur une approche fréquence sévérité.

## 4 Mappage liant les traités et les générateurs de risques

### 4.1 Décomposition d'un traité XL

Un traité de réassurance XL peut être modélisé de la façon suivante :

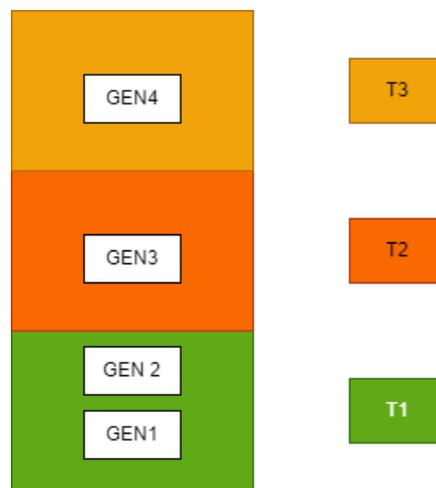


FIGURE 22 – Composition d'un traité de réassurance XL

Celui-ci peut contenir plusieurs tranches. Chaque tranche comprend plusieurs générateurs de risques. En outre, elle possède soit une priorité soit une limite différente des autres tranches soit les deux à la fois. Il existe aussi des conditions qui s'appliquent sur l'ensemble du traité dont on peut citer la présence d'un AAD (déductible : la somme des sinistres doit être supérieure à cette franchise pour que la couverture soit activée), AAL (limite : la somme des recouvrements est limitée par ce montant) ou d'une prime de reconstitution. En dernier lieu, les générateurs de risque sont présumés indépendants dans la modélisation AXA. En effet ces distributions sont calibrées par cédante AXA et couvrent en général des risques indépendants. À titre d'exemple, une cédante a signé un contrat de réassurance avec AGRE afin de s'assurer contre les risques auto-atypiques. Ce dernier dispose de deux générateurs : le premier modélise le risque pour les voitures commerciales et le second pour les voitures à usage individuel. En conséquence, l'hypothèse d'indépendance semble raisonnable dans ce contexte.

## 4.2 Présentation des bases de données

### 4.2.1 Base de données de l'équipe de provisionnement

Cette base contient tous les sinistres qui ont été reportés. Pour chaque enregistrement on trouve :

- un identifiant
- un numéro de traité associé
- la branche de réassurance
- la tranche du traité concerné
- une estimation du coût FGU
- une estimation du montant à régler
- la cédante
- la devise
- un statut du sinistre (avis initiale , avis révisé, clôturé)
- On trouve aussi d'autres informations importantes telles que les conditions de chaque traité etc ...

Par ailleurs la variable qui nous permet de faire la liaison est : **numéro de traité**

### 4.2.2 Base de données de l'équipe de tarification

Les générateurs de risques sont explicités dans des fichiers Excel séparés par entité cédante. C'est pourquoi nous avons développé un code sur R qui permet d'extraire et compiler les différents paramètres clés de chaque fichier. Ensuite, nous combinons cette première base à une autre qui contient le mappage entre les traités et les générateurs correspondants. À la fin de cette étape, la base obtenue synthétise pour chaque ligne :

- Le nom du générateur
- l'entité cédante
- le numéro du traité associé
- la branche associé
- paramètres des lois de la fréquence et de la sévérité

#### **Remarque :**

La deuxième base de données utilisée pour créer le mappage ne spécifie pas l'association entre la tranche du traité et le générateur correspondant. Ce fait nous pénalisera donc puisque nous n'avons pas cette information. Par conséquent, on ne peut reproduire que les traités qui consistent en une seule tranche. À titre d'exemple, nous envisageons un traité comportant deux tranches et deux générateurs. Le mappage entre le traité et le

générateur n'étant pas disponible, il n'est donc pas possible d'associer chaque élément à sa partie concernée. Par ailleurs, il n'est pas possible de répliquer le traité.

Numéro du traité	Nombre de tranche	coût moyen estimé	coût moyen à répliquer
1	1	4 142 113€	4 142 293 €
2	2	140 963€	146 813€

TABLE 14 – *Exemple de tests de réplcation de quelques traités*

Le traité n° 1 ne comprend qu'une seule tranche. Par conséquent, le mappage traité/-générateur nous permet de reproduire les simulations. Cependant, dans le cas où il y a plusieurs tranches, l'information n'est pas suffisante puisqu'on ne sait pas les générateurs associés à chaque tranche. Le traité n°2 est un exemple qu'on peut citer. La moyenne estimée est différente de la moyenne renseignée par l'équipe de la tarification.

À la lumière de cette remarque, ce manque d'information va nous pénaliser plus tard dans le calcul des réserves par traité puisque la méthode proposée fonctionne sur les traités répliquables.

### 4.2.3 Construction de la base finale

Après ces deux dernières étapes, nous regroupons les deux bases de données à l'aide du numéro de traité en tant que clé de jointure. Cela nous permet d'avoir notre résultat final, c'est-à-dire de concilier la vision tarification avec celle du provisionnement.

Par la suite nous allons utiliser cette base finale pour mener nos différentes études dans les sections qui suivent.

## 5 Analyse qualitative

À la fin de la dernière section nous avons pu créer une base de données globale qui réconcilie entre la base de données tarification et provisionnement. Nous allons l'utiliser dans un premier temps pour répondre au premier objectif du mémoire qui consiste à exploiter ces données afin d'obtenir des informations qui permettent d'aider l'équipe de provisionnement dans leurs revues de réserves.

Ainsi, nous allons étudier l'évolution des générateurs de risques ainsi que la charge ultime des traités. Par la suite, nous allons comparer cette dernière avec celle estimée par l'équipe de provisionnement. Cela par conséquent nous permet de comparer les loss ratios à priori donnés par l'équipe de tarification avec les loss ratios à posteriori constatés par l'équipe de provisionnement. Pour ce faire, nous allons en premier lieu présenter le pool "Moteur" puis mener une analyse de variation sur un traité de réassurance signé entre AXA Global Re et AXA Irlande. Par ailleurs, le travail qu'on a fait peut être répliqué sur tous les traités XL signé par AXA.

### 5.1 Présentaion du Pool Moteur

Le pool Moteur est un regroupement de traités XL signés entre AGRE et les différentes cédantes du groupe AXA. Ces couvertures couvrent les portefeuilles automobile des entités partenaires. Ce regroupement permet en premier lieu de diversifier les risques et ainsi bénéficier d'un effet de mutualisation. En outre, il permet d'optimiser les couvertures que le groupe AXA peut acheter afin de mieux gérer les risques assurés. Le tableau suivant résume quelques chiffres clés sur ce pool.

Nombre de traités	52
Nombre de cédantes	18
Priorité Minimale	200 000€
Priorité Maximale	990 M€
Capacité Minimale	342 427€
Capacité Maximale	+Inf
Prime minimale	8100 €
Prime maximale	522 657 000 €
Coût maximal observé	487 921 214€
Coût moyen des sinistres	1 360 552€
Nombre maximal de sinistres par traité	22
Nombre moyen de sinistres par traité	4.09

TABLE 15 – *Chiffres clés*

À la lumière de la table ci-dessus, on peut constater les remarques suivantes :

- Le nombre de sinistres par traité est faible. Le nombre moyen est égal à seulement 4 réclamations. Cette valeur est négligeable par rapport à l'assurance traditionnelle.

- La moyenne des coûts des sinistres enregistrés est égale à 1 360 552€. Celle-ci est très élevée par rapport à l'assurance traditionnelle.

C'est pour ces deux raisons que la réassurance nécessite des capitaux propres assez importants.

Par ailleurs la sinistralité observée montre que la branche étudiée est à développement long. la figure suivante détaille la cadence de paiement calibrée.

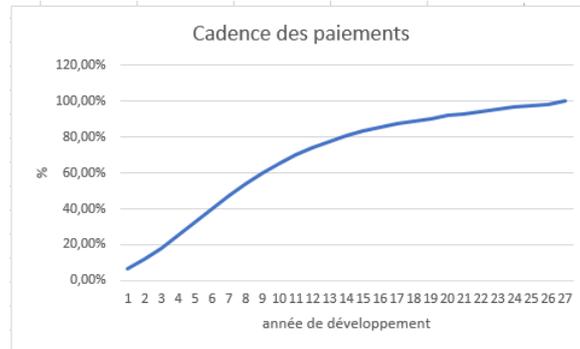


FIGURE 23 – *Cadences des paiements observées*

La courbe ci-dessus montre une période de développement égal à 27 ans dont 80% de la charge sont payées durant les 14 premières années. On peut conclure ainsi que celle-ci est une branche à développement long. La raison principale de cette durée assez longue provient du fait que le pool contient des garanties de type responsabilité civile. En outre, étant donné que les montants des sinistres FGU sont très élevés, l'assureur a intérêt à contester l'évaluation initiale dans le but de minimiser la somme à payer ce qui peut causer un retard dans la déclaration du sinistre au réassureur. À titre d'exemple le tableau suivant résume les durées les plus importantes.

	Durée de règlement
1	34
2	32
3	30
4	28
Moyenne de la durée du règlement	6.14

TABLE 16 – *Les durées de règlement les plus importantes*

Bien que la durée moyenne de règlement soit égale 6 ans, la cadence de paiement calibrée sur l'ensemble du pool affiche une période égale à 27 ans. Cet écart provient principalement de certains traités tels que mentionnés ci-dessus.

## 5.2 Présentation du traité étudié

Le traité étudié dans cette section est un traité XL par risque signé entre AXA Global Re et AXA Irlande. Celui-ci couvre à la fois les accidents causés par les véhicules à

usage commercial et à usage personnel. Étant donné que la décomposition géographique du portefeuille de la cédante s'étend sur l'Irlande et l'Irlande du nord, le traité est par conséquent composé de deux sections dont chacune des deux couvre une région spécifique. En outre chaque tranche possède ses propres conditions contractuelles qui dépendent de la nature des risques couverts.

### 5.3 Évolution des générateurs

Afin d'étudier l'évolution du risque du traité correspondant, nous allons analyser les générateurs qui le composent

Générateur de risque	Fréquence	Sévérité	Prime pure
Ireland-CMotor	57%	-13%	36%
Ireland-PMotor	20%	1%	23%
N-Ireland-CMotor	48%	18%	76%
N-Ireland-PMotor	17%	0.5%	19%
Moyenne	35%	8%	38.5%

TABLE 17 – Évolution de la moyenne entre l'année 2021 et 2022

D'après ce tableau, on constate que les générateurs de risque de ce traité ont évolué défavorablement puisque chaque prime pure a augmenté. La moyenne de l'augmentation observée est égale à 38.5%. Celle-ci est due principalement à l'aggravation de la fréquence. Par ailleurs cette variation peut être expliquée par l'évolution de l'exposition qui représente le nombre de véhicules assurés dans le portefeuille . En effet :

Générateur de risque	Évolution de l'exposition
Ireland-CMotor	34%
Ireland-PMotor	18%
N-Ireland-CMotor	2%
N-Ireland-PMotor	-20%
Moyenne	8.5%
Corrélation avec la fréq	62%

TABLE 18 – Évolution de la moyenne entre l'année 2021 et 2022

D'après ce qui précède, on constate que le nombre d'assurés a augmenté entre l'année 2021 et l'année 2022 pour les trois premiers générateurs et a baissé pour le dernier générateur ce qui donne une moyenne égale à 8.5%. Toutefois la corrélation entre la fréquence et l'exposition est égale à 56%, cela par conséquent indique que l'augmentation de la fréquence peut être due à d'autres facteurs dont on peut citer : le changement du comportement des assurés etc...

À la lumière de cette information, cette évolution donnera une première intuition sur l'évolution des réserves future.

## 5.4 Analyse du profitabilité du traité

Cette analyse faite ci-dessus montre que le coût moyen du traité a évolué vers la hausse entre l'année 2021 et l'année 2022. Le tableau suivant résume cette évolution.

	Évolution
Coût moyen	15%
Prime acquise	6.4%
Loss ratio	+11%

TABLE 19 – Évolution du traité entre 2021 et 2022

Bien que la prime pure ait augmenté de 15%, la prime acquise n'a pas assez varié afin de maintenir stable le loss ratio. Par conséquent, la vision a priori de la profitabilité du traité projette une baisse.

Quant à la vision a posteriori du traité, le tableau suivant résume le nombre de sinistres enregistrés jusqu'au troisième trimestre de l'année 2022 :

Année	Nombre de sinistres espérés	Nombre de sinistres déclarés
2021	0.11	0
2022	0.13	0

TABLE 20 – Nombre de sinistres espérés et reportés des traités signés en 2021 et 2022

D'après ce qui précède, le traité est pour l'instant très profitable puisqu'aucun sinistre n'est enregistré. Toutefois en réassurance, il est très commun d'avoir beaucoup de tardifs pour des raisons qu'on a cités auparavant. En outre plus l'entité cédante est mature plus cette période aura tendance à augmenter puisque celle-ci possède la capacité financière à prendre en sa charge les premières évaluations jusqu'à finalisation du coût ultime.

En outre, en examinant les périodes de retour :

Nombre de sinistres	Période de retour
0	1
1	9
2	333

TABLE 21 – Période de retour en fonction du nombre de sinistres espérés

On constate à la lumière de cette table qu'il est très probable d'avoir au plus un seul sinistre (H1). Afin de tester de cette hypothèse, on propose d'explorer le nombre de réclamations enregistrées pour les traités du même programme de réassurance signés auparavant. Ce test est justifiable étant donné que les conditions contractuelles sont stables.

Nombre d'année de souscription	20
Nombre total de sinistres enregistrés	3
Période de retour empirique	$20/3 = 6.67$
Test d'ajustement de loi KS	Vrai
Nombre de sinistres maximal par traité	1

TABLE 22 – *Nombre de sinistres enregistrés*

La fréquence observée est cohérente avec la loi modélisée suite à un test KS bien que la période empirique de retour soit différente de celle modélisée. Par conséquent l'hypothèse (H1) est retenue. Toutefois, on observe aussi sur l'historique étudié que les sinistres sont enregistrés au cours des années récentes à savoir les années 2011, 2019 et 2020. Étant donné l'inflation, les coûts ont augmenté et commencent désormais à dépasser la priorité du traité. En outre, l'augmentation de l'exposition peut jouer un rôle important dans cette déviation de la fréquence.

Finalement, on peut conclure que ce genre d'analyse permet à l'équipe de provisionnement de vérifier si la fréquence observée sur un traité est cohérente avec ce qui est modélisé et de détecter les éventuels risques de sur-fréquence. Par ailleurs, étant donné qu'on a le mappage entre la ligne de business, les traités et les générateurs de risques, on peut étendre ce test à une échelle plus agrégée pour caractériser le niveau de sinistralité par pool et ainsi détecter les déviations. Toutefois, étant donné que l'information à notre disposition est incomplète, on n'a pas pu réaliser ce test.

## 5.5 Comparaison de la charge ultime entre la vision tarification et provisionnement

On se propose dans cette section de comparer l'estimation de la charge ultime du traité entre la vision tarification et provisionnement. La première est égale la prime pure donnée par l'agrégation des générateurs de risques. En contrepartie, la charge ultime estimée par l'équipe de provisionnement est obtenue à partir de la façon suivante :

$$\text{Charge Ultime} = \text{Primes acquises} * \text{Loss ratio} \quad (72)$$

avec :

- Primes acquises : le montant des primes reçu de la cédante
- Loss ratio : Il s'agit du loss ratio du pool qui contient ce traité. En effet, étant donné que AGRE regroupe les traités homogènes en matière de risque dans des pools afin de bénéficier de l'effet de mutualisation, le loss ratio appliqué est par conséquent différent du loss ratio estimé par l'équipe de la tarification.

	Tarification	Provisionnement
Charge ultime	2 181 293 €	2 616 111€
Loss ratio	65%	83%

TABLE 23 – *Comparaison de la charge ultime et du loss ratio entre les deux visions*

D'après le tableau ci-dessous, on constate que la charge ultime de la vision provisionnement est supérieure à celle de la vision tarification. Par conséquent, on peut dire que les montants de réserves alloués pour ce traité sont un peu élevés. Toutefois, l'écart entre les deux visions n'est pas assez matériel par rapport au niveau des réserves du pool en question, ainsi un relâchement des montants provisionnés n'a pas beaucoup d'impact sur l'état global.

En outre, puisque le loss ratio a priori (vision tarification) est plus faible que le loss ratio global du pool, cela permet de mettre en évidence l'effet de mutualisation puisque les traités profitables permettent d'améliorer le résultat global et de compenser la perte sur d'autres polices qui sont onéreuses. Par conséquent le loss ratio a posteriori reste sur un niveau acceptable.

Finalement, à la lumière de ce qui précède le fait d'affiner la granularité (passer d'un niveau agréger ou on regroupe tous à un niveau plus fin en particulier les traités qui constituent le pool) permet de mieux détailler le résultat du pool et de mieux automatiser le processus d'identification des traités les moins profitables voire onéreux.

### Remarque

La charge ultime estimée est calculée sur la base de la prime acquise qui peut différer de la prime contractuelle. La raison principale de cet écart provient de la durée du paiement qui peut s'étaler au cours d'une année sur plusieurs trimestres et parfois sur plusieurs années. Ainsi, dans le bilan statutaire de l'entreprise, on introduit deux nouveaux comptes qui sont les provisions pour primes non acquises et les provisions pour risques en cours. Dans ce dernier on reporte le montant suivant :

$$\text{Provisions pour risques en cours} = \text{Primes non acquises} * \text{Loss ratio} \quad (73)$$

- Primes non acquises : Provision du montant des primes non acquises
- Loss ratio : loss ratio calibré sur le pool contenant le traité

Dans la majorité des cas, dans le bilan de fin d'année ces comptes sont remis à zéro puisque toute la prime a été récupérée.

## 5.6 Comparaison qualitative des risques transmis par les cédantes

On se propose dans cette section de comparer les risques des traités signés entre les cédantes afin de classer ces derniers. D'un point de vue métier, ce classement permettra de donner une idée sur la répartition des risques selon les cédantes ce qui ajoutera une

information supplémentaire dans la prise de décision notamment en cas d'ajustement manuel du niveau des réserves.

Dans un premier temps, nous comparons les fréquences espérées :

Cédante	Traité	Fréquence espérées
Belgique	1	0.34
Belgique	2	0.04
Belgique	3	0.13
Irlande	1	0.90
Irlande	2	0.20

TABLE 24 – *Fréquence espérée par région*

À la lumière de la table ci-dessus, on constate que la fréquence globale de l'Irlande est supérieure à celle de la Belgique. Par conséquent, on s'attend à recenser plus de sinistres qui proviennent de la première région. Toutefois, cette mesure ne reflète pas trop l'exposition d'AGRE envers ces cédantes. Ainsi, nous proposons deuxièmement d'étudier les loss ratios a priori :

Cédante	Traité	Loss ratio modélisé
Belgique	1	51%
Belgique	2	55%
Irlande	1	73%
Irlande	2	67%

TABLE 25 – *Fréquence espérée par région*

On constate que les losses ratio à priori de la cédante AXA Irlande sont supérieurs à ceux d'AXA Belgique. Par ailleurs étant donné que la fréquence des générateurs calibrés par la première cédante est supérieure à la fréquence de la deuxième cédante. Par conséquent, on peut affirmer que les risques souscrits de l'Irlande sont plus importants que ceux souscrits de la Belgique. Toutefois, puisque le groupe AXA oblige les entités à passer par AGRE pour se réassurer, le fait de regrouper ces risques permet d'optimiser la couverture du groupe.

Compte tenu de cette nouvelle information, l'équipe de provisionnement donnera plus d'importance à la cédante AXA Irlande notamment dans le cas d'ajustement manuel des réserves suite à des sinistres exceptionnels.

## 5.7 Conclusion

L'analyse qualitative menée dans les sections précédentes nous a permis de :

- d'étudier l'évolution des garanties souscrites par AGRE qui se manifestent dans les générateurs de risques et d'avoir une intuition sur les causes de ces variations
- d'analyser l'évolution des profitabilités des traités

- de comparer la charge ultime des traités entre la tarification et la vision provisionnement et d'expliquer l'écart entre ces deux estimations
- de comparer les risques souscrits en fonction de la cédante et ainsi les classer en matière de matérialité

À la lumière de cette analyse, on peut affirmer que le fait de réconcilier les données tarification avec les données provisionnement et d'intégrer ce processus dans l'ensemble des processus de l'équipe de provisionnement permet de fournir de nouvelles informations à exploiter notamment lors de la revue périodique des niveaux de réserves.

Dans cette section, nous allons aussi exploiter la base de données obtenue auparavant pour aborder le deuxième objectif du mémoire qui consiste à proposer une nouvelle méthode de provisionnement par traité en utilisant une approche fréquence/sévérité. Pour cela, Nous allons en premier lieu caractériser le couple fréquence/sévérité par traité. Ensuite nous allons caractériser la loi de la durée entre la survenance du sinistre et sa déclaration. En outre nous allons vieillir la loi de la fréquence pour connaître la distribution du nombre de sinistres survenus mais pas encore déclarés. Finalement, le montant des réserves pour l'année de développement  $j$  est donné par la formule suivante :

$$R_j = \sum_{i=1}^{N_j} c_i$$

avec :

- $N_j$  : le nombre des sinistres survenus mais non déclarés après  $j$  années de développement
- $c_i$  : le coût du sinistre

Nous simulerons au final plusieurs réalisations pour obtenir une distribution de réserves par traité.

## 6 Méthode de provisionnement par traité en utilisant une approche fréquence/sévérité

### 6.1 Calibrage de la loi de la fréquence par traité

#### 6.1.1 Changement du seuil atypique

Rappelons que les couples fréquence/sévérité sont calibrés à partir d'un seuil atypique. Celui-ci est inférieur à la priorité indiquée dans les conditions de chaque tranche. Ainsi, il est nécessaire d'adapter les lois des fréquences.

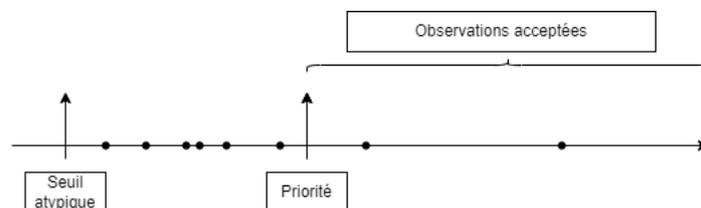


FIGURE 24 – Sinistres supérieurs à la priorité

Si on note loi de la fréquence initiale  $N = N_{|X>S}$  alors la loi modifiée  $N' = N_{|X>P}$  est

définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 p(N' = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} p(N = n, N' = k) \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} p(N' = k|N = n)p(N = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} F(x)^{n-k}(1 - F(x))^k p(N = n)
 \end{aligned} \tag{74}$$

- $F$  représente la loi de la sévérité du générateur correspondant
- Cette expression n'est valide que si la loi de la fréquence est indépendante de la loi de la sévérité ce qui est le cas dans le modèle collectif.

À la lumière de cette formule on constate que :

- Plus la priorité est élevée, moins il y a d'observations au-dessus de cette valeur. Cela s'explique par le fait que la probabilité de dépassement  $1 - F(x)$  converge vers la valeur 0 lorsque la sévérité augmente.
- la nouvelle distribution dépend fortement de la loi de la sévérité. Par conséquent, pour les distributions qui ont les mêmes moyennes et variances, celles qui ont des queues épaisses posent un vrai problème.

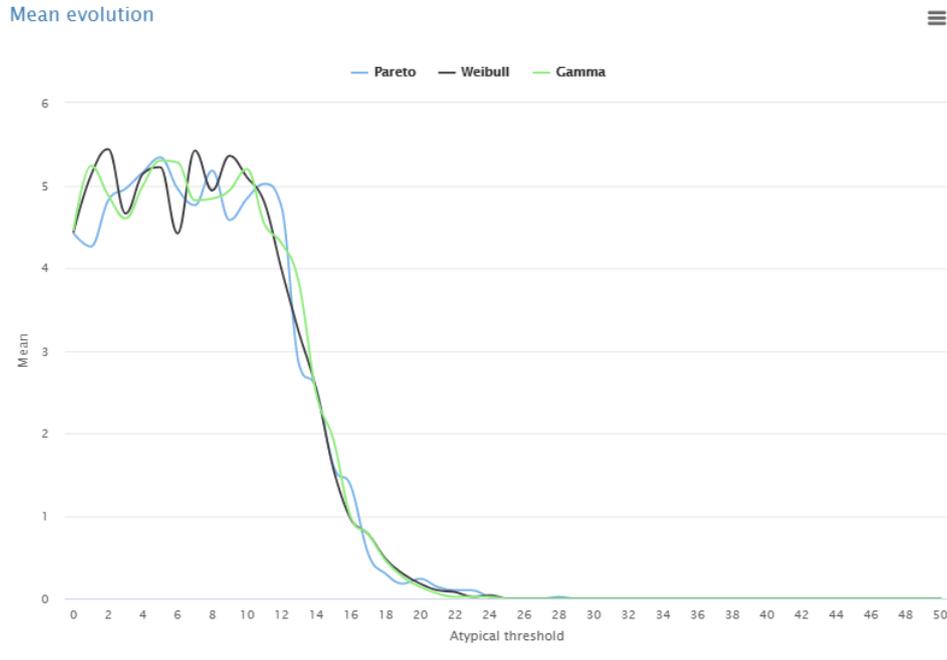


FIGURE 25 – Évolution de la moyenne en fonction de la distribution

Selon la figure ci-dessus, la courbe bleue arrive au seuil 0 plus lentement que les autres. Par conséquent, plus le seuil atypique est élevé, plus nous avons de chances de voir des réalisations supérieures à cette valeur pour la distribution de Pareto que pour les deux autres. À titre d'exemple pour un seuil atypique égal à 28, on voit bien

que la moyenne pour la courbe la loi Pareto n'est pas nulle ce qui n'est pas le cas pour les deux autres lois. Sachant que la distribution de Pareto est à queue épaisse et que les distributions de Gamma et de Weibull sont à queue fine, ce graphique confirme cette proposition [16].

### 6.1.2 Agrégation des lois des fréquences

La loi de la fréquence du traité de réassurance est obtenue en effectuant la somme des lois des fréquences des générateurs correspondants. Étant donné que les lois existantes sont soit des négatives binomiales soit des lois de Poisson, trois cas se posent.

—  $(N_i)_{1 \leq i \leq m} \sim Poisson(\lambda_i)$

$$N = \sum_{i=1}^m N_i \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \quad (75)$$

—  $(N_i)_{1 \leq i \leq m} \sim NB(n_i, p_i)$  alors (voir annexe)[6] :

$$P(N = s) = R \sum_{k=0}^{infy} \delta_k \frac{\Gamma(\alpha + s + k)}{\Gamma(\alpha + k)} p_1^{\alpha+k} (1 - p_1)^s \quad (76)$$

—  $\alpha = \sum_{i=0}^m \alpha_i$

—  $p_1 = max(p_i)$

—  $R = \prod_{j=0}^m \frac{q_j p_1}{q_1 p_j}$

—  $\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k i \epsilon_i \delta_{k+1-i}$

—  $\epsilon_i = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j (1 - q_1 p_j / q_j p_1)^i}{i}$

—  $(N_i) \sim Poisson(\lambda_i)$  et  $(N_j) \sim NB(\alpha_j, p_j)$  :

Dans ce cas on procède comme suit : en premier lieu on simule N comme étant la somme des lois des fréquences des générateurs correspondants. Ensuite on choisit la loi qui est la plus adaptée. Pour ce faire, le graphe de "Cullen and Frey" pour les lois discrètes nous donne une première intuition. Puis les tests statistiques mentionnés permettent de la valider.

### 6.1.3 Exemple de calibrage d'une loi de fréquence d'un traité de réassurance

#### 6.1.3.1 Cas d'un traité composé de générateurs qui ont la loi Poisson comme loi de fréquence :

On considère un traité de réassurance signé. Celui-ci est composé de 4 générateurs. Les lois de fréquence correspondantes sont des lois de Poisson. D'après ce qui précède on s'attend à une loi de Poisson.

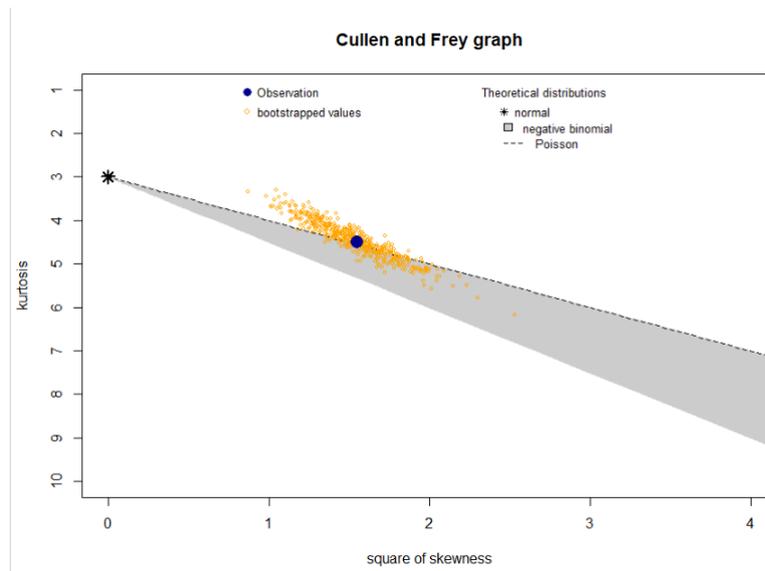


FIGURE 26 – *diagramme de "Cullen and Frey" de la distribution de la fréquence du traité*

Selon ce graphe, la distribution la plus probable est une Poisson. Afin de valider cette intuition nous procédant à un test de Kolgomorv Smirnov.

Distributions	Distance	P-Value
Poisson	0.0026	0.8879
Négative binomiale	0.0420	0.3410

TABLE 26 – *Test de validation de la loi de la fréquence*

En analysant la table ci-dessus, on constate que la loi de Poisson est la plus adaptée puisqu'elle possède la plus faible distance et la p-value la plus élevée. Par conséquent notre hypothèse de départ est validée.

### 6.1.3.2 cas d'un traité composé de générateurs qui des lois de fréquence mixtes

On considère un traité de réassurance signé. Celui-ci est composé de 3 générateurs :

Générateurs	Loi	Moyenne
1	Negative binomiale	0.532
2	Poisson	0.92
3	Poisson	2.89

TABLE 27 – *Loi et moyenne des générateurs*

À travers ce tableau on constate que la loi qui prédomine est la loi de Poisson. Ainsi on s'attend à une loi agrégée de Poisson.

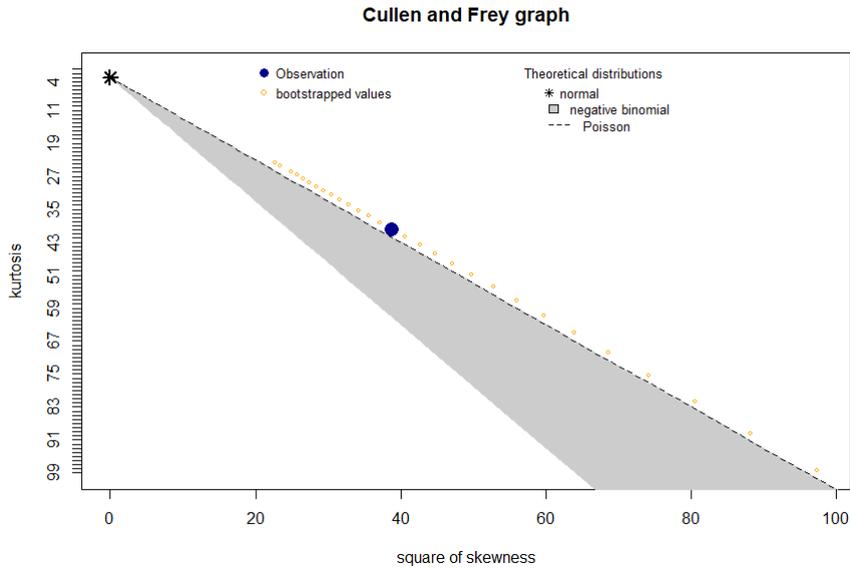


FIGURE 27 – diagramme de "cullen and Frey" de la distribution de la fréquence du traité

Distributions	Distance	P-Value
Poisson	0.001	0.932
Négative binomiale	0.036	0.210

TABLE 28 – Test de validation de la loi de la fréquence

Le diagramme ainsi que le tableau ci-dessus confirme notre intuition. La loi agrégée est par la suite est une loi de Poisson.

## 6.2 Calibrage de la loi de la sévérité par traité

Dans cette section, on se propose de déterminer une distribution pour la loi de la sévérité du traité de réassurance.

### 6.2.1 Adaptation de la loi de la sévérité

Si  $F$  est la fonction de répartition de la loi de la sévérité du générateur. Celle-ci est définie à partir du seuil atypique. Par conséquent, il est nécessaire d'adapter la loi pour qu'elle soit définie à partir de la priorité. Alors la nouvelle distribution modifiée pour la prise en compte de la troncature à gauche est définie comme suit :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < prio \\ \frac{F(x)-F(p)}{1-F(p)} & \end{cases} \quad (77)$$

### 6.2.2 Exemple de calibrage de la loi de la sévérité

Dans le cadre du traité mentionné dans ce qui précède (1 er traité avec des lois Poisson). On adapte les lois de la sévérité des 4 générateurs puis on simule des réalisations. Les observations obtenues nous permettent d'avoir une distribution empirique de la sévérité.

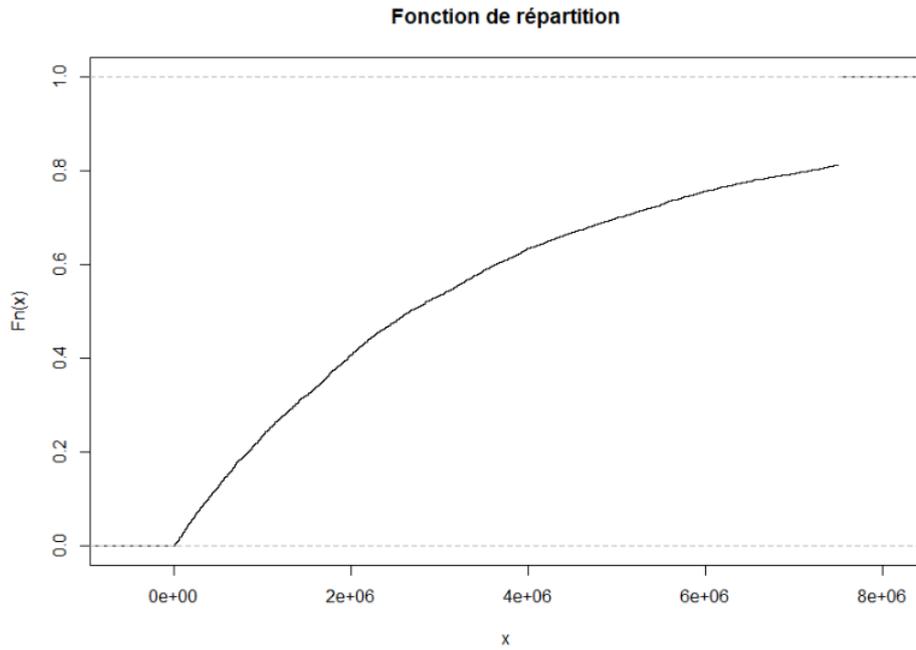


FIGURE 28 – *Fonction de répartition de la loi de la sévérité du traité*

Percent	Value
0.0000	73.41117
0.0001	318.42461
0.0002	726.96598
0.0003	1373.13390
0.0004	1492.48975
0.0005	1492.48975
0.0006	1492.48975
0.0007	1492.48975
0.0008	1532.17550
0.0009	2570.61922
0.0010	3323.89294
0.0011	3722.74109

FIGURE 29 – *Construction de la fonction de répartition empirique*

La fonction de répartition empirique est définie sur une segmentation très fine de l'intervalle  $[0, 1]$ . Plus celle-ci est fine plus on s'approche de la vraie distribution. Cependant, cela nécessite un nombre très important de réalisations.

La sévérité obtenue varie dans un intervalle très large. Le tableau suivant résume les paramètres importants qui caractérisent cette distribution.

Quantité	Valeur
Moyenne	3 486 952
Ecart type	2 683 011
Min	424
Max	7 500 000
Q25%	1 060 078
Q75%	6 233 083

TABLE 29 – *Caractéristique de la distribution de la sévérité résultante*

Nous remarquons que la loi obtenue est d’une part très coûteuse puisque 75% des sinistres qui peuvent avoir lieu auront un coût supérieur à 1M€. D’autre part, nous constatons que cette distribution est très volatile puisque l’écart type est de l’ordre de 2M€. Toutefois, il faut souligner que cette loi décrit des sinistres atypiques de fréquence très rare.

À la lumière de ce qui est mentionné ci-dessus, nous avons pu caractériser le couple fréquence/sévérité du traité en question. Dans ce qui suit, celui-ci nous sera utile dans l’estimation des IBNYRs.

### 6.2.3 Utilité de la loi de la sévérité dans le processus de provisionnement

La nouvelle loi calibrée de la sévérité par traité s’avère très utile dans le processus de provisionnement. En effet, elle nous permet d’avoir une idée sur la gravité du sinistre enregistré en déterminant la probabilité de dépassement  $P(X > \text{perte})$ . Par la suite si cette quantité est très faible, un lissage peut être utile dans ce cas puisque le sinistre enregistré est atypique.

Montant de la perte (EUR)	Probabilité de dépassement
2 561 690	0.63
1 384 086	0.80
593 707	0.93
7 917 084	0.13

TABLE 30 – *Pertes enregistrées pour un traité*

À la lumière du tableau ci-dessus, on peut voir que pour ce traité la calibration de la loi de la sévérité est compatible avec la sinistralité observée. Cette constatation est encourageante dans la mesure où elle nous permet de valider notre démarche. En outre, on peut affirmer qu’il n’existe pas de sinistre atypique enregistré. Il s’agit donc d’un nouvel élément à prendre en considération lors du calcul du montant des réserves.

### 6.2.4 Caractérisation des courbes AEP/OEP par traité

La courbe OEP peut aussi donner une intuition sur la sinistralité observée. En effet en injectant le montant de la perte observé on peut avoir une idée sur sa période de retour ainsi évaluer s’il s’agit d’une perte atypique ou pas.

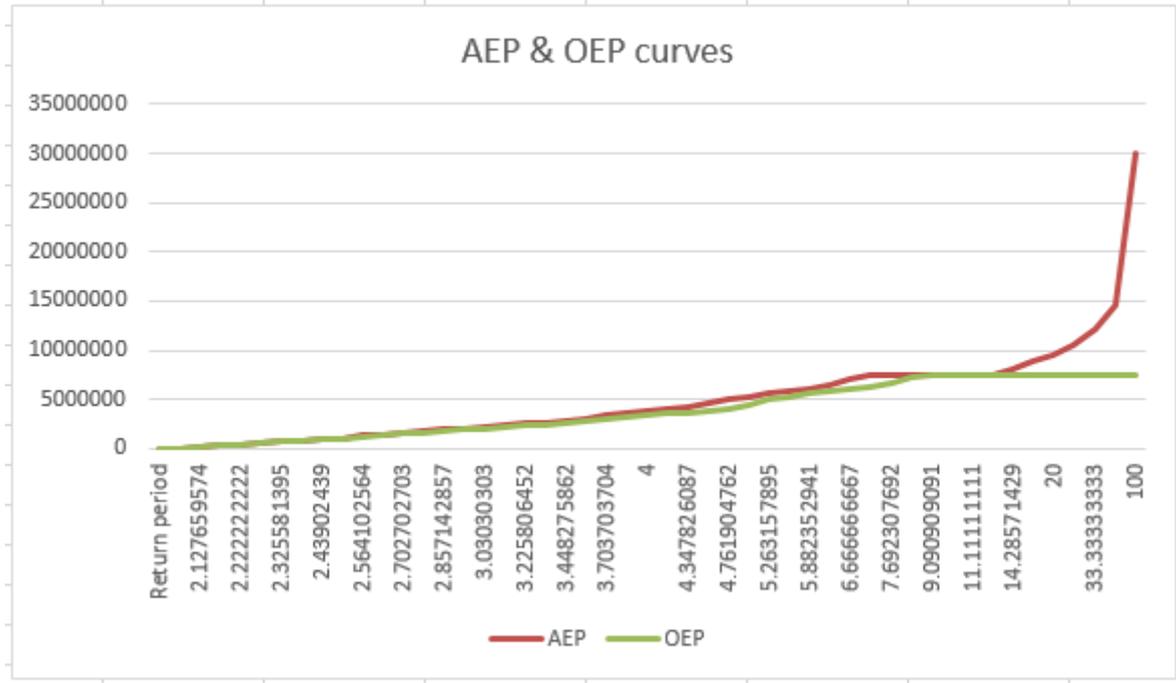


FIGURE 30 – Courbe AEP/OEP du traité étudié

En analysant cette courbe, on constate que pour une période de retour égale à 6 ans, on peut s’attendre à des sinistres supérieurs à 7M. Cela est compatible avec la période d’observation puisque de 2017 à 2022 on a pu observer un sinistre qui a dépassé ce seuil.

### 6.3 Vieillessement de la loi de la fréquence du traité

Afin d’estimer le nombre des sinistres survenus mais pas encore déclarés, on a proposé de vieillir la loi de la fréquence [3]. Par conséquent la nouvelle loi décrit le nombre de sinistres déclarés mais qui n’ont pas été déclarés. Si on pose  $p_t = P(T < t)$  avec T est la variable aléatoire modélisant la durée entre la survenance et la déclaration du sinistre. Alors :

$$p(N_t = l) = \sum_{k=l}^{\infty} C_k^l p^l (1-p)^{k-l} p(N = k) \quad (78)$$

En outre la loi des sinistres tardifs est définie de la façon suivante :  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t$ . Celle-ci dépend de la loi de départ  $N$ .

Si  $N \sim Pois(\lambda)$  :

$$\begin{aligned} P(N = n | N_t = k) &= p(N = n) \frac{P(N_t = k | N = n)}{\sum_{m=k}^{\infty} p(N = m) P(N_t = k | N = m)} \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda} n! p^k (1-p_t)^{n-k}}{n! k! (n-k)!} \frac{1}{\sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda} m! p_t^k (1-p_t)^{m-k}}{m! k! (m-k)!}} \\ &= \frac{(\lambda(1-p_t))^{n-k}}{(n-k)!} e^{\lambda(1-p_t)} \end{aligned} \quad (79)$$

Alors  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t \sim Pois(\lambda(1 - p_t))$

Si  $N \sim NB(M, x)$  :

Alors  $N_{tardifs} = N - N_t | N_t \sim BN(M + N_t, 1 - (1 - x)(1 - p_t))$  (voir annexe)

En analysant les formules ci-dessus, on constate que :

- la loi des sinistres tardifs appartient à la même famille de la loi du départ.
- la moyenne des lois résultantes décroît avec le temps. Ce fait est observable dans la réalité puisque plus le temps passe depuis la souscription plus le nombre de sinistres tardifs observés diminue.
- Dans le cas de la loi de poisson,  $N_{tardifs}$  est indépendante du nombre de sinistres observés. Cela est prévisible puisque cette loi est sans mémoire.
- Pour la négative binomiale, la loi a posteriori dépend du réalisé. En particulier, la moyenne augmente en fonction de celui-ci. C'est-à-dire plus on observe de sinistre plus on a de chance à recenser d'autres puisque la sinistralité a été défavorable.

## 6.4 Calibrage de la loi de la durée

Afin de vieillir les lois de la fréquence, il est nécessaire de caractériser la variable modélisant la durée entre la survenance des sinistres et sa date de déclaration. Celle-ci est supposée discrète puisque l'échelle temporelle considérée est en année. Cependant, puisqu'en réassurance le nombre d'observations est très faible, il est très compliqué de calibrer une loi qui caractérise la durée par traité de réassurance.

Programme de réassurance	Nombre de sinistres observé
1	3
2	5
3	7
4	10

TABLE 31 – *Nombre de sinistres observés de quelques programmes de réassurance*

Pour contourner ce problème, On a pensé à calibrer une loi pour un ensemble de traités homogène en matière de risque et dont la sinistralité a été très faible. Pour cela on a considéré l'ensemble de sinistres observés qui appartiennent à la même branche d'activité (Line of business lob). En contrepartie, pour les traités qui possèdent une sinistralité élevée, on calibre notre loi seulement sur les réalisations observées.

Toutefois, cette procédure de calibration s'avère compliquée. En effet, c'est au moment de la déclaration du sinistre que la date de la survenance est connue. Par conséquent, ce cas ne correspond pas aux phénomènes de troncature et de censure qu'on a étudiés en cours.

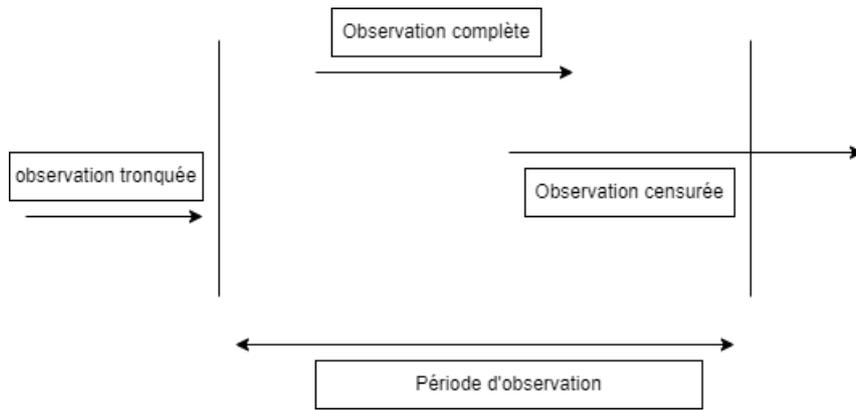


FIGURE 31 – Schéma explicatif de la censure et de la troncature

- La censure : durant la période d’observation tous les éléments sont observés. Toutes fois c’est soit la date d’entrée soit la date de sortie est inconnue puisque la durée d’observation n’est pas assez longue. Dans notre cas, le sinistre survenus n’est observé que s’il est déclaré avant la fin de cette période. Ce qui ne correspond pas à une censure
- La troncature : durant la période d’observation, les individus tronqués ne sont pas observés puisque l’évènement étudié se déroule en dehors de la période d’observation ce qui ne correspond pas à notre cas puisqu’un sinistre inobservé peut être déclaré.

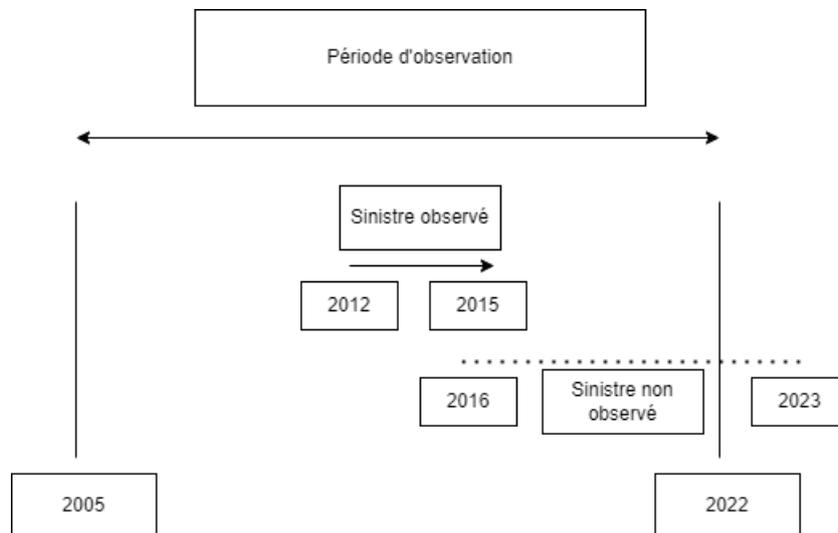


FIGURE 32 – Schéma explicatif de la durée entre la survenance et la déclaration

Pour contourner ce problème on a décidé de calibrer notre variable de la durée sur des traités anciens qui sont a priori entièrement développés. À titre d'exemple on peut considérer les traités signés entre 2013 et 2015. Ainsi, notre période d'observation est assez large pour pouvoir recenser tous les sinistres survenus.

historique d'observation	durée moyenne observée
2005-2008	4.50
2008-2011	4.02
2011-2014	4.25
2014-2017	4.01

TABLE 32 – *Durée moyenne entre la survenance et la déclaration*

En examinant cette variable aléatoire, on constate que la durée moyenne entre la survenance et la déclaration est égale à 4 années indépendamment de l'historique considéré.

Un estimateur de  $p_t = p(T \leq t)$  est donné par la formule suivante :

$$\hat{p}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{T_i \leq t} \quad (80)$$

Il est clair que cet estimateur est sans biais et converge presque sûrement. Le tableau suivant résume les valeurs trouvées :

année de développement	$p_t$
1	0.07
2	0.20
3	0.38
4	0.58
5	0.74
6	0.86
7	0.93
8	0.97

TABLE 33 – *Résumé des valeurs estimées*

Nous constatons qu'après 8 ans de développement, il est très rare qu'il y ait une réclamation tardive à 3% de chance près.

Toutefois, cette durée entre la survenance et la déclaration s'avère très courte par rapport à la cadence des paiements dans cette branche qui évolue très lentement. Cela est expliqué par le fait que les montants estimés au moment de la déclaration représentent des estimations approximatives et peuvent évoluer par conséquent.

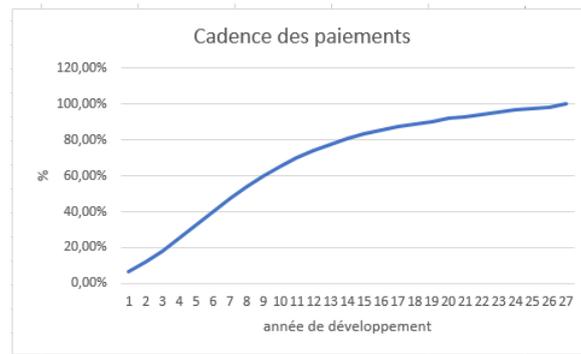


FIGURE 33 – Évolution de la cadence des paiements en fonction des années de développement

D’après la figure ci-dessus, on remarque qu’il faut au moins 27 années pour payer tous les sinistres qui ont eu lieu. Cette durée est très longue et par conséquent a des conséquences très lourdes sur le bilan de l’entreprise puisque les traités anciens continuent toujours de se développer.

## 6.5 Estimation des IBNYRs par traité

Arrivé à cette étape, on a pu déterminer pour chaque traité de réassurance le couple fréquence/sévérité correspondant. On a pu aussi caractériser la loi de la durée entre la survenance et la déclaration. Par conséquent, on va présenter dans cette section l’algorithme utilisé dans l’estimation des IBNYRs selon la loi initiale : pour rappel cette distinction a été faite parce que la loi de Poisson vieillie ne dépend pas de la sinistralité passée à l’opposé de la loi Négative binomiale

### Poisson :

- Vieillir la loi de la fréquence du traité pour chaque année de développement
- Simuler selon la loi obtenue une réalisation  $n$  pour chaque année de développement
- Simuler  $n$  réalisations selon la loi de la sévérité pour chaque année de développement
- Répéter cette opération  $N$  fois afin d’avoir une distribution du montant des IBNYRs pour chaque année développement

**Négative binomiale :** Il s’agit d’une approche par scénario :

- Simuler  $m$  fois le nombre de sinistres ultimes
- Simuler les dates de déclarations pour chaque scénario afin de compter le nombre de sinistres déclarés jusqu’à chaque année de développement
- Vieillir la loi de la fréquence du traité pour chaque année de développement
- Simuler selon la loi obtenue une réalisation  $n$  de la fréquence pour chaque année de développement
- Simuler  $n$  réalisations selon la loi de la sévérité pour chaque année de développement
- Répéter cette opération  $N$  fois afin d’avoir une distribution du montant des IBNYRs pour chaque année développement

- Répéter cette opération pour tous les  $m$  scénarios

En conséquence de cet algorithme, une distribution empirique des IBNYRs a pu être déterminée. Cela est donc avantageux puisqu'il permet d'estimer toutes les quantités nécessaires telles que la moyenne et la "valeur at risk" par exemple.

## 6.6 Méthodes d'estimation Actuelles des réserves futures par traités

Puisque les données à notre disposition correspondent aux générateurs de l'année 2022. Notre méthode permet ainsi d'estimer les réserves pour les années futures. Afin d'évaluer ces projections, on a envisagé de les comparer avec les estimations faite par la méthode d'AXA. Celle-ci est définie de la manière suivante :

- En premier lieu, en se basant sur les triangles de développement, un loss ratio global pour le pool en question est défini. Ainsi, la charge ultime projetée pour chaque traité est donnée en multipliant ce ratio par la prime acquise. Bien évidemment, ce coefficient nécessite un jugement d'expert pour le fixer à un niveau qui reflète la sinistralité observée.
- En deuxième lieu, en se basant encore sur les triangles de développement, les cadences de paiement sont calibrées en utilisant la méthode Bornhuetter-Ferguson. Par ailleurs, une étape de lissage de ces coefficients peut être ajoutée afin de réduire les variations.
- Finalement, les projections sont déduites en utilisant la formule suivante :

$$\text{Réserves}_j = (1 - \rho_j) * LR * \text{Primes acquises} \quad (81)$$

- $j$  : correspond au  $j$ 'ème année de développement

## 6.7 Analyses des résultats

Dans cette section on se propose de comparer nos estimations des réserves avec celles d'EAXA pour quelques traités de réassurance répliquables. Cependant avant de présenter nos résultats, il est important de préciser l'hypothèse suivante :

- (H1) Puisque notre modèle estime le coût réel des sinistres qui ont eu lieu mais non encore déclarés, cette estimation coïncide avec celles des IBNRs puisque la loi de la sévérité donne le coût exact. Ainsi le montant des IBNERs est égal à 0. Par la suite nos résultats seront comparés avec l'estimation des réserves d'AXA.
- (H2) Notre méthode ne modélise pas la durée de règlement du coût du sinistre. En effet, au moment de la déclaration du sinistre, on considère que le coût a été fixé et payé entièrement.

La figure ci-dessous présente les résultats trouvés pour deux traités signés en 2022 :

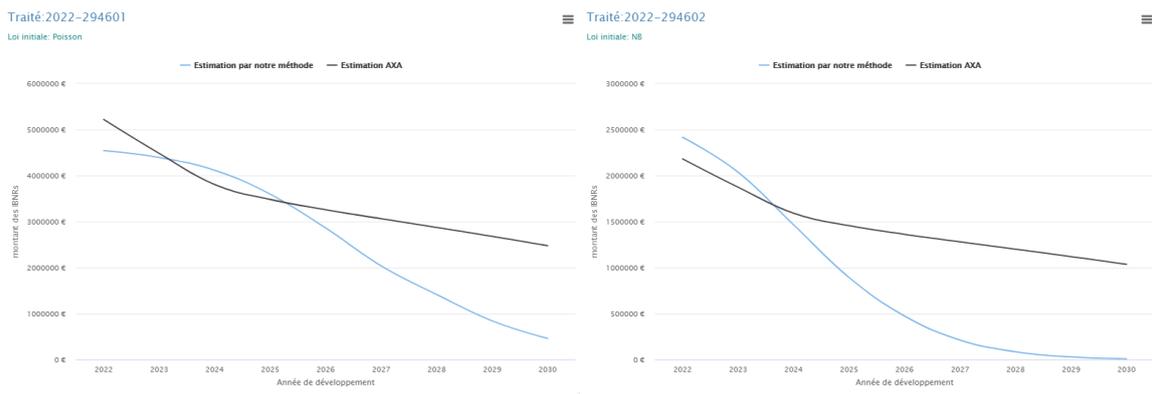


FIGURE 34 – Évolution des IBNRs en fonction des années de développement

À la lumière de la figure ci-dessus on constate les remarques suivantes :

- L'évolution des réserves estimées par AXA est identique pour chaque traité à un coefficient de proportionnalité près. Ceci tient au fait que ces estimations sont proportionnelles aux cadences paiement et au loss ratio de la branche associée. Par ailleurs, les estimations EAXA dépendent du triangle de développement de la branche en question. Ceci est de toute évidence influencé par la sinistralité observée sur chaque traité.
- L'évolution de l'estimation de notre modèle est décroissante en fonction des années de développement. Ce comportement est conforme à la pratique, étant donné que la probabilité d'observer une demande de règlement tardif diminue avec le temps.
- Pour la loi de Poisson l'évolution des IBNRs dépend du temps modélisé par la variable de la durée et des paramètres du couple fréquence/sévérité par traité.
- Pour la loi négative binomiale, l'évolution dépend aussi du nombre de sinistres observés. Cependant, son effet est négligeable par rapport à l'effet temporel.

$$\frac{\partial E(X)}{\partial N_t} = \frac{(1-x)(1-p_t)}{1-(1-x)(1-p_t)} \quad (82)$$

$$\frac{\partial E(X)}{\partial p_t} = \frac{-(M+N_t)(1-x)}{(1-(1-x)(1-p_t))^2} \quad (83)$$

À la lumière de ces deux formules et étant donnée qu'en réassurance  $N_t$  est très faible (de l'ordre de 1), on constate que  $\frac{\partial E(X)}{\partial N_t} < \left| \frac{\partial E(X)}{\partial p_t} \right|$ .

En pratique, c'est l'effet temporel qui prévaut. Par conséquent, c'est pour cette raison que les courbes d'évolution sont similaires à celles de la courbe qui a la loi de Poisson comme une loi initiale.

- Pour les deux figures, la courbe bleue décroît plus vite que la courbe noire. cela provient de la différence entre les deux méthodes. En effet, étant donné que notre méthode est basé sur une approche fréquence /sévérité, on peut connaître le coût du

sinistre qui survient suite à une simulation. Il reste ainsi de déterminer le moment de la déclaration qui est modélisé par la variable de la durée. En contrepartie, la méthode AXA estime les montants des réserves à partir des cadences calibrées. Celles-ci dépendent non seulement de la période entre la déclaration et la survenance, mais aussi de la durée de règlement du coût et de la durée de fixation du coût.

- Au cours des premières années de développement, les deux méthodes donnent des montants des réserves assez comparables. En effet :

Année de développement	Traité 1	Traité 2
1	-15%	11%
2	-2%	10%
3	8%	-15%
4	1%	-35%

TABLE 34 – *Écart d'estimation entre notre méthode et celle d'AXA*

Cela provient principalement du faible écart entre le loss ratio spécifique au traité et au loss ratio du pool en question.

	LR
Traité 1 (vision tarification)	65%
Traité 2 (vision tarification)	91%
Pool (vision provisionnement)	80%

TABLE 35 – *Écart d'estimation entre notre méthode et celle d'AXA*

- En exploitant la table (T24), on constate que la décroissance des réserves pour la courbe bleue de la figure à droite qui possède comme loi initiale la négative binomiale est plus importante que la décroissance de la courbe bleue de la figure à gauche. En effet :

- Pour la loi de Poisson :

$$\frac{\partial E(X)_{Poisson}}{\partial p_t} = -\lambda \quad (84)$$

- Pour la loi négative binomiale :

$$\frac{\partial E(X)_{NB}}{\partial p_t} = \frac{-(M + N_t)(1 - x)}{(1 - (1 - x)(1 - p_t))^2} \quad (85)$$

on constate que  $|\frac{\partial E(X)_{NB}}{\partial p_t}| > \frac{\partial E(X)_{Poisson}}{\partial p_t}$ . Ainsi, bien que la loi négative binomiale permette de prendre en compte la sinistralité observée, la décroissance de la moyenne au cours du temps des réserves est plus importante. Cela exposera par conséquent l'assurance à un risque de sous provisionnement dans certains cas.

- En comparant les premières années, on constate que la courbe noire basée sur la méthode traditionnelle AXA permet la mise en évidence de l'effet de la mutualisation. En effet, en comparant la courbe noire par rapport à la courbe bleue dans la

figure à droite, on constate qu'il y'a un sous provisionnement. Toutefois celui-ci est compensé dans la figure à gauche. Par conséquent le fait de regrouper les risques ensemble permet de réduire la perte globale.

Compte tenu de ces commentaires, il est clair qu'il y a une différence fondamentale dans le calcul des réserves entre notre modèle et celui d'AXA. La première méthode utilise une approche intrinsèque qui dépend de la caractéristique de chaque traité alors que la deuxième se base sur la sinistralité observée qui se manifeste dans le triangle de développement. Finalement, le tableau suivant résume les différences entre les deux méthodes :

	Méthode proposée	Méthode traditionnelle
Utilisation des données tarification	(x)	
Utilisation des données provisionnement	(x)	(x)
Utilisation du triangle de développement		(x)
Provisionnement traité par traité	(x)	
Provisionnement en se basant sur des traités regroupés		(x)
Prise en compte de la durée entre la survenance et la déclaration	(x)	(x)
Prise en compte de la durée du fixation du coût final		(x)
Prise en compte de la durée de règlement du sinistre		(x)
Prise en compte de la mutualisation		(x)

TABLE 36 – Comparaison entre les deux méthodes

À la lumière de cette table récapitulative, on voit bien que le modèle traditionnel permet d'obtenir une modélisation plus complète qui permet de prendre en compte des différentes étapes du cycle de vie d'un sinistre ainsi que l'effet de mutualisation qui est très important en matière de réduction de risque.

## 6.8 Amélioration du modèle proposé

On a vu dans ce qui précède que la durée de développement des réserves de notre méthode est plus courte par rapport au modèle traditionnel d'AXA qui se base sur la sinistralité observée. Par conséquent, on a décidé d'adapter notre calibration de la variable qui modélise la durée entre la survenance et la déclaration du sinistre pour prendre en compte de la période de fixation du coût final et du règlement. Afin de discerner ces différentes périodes, la base sinistre d'AXA Global Re implémente plusieurs statuts pour décrire l'état de chaque sinistre. le tableau suivant résume ces labels.

Label	Description
Avis initial	Première évaluation du sinistre
Avis révisé	Évaluation révisé du sinistre
Avis clôturé	Évaluation finale du sinistre
Comptable	Sinistre réglé
Avis réouverture	Ré-évaluation du sinistre suite à des nouvelles informations

TABLE 37 – Description des différentes labels de la base sinistre d'AXA

Par conséquent, au lieu de sélectionner les lignes qui ont un label "Avis initial" comme dans la première méthode, on choisit ceux dont le label est égal à "Comptable". Par ailleurs, les résultats trouvés sont présentés ci-dessous :

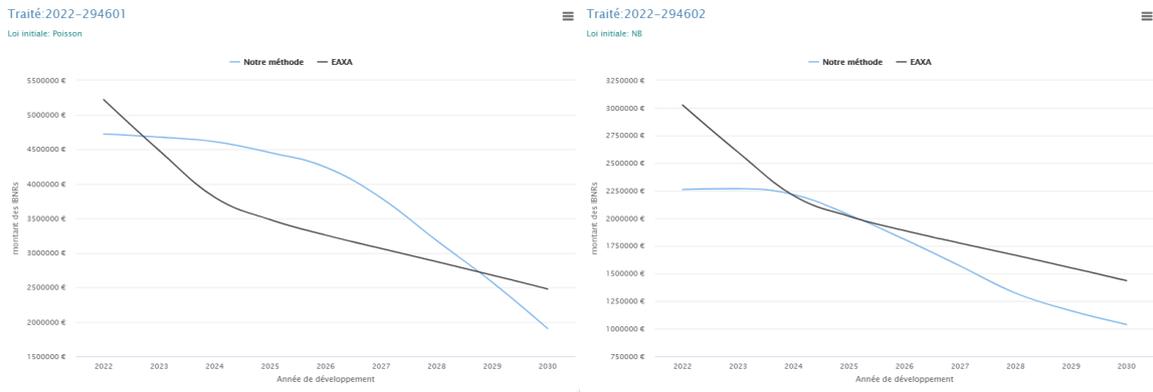


FIGURE 35 – Évolution des IBNRs en fonction des années de développement

En analysant ces deux figures, on constate les remarques suivantes :

- la période de développement de la courbe bleue qui correspond à notre méthode ajustée pour prendre en compte la durée du règlement entier du sinistre est plus longue par rapport à l'ancienne méthode.

Moyenne	Avant ajustement	Après ajustement
Traité 1	4.23	7.34
Traité 2	3.29	6.56

TABLE 38 – Comparaison des moyennes des lois des durées utilisées

- Bien que la période développement soit plus longue après ajustement, elle reste courte par rapport à celle de la méthode EAXA. Cela provient du fait que les variables sont calibrées par traité. Par ailleurs les deux polices étudiées ont un développement assez court par rapport à la cadence constatée sur l'ensemble du pool.
- En supposant que la variable de la durée calibrée pour chaque traité reflète le développement individuel, on peut affirmer que la méthode EAXA expose le réassureur à un risque de sur-provisionnement puisque le relâchement des réserves prend une durée assez longue. Par conséquent, ce risque réduira le montant de liquidité disponible en possession de l'entreprise.

À la lumière de cette analyse on constate que l'ajustement apporté à savoir la prise en compte de la durée de règlement du sinistre permet d'améliorer le développement des réserves estimées par notre méthode. Par ailleurs, la comparaison des deux méthodes permet de souligner une autre lacune de la méthode utilisée par AXA consiste au relâchement très lent des réserves pour chaque traité même si celui-ci n'est pas à développement

long. Finalement, le tableau suivant résume tous les critères utilisés pour juger les deux approches :

	Méthode proposée	Méthode traditionnelle
Utilisation des données tarification	(x)	
Utilisation des données provisionnement	(x)	(x)
Utilisation du triangle de développement		(x)
Provisionnement traité par traité	(x)	
Provisionnement en se basant sur des traités regroupés		(x)
Prise en compte de la durée entre la survenance et la déclaration	(x)	(x)
Prise en compte de la durée de fixation du coût final	(x)	(x)
Prise en compte de la durée de règlement du sinistre	(x)	(x)
Cadence de développement calibrée par traité	(x)	
Cadence développement calibrée par ligne de business		(x)
Prise en compte de la mutualisation		(x)
Rapidité de relâchement des IBNRs	(x)	
Facilité d'implémentation		(x)
Rapidité d'exécution		(x)

TABLE 39 – *Comparaison entre les deux méthodes*

## 6.9 Conclusion

L'analyse faite montre que la méthode traditionnelle EAXA est plus conservatrice en terme de période développement. En outre, elle permet aussi de prendre en compte de l'effet de mutualisation des risques. En contrepartie, notre méthode se base sur une approche individuelle. En précisant que la méthode traditionnelle est plus facile à implémenter, elle serait par conséquent la solution préférée.

Toutefois, il est important de souligner que le critères de comparaison utilisés se base sur une approche seulement qualitative. Puisque que les données à notre disposition son issues des générateurs de l'année 2022 et qu'il n'y avait pas de sinistres recensés pour les deux traités étudiés, il n'était pas possible de tester l'estimé avec le réalisé ce qui représentera par conséquent un test quantitatif de la qualité d'estimation des deux méthodes.

Dans cette section, nous combinons le rapprochement qu'on a fait entre la base de données de tarification et la base de données sinistres avec une méthode proposée par Pietro Parodi en 2014. Il propose d'estimer le montant des réserves pour chaque branche en utilisant une méthode de fréquence /sévérité. Plus précisément, l'auteur fournit une estimation du nombre de sinistres survenus mais non encore déclarés. Ensuite, il ajuste une distribution empirique sur l'ensemble des coûts enregistrés. L'estimation des IBNYRs est donc donnée suite à une simulation. Puisque nous disposons des générateurs de risques ainsi que le mappage, nous avons décidé de les utiliser afin de calibrer la distribution de la sévérité au lieu de la base sinistre. Le reste de la méthode ne bougera pas.

Afin de tester notre méthode avec des critères quantitatifs. Nous allons adopter l'hypothèse suivante :

- On suppose une stabilité des lois de sévérité des générateurs de risques pour les années antérieures. Cette hypothèse est nécessaire puisqu'on dispose seulement des générateurs 2022. Par conséquent afin d'estimer le montant de réserves pour les années passées, on se sert de ces distributions comme approximation.

## 7 Méthode de provisionnement utilisant une approche fréquence/sévérité par ligne de business (Pietro Parodi 2014)

### 7.1 Motivations derrière cette méthode

Même si les méthodes du triangle sont simples et efficaces dans la plupart des cas, elles ne permettent pas l'exploitation de toutes les données existantes. En effet dans un triangle à développement égale à vingt ans on aura au plus 210 observations quelle que soit la sinistralité observée. Cette diminution des dimensions aura donc un effet significatif sur l'estimation des réserves BE ainsi que des réserves SCR. En outre, ces techniques traditionnelles s'inscrivent dans une méthodologie différente de celle utilisée par les équipes de tarification, à savoir les méthodes avec une approche fréquence/coût. Étant donné que, les deux méthodologies estiment la charge ultime il serait judicieux d'utiliser la même approche afin de simplifier le processus métier. En troisième lieu, l'estimation de la charge ultime est très volatile notamment pour les années récentes où il n'y a pas assez de sinistres déclarés.

### 7.2 Description de la méthode

Cette méthode a pour but l'estimation des IBNYRs (la somme totale des montants des sinistres qui ont eu lieu et qui ne sont pas encore déclarés). Le problème traité est formulé de la façon suivante : Soit  $X_1, \dots, X_n$  les sinistres déclarés durant  $k$  années d'observations. Pour chaque sinistre on connaît la date de la réalisation de ce sinistre ainsi que la date

de sa déclaration. Par conséquent, le but consiste à estimer le nombre de sinistres non déclarés pour chaque année de développement  $N_1, \dots, N_k$  en fonction du délai entre la date de réalisation et la date de déclaration.

### 7.2.1 Projection de la fréquence dans le cas d'un délai continu

Supposons les hypothèses suivantes :

- $F(t)$  : la distribution du délai avec  $t$  représente la date actuelle
- $v(t)$  : la densité de la fréquence des sinistres à la date  $t$

Par conséquent le nombre total des sinistres qui ont eu lieu entre  $[0, t]$  est :

$$E(\mu_t) = \int_0^t v(u) du \quad (86)$$

En plus, Le nombre de sinistres reportés est :

$$E(r_t) = \int_0^t v(u)F(t-u) du \quad (87)$$

En général,  $r_t$  est connu. Ainsi une estimation a posteriori de  $\mu(t)$  est donnée comme suit :

$$\hat{\mu}(t) = \frac{\int_0^t v(u) du}{\int_0^t v(u)F(t-u) du} r_t \quad (88)$$

En outre en supposant que la probabilité d'avoir un sinistre dans un intervalle de temps  $[0, t]$  est uniforme :

$$\hat{\mu}(t) = \frac{t}{\int_0^t F(t-u) du} r_t \quad (89)$$

### 7.2.2 Projection de la fréquence dans le cas d'un délai discret

En pratique, le nombre de sinistres déclarés ainsi que la distribution des délais seront connus pour des temps discrets. Par conséquent on aura :

$$N_{\widehat{tardifs}(t)} = \left( \frac{t}{\sum_{k=0}^t F(t-k)} - 1 \right) r_t \quad (90)$$

### 7.2.3 Estimation de la distribution du délai

La variable de la durée du délai a été calibrée auparavant. On s'en servira pour estimer le nombre de sinistres survenus mais pas encore déclarés.

### 7.2.4 Modèle de la sévérité

Dans cette section, nous estimons la répartition de la loi de sévérité de la ligne de business en utilisant la base de données obtenue auparavant. Pour se faire nous allons simuler tous

les générateurs disponibles. Ensuite, nous appliquons pour chaque simulation les conditions contractuelles qui lui correspondent. À titre d'exemple pour un traité de réassurance comportant deux générateurs et deux tranches. On simule des réalisations selon les deux lois de la sévérité. Puis nous appliquons à chaque observation les conditions contractuelles des deux tranches puisque le mappage dont on dispose est lacunaire. Une fois les réalisations obtenues nous calibrons une loi personnalisée pour décrire la distribution des coûts. Toutefois, la loi trouvée est une approximation de la vraie distribution.

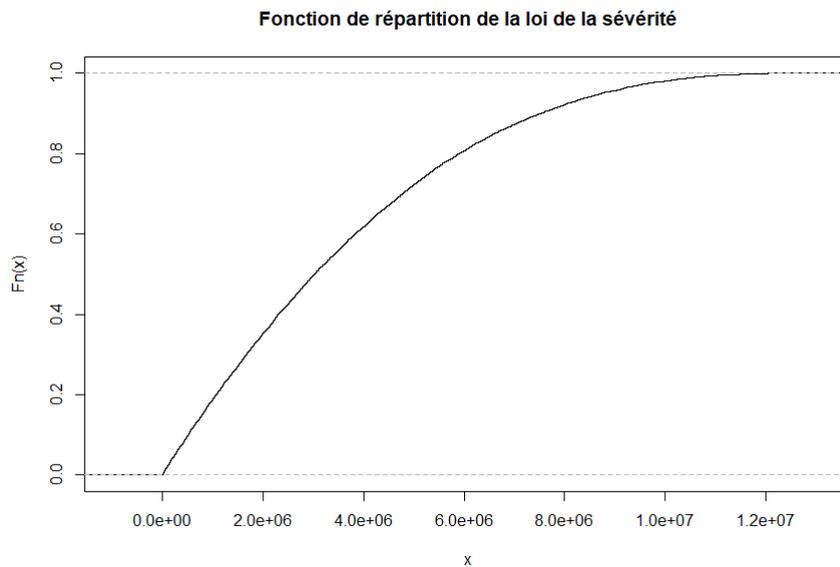


FIGURE 36 – *Fonction de répartition de la loi de la sévérité de la ligne de business*

Par ailleurs, notre méthode de calibration est différente de la méthode proposée par Pietro Parodi dans son article puisque ce dernier propose d'adapter la loi en utilisant les observations enregistrées.

## 7.3 Analyse des résultats

### 7.3.1 Comparaison des IBNRs

Étant donné que cette méthode estime le montant des réserves au niveau de la branche, nous comparons nos estimations avec l'évolution des IBNRs déterminés par AXA au cours des années. Le tableau suivant résume les résultats trouvés.

Année	Estimation du modèle PP	Estimation EAXA	Écart relatif
2021	62 357 184	52 369 804	19,2%
2020	33 597 350	26 923 699	26,9%
2019	25 482 884	21 925 171	19,1%
2018	20 684 288	14 767 325	40,3%

TABLE 40 – *Comparaison du montant des réserves estimés entre les deux modèles*

A la lumière de cette table :

- On remarque une augmentation importante des IBNRs entre l'année 2020 et l'année 2021. Cela est dû à l'augmentation significative du nombre de sinistres entre ces deux années. Il en résulte que l'estimation du nombre de sinistres non déclarés suivra la même tendance. En effet, ceci provient du fait que cette quantité est une fonction croissante du nombre de sinistres enregistrés. Le tableau ci-dessous résume ces constatations :

Année	2020	2021
Nombre de sinistres déclarés	12	21
Estimation du nombre de sinistres non déclarés	11	40

TABLE 41 – *Comparaison entre le nombre de sinistres de l'année 2020 et de l'année 2021*

- On constate que les estimations de notre modèle PP sont supérieures aux estimations EAXA. Cela implique que notre méthode est plus conservatrice que la méthode ordinaire, ce qui est souhaitable dans une perspective de gestion des risques. En retour, cette différence sera enlevée au capital, ce qui est synonyme de réduction de la marge de manœuvre de l'entreprise. Par conséquent, un arbitrage est nécessaire et dépend de nombreux facteurs.
- Ce sur-provisionnement provient du fait de la sur-estimation de la fréquence. En effet l'hypothèse utilisée par Pietro Parodi qui stipule que la densité d'avoir un sinistre est uniforme dans le temps n'est pas applicable en réassurance. À titre d'exemple selon cette considération après 5 ans de développement, on s'attend à avoir un nombre de sinistres égales à 5 ce qui représente une fréquence très importante pour des risques atypiques.
- En outre étant donné que la durée moyenne entre la déclaration et la survenance est égale à 4 ans. le rapport  $\frac{1}{\sum_{k=0}^t F(t-k)} > 1$  pour les années de développement récentes. Ainsi l'effet de sur-estimation de la fréquence s'amplifie.
- Une autre raison qui explique ce sur-provisionnement provient de la nature des données utilisées qui sont ceux issus de l'année 2022. En raison de l'inflation, les estimations prédites par la distribution de sévérité calibrée sur l'ensemble du pool ont tendance à être plus élevées par rapport au niveau de la sinistralité des années antérieures.

### 7.3.2 Analyse des bonis-malis

Afin de vérifier la véracité de la remarque précédente, nous procédons à une analyse des bonis-malis. Ce dernier est un indicateur important qui mesure la performance de chaque méthode. Il est calculé de la façon suivante :

$$BM_i^n = \text{Charge ultime}_i^{n-1} - \text{Charge ultime}_i^n \quad (91)$$

- Charge ultime $_i^n$  : l'estimation de la charge ultime de l'année de souscription  $i$  à l'année actuelle.
- Charge ultime $_i^{n-1}$  : l'estimation de la charge ultime de l'année de souscription  $i$  à l'année antérieure.

Un indicateur BM supérieur ou égal à 0 signifie que les provisions estimées durant l'année  $n-1$  sont suffisantes pour absorber les pertes futures. Dans ce cas on parle de boni. En revanche, une quantité négative signifie une pénurie de réserves. On parle ainsi d'un mali. Chaque méthode vise donc à répondre à la première condition. Toutefois, un boni-mali assez élevé n'est pas souhaitable puisqu'il est très coûteux pour l'assureur. En effet, cela est synonyme à une sur-provision importante qui sera déduite du capital. Par conséquent, le cas idéal consiste à avoir un boni proche de 0.

l'analyse du boni-mali des deux méthodes est résumée dans le tableau suivant :

Année	BM du modèle (PP) (M€)	BM EAXA (M€)
2021	4.5	9
2020	-0.2	3.7
2019	2.5	2.9
2018	-0.8	1.3

TABLE 42 – *Analyses des boni-malis*

À la lumière du tableau ci-dessus on peut constater que :

- les bonis-malis affichés sont inférieurs à celles d'EAXA bien que les estimations de notre méthode sont nettement supérieures à celles d'AXA. Cela s'explique par le fait que cette métrique dépend majoritairement de la méthode du provisionnement utilisée.
- Notre méthode affiche des malis même lorsque les montants des réserves sont supérieurs à celle d'EAXA. Par conséquent, cela consolide notre intuition qu'elle est très conservatrice dans le calcul des réserves.
- Les bonis-malis sont plus proches de 0 que la méthode d'EAXA. Cela se traduit ainsi par une stabilité dans l'estimation de la charge ultime entre les différentes années de développement. Ce critère est très important puisqu'il est synonyme d'une volatilité faible.

### 7.3.3 Comparaison des Loss ratios

Étant donnée que le pool en question est un pool très historique, les données disponibles permettent par conséquent de mieux appréhender ces risques et d'avoir des estimations adéquates. Ainsi, une comparaison des Loss ratios permet de juger les performances de notre méthode.

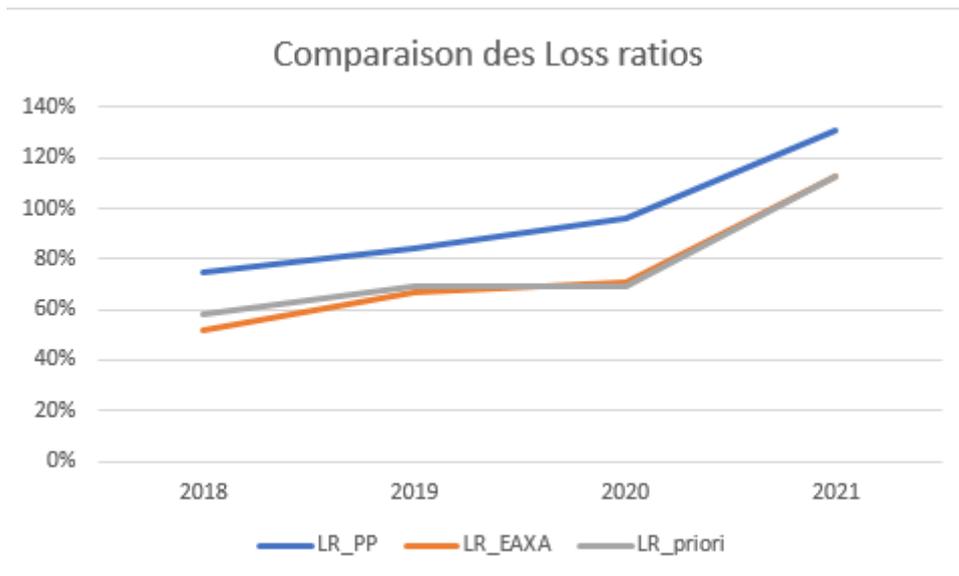


FIGURE 37 – Comparaison des Loss ratios

On voit bien que les loss ratios prédits par notre méthode sont supérieurs aux loss ratios EAXA et aux Loss ratios à priori pour toutes les années. Cela implique que notre méthode a tendance à surestimer la charge totale de la ligne de business. À l’opposé les estimations EAXA, s’approchent des estimations a priori qui se base sur les données historiques. Ainsi, on peut dire que les niveaux de réserves de la méthode EAXA sont plus adaptés.

### 7.3.4 Comparaison des montants des réserves dans une perspective solvabilité II

Étant donné que notre méthode se base sur une approche par simulation, le calcul du montant des réserves SII s’avère très facile puisqu’il suffit de déterminer le quantile qui correspond à 99.5%. La figure suivante résume la comparaison entre les valeurs estimées par AXA et par notre méthode.



FIGURE 38 – Comparaison des montants de réserves SII

On constate à la lumière des résultats présentés ci-dessus que les niveaux de réserves SII sont inférieurs à ceux prédits par les méthodes classiques. Cela implique par conséquent

que la volatilité de l'estimation de la méthode PP est plus faible. Par ailleurs, ce résultat est cohérent avec l'étude boni-mali faite précédemment à savoir la faible volatilité des estimations prédites.

### 7.3.5 Comparaison des cadences des paiements

Une autre métrique qui peut nous aider consiste à comparer les cadences des paiements de notre méthode par rapport à celle d'EAXA. Celle-ci est estimée en utilisant les méthodes classiques des loss ratio sur les triangles de développement.

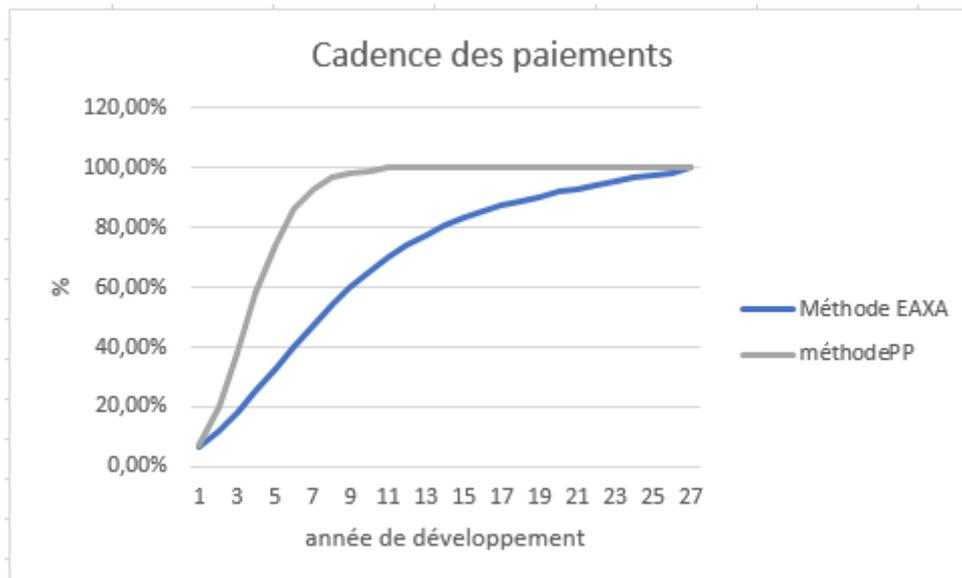


FIGURE 39 – *Comparaison des cadences des paiements*

La courbe grise qui correspond à notre méthode affiche une cadence de paiement qui arrive à son échéance au bout de 9 ans. Celle-ci est beaucoup plus courte que la cadence affichée par les méthodes classiques qui se base sur l'évolution de la sinistralité observée. Cette différence est due majoritairement au fait que la variable de durée de notre méthode qui modélise l'écart entre la survenance et le règlement des sinistres prédit des estimations centrées autour de la moyenne qui est de l'ordre 7.31 ans pour le pool. Finalement, étant donné que la branche en question est une branche à développement long, on peut affirmer que notre méthode n'est pas très adaptée avec l'évolution observée dans la pratique.

### 7.3.6 Conclusion

Suite aux différents tests menés dans les sections suivantes le tableau suivant résume les résultats trouvés :

	Méthode proposée	Méthode traditionnelle
Comparaison des niveaux de réserves	(x)	
Test Boni-mali		(x)
Comparaison des réserves SII		(x)
Comparaison de la cadence des paiements		(x)

TABLE 43 – *Comparaison quantitative entre les deux méthodes*

En outre en ajoutant la comparaison selon les critères qualitatifs établis auparavant :

	Méthode proposée	Méthode traditionnelle
Utilisation des données tarification	(x)	
Utilisation des données provisionnement	(x)	(x)
Utilisation du triangle de développement		(x)
Provisionnement en se basant sur des traités regroupés (pool)	(x)	(x)
Prise en compte de la durée entre la survenance et la déclaration	(x)	(x)
Prise en compte de la durée de fixation du coût final	(x)	(x)
Prise en compte de la durée de règlement du sinistre	(x)	(x)
Prise en compte de la mutualisation	(x)	(x)
Facilité d'implémentation		(x)
Rapidité d'exécution		(x)

TABLE 44 – *Comparaison entre les deux méthodes*

Étant donné qu'en provisionnement, il n'existe pas de méthodes universelles qui fonctionnent dans toutes les situations, il est difficile de comparer les résultats. Cependant, à travers les différents tests menés, on constate que notre méthode donne des niveaux de réserves plus élevés par rapport aux méthodes classiques d'EAXA qui permettent d'avoir le niveau juste des réserves. En outre, on voit que la cadence obtenue n'est pas cohérente avec l'évolution des paiements en pratique. Cela risque ainsi d'exposer le réassureur à des risques de sous provisionnement. Finalement, le temps de calcul ainsi que la facilité d'implémentation sont en faveur de la méthode classique. Par conséquent à la lumière de ces constats, on peut affirmer que la méthode classique est meilleure que celle que nous avons développée.

Toutefois, plusieurs améliorations s'imposent. En premier lieu, puisque le mappage disponible est imparfait, la loi de la sévérité obtenue ne reflète pas la véritable distribution. En outre, l'étalonnage de la variable de durée peut également être améliorée en utilisant une loi continue au lieu d'une loi distincte. De plus, il est nécessaire de tester cette technique sur d'autres branches qui sont à développement court, ce qui n'a pas été possible dans le cadre de ce mémoire.

## 8 Conclusion

Étant donné que les processus de la tarification et du provisionnement chez AGRE sont quasi-indépendants, le but de ce mémoire est de les rapprocher en créant une base de données qui regroupe à la fois les données tarification et les données provisionnement. Ce rapprochement nous a permis dans un premier temps d'analyser les risques souscrits par AGRE en fonction des cédantes et de proposer des nouvelles méthodes d'estimation du montant de réserves. Par ailleurs, les modèles proposés sont basés sur une approche fréquence/sévérité ce qui est rarement utilisé en provisionnement.

Nous avons décrit en premier lieu, ces deux aspects ainsi que les méthodes utilisées. Suite à cette étape, nous avons créé le mappage entre les données des deux équipes. Par conséquent, nous avons obtenu le rapprochement cherché.

Par la suite, nous avons mené une analyse qualitative afin de suivre l'évolution des générateurs de risques et de comparer les risques par cédante du pool Moteur. Par conséquent, nous avons établi un ensemble d'informations qui peuvent aider les actuaires dans leurs revues de réserves.

Nous avons ensuite proposé une première méthode qui permet de calculer principalement les IBNRs par traité. À l'opposé des méthodes classiques, celle-ci est basée sur une approche fréquence sévérité. Par ailleurs la loi de la fréquence décrit le nombre de sinistres survenus mais pas encore déclarés. En comparant les estimations d'AXA avec nos estimations, nous avons constaté que la méthode EAXA traditionnelle était plus complète puisqu'elle permet de répliquer la cadence de paiement observée dans la pratique ainsi que bénéficier de l'effet de mutualisation

Enfin, nous avons proposé une autre méthode qui permet de calculer principalement les IBNRs par ligne de business inspiré d'un article proposé par Pietro Parodi en 2014. Les performances de ce modèle étaient adéquates. Toutefois, à travers les différents tests menés, on constate que les montants des réserves sont très élevés suite à une sur-estimation de la fréquence. En outre, la cadence observée n'est pas adaptée avec ce qui est observé dans la pratique ce qui peut exposer le réassureur à un risque de sous provisionnement.

Toutefois, notre étude comporte plusieurs limites. En premier lieu les données à notre disposition étaient lacunaires ce qui nous a pénalisés dans les étapes qui ont suivi. On peut citer par exemple le manque du mappage entre les générateurs et leurs tranches associées. En deuxième lieu, nos méthodes ont été testées sur un ensemble de données limité ce qui met en doute les résultats trouvés.

## Références

- [1] Mario V. Wüthrich Michael Merz (2008) : *Stochastic claims reserving methods in insurance*
- [2] Pietro Parodi (2014) : *Triangle-free reserving A non-traditional framework for estimating reserves and reserve uncertainty*
- [3] Pierre-Germain Murcy (2020) : *Sinistres corporels : Valorisation, sensibilité aux paramètres économiques et impact des clauses de Réassurance*
- [4] Autcha Araveeporn : *Parameter estimation of Poisson distribution by using maximum likelihood, Markov chain Monte Carlo, and Bayes method*
- [5] E.L Frome (1980) : *Algorithm AS 171 : Fisher's Exact Variance Test for the Poisson Distribution*
- [6] Edward Furman (2006) : *On the convolution of the negative binomial random variables*
- [7] Sibylle Lot : *Définition des critères de choix du modèle de provisionnement et illustration avec des données d'arrêt de travail*
- [8] Bedi Nathalie (2018) : *Modélisation du risque de tempête en France Métropolitaine*
- [9] Nebidita Guru (2015) : *Flood frequency analysis of Tel Basin of Mahanadi river system, India using annual maximum and POT Flood data*
- [10] P. de Zea Bermudes (2010) : *Parameter estimation of the generalized Pareto distribution*
- [11] Mohamed Aslam (2019) : *Introducing Kolmogorov–Smirnov Tests under Uncertainty : An Application to Radioactive Data*
- [12] Marc Berlinger al (2021) : *A generalized Anderson–Darling test for the goodness-of-fit evaluation of the fracture strain distribution of acrylic glass*
- [13] Y. Lei (2008) : *Evaluation of three methods for estimating the Weibull distribution parameters of Chinese pine*
- [14] Lorenzo zaninetti and Mario Ferraro (2007) : *On the truncated Pareto distribution with applications*
- [15] Roberto Daris and Lucio Torelli : *Some indices for heavy-tailed distributions*
- [16] L'actuariat - N° 05 - Juin (2012) : *Théorie des valeurs extrêmes*
- [17] Xiao, Y. A. Gordon and A. Yakovlev (2007) : *A C++ program for the Cramer-von Mises tow sample test*
- [18] S.Loukas and C.D.Kemp (1986) : *The index of dispersion test for bivariate Poisson distribution*

## Table des figures

1	Composition d'un traité de réassurance XL . . . . .	4
2	Résultats et comparaisons . . . . .	7
3	Composition of an XL reinsurance treaty . . . . .	8
4	Results and comparisons . . . . .	11
5	Taux de cession en réassurance des primes acquises en assurance non vie par forme juridique . . . . .	17
6	Fonctionnement d'un traité quote-part . . . . .	19
7	Fonctionnement d'un traité excédent de plein . . . . .	20
8	Fonctionnement d'un traité XS . . . . .	21
9	Fonctionnement d'un traité stop loss . . . . .	22
10	Modèle de business d'AXA Global Re . . . . .	23
11	Schéma explicatif du calcul des réserves . . . . .	26
12	Triangle de développement . . . . .	26
13	diagramme $(C_{ij}, C_{i,j+1})_{i=0:I-1-j}$ . . . . .	27
14	triangle de développement de la branche d'activité . . . . .	33
15	Comparaison des montants de réserves . . . . .	34
16	Évolution des réserves en fonction de l'année de souscription . . . . .	34
17	Évolution de la charge ultime en fonction des primes . . . . .	35
18	Nombre de sinistres par année de souscription . . . . .	42
19	taux d'arrivée en fonction de l'année de développement . . . . .	43
20	Test de calibrage de la loi de la sévérité . . . . .	43
21	Évolution de l'AEP et de l'OEP entre l'année 2021 et l'année 2022 . . . . .	44
22	Composition d'un traité de réassurance XL . . . . .	45
23	Cadences des paiements observées . . . . .	49
24	Sinistres supérieurs à la priorité . . . . .	56
25	Évolution de la moyenne en fonction de la distribution . . . . .	57
26	diagramme de "Cullen and Frey" de la distribution de la fréquence du traité	59
27	diagramme de "cullen and Frey" de la distribution de la fréquence du traité	60
28	Fonction de répartition de la loi de la sévérité du traité . . . . .	61
29	Construction de la fonction de répartition empirique . . . . .	61
30	Courbe AEP/OEP du traité étudié . . . . .	63
31	Schéma explicatif de la censure et de la troncature . . . . .	65
32	Schéma explicatif de la durée entre la survenance et la déclaration . . . . .	65
33	Évolution de la cadence des paiements en fonction des années de dévelop- pement . . . . .	67
34	Évolution des IBNRs en fonction des années de développement . . . . .	69
35	Évolution des IBNRs en fonction des années de développement . . . . .	72
36	Fonction de répartition de la loi de la sévérité de la ligne de business . . . . .	76
37	Comparaison des Loss ratios . . . . .	79

38	Comparaison des montants de réserves SII . . . . .	79
39	Comparaison des cadences des paiements . . . . .	80

## Liste des tableaux

1	Évolution du traité entre 2021 et 2022 . . . . .	5
2	Nombre de sinistres espérés et reportés des traités signés en 2021 et 2022 .	5
3	Fréquence espérée par région . . . . .	5
4	Comparaison entre les deux méthodes . . . . .	6
5	Treaty evolution between 2021 and 2022 . . . . .	9
6	Number of expected and realized claims from treaties signed in 2021 and 2022 . . . . .	9
7	Expexted frequency per region . . . . .	9
8	Comparison between the two methods . . . . .	10
9	Fonctionnement du contrat quote-part du point de vue de l'assureur . . . .	19
10	Fonctionnement d'un contrat Excédent plein . . . . .	20
11	Illustration de la méthode de Chain Ladder . . . . .	28
12	Calibrage de la loi de la fréquence . . . . .	42
13	Paramètres estimés de la loi GPareto . . . . .	43
14	Exemple de tests de réplication de quelques traités . . . . .	47
15	Chiffres clés . . . . .	48
16	Les durées de règlement les plus importantes . . . . .	49
17	Évolution de la moyenne entre l'année 2021 et 2022 . . . . .	50
18	Évolution de la moyenne entre l'année 2021 et 2022 . . . . .	50
19	Évolution du traité entre 2021 et 2022 . . . . .	51
20	Nombre de sinistres espérés et reportés des traités signés en 2021 et 2022 .	51
21	Période de retour en fonction du nombre de sinistres espérés . . . . .	51
22	Nombre de sinistres enregistrés . . . . .	52
23	Comparaison du la charge ultime et du loss ratio entre les deux visions . .	53
24	Fréquence espérée par région . . . . .	54
25	Fréquence espérée par région . . . . .	54
26	Test de validation de la loi de la fréquence . . . . .	59
27	Loi et moyenne des générateurs . . . . .	59
28	Test de validation de la loi de la fréquence . . . . .	60
29	Caractéristique de la distribution de la sévérité résultante . . . . .	62
30	Pertes enregistrées pour un traité . . . . .	62
31	Nombre de sinistres observés de quelques programmes de réassurance . . .	64
32	Durée moyenne entre la survenance et la déclaration . . . . .	66
33	Résumé des valeurs estimées . . . . .	66
34	Écart d'estimation entre notre méthode et celle d'AXA . . . . .	70

---

35	Écart d'estimation entre notre méthode et celle d'AXA . . . . .	70
36	Comparaison entre les deux méthodes . . . . .	71
37	Description des différentes labels de la base sinistre d'AXA . . . . .	71
38	Comparaison des moyennes des lois des durées utilisées . . . . .	72
39	Comparaison entre les deux méthodes . . . . .	73
40	Comparaison du montant des réserves estimés entre les deux modèles . . .	76
41	Comparaison entre le nombre de sinistres de l'année 2020 et de l'année 2021	77
42	Analyses des boni-malis . . . . .	78
43	Comparaison quantitative entre les deux méthodes . . . . .	81
44	Comparaison entre les deux méthodes . . . . .	81

## Annexe

### Somme indépendante des négatives binomiales

Soit  $X_i \sim BN(\alpha_i, p_i)$ . La fonction génératrice des moments est définie de la manière suivante :

$$M_{y_i} = \left( \frac{1 - q_j e^t}{p_j} \right)^{\alpha_i}$$

Si  $S = X_1 + \dots + X_n$  alors :

$$M_S = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1 - q_j e^t}{p_j} \right)^{\alpha_i}$$

Soit  $r_j = \frac{q_j}{p_j}$  et  $\hat{t} = e^t - 1$  alors :

$$M_S = \prod_{i=1}^n (1 - r_j \hat{t})^{-\alpha_i}$$

Par ailleurs, si  $r_1 = \min r_j$  et  $\alpha = \sum \alpha_i$  alors :

$$1 - r_j = (1 - r_1 \hat{t}) \left( \frac{r_j}{r_1} \right) \left( 1 - \frac{(1 - r_1)}{(1 - r_1 \hat{t})} \right)$$

$$M_S(t) = (1 - r_1 \hat{t})^{-\alpha} \prod_{i=1}^n \left( \frac{r_j}{r_1} \right)^{-\alpha_j} \prod_{i=1}^n \left( \frac{(1 - r_1)}{(1 - r_1 \hat{t})} \right)^{-\alpha_i} = (1 - r_1 \hat{t})^{-\alpha} R \prod_{i=1}^n \left( \frac{(1 - r_1)}{(1 - r_1 \hat{t})} \right)^{-\alpha_i}$$

$$\log(M_S(t)) = -\alpha \log(1 - r_1 \hat{t}) + \log(R) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k (1 - r_1 \hat{t})^{-k}$$

avec  $t$  tel que quelque soit  $j$   $\left| \frac{1 - r_1}{1 - r_1 \hat{t}} \right| < 1$  :

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j (1 - q_1 p_j / q_j p_1)^i}{i}$$

$$M_S(t) = \exp(\log(M_S(t))) = (1 - r_1 \hat{t})^{-\alpha} \text{Re} \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k (1 - r_1 \hat{t})^{-k} \right) = R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k (1 - r_1)^{-k - \alpha}$$

avec  $\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k i \epsilon_i \delta_{k+1-i}$

### Vieillessement des lois de la fréquence

si  $N$  suit une loi négative binomiale  $BM(r, x)$  et si  $p = p(T < t)$  :

$$P(N = k) = \frac{\Gamma(k + r)}{k! \Gamma(r)} x^r (1 - x)^k$$

$$\begin{aligned}
 P(N = n | N_t = k) &= \frac{p(N_t = k | N = n)p(N = n)}{\sum_{i=k}^{\infty} p(N_t = k | N = i)p(N = i)} \\
 &= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\Gamma(n+r)}{n! \Gamma(r)} x^r (1-x)^n}{\sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{(i-k)!k!} p^k (1-p)^{i-k} \frac{\Gamma(i+r)}{i! \Gamma(r)} x^r (1-x)^i} \\
 &= \frac{\frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \Gamma(n+r) (1-x)^{n-k}}{\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{(i-k)!} (1-p)^{i-k} \Gamma(i+r) (1-x)^{i-k}}
 \end{aligned}$$

si on pose  $l = n - k$  alors :

$$\begin{aligned}
 p(N - N_t = l | N_t = k) &= \frac{\frac{1}{l!} ((1-p)(1-x))^l \Gamma(k+l+r)}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} ((1-p)(1-x))^i \Gamma(k+i+r)} \\
 &= \frac{\frac{\Gamma(k+l+r) ((1-p)(1-x))^l z^{r+k}}{l! \Gamma(r+k)}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+i+r) ((1-p)(1-x))^i z^{r+k}}{i! \Gamma(r+k)}} \tag{92} \\
 &= \frac{\Gamma(k+l+r) ((1-p)(1-x))^l z^{r+k}}{l! \Gamma(r+k)}
 \end{aligned}$$

avec  $z = 1 - (1-p)(1-x)$

Par conséquent  $N - N_t | N_t \sim BN(r + N_t, 1 - (1-p)(1-x))$