

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine  
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine  
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Le 31 mars 2023

Par : Pierre GUILLAUME

Titre : Création d'un outil d'allocation stratégique adossé à un régime de retraite

Confidentialité :  Non  Oui (Durée :  1 an  2 ans)

---

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires :*

*Entreprise :*  
Nom : Diot Siaci  
Signature :

*Membres présents du Jury du Certificat  
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

*Directeur de Mémoire en entreprise :*  
Nom : Mickaël BERREBI  
Signature :

---

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

*Secrétariat :*

*Signature du responsable entreprise*

*Bibliothèque :*

*Signature du candidat*



## Résumé

---

L'objectif de ce mémoire est la création d'un outil d'allocation stratégique adapté aux engagements sociaux des entreprises.

Ce travail propose donc une modélisation des classes d'actifs (produits de taux, actions, immobilier. . .) éligibles à la charte d'investissement de l'entreprise, la création d'un générateur de scénarios économiques (GSE) et enfin, la construction d'un outil d'optimisation de portefeuille. Concrètement, cette étude vise à répondre à une problématique plus large qui est celle de l'adossement de flux de passif sur un horizon long terme. Il convient de noter que le cadre de cette étude est simplifié. L'approche retenue adopte une modélisation des passifs de manière déterministe, et une utilisation du modèle de Black-Scholes pour projeter les rendements des actifs.

Dans le cadre de la modélisation des classes d'actifs, les hypothèses de chacune sont déterminées en prenant en compte son historique de performance, mais aussi les perspectives économiques futures. À noter également que la prise en compte des interactions entre les différentes classes d'actifs se matérialise par plusieurs matrices de corrélations. Pour la partie GSE, l'objectif est la génération de milliers de scénarios fidèles aux hypothèses paramétrées au niveau des classes d'actifs. Le dernier objectif est la création d'un outil dont la particularité consiste à proposer également une évolution et une modularité des scénarios économiques au cours du temps, à travers des variations et des changements de régimes. Par exemple, des cycles de croissance et des cycles de récession sont identifiés et distingués. Enfin, les portefeuilles optimaux obtenus doivent faire l'objet d'une batterie de tests statistiques, afin de sélectionner le portefeuille le plus résilient et le plus adapté aux engagements du régime. Il devra, en sus, permettre de couvrir le taux de couverture souhaité vis-à-vis des futures sorties de liquidité anticipées.

---

*Mots-clés : Allocation stratégique, Générateur de scénarios économiques (GSE), Gestion Actif Passif (ALM), retraite, Taux de couverture.*

## Abstract

---

The objective of this work is the creation of a strategic assignment tool adapted to the social commitments of companies.

To reach that goal, this memoir proposes a model of asset classes (fixed income products, shares, real estate. . . ) relevant to the company's investment charter , the creation of an economic scenario generator (ESG) and, finally, the construction of a portfolio optimization tool. In concrete terms, this study aims to address a broader issue, which is the matching of liability flows over a long-term horizon. It should be noted that the framework of this study is simplified. The approach adopted is to model liabilities deterministically, and to use the Black-Scholes model to project asset returns.

In the frame of asset classes modeling the assumptions of each class are determined by taking into account its performance history, but also the future economic prospects. It should also be noted that accounting for interactions between the different asset classes is materialized by several correlation matrices. As for the ESG part, the objective is the generation of thousands of scenarios faithful to the parametrized hypotheses at the asset classes level. The last objective is the creation of a tool whose particularity consists in proposing both an evolution and a modularity of economic scenarios over time, through variations and changes of regimes. For example, cycles of growth and cycles of recession are identified and distinguished. Finally, the optimal portfolios obtained must be the subject of a battery of statistical tests, in order to be able to select the most resilient portfolio, at the same time most adapted to the commitments of the plan. It will, moreover, need to make possible the desired coverage rate vis-a-vis future anticipated liquidity outflows.

---

*Keywords : Strategic Allocation; Economic scenario generator (ESG); Asset Liability Management (ALM); retirement; coverage rate.*

# Note de Synthèse

## Contexte et enjeux de l'étude

Depuis plusieurs années, les systèmes de retraite en France ne permettent plus de fournir un montant de rente qui puisse satisfaire les besoins des Français lors de la retraite. En effet, le rendement des régimes de retraite par répartition est en baisse, en raison de la situation économique actuelle. Ainsi, le montant des pensions obtenues avec le régime de base (Sécurité Sociale), le régime complémentaire obligatoire (AGIRC-ARRCO) ainsi qu'avec les régimes d'entreprise, pour ceux qui sont concernés, n'est souvent pas suffisant au regard des besoins des Français. En effet, nous sommes entrés dans une ère de forte inflation avec un contexte de remontée des taux d'intérêt. Ceci conduit les français à constater une baisse de pouvoir d'achat en particulier chez les retraités. C'est pourquoi de nombreux dispositifs se mettent en place afin de répondre à ce problème.

La loi PACTE (Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation des Entreprises), instaurée en 2019, est une première solution pour préparer sa retraite, à partir d'un PER (Plan d'Épargne Retraite). Ce produit vient en ajout d'anciens dispositifs (Article 39, Article 83, ...) toujours en activité, néanmoins fermés aux nouveaux entrants. Ces produits, caractérisés de dispositifs de retraite supplémentaires, collectifs ou individuels, permettent aux particuliers ou aux entreprises d'épargner pour eux-même ou leurs salariés.

Ce mémoire se propose de répondre à la question de l'adossement de ces types de produits. En particulier, les dispositifs de retraite collective. Cette réponse se veut à la fois précise, juste et robuste mais aussi accessible, compréhensible et généralisable. A la fois pour tout ce qui relève des actifs qui viennent en couverture des engagements sociaux des entreprises (Indemnités de Fin de Carrière, Médailles d'honneur du travail, Mutuelle retraité, ...), ou encore ceux qui viennent en contrepartie des passifs des caisses de retraites.

Tous les dispositifs qui viennent d'être énoncés ont au moins une caractéristique commune, ils engagent le bénéficiaire, et par conséquent l'investisseur, sur une période de long terme. Cette particularité va jouer un rôle de premier plan et donc avoir un impact significatif sur le mode de gestion à utiliser. En effet la gestion d'actifs repose sur plusieurs piliers. Lorsque l'objectif est de réaliser un maximum de rendement sur une période relativement courte, l'investisseur cherche à exploiter la moindre inefficience temporaire du marché des titres et à choisir très précisément la date d'achat et de vente de ces titres. Au contraire, sur un horizon à plus long terme ce type de gestion, dite tactique, perd de son instantanéité et c'est alors l'allocation dite stratégique qui prend le pas dans la gestion d'actifs. Ce type de gestion se rapproche d'une vision plus macro-économique, en regroupant les titres par classes de risque ou classes d'actifs.

Ces classes de risques seront abordées selon une granularité relativement fine car la majorité des études distinguent seulement trois voire quatre classes d'actifs (actions, obligations, monétaire et/ou immobilier), alors qu'ici huit classes d'actifs ont été retenues : les actions monde, les action européennes, les actions pays émergents, les obligation souveraines, le crédit, le monétaire, l'immobilier et le non côté (private equity).

Mais, quelles sont les classes d'actifs les plus performantes et les plus adaptées pour composer un

portefeuilles optimal pouvant répondre à notre problématique d'adossement de flux de passif sur un horizon de long terme ?

## Résolution du problème

La construction d'un outil ALM (Asset Liability Management) est le choix qui a été fait pour répondre au problème esquissé par la question précédente. Ce type d'outil permet d'obtenir une allocation à la fois **stratégique** et **optimale**.

### Allocation optimale

Dans ce type d'étude un portefeuille optimal est un portefeuille dans lequel le risque (la volatilité) est minimisé et la performance (le rendement) est maximisée. Pour cela plusieurs théories de gestion de portefeuille ont été développées comme celle de Markowitz, celle de Black-Litterman ou encore celle de Sharpe. La plus ancienne est celle de Markowitz, elle consiste à résoudre un problème de maximisation du rendement du portefeuille sous une contrainte de volatilité. C'est ce postulat qui sera choisi comme point de départ de l'étude.

Cependant les travaux de Black-Litterman et de Sharpe ont aussi été pris en compte dans la construction de l'outil. En effet, le duo propose un modèle plus complet que celui de Markowitz car il ajoute à celui-ci des jugements propre à l'investisseur. Cette précision a été apportée à l'outil d'une manière différente afin de faire face aux incertitudes économiques du fait du long horizon de projection. Pour cela trois jeux d'hypothèses seront définis et justifiés pour caractériser trois contextes économiques futurs :

- scénario central présente des hypothèses de rendement et de volatilité relativement proches des données historiques, tout en gardant en hypothèses sous-jacentes une inflation élevée et une croissance ralentie ce qui explique quelques ajustements. La matrice de corrélation s'appuie quant à elle sur une période relativement longue permettant d'observer une phase de remontée des taux puis une phase de baisse des taux.
- Scénario pessimiste présente des hypothèses de rendement plus faible et des hypothèses de volatilité plus grande du fait de l'incertitude. La matrice de corrélation retenue suggère une forte corrélation des actifs caractéristique des périodes de crise et correspond à une période de politique monétaire expansionniste qui conduit à ce type de phénomène.
- Scénario optimiste présente des hypothèses de rendement supérieures et des hypothèses de volatilité plus faibles en raison d'une croissance retrouvée. La matrice de corrélation se rapprochera cette fois-ci de celle utilisée dans le scénario centrale, néanmoins les corrélations sont plus accentuées.

Aussi, le modèle de Sharpe et plus particulièrement les travaux au sujet du ratio de Sharpe ont fourni un critère supplémentaire pour déterminer un portefeuille optimal. Tandis que le modèle de Markowitz exhibe une courbe avec les portefeuilles optimaux par niveau de volatilité sans les départager, le ratio de Sharpe permet de comparer des portefeuilles avec des rapports *rendement/risque* différents. Sur la figure 1 tous les portefeuilles sont optimaux car ils forment la frontière efficiente cependant selon le ratio de Sharpe le portefeuille du milieu est le plus performant.

### Allocation stratégique

L'optimalité du portefeuille n'est pas la seule contrainte à prendre en compte, car comme expliqué précédemment, l'objectif est de couvrir un engagement. Dans ce cas d'étude, un portefeuille d'une caisse de retraite fictive jouera le rôle du passif à adosser. Cet engagement se caractérise par un ensemble

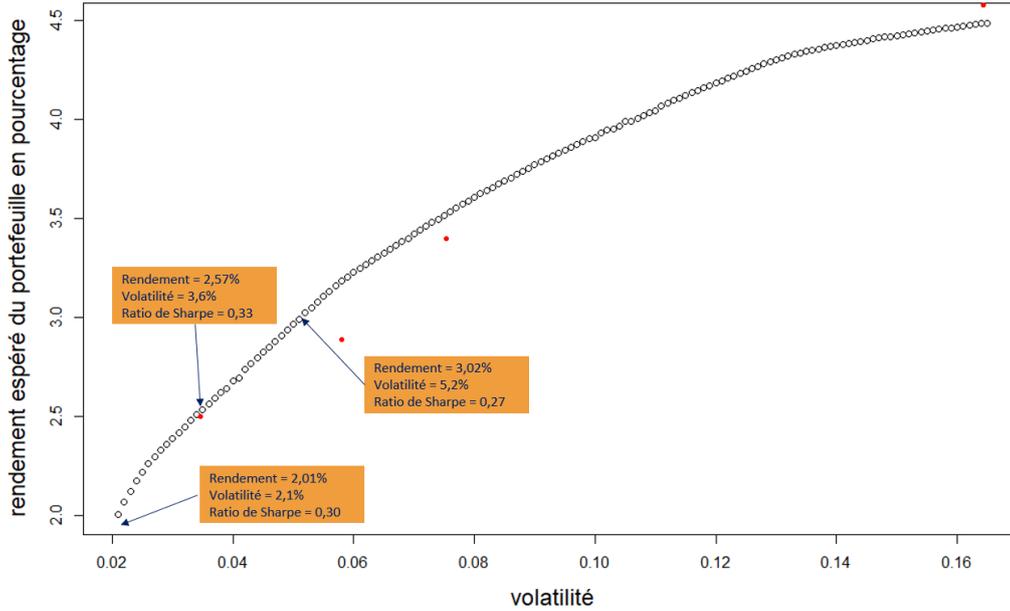


FIGURE 1 : Frontière efficiente de Markowitz avec les ratio de Sharpe de 3 portefeuilles

de flux sur 48 années avec pour chaque année des cotisations (flux entrants) et des prestations (flux sortants). Cette durée importante oblige l'étude à projeter les portefeuilles sur un horizon comparable et par conséquent à envisager des modèles de projection afin de faire vivre les classes d'actifs sur cet horizon.

Plusieurs modèles ont été considérés pour répondre à la problématique de projection. D'abord le modèle de Black & Scholes pour modéliser les classes d'actifs action. Cela pour plusieurs raisons, et la première est sûrement la plus importante : c'est un des modèles les plus simples, il a donc l'avantage d'être adaptable à l'ajout de tous jugements d'expert et aussi facilement explicable à un tiers non professionnels des sujets d'investissement ou de gestion de portefeuille. De plus, c'est un modèle couramment utilisé sur la place qui a fait ses preuves en gestion de portefeuille.

Les autres modèles adaptés à l'étude sont les modèles de Vasicek et les modèle à changement de régime. La nécessité de modéliser divers produits liés aux taux d'intérêt, à la monnaie ou à l'immobilier a rapidement soulevé la question du modèle de Vasicek. Le modèle à changement de régimes s'est quant à lui imposé du fait de la durée importante de l'horizon de projection. En effet, l'investisseur conçoit aisément que sur une période de plusieurs dizaines d'années l'économie oscille entre des états différents.

Ces deux derniers modèles ont cependant été abandonnés pour la construction de cet outil étant donné la complexité d'y apporter des jugements d'expert. De plus, les supports d'investissements considérés, les Fonds Commun de Placement (FCP), n'étaient pas adaptés à ce type de modèle.

Enfin, la problématique d'adossement est introduite. L'allocation stratégique va prendre tout son sens avec une dernière mesure venant relier les flux du passif avec la projection du portefeuille d'actifs. Cette mesure est le taux de couverture et ici c'est la formule du taux de couverture dynamique dans un système ouvert qui explicité et qui a été retenu dans cette étude

$$\text{Taux de couverture}_t = \frac{\text{Réserve}_t + \sum_{i=t+1}^T \text{Cotisations actualisées}_i}{\sum_{i=t+1}^T \text{Prestations actualisées}_i}. \quad (1)$$

Il permet de relier l'actif (la Réserve) au passif (Cotisations et Prestations). Cette définition donne à l'investisseur une double vision : le caractère positif ou négatif de celui-ci indique si le régime est capable de payer les prestations à date de calcul. Et l'estimation de la viabilité du régime s'obtient

en comparant ce taux par rapport à 1 pour connaître la proportion des engagements couverts à cette même date.

Comme indiqué dans l'équation (1), les flux sont actualisés. Il le sont à partir d'une courbe des taux zéro coupon publiée mensuellement par l'institut des actuaires. Or, par soucis de cohérence avec les hypothèses retenues pour les classes d'actifs dans les différents scénarios, une étude de sensibilité a été adoptée pour l'actualisation des flux de passif. En effet les hypothèses de rendements de la classe d'actifs obligation gouvernementale diffèrent de +50 (respectivement -50) points de base pour le scénario optimiste (respectivement pessimiste) par rapport au scénario central. Cette variation à été répercutée sur la courbe des taux utilisée dans chaque scénario à partir d'une translation vers le haut de 50 points de base dans le cas optimiste et vers le bas de 50 points de base dans le cas pessimiste. Cette approche constitue à elle seule, l'ensemble du travail sur le passif car ce mémoire se focalise principalement sur la construction et la projection d'un portefeuille d'actifs

## Résultats

Finalement, l'outil ALM créé a permis d'identifier différents portefeuilles optimaux, selon des critères financiers avec le ratio de Sharpe, mais aussi des mesures de risque telles que la Value at Risk (VaR) ou encore la Conditionnal Value at Risk (CVaR). Le taux de couverture à aussi joué un rôle de premier plan dans le choix final du portefeuille avec sa vision à la fois instantanée et prospective.

Le tableau récapitulatif en table 1 reprend pour les trois scénarios de l'économie, pessimiste pour le premier tableau, central pour le second et optimiste pour le dernier, les taux de couverture médian à différentes dates (horizon 1, 5, 10, 15 et 20 ans) et ce pour 10 portefeuilles. Ces portefeuilles ont été sélectionnés de manière à couvrir l'ensemble du spectre de la frontière efficiente présentée en figure 1 à intervalle de volatilité constant.

		Scénario Pessimiste									
Horizon \ Portfeuille	Portfeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an		82,89%	83,00%	83,10%	83,09%	83,12%	83,10%	83,07%	83,05%	83,06%	83,07%
5 ans		76,26%	77,09%	77,78%	78,16%	78,48%	78,76%	78,83%	78,77%	78,42%	78,02%
10 ans		70,01%	71,73%	73,02%	74,07%	74,59%	74,99%	75,27%	75,00%	74,82%	74,09%
15 ans		65,86%	68,67%	70,97%	72,52%	73,51%	74,06%	74,49%	74,50%	73,63%	72,23%
20 ans		59,55%	64,08%	67,70%	70,17%	71,45%	72,67%	72,98%	72,49%	71,41%	69,21%
		Scénario Central									
Horizon \ Portfeuille	Portfeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an		87,74%	88,02%	88,19%	88,25%	88,23%	88,24%	88,20%	88,18%	88,18%	88,14%
5 ans		81,52%	83,02%	84,00%	84,52%	84,66%	84,77%	84,94%	85,01%	84,86%	84,71%
10 ans		75,98%	79,37%	81,80%	82,95%	83,48%	84,02%	84,29%	84,49%	84,27%	83,79%
15 ans		72,70%	78,92%	83,30%	85,26%	86,45%	87,10%	87,58%	87,90%	87,79%	86,12%
20 ans		67,83%	77,50%	84,70%	88,33%	90,58%	91,66%	92,62%	92,78%	91,97%	90,81%
		Scénario Optimiste									
Horizon \ Portfeuille	Portfeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an		92,88%	93,28%	93,41%	93,50%	93,57%	93,66%	93,71%	93,74%	93,76%	93,74%
5 ans		87,24%	89,45%	90,52%	90,94%	91,30%	91,53%	91,79%	91,95%	91,86%	91,85%
10 ans		82,49%	87,55%	89,76%	90,91%	91,52%	91,99%	92,39%	92,63%	92,80%	92,13%
15 ans		80,38%	89,70%	93,76%	96,13%	97,84%	99,11%	99,58%	99,42%	98,85%	98,44%
20 ans		77,23%	92,37%	99,62%	103,51%	105,87%	107,93%	108,49%	108,65%	107,73%	106,20%

TABLE 1 : Récapitulatif des taux de couverture dans le cas médian

A partir d'une vision globale, l'observation importante résumée en confrontant ces trois tableaux se trouve dans les portefeuilles extrêmes. Le portefeuille P1 (décrit le portefeuille le moins risqué) présente le pire taux de couverture dans le cas optimiste et le meilleur dans le cas pessimiste. Au contraire pour le portefeuille P10 (le plus risqué), dans le cas optimiste, présente le meilleur taux de couverture. De plus ces trois tableaux montrent le résultat suivant : les écart de taux de couverture sont significativement plus faible dans le cas pessimiste (10 points à horizon 20 ans) que dans le cas central (23 points à horizon 20 ans) que dans le cas optimiste (29 points à horizon 20 ans). La mesure du taux de couverture apporte une conclusion qui va donc dans le sens de celles données par les mesures de risques VaR et CVaR : dans un contexte pessimiste où les actifs sont corrélés positivement, les pertes sont moins importantes que dans un cas central ou même optimiste.

Ce résultat est sûrement le plus important à retenir de ce cas pratique. Il est à garder à l'esprit dès lors que quelqu'un traite d'un sujet d'investissement. Que ce soit pour adosser un passif social ou plus généralement en assurance vie lors de l'adossment d'un fond en euro ou de tout autre produit garanti.

## Limites

Toutefois, ces résultats sont à mettre en perspective, du fait de nombreuses approximations apportées à cette étude. Une première remarque sur la gestion des corrélations est nécessaire. En effet, la projections des portefeuilles est réalisée sur un horizon relativement long. Il laisse envisager différents cycles économiques qui rendent notre hypothèse de stabilité des corrélations entre les classes d'actifs fragile. De plus, un regard est apporté à différents instants en ce qui concerne le taux de couverture et que ce soit au niveau des corrélations mais aussi des hypothèses de rendements et de volatilités des classes d'actifs, elles restent identiques pour chacun des trois grands jeux de scénarios.

Une autre information est à garder à l'esprit pour cerner l'intégralité du sujet et comprendre le cheminement de l'étude. Le passif ne joue pas un rôle majeur dans la construction de l'outil ni dans la rédaction de ce mémoire. Il se caractérise simplement par une chronique de flux de cotisations et de prestations intégrée directement à l'outil à l'aide de la mesure du taux de couverture.

En effet, les sources d'incertitudes telles que le risque de mortalité, de rachat ou de sortie, ainsi que l'augmentation des cotisations, ont été négligées, malgré leur impact potentiel sur les choix d'allocation. Cette prise en compte de l'incertitude sur les flux du passif constitue une des pistes de prolongement possible afin de compléter l'étude. Cette limite provient en réalité de contraintes liées aux données disponibles pour cette étude, en effet nous disposons que d'une chronique de flux fixes et agrégés, sans aucune information détaillée sur les passifs sous-jacents.

Enfin, les limites des modèles stochastiques, notamment le modèle de Black-Scholes, sont également abordées, car ils ignorent les queues épaisses dans la distribution des rendements, ce qui peut entraîner des biais dans les calculs de mesure de risque. Par ailleurs, le choix de retenir le modèle de Black-Scholes pour la modélisation des produits obligataires est critiquable mais est justifié par la volonté de modéliser directement un prix plutôt qu'un taux, même si une modélisation des taux d'intérêt et des spreads aurait pu être plus pertinente. Des modèles à changement de régime sont aussi très appréciés pour simuler des actifs financiers car ils capturent les périodes où les marchés financiers passent d'une dynamique à une autre. Ces modèles permettent de prendre en compte les changements soudains de comportement des prix, tels que les phases de volatilité accrue ou de tendances divergentes. Ils offrent une meilleure représentation des données financières en prenant en compte les régimes multiples, ce qui peut améliorer la précision des prévisions et la gestion des risques.

## Conclusion

L'objectif de ce mémoire est de répondre avant tout à une problématique d'investissement et de donner des clés, qui sont autant de manières pour chacun d'appréhender le risque de l'investissement de son

point de vue, pour prendre des décisions les plus éclairées possibles. Il a également pour motivation d'être une base solide à partir de laquelle des travaux seront réalisés et des conseils seront donnés mais aussi des éléments ajoutés afin d'en diminuer la dépendance aux principales limites exposées ci-dessus. En particulier, une considération plus forte des incertitudes sur les flux du passif pourrait correspondre à un nouvelle problématique pour prolonger cette étude. Une approche côté actif constituerait aussi un nouveau développement avec une question au sujet de la réallocation de l'ancien vers le nouveau portefeuille.

# Synthesis note

## Context and issues of the study

For several years, the pension systems in France have not been able to provide an amount of pension that can satisfy the needs of the French people during retirement. Indeed, the return on the pay-as-you-go pension schemes is decreasing, due to the current economic situation. Thus, the amount of pensions obtained with the basic scheme (Social Security), the compulsory supplementary scheme (AGIRC-ARRCO) as well as with the company schemes, for those who are concerned, is often not sufficient with regard to the needs of the French. Indeed, we have entered an era of high inflation and rising interest rates. This leads the French to notice a decrease in purchasing power, particularly among retirees. This is why the government suggest to set up a lot of measures to overcome this problem.

The PACTE law (Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation des Entreprises), introduced in 2019, is a first solution to prepare one's retirement, from a PER (Plan d'Epargne Retraite). This product is an addition to the old schemes (Article 39, Article 83, ...) still in operation, but closed to new entrants. These products are characterized as supplementary retirement schemes, whether collective or individual, and allow individual people or companies to save for themselves or their employees.

This paper proposes to answer the question of how to back these types of products. In particular, group retirement schemes. This answer is intended to be precise, fair and robust, but also accessible, understandable and generalizable. This is the case for all assets that cover the social commitments of companies (end-of-career indemnities, long-service awards, mutual insurance for retirees, ...), as well as those that cover the liabilities of pension funds.

All the devices which have just been stated have at least one common characteristic, they engage the beneficiary, and consequently the investor, on a long term period. This characteristic will play a major role and therefore have a significant impact on the management method to be used. Indeed, asset management is based on several pillars. When the objective is to achieve a maximum return over a relatively short period of time, the investor seeks to exploit the slightest temporary inefficiency in the securities market and to choose very precisely when to buy and sell these securities. On the contrary, over a longer term, this type of management, called tactical, loses its immediacy and it is then the so-called strategic allocation that takes the lead in asset management. This type of management is closer to a more macro-economic vision, by grouping securities by risk classes or asset classes.

These risk classes will be approached with a relatively fine granularity because most studies distinguish only three or even four asset classes (equities, bonds, money market and/or real estate), whereas here eight asset classes have been retained: global equities, European equities, emerging market equities, sovereign bonds, credit, money market, real estate and private equity.

What are the best performing and most suitable asset classes to build an optimal portfolio that can meet our long-term liability flow matching needs ?

## Problem Solving

The construction of an ALM (Asset Liability Management) tool is the choice that was made to answer the problem outlined by the previous questions. This type of tool makes it possible to obtain an allocation that is both **strategic** and **optimal**.

### Optimal allocation

In this type of study, an optimal portfolio is one in which the risk (volatility) is minimized and the performance (return) is maximized. For this purpose, several portfolio management theories have been developed, such as Markowitz's, Balck's, Litterman's and Sharpe's. The oldest theory is that of Markowitz, which consists of solving a problem of maximizing the portfolio's return under a volatility constraint. It is this postulate that will be chosen as the starting point for the study.

However, the work of Balck & Litterman and Sharpe was also taken into account in the construction of the tool. Indeed, the duo proposes a more complete model than that of Markowitz because they add to it judgments specific to the investor. This precision has been brought to the tool in a different way in order to face the economic uncertainties due to the long projection horizon. To this end, three sets of assumptions will be defined and justified to characterize three future economic contexts:

- the Central Scenario presents yield and volatility assumptions that are relatively close to historical data, while keeping high inflation and slow growth as underlying assumptions, which explains some adjustments. The correlation matrix is based on a relatively long period, allowing us to observe a phase of rising rates and then a phase of falling rates.
- The pessimistic scenario has lower return assumptions and higher volatility assumptions due to uncertainty. The selected correlation matrix suggests a high correlation of assets characteristic of crisis periods and corresponds to a period of expansionary monetary policy that leads to this type of phenomenon.
- The Optimistic scenario has higher return assumptions and lower volatility assumptions due to renewed growth. The correlation matrix is similar to the one used in the central scenario, but the correlation is more pronounced.

Also, the Sharpe model and more specifically the work on the Sharpe ratio have provided an additional criterion to determine an optimal portfolio. While the Markowitz model shows a curve with the optimal portfolios by volatility levels without separating them, the Sharpe ratio allows to compare portfolios with different *return/risk* ratios. In the figure 2, all the portfolios are optimal because they form the efficient frontier, but according to the Sharpe ratio, the middle portfolio is the best performing.

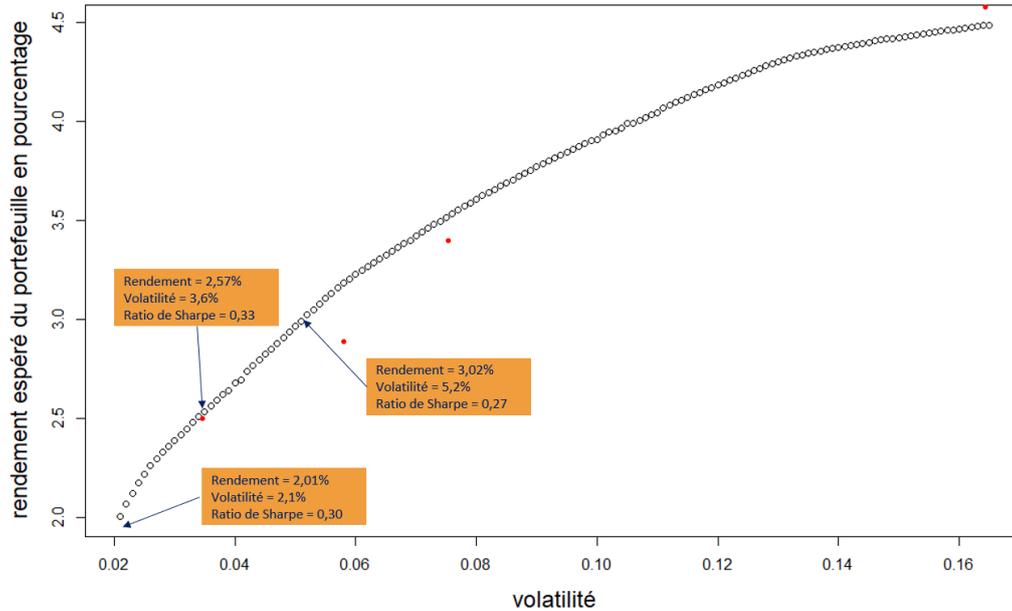


Figure 2: Markowitz efficient frontier with Sharpe ratios of 3 portfolios

## Strategic allocation

The optimality of the portfolio is not the only constraint to be taken into account, because as explained above, the objective is to cover a liability. In this case study, a portfolio of a fictitious pension fund will play the role of the liability to be matched. This commitment is characterized by a set of flows over 48 years with contributions (inflows) and benefits (outflows) for each year. This important duration obliges the study to project the portfolios over a comparable horizon and consequently to consider projection models in order to make the asset classes live over this horizon.

Several models were considered to address the projection issue. First, the Black & Scholes model to model the equity asset classes. This is for several reasons, the first and most important of which is that it is one of the simplest models, and therefore has the advantage of being adaptable to the addition of any expert judgement and also easily explained to a third party who is not a professional in investment or portfolio management. Moreover, it is a model commonly used in the market place and has proven itself in portfolio management.

The other models suitable for the study are the Vasicek and the regime-switching models. The question of the Vasicek model quickly arose because of the need to model interest rate products, but also money market and real estate products. The regime-switching model, on the other hand, was imposed because of the long duration of the projection horizon. Indeed, the investor can easily imagine that over a period of several decades the economy oscillates between different states.

However, these last two models have been abandoned for the construction of this tool given the complexity of making expert judgments. Moreover, the investment vehicles considered, mutual funds (FCP), were not adapted to this type of model.

Finally, the issue of matching was introduced. The strategic allocation will take on its full meaning with a final measure that links the flows of liabilities with the projection of the asset portfolio. This measure is the hedge ratio and here it is the formula of the dynamic hedge ratio in an open system which is explained and which has been retained in this study

$$\text{coverage rate}_t = \frac{\text{Stock}_t + \sum_{i=t+1}^T \text{discounted contributions}_i}{\sum_{i=t+1}^T \text{discounted benefits}_i} \quad (2)$$

It links the assets (the Stock) to the liabilities (Contributions and Benefits). This definition gives the investor a double vision: the positive or negative character of the latter indicating whether the plan is able to pay the current benefits. and the estimation of the viability of the plan by comparing this rate with 1 to know the proportion of the commitments covered at a date  $t$ .

As indicated in the equation (2), the flows are discounted. They are based on a zero coupon rate curve published monthly by the Institute of Actuaries. However, in order to be consistent with the assumptions used for the asset classes in the various scenarios, a sensitivity study was adopted for the discounting of liability flows. Indeed, the yield assumptions for the government bond asset class differ by +50 (respectively -50) basis points for the optimistic (respectively pessimistic) scenario compared to the central scenario. This variation was reflected in the yield curve used in each scenario by an upward shift of 50 basis points in the optimistic case and a downward shift of 50 basis points in the pessimistic case. This approach alone constitutes the entirety of the work on liabilities, as this thesis focuses primarily on the construction and projection of a portfolio of assets

## Results

Finally, the ALM tool created made it possible to identify different optimal portfolios, according to financial criteria with the Sharpe ratio, but also risk measures such as the Value at Risk (VaR) or the Conditionnal Value at Risk (CVaR). The hedge ratio also played a major role in the final choice of portfolio, with its instantaneous and prospective vision.

The summary table in table 2 shows the median hedge rate for the three economic scenarios, pessimistic for the first table, central for the second and optimistic for the last, at different dates (1, 5, 10, 15 and 20 years) for 10 portfolios. These portfolios were selected to cover the entire spectrum of the efficient frontier presented in figure 2 , at a constant volatility interval.

Scénario Pessimiste										
Horizon \ Portefeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an	82,89%	83,00%	83,10%	83,09%	83,12%	83,10%	83,07%	83,05%	83,06%	83,07%
5 ans	76,26%	77,09%	77,78%	78,16%	78,48%	78,76%	78,83%	78,77%	78,42%	78,02%
10 ans	70,01%	71,73%	73,02%	74,07%	74,59%	74,99%	75,27%	75,00%	74,82%	74,09%
15 ans	65,86%	68,67%	70,97%	72,52%	73,51%	74,06%	74,49%	74,50%	73,63%	72,23%
20 ans	59,55%	64,08%	67,70%	70,17%	71,45%	72,67%	72,98%	72,49%	71,41%	69,21%

Scénario Central										
Horizon \ Portefeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an	87,74%	88,02%	88,19%	88,25%	88,23%	88,24%	88,20%	88,18%	88,18%	88,14%
5 ans	81,52%	83,02%	84,00%	84,52%	84,66%	84,77%	84,94%	85,01%	84,86%	84,71%
10 ans	75,98%	79,37%	81,80%	82,95%	83,48%	84,02%	84,29%	84,49%	84,27%	83,79%
15 ans	72,70%	78,92%	83,30%	85,26%	86,45%	87,10%	87,58%	87,90%	87,79%	86,12%
20 ans	67,83%	77,50%	84,70%	88,33%	90,58%	91,66%	92,62%	92,78%	91,97%	90,81%

Scénario Optimiste										
Horizon \ Portefeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an	92,88%	93,28%	93,41%	93,50%	93,57%	93,66%	93,71%	93,74%	93,76%	93,74%
5 ans	87,24%	89,45%	90,52%	90,94%	91,30%	91,53%	91,79%	91,95%	91,86%	91,85%
10 ans	82,49%	87,55%	89,76%	90,91%	91,52%	91,99%	92,39%	92,63%	92,80%	92,13%
15 ans	80,38%	89,70%	93,76%	96,13%	97,84%	99,11%	99,58%	99,42%	98,85%	98,44%
20 ans	77,23%	92,37%	99,62%	103,51%	105,87%	107,93%	108,49%	108,65%	107,73%	106,20%

Table 2: Summary of coverage rates in the median case

From a global perspective, the important observation summarized by comparing these three tables is in the extreme portfolios. Portfolio P1 (the least risky portfolio) has the worst hedging rate in the optimistic case and the best in the pessimistic case. On the contrary for the portfolio P10 (the most risky), in the optimistic case, presents the best coverage rate. Moreover, these three tables show the following result: the difference in the hedging rate is significantly lower in the pessimistic case (10 points at 20 years) than in the central case (23 points at 20 years) than in the optimistic case (29 points at 20 years). The measure of the coverage ratio is therefore consistent with the VaR and CVaR risk measures : in a pessimistic context where assets are positively correlated, losses are less important than in a central or even optimistic case.

This result is surely the most important to remember from this case study. It should be kept in mind whenever someone deals with an investment topic. Whether it is to back a social liability or more generally in life insurance when backing a euro fund or any other guaranteed product.

## Limits

However, these results must be put into perspective, because of the many approximations made in this study. A first remark on the management of correlations is necessary. Indeed, the portfolio projections are carried out over a relatively long horizon. It allows for different economic cycles, which makes our assumption of stable correlations between asset classes fragile. Moreover, the hedging rate is examined at different times, and the correlations, as well as the assumptions of returns and volatilities of the asset classes, remain identical for each of the three main sets of scenarios.

Another piece of information is important to keep in mind in order to understand the entire subject and the path of the study. The liability does not play a major role in the construction of the tool or in the writing of this brief. It is simply a chronicle of contribution and benefit flows built directly into the tool using the coverage ratio measure.

In fact, sources of uncertainty such as mortality risk, surrender or exit risk, as well as increases in contributions, have been neglected, despite their potential impact on allocation choices. Taking into account the uncertainty of liability flows is one possible way of extending the study. This limitation actually stems from data constraints, which do not require sufficient information to be available.

Finally, the limitations of stochastic models, in particular the Black-Scholes model, are also discussed, as they ignore thick tails in the distribution of returns, which can lead to biases in risk measurement calculations. Furthermore, the choice of using the Black-Scholes model to model bond products is open to criticism, but is justified by the desire to directly model a price rather than a rate, even if modeling interest rates and spreads might have been more relevant. Regime-switching models are also popular for simulating financial assets, as they capture periods when financial markets switch from one dynamic to another. These models make it possible to take into account sudden changes in price behavior, such as phases of increased volatility or divergent trends. They offer a better representation of financial data by taking into account multiple regimes, which can improve forecasting accuracy and risk management.

## Finding

Finally, the ALM tool created made it possible to identify different optimal portfolios according to financial criteria with the Sharpe ratio but also risk measures such as the Value at Risk (VaR) or the Conditionnal Value at Risk (CVaR). The coverage ratio also played a major role in the final choice of the portfolio with its instantaneous and prospective vision. In particular, a stronger consideration of uncertainties in liability flows could be a new issue to extend this study. An asset side approach would also be a new development with a question about reallocation from the old to the new portfolio.



# Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps, adresser mes remerciements à Monsieur Mickaël BERREBI, directeur Investment Consulting et tuteur de mon stage pour m'avoir accompagné tout au long de l'élaboration de ce mémoire : sa patience, sa bienveillance et ses judicieux conseils ont été essentiels et ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également les membres de l'équipe Investment Consulting, Thierry DE LA NOUE et Harmel ZOHOUN pour leur disponibilité à mon égard ainsi que leur expertise sur les sujets d'investissement.

Ces remerciements s'adressent également à Messieurs Jean-François DECROOCQ et Quentin GUIBERT, mes tuteurs académiques, pour leur disponibilité, leur suivi et leurs éclairages.

Je remercie par ailleurs toutes les personnes que j'ai pu rencontrer durant mon stage au sein du groupe Diot-Saici dans le département Retraite & Investissement, pour leur accueil convivial et leur présence au quotidien.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à toute l'équipe pédagogique du M2 Actuariat de l'université Paris Dauphine PSL et à tous les intervenants professionnels responsables de ma formation pour leur enseignement. J'associe également Monsieur Simon CLAVERIE, directeur conseil épargne retraite entreprise chez Diot-Siaci et intervenant du M2, pour m'avoir transmis son intérêt sur les thématiques retraite et engagements sociaux, domaines professionnels que je m'appête à découvrir prochainement...

Enfin, je remercie ma famille pour avoir relu mon mémoire et aussi pour leur soutien sans faille depuis des années.



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>Note de Synthèse</b>	<b>5</b>
<b>Synthesis note</b>	<b>11</b>
<b>Remerciements</b>	<b>17</b>
<b>Table des matières</b>	<b>19</b>
<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>1 Présentation du contexte et du cadre de l'étude</b>	<b>23</b>
1.1 IAS 19 et Engagement social des entreprises . . . . .	23
1.2 Évaluation des principaux passifs sociaux des entreprises . . . . .	25
1.3 Engagements de retraite . . . . .	29
1.4 Retraite, Investissement long terme & Économie réelle . . . . .	35
1.5 Actifs éligibles pour constituer un portefeuille . . . . .	36
1.6 Support d'investissements pour l'épargne . . . . .	44
1.7 Conclusion du chapitre 1 . . . . .	47
<b>2 Théorie de l'allocation et de la projection d'actifs</b>	<b>49</b>
2.1 Modèles de projection d'actifs en monde réel . . . . .	49
2.2 Présentation du modèle de Vasicek . . . . .	52
2.3 Présentation du modèle de Black-Scholes . . . . .	54
2.4 Modèle à changement de régimes de Hardy . . . . .	55

2.5	Structure de dépendance . . . . .	57
2.6	État de l'art des modèles d'allocation stratégique . . . . .	58
2.7	Sélection de portefeuilles . . . . .	60
2.8	Mesures de risques . . . . .	64
2.9	Conclusion du chapitre 2 . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Études d'impacts dans un cadre long terme</b>	<b>69</b>
3.1	Calibration des modèles de projection d'actifs . . . . .	69
3.2	Intégration du passif . . . . .	72
3.3	Scénario central . . . . .	73
3.4	Scénario pessimiste . . . . .	80
3.5	Scénario optimiste . . . . .	87
3.6	Synthèse et prolongements . . . . .	93
	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>103</b>
A.1	Panorama des régimes de retraite en France . . . . .	103
A.2	Taux de couverture dans le scénario central . . . . .	104
A.3	Taux de couverture dans le scénario pessimiste . . . . .	105
A.4	Taux de couverture dans le scénario optimiste . . . . .	107

# Introduction

Aujourd'hui, la gestion actif-passif est devenue un sujet central pour le monde de l'assurance et les régimes de retraite. En effet, cette pratique de gestion des risques tient compte des engagements, des investissements et des multiples interactions existantes. Les régimes de retraite doivent déterminer des stratégies admissibles qui garantissent, à partir d'un certain seuil, de faire face aux engagements pris vis-à-vis de l'assuré.

Du côté des retraites, le champ d'étude offert par les différents régimes est vaste.

- Il peut être divisé selon la méthode d'acquisition des droits : les régimes à prestations définies où les prestations servies sont définies contractuellement et les régimes à cotisations définies où le niveau des cotisations est défini contractuellement.
- La distinction peut aussi être faite selon le mode de financement : les régimes par répartition où les cotisations futures du régime doivent payer les prestations futures et les régimes par capitalisation où les prestations servies sont prélevées sur la réserve accumulée au fil des années.

Les experts sont longtemps restés sur une approche binaire, selon laquelle il convenait de tout provisionner pour un système par capitalisation et rien pour un système par répartition. Le but est de comprendre qu'un régime de retraite doit demeurer solide et efficient tout au long de sa vie. L'étude menée dans ce mémoire prend alors l'exemple d'un régime par répartition avec un montant de réserve en supplément des cotisations pour payer les prestations.

En France, un régime de retraite par répartition correspond à un ensemble de flux entrants (cotisations) et sortants (prestations). Dans le cas d'un solde positif, une réserve est constituée, dans le cas contraire, le manque est prélevé de cette réserve pour honorer les engagements du régime. Pendant toute la durée de vie de ce régime, cette réserve est placée sur les marchés financiers.

Le rôle des équipes *Asset Liability Management* (ALM) de ces régimes est donc d'optimiser la valeur de la réserve compte tenu des contraintes liées à l'engagement qu'elle doit respecter. C'est dans ce cadre que la recherche d'une allocation stratégique optimale est nécessaire. La difficulté réside aujourd'hui en la définition de la meilleure approche à adopter dans un contexte économique encore plus incertain.

Ce mémoire se focalisera sur les outils d'optimisation et les modèles de projection pour la gestion des réserves financières. L'approche sera ici réalisée dans le cadre d'un régime de retraite fictif. Elle se veut aussi adaptée à tout autre type d'engagements sociaux comme les médailles du travail ou encore les indemnités de fin de carrières.

Ce travail se distingue par la fine granularité adoptée dans le choix des classes d'actifs et par une approche décrivant trois grands scénarios (central, pessimiste et optimiste). Chacun d'entre eux requiert des jeux d'hypothèses différents pour chaque classe d'actifs.

Concernant les modèles d'allocations d'actifs, l'étude privilégiera ceux à gestion statique, c'est-à-dire pour lesquels des rebalancements de portefeuille sont réalisés périodiquement afin de revenir à une allocation cible. Du côté de la projection des scénarios, des modèles stochastiques seront utilisés.

Ce mémoire se compose de trois chapitres qui permettront de répondre à la problématique suivante :

comment construire une allocation stratégique optimale pour adosser un passif de retraite ? ou encore Comment intégrer une problématique de long terme dans la recherche d'une allocation stratégique optimale ?

Pour cela, le premier chapitre permettra non seulement de définir les avantages postérieurs à l'emploi accordés au salarié par l'entreprise, ainsi que les régimes de retraite présentant des réserves. Mais aussi, l'ensemble des actifs (différents supports d'investissement - Organismes de Placements Collectifs) répondant à l'adossement de ces passifs.

Dans le chapitre 2, une présentation théorique des différents modèles de projection ainsi que de l'outil d'optimisation sera donnée. Les mesures de risques et de performances seront aussi définies comme indicateurs de choix pour différencier les résultats.

Enfin, le troisième et dernier chapitre présentera les hypothèses retenues ainsi que les résultats obtenus dans le cas d'un régime de retraite fictif. L'étude de cas apporte donc un éclairage concret sur l'utilisation de l'outil.

# Chapitre 1

## Présentation du contexte et du cadre de l'étude

### 1.1 IAS 19 et Engagement social des entreprises

L'International Accounting Standard Board (IASB) a été créée en 1973 par les instituts comptables de 9 pays, dont la France. Il a pour principal objectif d'élaborer et de publier des normes internationales d'information financière pour la présentation des états financiers. Aussi, il a pour mission de promouvoir leur utilisation et leur généralisation à l'échelle mondiale. Ces normes sont aujourd'hui appelées International Financial Reporting Standards ou IFRS depuis le 1<sup>er</sup> avril 2001. Les normes publiées à une date antérieure à celle-ci restent intitulées International Accounting Standard ou IAS.

Les différents avantages offerts aux salariés dépendent des législations locales et des conventions en vigueur dans chaque pays. Dans le référentiel des normes IFRS le traitement comptable des avantages du personnel et les informations à fournir à leur sujet sont encadrés par la norme IAS 19. L'application des normes IFRS (et donc d'IAS 19) est obligatoire depuis 2005 pour les sociétés européennes cotées et pour les sociétés faisant appel à l'épargne publique (société émettrice d'actions et/ou d'obligations pour pallier une insuffisance de capitaux afin de financer le développement de l'activité) publiant des comptes consolidés. Tous les avantages du personnel seront développés dans la suite, à l'exception des rémunérations à long terme en instruments de capitaux propres, telles que les actions gratuites, le cash différé indexé ou les stock options qui sont comptabilisées selon la norme IFRS 2. En effet, seul les engagements encadrés par la norme IAS19 sont nécessaires pour cette étude.

Les engagements sociaux représentent l'ensemble des avantages donnés par une entreprise au titre de services rendus par son personnel. Ils découlent, soit d'accords formalisés entre l'entreprise et certains membres du personnel, soit des groupes de salariés, soit même l'ensemble du personnel. Ils peuvent aussi résulter d'accords légaux ou d'accords de branche qui obligent l'entreprise à cotiser à des régimes nationaux, régionaux, sectoriels ou à des régimes multi-employeurs.

Ces engagements prennent également des formes variées car il peut s'agir d'un plan d'intéressement aux bénéficiaires, de la mise en place d'un régime de retraite supplémentaire ou encore d'indemnités de fin de carrière (IFC). La norme qui traite de l'évaluation et du traitement comptable de ces engagements distingue quatre types d'avantages :

- les avantages à court terme : ce sont des avantages qui sont intégralement dûs dans l'année suivant la fin de l'exercice au cours duquel les membres du personnel ont rendu les services

correspondants. Il s'agit essentiellement de la rémunération qui comprend les salaires, les cotisations de sécurité sociale, les primes et l'intéressement. Ce dernier est un dispositif d'épargne salariale lié aux résultats ou aux performances de l'entreprise. Les sommes perçues à ce titre sont immédiatement disponibles mais le salarié peut choisir de les placer sur un plan d'épargne salariale ou un compte épargne temps. Ces avantages à court terme comprennent aussi les absences rémunérées (congrés annuels) et des avantages en nature comme par exemple une assistance médicale, un logement, une voiture ou d'autres services gratuits ou subventionnés.

Le risque porté par ce type d'avantages est relativement faible du fait de la courte période de temps précédant le paiement des prestations et de la relative maîtrise de ce genre de coûts par l'entreprise. La comptabilisation se fait donc simplement sans actualiser les montants de ces avantages au passif.

- Les indemnités de fin de contrat de travail : ces indemnités sont des prestations versées à un salarié qui quitte l'entreprise avant l'âge normal de départ à la retraite. Elles sont versées dans la cas d'un départ volontaire du salarié mais aussi lorsque c'est l'entreprise qui est à l'initiative de la fin du contrat de travail du salarié. C'est le cas par exemple d'un plan de départ volontaire (PDV).

L'entreprise a le devoir de comptabiliser ces indemnités de fin de contrat de travail dès lors qu'elle est engagée, soit à mettre fin à l'emploi d'un ou plusieurs membres du personnel avant l'âge normal de départ à la retraite, soit à accorder des indemnités de fin de contrat de travail à la suite d'une offre faite pour encourager des départs volontaires.

De plus, une entité est manifestement engagée à mettre fin à un contrat de travail, uniquement si elle a mis en place un plan formalisé et détaillé de licenciements sans possibilité de se rétracter.

- Les avantages à long terme : Cette catégorie regroupe les avantages liés à l'ancienneté, où y sont notamment regroupés les congés liés à cette ancienneté et les médailles du travail. Les rémunérations (salaires, primes, intéressement) différées en font aussi partie. Cependant, il doivent être payables douze mois ou plus, après la fin de l'exercice en cours, auquel cas ils rentrent dans la catégorie d'avantages à court terme.

L'engagement lié à ces avantages est soumis à un risque moindre malgré leur échéance relativement lointaine. C'est pourquoi la norme a choisi de faire quelques aménagements simplifiant leur comptabilisation. Cette dernière n'est pas aussi rigoureuse que celle utilisée pour les engagements résultant des avantages postérieurs à l'emploi qui sont a priori beaucoup plus importants en terme de montant.

- Les avantages postérieurs à l'emploi : ce sont les avantages qui donneront lieu à des versements de pensions, de rentes, d'indemnités de fin de carrière ou tout autre avantage, comme l'assistance médicale postérieure à l'emploi, à un membre du personnel après son départ à la retraite. La norme distingue ces avantages selon la nature du régime auxquels ils appartiennent.

D'une part le régime à cotisations définies, où l'obligation de l'entreprise se limite au montant des cotisations qu'elle s'engage à payer au régime. D'autre part le régime à prestations définies, où l'entreprise s'est engagée à payer des prestations à un niveau prédéterminé aux anciens membres de son personnel. Le risque porté par l'entreprise est donc fondamentalement différent selon la nature de l'engagement pris par l'entreprise.

Dans le premier cas, le niveau des cotisations versées est prédéterminé. Le risque supporté par l'entreprise est relativement faible puisque les dépenses de l'entreprise se limitent aux cotisations. Ces dernières sont par ailleurs connues à l'avance. De plus, elles sont généralement à la charge de l'entreprise mais aussi du salarié.

Dans l'autre cas, l'obligation de l'entreprise concerne le paiement des prestations. L'entreprise est ainsi engagée à payer les prestations quelles que soient l'évolution démographique de la population sous risque (à savoir les futurs retraités) et l'évolution des marchés financiers. Par exemple, en France, les Indemnités de Fin de Carrière (IFC), les retraites supplémentaires dont les anciens « Article 39 » (dont la définition et le fonctionnement seront donnés dans la suite de ce chapitre) et les complémentaires santé versées pour des retraités sont des régimes à prestations définies.

Dans la suite de ce mémoire, un focus sera réalisé sur les principaux engagements sociaux qui sont soumis à une comptabilisation plus complexe du fait de leur échéance relativement lointaine. En effet des précisions seront apportées pour expliquer la valorisation de ces engagements et la manière de les provisionner dans les comptes des entreprises.

## 1.2 Évaluation des principaux passifs sociaux des entreprises

En effet, le déroulement d'une campagne d'évaluation des engagements sociaux est relativement longue et nécessite de passer par plusieurs étapes. Le point de lancement consiste à cadrer le périmètre IAS 19 ainsi que le calendrier et les événements spéciaux de l'année. Ensuite, une étape de fiabilisation des données individuelles comprenant une phase de transmission des données par régime et une phase de vérification de la cohérence avec des tests et des réconciliations entre les entrées (données reçues brut) et les sorties de l'année  $N - 1$  (résultat de la même étude sur l'année précédente). Ceci laisse place à quelques échanges entre l'actuaire et l'entreprise. Puis arrive la phase de détermination des hypothèses et de valorisation des engagements qui sera détaillée par la suite. De plus, une valorisation des éventuels fonds de couverture existants peut-être réalisée. Enfin, la phase de production, des états comptables, selon un référentiel choisi (référentiel IAS 19, référentiel French GAAP) et du rapport actuariel, avec un descriptif des régimes évalués, une justification des hypothèses, une présentation des méthodes actuarielles et des résultats, est réalisée. C'est aussi lors de cette phase qu'une explication est apportée sur les écarts actuariels qui seront précisés par la suite.

L'étude plus fine du passif de nos clients commencera par la valorisation des avantages à long terme (les médailles du travail, régime mutuelle, ...) avec dans le même temps les indemnités de fin de carrières, car leur méthode d'évaluation et de comptabilisation relève d'une logique similaire. Puis une explication détaillée sur les enjeux actuariels d'une telle campagne apportera des précisions d'abord sur les hypothèses actuarielles et ensuite sur les écarts actuariels.

### 1.2.1 Méthode d'évaluation des avantages du personnel

Premièrement, les recommandations de la norme IAS 19 sont claires, le calcul doit être réalisé tête par tête (de manière ligne à ligne) sur la population présente à la date de clôture de l'exercice. En outre, la réglementation impose la méthode à retenir pour estimer la prestation. Il s'agit de la méthode actuarielle des « Unités de Crédits Projetés » qui présente les caractéristiques suivantes. D'abord l'estimation des prestations, c'est-à-dire la projection des droits au terme. Par exemple, pour un régime d'indemnités de fin de carrière, l'estimation de la prestation consiste à calculer le montant que le salarié devra toucher au titre de cet avantage (pour les IFC, le plus souvent, il s'agit d'un pourcentage du dernier salaire). Ensuite, il faut probabiliser le paiement de cette prestation selon des hypothèses de turnover (désigne le renouvellement des effectifs d'une entreprise suite à des départs et des recrutements de collaborateurs) et plus simplement des hypothèses de survie (définies à partir de

tables). Enfin, il convient d'actualiser la prestation future probable afin de déterminer le coût qu'elle vaut réellement à la date de comptabilisation. Lorsque que toutes ces caractéristiques ont été prises en compte, nous obtenons la **Valeur Actuelle des Prestations Futures** ou plus généralement appelée **VAPF**. L'exemple d'un régime de médailles du travail est détaillé dans la figure 1.1.

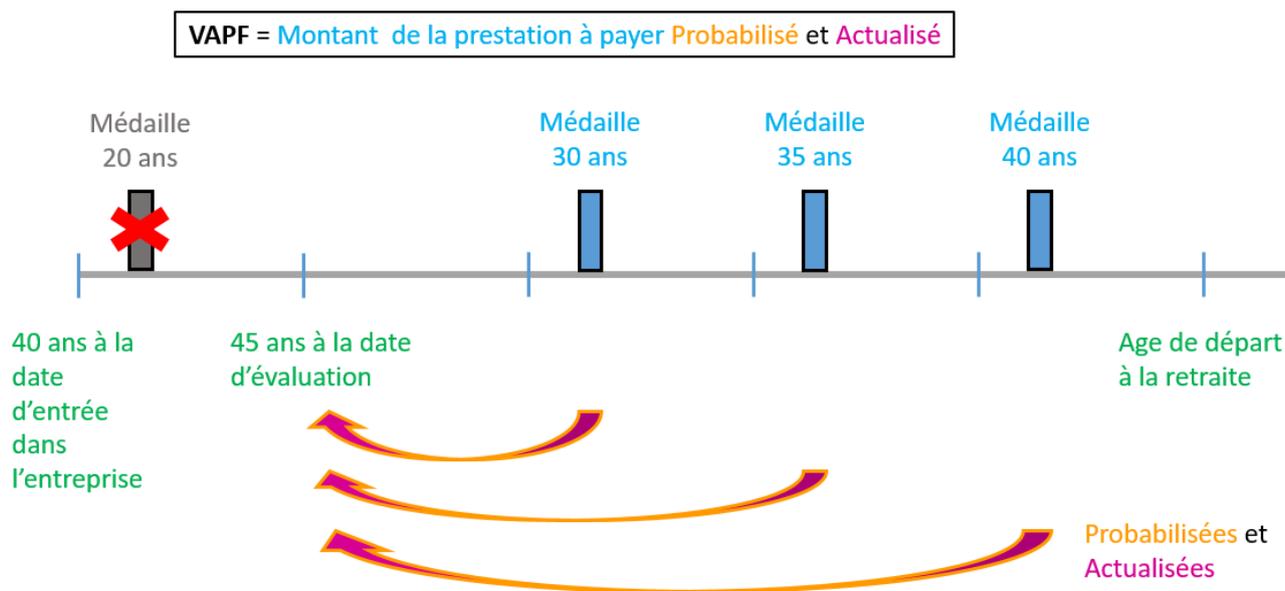


FIGURE 1.1 : Explication de la méthode d'évaluation d'un régime de médailles du travail

Nous retrouvons le même type de méthode pour évaluer un régime d'IFC ou de mutuelle retraités, seulement nous aurons un seul bâtonnet à l'âge de départ à la retraite dans le premier cas et des bâtonnets pour chaque année à partir de l'âge de départ à la retraite jusqu'au décès dans le deuxième cas.

La VAPF est calculée mais le travail n'est pas fini pour autant car l'engagement ou dette actuarielle aussi appelé en anglais *Defined Benefit Obligation* (DBO) n'a pas encore été calculé. Ce dernier représente une quote-part de la VAPF. Il correspond à l'avantage accordé au salarié proratisé à sa durée de présence dans l'entreprise.

En effet plus le salarié va se rapprocher de la période de paiement de la prestation, plus la DBO sera importante, jusqu'à être égale à l'engagement, l'année du paiement. La DBO est par ailleurs égale à la provision comptable si le régime n'est pas partiellement couvert par un fonds collectif chez un organisme assureur. Finalement, la DBO représente la dette à mettre dans les comptes de l'entreprise au titre de chaque engagement offert aux salariés et celui-ci peut être couvert à l'actif ou provisionné. Dans la figure 1.2, c'est le régime d'indemnités de fin de carrière qui a été choisi pour la visualisation et l'exemple d'un régime de médailles du travail ou de mutuelle retraités fonctionne selon le même raisonnement.

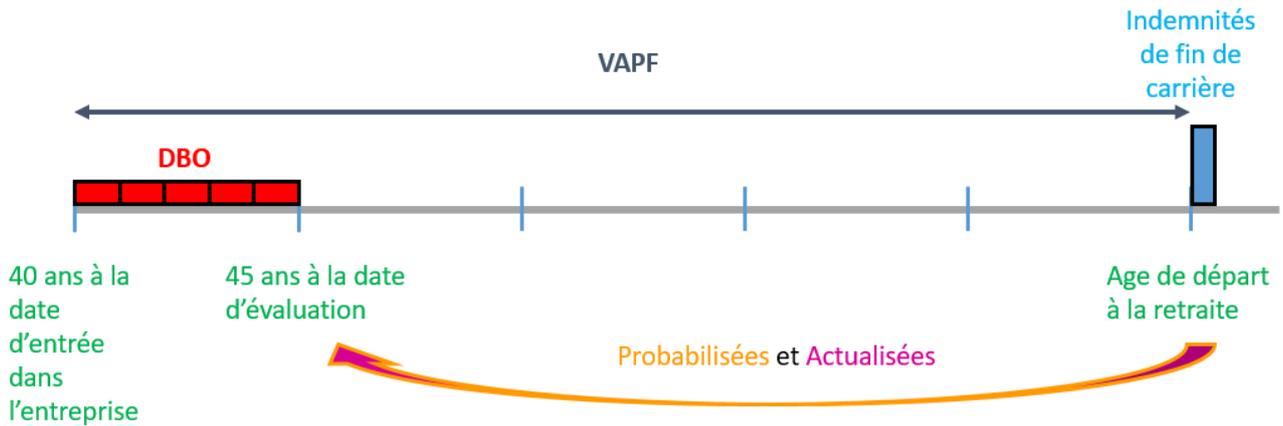


FIGURE 1.2 : Explication de la DBO d'un régime d'IFC

Mathématiquement, la DBO est calculée selon l'équation détaillée dans l'expression (1.1)

$$DBO = VAPF \times \frac{\text{ancienneté acquise à la date d'évaluation}}{\text{ancienneté acquise au moment du paiement de la prestation}} \quad (1.1)$$

Pour conclure, la méthode d'évaluation de ces avantages, le coût des services rendus ou en anglais Service Cost (SC) et le coût d'intérêt ou en anglais Interest Cost (IC) seront décrits dans la suite. Le SC représente la reconnaissance d'une année de service supplémentaire. L'IC représente le coût d'une année d'actualisation en moins. Ces définitions se réécrivent mathématiquement selon les expressions (1.2) et (1.3)

$$SC = VAPF \times \frac{1}{\text{ancienneté acquise au moment du paiement de la prestation}}, \quad (1.2)$$

$$IC = (DBO + SC) \times \text{taux d'actualisation}. \quad (1.3)$$

Ces deux montants sont détaillés graphiquement, à l'aide des figures 1.3 et 1.4, pour le cas d'un régime d'IFC. Le rectangle violet montre bien le coût d'une année supplémentaire, tandis que le rectangle jaune celui d'une année d'actualisation en moins.

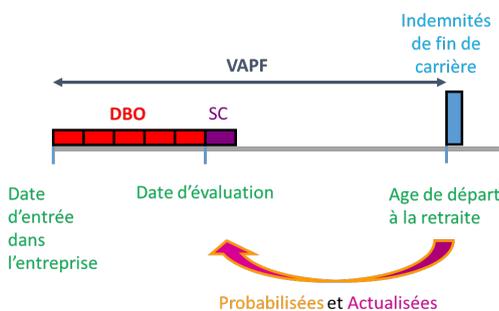


FIGURE 1.3 : Explication du SC

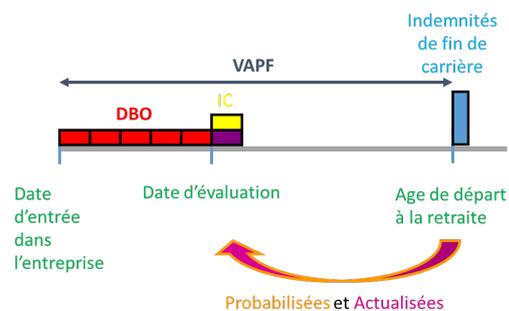


FIGURE 1.4 : Explication de l'IC

Nos clients, à savoir des entreprises, accordent un grand intérêt au Service Cost car c'est le montant supplémentaire qu'elles vont devoir provisionner au titre de l'année N+1

### 1.2.2 Hypothèses actuarielles

Plus haut, des hypothèses ont été énoncées, elles seront détaillées ici de manière plus fine. Ces hypothèses doivent être objectives et mutuellement compatibles. Aussi, il faut qu'elles soient des « Best Estimates », c'est-à-dire ni trop prudentes, ni trop optimistes et fondées sur la réalité. De plus certaines de ces hypothèses doivent faire l'objet de révisions suffisamment régulières. Ces hypothèses se distinguent en deux catégories :

- les **hypothèses démographiques**, elles rassemblent de manière générale les tables de mortalité, le turnover, l'âge de départ à la retraite et d'autres peuvent être retenues selon les spécificités de certains régimes. Pour les tables de mortalité, elles sont sélectionnées en fonction de leur pertinence et du type de régime d'engagement évalué. Les tables TH et TF 00-02 ou celles de l'INSEE, plus récentes et fournies tous les deux ans, sont des tables dites statiques qui peuvent être utilisées pour probabiliser un paiement sur la phase d'activité (médailles du travail, IFC). Les tables TGH et TGF 05 sont quant à elles utilisées pour les prestations viagères (retraites). Il s'agit de tables générationnelles intégrant l'augmentation de l'espérance de vie. Elles sont imposées aux compagnies d'assurance depuis 2007. En théorie la norme recommande d'établir des tables basées sur les bénéficiaires du régime, cependant, dans la pratique les entreprises ne construisent pas de telles tables, elles s'en remettent aux tables réglementaires définies ci-dessus.

Pour le taux de turnover ou taux de rotation du personnel, il est déterminé à l'aide de statistiques propres à chaque société. Il décroît généralement avec l'âge et est calculé par catégorie professionnelle. Le taux moyen de sorties annuelles est défini par le nombre de démission annuel divisé par l'effectif permanent de l'année.

Enfin l'âge de départ à la retraite dépend aussi de la catégorie professionnelle. Il peut être déterminé à partir d'historique de départ à la retraite sur les 4 ou 5 dernières années. Il peut aussi être déterminé en prenant l'âge moyen d'entrée dans la vie professionnelle par catégorie professionnelle et fixé à l'obtention des trimestres de cotisation nécessaire à la liquidation des pensions des régimes généraux à taux plein. Enfin, il est nécessaire de revoir cette hypothèse en cas de réforme des régimes légaux. En effet, aujourd'hui en l'état actuel des réformes du régime de base, un salarié né en 1967 doit cotiser 170 trimestres pour obtenir le taux plein, en revanche un jeune salarié né en 1999 doit en cotiser 172.

- les **hypothèses financières**, rassemblent quant à elles le taux d'actualisation, taux de revalorisation des salaires et le taux des charges sociales. Ici aussi, selon les spécificités de certains régimes, d'autres hypothèses peuvent être retenues. Pour le taux d'actualisation, le choix est réalisé par référence à un taux de rendement du marché des obligations des sociétés de haute qualité. Dans la pratique, la notation doit au moins être égale à double A : « AA et + ».

Le taux de revalorisation des salaires doit intégrer le niveau d'inflation prévisionnel, les augmentations de salaire et les promotions pratiquées dans la société. Généralement, ce taux diffère selon la catégorie professionnelle. De plus, une vision long terme est adoptée pour estimer ce taux.

Enfin, le taux des charges sociales est déterminé par l'entreprise et, comme précédemment, diffère en fonction de la catégorie professionnelle. Il peut être validé à partir des taux de cotisation des fiches de paie.

### 1.2.3 Écarts actuariels

L'explication et la compréhension des écarts sont dictées par la réglementation. Cette dernière oblige à projeter les résultats des calculs réalisés en année  $n$  sur l'année  $n + 1$ . Cette projection doit se faire au taux d'actualisation à la date de l'exercice en prenant en compte le coût des services rendus (SC) au cours de l'exercice, le coût d'intérêt (IC) et les prestations estimées du régime. La dette de l'année  $n + 1$  se calcule donc de la manière suivante, explicitée sous forme mathématique dans l'équation (1.4)

$$\text{Dette}_{n+1} \text{ projetée} = \text{Dette}_n + \text{SC}_{n+1} + \text{IC}_{n+1} - \text{Prestations estimées}_{n+1}. \quad (1.4)$$

À partir de ce résultat, un écart actuariel est calculé entre la projection des engagements calculés à l'année  $n$  et le montant recalculé de cet engagement à l'année  $n + 1$ . L'engagement en  $n + 1$  est calculé après une mise à jour de la population (entrées, sorties, évolutions salariales, départs, ...), des changements d'hypothèses démographiques et des changements d'hypothèses financières. L'écart actuariel se note de la manière suivante dans l'équation (1.5)

$$\text{Écarts actuariels} = \text{Dette}_{n+1} \text{ réelle} - \text{Dette}_{n+1} \text{ projetée}. \quad (1.5)$$

Un écart positif représente une perte actuarielle, tandis qu'un écart négatif représente un gain actuariel. La différence entre la DBO attendue et la DBO projetée peut s'expliquer soit par la variation sur les données soit par des changements d'hypothèses. À ce niveau deux écarts sont caractérisés, les écarts d'expérience et les écarts d'hypothèses, mais l'étude s'arrêtera ici, car l'objectif principal de ce mémoire est autre et ceci permet déjà de prendre conscience des enjeux et des problématiques liés à l'évaluation des engagements sociaux.

Ceci conclut la partie sur l'évaluation des régimes d'IFC et d'avantages à long terme et laisse place à l'évaluation des engagements postérieurs à l'emploi qui constitue le passif à adosser par notre outil d'allocation stratégique.

## 1.3 Engagements de retraite

Le système de retraite en France se décompose en plusieurs tranches. D'abord les régimes par répartition dans lesquels les cotisations futures du régime ainsi que les réserves accumulées doivent payer les prestations futures. Ce régime présente une résistance forte à l'inflation et une solidarité intergénérationnelle, cependant ses réserves sont limitées au regard des engagements futurs et il dépend fortement de l'évolution démographique et du contexte économique. C'est, de manière générale, le cas des régimes légalement obligatoires : le régime de base et les régimes complémentaires. Il en existe aujourd'hui 42 avec chacun des critères d'appartenance socioprofessionnelles, ils sont résumés en annexe à la fin du mémoire, pour plus de détails. La plupart de ces régimes obligatoires sont gérés par des organismes de la sécurité sociale ou par des institutions de retraites complémentaires. C'est après la Seconde Guerre Mondiale au moyen des ordonnances de 1945 que fut mis en place un système par répartition en France.

Ensuite les régimes par capitalisation où les prestations servies sont prélevées sur l'épargne constituée au fil des années sur un compte individuel. Ce régime présente quant à lui une bonne résistance à l'évolution démographique et des réserves importantes cependant il a une dépendance forte au contexte économique et à l'inflation. C'est le cas des régimes de retraites supplémentaires collectifs dont bénéficient soit tous les salariés soit seulement une catégorie spécifique de salariés. Ces régimes sont plus communément appelés article 83 pour un régime à cotisations définies, article 39 pour un régime à prestations définies pour les anciens régimes et PER Entreprise depuis la loi PACTE.

Enfin, il reste les retraites supplémentaires souscrites individuellement comme les PER individuels et les anciens régimes PERP et Madelin. Sans oublier l'assurance vie qui permet aussi de se constituer une retraite individuelle.

Ils sont tous représentés en figure 1.5 à l'aide d'une pyramide classifiant ces différents dispositifs proposés aux salariés.

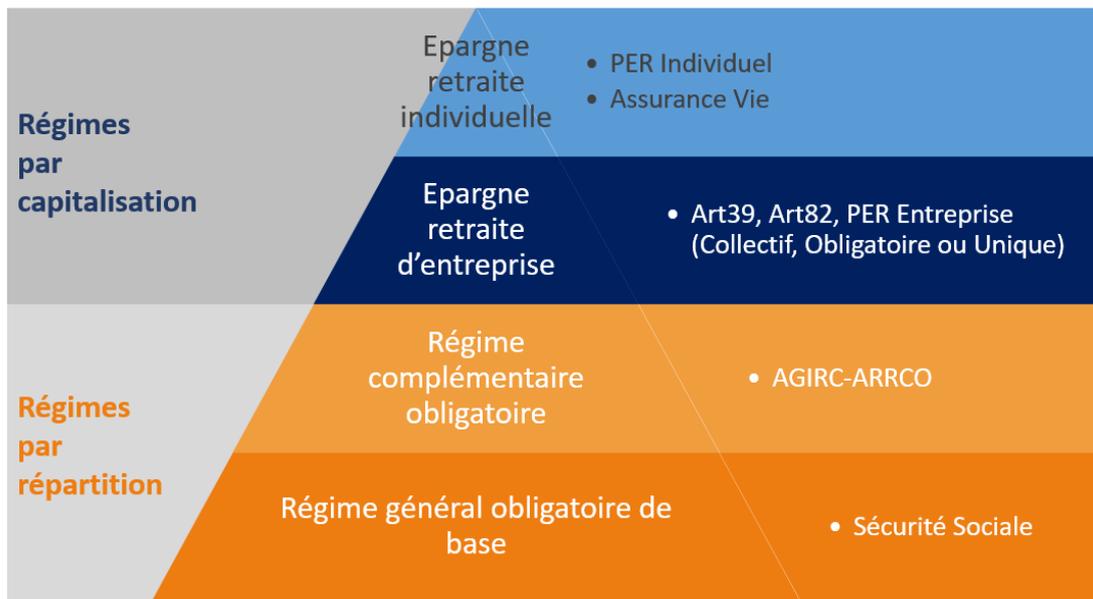


FIGURE 1.5 : Présentation du système de retraite en France

En résumé, pour les français, il existe quatre niveaux de retraite et dans le cadre de notre activité, nous gérons seulement des contrats collectifs, c'est pourquoi seul les régimes obligatoires et les régimes de retraites supplémentaires collectifs seront abordés dans la suite de ce mémoire.

### 1.3.1 Régimes obligatoires

Comme dit précédemment, il existe 42 régimes de retraite différents en France et ce qui suit ne concerne que les salariés du privé, ce qui représente environ 71% des cotisations et 63% des prestations. D'abord, au titre du régime de base obligatoire, deux conditions cumulatives sont nécessaires pour obtenir le taux plein : l'Âge et la Durée d'Assurance. La première sert à définir à partir de quel âge une personne peut commencer à liquider sa retraite et à partir de quand elle acquiert le taux plein directement. La deuxième permet de déterminer le taux de la retraite à taux plein

$$\text{Retraite SS} = \text{Salaire Annuel Moyen} \times \text{Taux} \times \frac{d \text{ (durée d'assurance RG)}}{D \text{ (durée de référence)}} \times \text{Majorations}. \quad (1.6)$$

Dans la formule (1.6) où SS signifie Sécurité Sociale, on distingue quatre termes, d'abord le salaire annuel moyen (SAM), qui correspond à la moyenne des 25 meilleurs salaires annuels plafonnés au Plafond Annuel de la sécurité sociale (PASS, égales à 41136€ en 2022). Puis, le Taux, en pourcentage, un taux plein signifie que le taux vaut 50%, il s'obtient en fonction de la durée d'assurance tous régimes

confondus. Cette durée d'assurance correspond à un nombre de trimestres exigés qui lorsqu'il n'est pas atteint apporte une décote de 0,625 points au taux initial de 50% par trimestre manquant. Ensuite, le rapport entre durée d'assurance au régime général qui correspond à la carrière professionnelle dans le régime général (exprimé en nombre de trimestres) et la durée de référence correspondant au nombre de trimestres nécessaire pour obtenir le taux plein. Ce rapport ne peut pas être supérieur à 1. Enfin, il existe des majorations : de 10% à partir du troisième enfant (valable pour le père comme pour la mère) et/ou une surcote pour les salariés qui prolongent leur activité après l'acquisition de leur taux plein et au delà de l'âge d'ouverture des droits. (1,25% de majoration par trimestre). Le montant de retraite au titre de ce régime ne peut donc excéder 50% du plafond annuel de la sécurité sociale (PASS) si le bénéficiaire ne fait l'objet d'aucune majoration.

Ensuite il existe un régime complémentaire obligatoire : la retraite complémentaire AGIRC-ARRCO. C'est un régime par points dans lequel chaque salarié dispose de stocks de points transformés en rente au moment de la liquidation. Il concerne les salaires compris dans les tranches 1 (entre 0 et 1 PASS) et 2 (entre 1 et 8 PASS). Le nombre de points se calcule simplement, chaque année en fonction du montant dans chaque tranche

$$\text{Nombre de points} = \frac{\text{assiette d'acquisition des points}}{\text{Prix d'achat d'un point}}. \quad (1.7)$$

L'assiette d'acquisition des points représente le montant du salaire qui sera retenu pour calculer le nombre de points

$$\text{Assiette d'acquisition des points} = \text{tranche de salaire} \times \text{taux cotisation contractuel}. \quad (1.8)$$

Le taux de cotisation contractuel (TCC) pour le tranche 1 vaut 6,20% et pour la tranche 2 vaut 17,00%. Par exemple, pour un salarié ayant perçu 60 000 € en 2022, son cumul de points au titre de cette année se calculera de la manière suivante,

$$41136 \times (\text{TCC tranche 1}) + (60000 - 41136) \times (\text{TCC tranche 2})$$

Cependant, il faut faire la distinction entre le taux de cotisation réel et le taux de cotisation contractuel. En réalité le salarié et le patron cotisent plus que le taux contractuel, voir l'équation (1.9). En effet le taux de cotisation réel figurant sur la fiche de paie est supérieur à celui utilisé pour le calcul de l'assiette d'acquisition des points

$$\text{taux de cotisation réel} = 127\% \times \text{taux de cotisation contractuel}. \quad (1.9)$$

C'est à la fin de la carrière que le montant de la retraite complémentaire est calculé en déterminant le nombre de points figurant sur le relevé multiplié par la valeur d'un point. Comme pour le régime précédent, il existe pour ce régime des majorations de pensions pour les enfants, mais aussi des minorations, en fonction du nombre de trimestres manquants un coefficient d'anticipation est appliqué.

Pour finir cet état des lieux sur la retraite obligatoire, le rachat de trimestre doit être traité. En effet, il est possible, lorsque le taux plein n'est pas atteint de racheter des trimestres. Ce rachat peut s'effectuer selon deux options : la première permet d'atteindre le taux plein uniquement, la deuxième permet d'atteindre le taux plein et augmenter la durée d'assurance. Toutefois, les trimestres rachetables sont nécessairement ceux correspondant à des années d'études post baccalauréat validées par l'obtention d'un diplôme ou à des années incomplètes (années sur lesquelles le nombre de trimestres cotisés est inférieur à 4). Aussi, le nombre de trimestre rachetable ne peut pas excéder le nombre de 12.

### 1.3.2 Les retraites supplémentaires

La partie sur l'évaluation des principaux passifs sociaux des entreprises se conclut avec un dernier focus sur les régimes de retraite à prestations définies qui sont la grande majorité des avantages postérieurs à l'emploi servis aux salariés, tant en terme de montants que de flux. À titre d'information, en cumulé, les engagements de retraite (appelé aussi DBO pour Defined Benefit Obligation dans la norme IAS19) des entreprises du CAC 40 s'élèvent à 225Mds € en 2021 (+11% par rapport à 2020). L'engagement moyen est de 5,6Mds €, allant de 13 Millions € pour Unibail-Rodamco-Westfield à 34Mds € pour Stellantis. Cependant cette hausse global des engagements est principalement due au rapprochement de FCA (Fiat Chrysler Automobile) et PSA (Peugeot Société Anonyme) qui a entraîné l'intégration de Stellantis dans le périmètre de consolidation pour 24 Mds € d'engagement de retraite et aussi l'acquisition de Bombardier Transport par Alstom qui a engendré l'intégration de 4Mds € d'engagements de retraite pour Alstom. Cependant, en isolant ces évènements exceptionnels, les engagement sont majoritairement en baisse du fait de la hausse matérielle des taux d'actualisation en 2021 de l'ordre de +60 points de base dans la zone Euro.



FIGURE 1.6 : Quelques chiffres clefs sur la retraite supplémentaire en 2021

Le rapide aperçu dans la figure 1.6 montre que les engagements de retraite supplémentaire représentent une part non négligeable des coûts des entreprises et donc un réel intérêt pour cette étude qui consiste à adosser ce passif.

Ces engagements sont en partie couverts par des actifs de couverture placés dans des fonds destinés uniquement à financer ces engagements. Ce préfinancement s'opère principalement via des contrats d'assurance ou des fonds de pension. Ils permettent de réduire la provision comptabilisée tout en réalisant un acte de bonne gouvernance visant à sécuriser une partie de la promesse de l'employeur. Le taux de couverture est égale à la différence entre la valeur des engagements de l'employeur et la valeur des actifs de couverture. Et, ce qui n'est pas couvert par les actifs de couverture est provisionné comptablement. Les variations de provision sur un exercice comptable se décomposent en plusieurs éléments qui ont déjà été définis plus haut dans le paragraphe des écarts actuariels et en voici un résumé dans la figure 1.7.

Pour bien comprendre les régimes de retraites supplémentaires une distinction sera réalisée entre le nouveau plan d'épargne retraite (PER), issu de la loi PACTE et l'ancien régime Article 39 qui n'est plus commercialisé à ce jour mais qui existe encore chez la majorité de nos clients. Le plan d'épargne retraite est un produit d'épargne destiné à se constituer un capital pour la retraite. Mais comment fonctionne-t-il ? Le PER peut être alimenté de trois manières différentes : par des versements volontaires de la part du salarié, par des mécanismes de participation, intéressement, compte épargne temps et abondement ou alors par des cotisations obligatoires qui peuvent être patronales ou salariales. Il est important de bien séparer ces différents compartiments car la disponibilité de l'épargne n'est pas la même selon la source de financement du plan, de même pour les modalités de liquidation (en rente viagère ou en capital). Enfin le plan d'épargne retraite est transférable d'une entreprise à une autre tout en gardant la séparation entre chacun des compartiments, ce mécanisme est aussi connu sous le nom de transférabilité des droits.

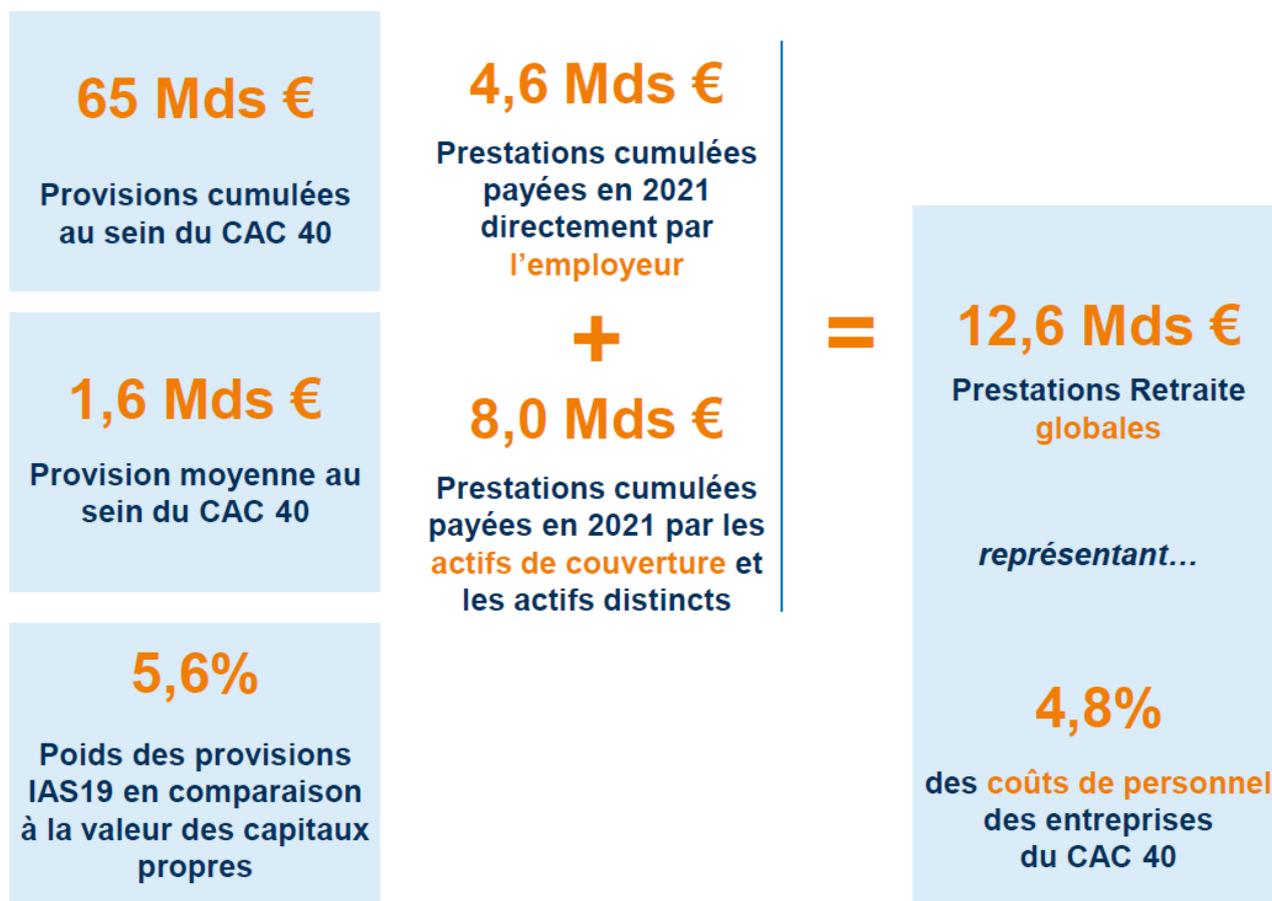


FIGURE 1.7 : Prestations de retraite 2021

Le prochain paragraphe sur le régime Article 39 refermera tout le volet passif qui sera traité dans ce mémoire. Ce régime avait pour objectif de garantir un complément de retraite par un régime de retraite à droits conditionnés à la fin de la carrière dans l'entreprise. Cet engagement, de la part de l'entreprise, sur le paiement d'un montant de retraite est généralement exprimé en pourcentage du dernier salaire du bénéficiaire. Dans le cas de ce régime, aucun droit n'est acquis pour le salarié en cas de départ de l'entreprise avant le départ en retraite, les droits sont dits aléatoires. De plus le financement est à 100% fait par l'employeur et la prestation est obligatoirement versée sous forme de rente viagère, ce qui aura un grand intérêt dans la suite lors de la prise en compte des contraintes pour le modèle ALM. Seulement, depuis le 4 juillet 2019, aucun nouvel adhérent ne peut bénéficier de ce type de régime. À la place, un nouveau régime de retraite à prestations définies a vu le jour : l'article L137-11-2. Ce régime octroie des droits acquis et non plus conditionnés à l'achèvement de la carrière dans l'entreprise, ces droits ne sont plus assis sur la rémunération de fin de carrière mais sur celle de l'année d'acquisition.

Le modèle ALM développé dans la suite a pour objectif principal de couvrir les engagements des derniers régimes Article 39 encore existant chez nos clients. La valorisation de cet engagement ne sera pas réalisée dans le cadre de ce mémoire car elle relève d'autres questions que celles soulevées pour le développement de notre modèle ALM, et sera donc récupérée directement auprès de l'équipe compétente. Maintenant que les besoins de nos clients ont été clairement définis, une vision plus large sera donnée sur l'épargne retraite de manière générale et comment elle pourrait répondre aux défis actuels.

### 1.3.3 Mode de gestion différent en fonction de l'engagement à couvrir

La gestion d'un régime de retraite par répartition est différente de celle d'un régime par capitalisation, car les deux systèmes sont conçus différemment.

Dans un régime de retraite par répartition, les travailleurs actifs paient des cotisations qui sont immédiatement utilisées pour payer les prestations de retraite des travailleurs retraités actuels. Ainsi, le montant des prestations est basé sur le nombre de travailleurs actifs par rapport au nombre de travailleurs retraités.

En revanche, dans un régime de retraite par capitalisation, les cotisations sont investies dans un compte individuel pour le travailleur. Le montant de la retraite est déterminé par les rendements des investissements réalisés avec les cotisations du travailleur.

#### Régime de retraite par répartition : impact sur la gestion

1. D'abord, la gestion des flux de trésorerie : les régimes de retraite par répartition nécessitent une gestion rigoureuse des flux de trésorerie pour s'assurer que les prestations de retraite des travailleurs retraités actuels sont financées par les cotisations des travailleurs actifs. Le défi majeur de ce type de gestion repose sur l'équilibrage entre la population de travailleurs actifs et la population de travailleurs retraités. Une importante fluctuation d'une population ou d'une autre n'est pas négligeable.
2. Ensuite, la gestion des risques : les régimes de retraite par répartition sont exposés à des risques démographiques et économiques, notamment l'augmentation de l'espérance de vie, la diminution de la fécondité, les fluctuations économiques et l'inflation. La gestion de ces risques nécessite une planification et une surveillance constantes pour garantir que les prestations de retraite soient versées à temps et sans interruption.
3. Enfin, la gouvernance : les régimes de retraite par répartition sont souvent gérés par des organismes gouvernementaux ou des partenaires sociaux, qui ont la responsabilité de fixer les règles de financement, les niveaux de prestations et les mécanismes de solidarité. La gouvernance des régimes de retraite par répartition est donc souvent plus complexe et plus politique que celle des régimes de retraite par capitalisation.

#### Régime de retraite par capitalisation : impact sur la gestion

1. D'abord, la gestion des investissements : les régimes de retraite par capitalisation nécessitent une gestion active des investissements pour maximiser les rendements sur les cotisations des travailleurs. La gestion des investissements peut être complexe et nécessite une expertise technique notable et des ressources importantes.
2. Ensuite, la gestion des risques : en effet ce type de régimes est aussi exposé à des risques, mais ces derniers sont différents. Les régimes de retraite par capitalisation sont exposés à des risques de marché, de crédit et de liquidité, qui peuvent affecter les rendements des investissements. La gestion de ces risques nécessite une planification et une surveillance constantes pour minimiser les pertes et garantir la solvabilité du régime.
3. Enfin, la gestion du portefeuille de risque : les travailleurs prennent en charge les risques de l'investissement eux-mêmes, en ayant un portefeuille diversifié de placements et en répartissant

leurs placements selon leur aversion au risque et leurs objectifs financiers. Cela nécessite une éducation financière des travailleurs et une communication transparente de la part des gestionnaires de régimes de retraite par capitalisation.

C'est particulièrement ce dernier point sur lequel ce mémoire se donne comme objectif de répondre. En effet, le portefeuille le plus performant n'est pas nécessairement le mieux adapté. C'est pourquoi l'outil à construire se veut accessible afin d'être utilisé pour tout types d'investisseurs (clients).

## 1.4 La retraite comme moyen de favoriser l'investissement à long terme vers l'économie réelle

Aujourd'hui, des transformations structurelles ont été engagées et la loi PACTE et le PER sont une occasion de reconsidérer l'investissement à long terme. L'épargne retraite constitue une formidable opportunité économique comme source d'investissements dans notre économie. En effet, une relance économique a commencé et un investissement important dans la transformation digitale, l'environnement et bien d'autres secteurs est crucial. Cette stratégie est aussi un moyen de générer du rendement pour les épargnants, de créer des emplois et de redonner de la confiance aux français.

La loi PACTE donne accès à la constitution d'une épargne plus agile, permettant la construction d'une retraite complémentaire par capitalisation. Le projet de cette réforme, du précédent quinquennat, est d'éduquer sur l'investissement à long terme pour compter entre 50 et 100 milliards d'euros investis dans l'économie réelle dans ces 5 prochaines années. Depuis 1975 notre capacité à innover et à faire émerger des champions français n'a cessé de diminuer en déplaçant l'épargne des français vers de plus en plus de produits obligataires.

L'objectif est aussi de se montrer capable de prendre des risques intelligents pour permettre d'une part, de faire émerger des start-up, des petites et moyennes entreprises (PME) et des entreprises de taille intermédiaire (ETI) dans tous les territoires français et d'autre part, d'investir dans nos grandes entreprises pour augmenter la part de capital détenue par des actionnaires français. De plus, face à la troisième révolution industrielle, cet investissement à long terme doit permettre de replacer la France au centre des thématiques comme celle de la cybersécurité, de la santé intelligente, de la *greentech* et de biens d'autres. Enfin, il doit produire un rendement dans le temps et donc du pouvoir d'achat pour les épargnants, particulièrement sur leur retraite, et donc mettre en lumière que l'investissement en actions, cotées ou non cotées, est un des moyens de répondre à la problématique des taux négatifs et donc du rendement des produits de taux.

Comme dit précédemment, la majorité de l'épargne des français est investie dans des obligations dont le rendement ne cesse de diminuer, tandis que les étrangers investissent dans nos entreprises. Par exemple, aux États Unis, environ 66% de la retraite des foyers est investie en action, quand du côté français ce type d'investissement est beaucoup trop pénalisé par le régulateur pour être envisagé. Les dispositifs loi PACTE et PER permettent de découvrir la culture entrepreneuriale et celle de l'investissement à long terme privé pour amener un changement et prévenir les éventuelles conséquences d'une future crise économique.

Les principaux passifs sociaux des entreprises ainsi que les enjeux auxquels les dispositifs d'épargne retraite doivent répondre ont été expliqués et mis en lumière. La suite de ce chapitre introduira le côté actif définissant les différents supports d'investissement existant et leurs caractéristiques.

## 1.5 Actifs éligibles à la charte d'investissement de l'entreprise pour constituer un portefeuille

Cette partie présente les différents supports d'investissement éligibles à la constitution de notre portefeuille pour adosser les passifs de nos clients, à savoir des engagements de retraites supplémentaires. Une grande diversité d'actifs existent pour répondre à cette problématique d'investissement. Ils seront regroupés selon des classes d'actifs, qui seront définies par la suite. En effet, certaines recherches comme (BRINSON et al., 1991) suggèrent que 91,5% de la variation entre les rendements de différents portefeuilles est imputable à la décision d'allocation d'actifs plutôt qu'à la sélection d'actions ou de fonds individuels. De plus, il est beaucoup plus facile de modéliser, prévoir et comparer de manière fiable les comportements des différentes classes d'actifs que ceux des actions ou des fonds individuels. L'allocation d'actifs nous permet de décomposer la décision d'investissement en deux parties et d'isoler la décision au niveau de la classe d'actif (allocation stratégique) de la décision au niveau du titre individuel (allocation tactique). L'allocation tactique permet d'exploiter les inefficiences temporaires du marché des titres et peut avoir pour source soit un choix optimal des dates d'achat et de vente de ces titres, soit une sélection optimale de titres différents de ceux de l'indice. Ceci n'expliquerait qu'environ 6,4% de la performance globale obtenue in fine sur le portefeuille et est détaillé dans la figure 1.8.

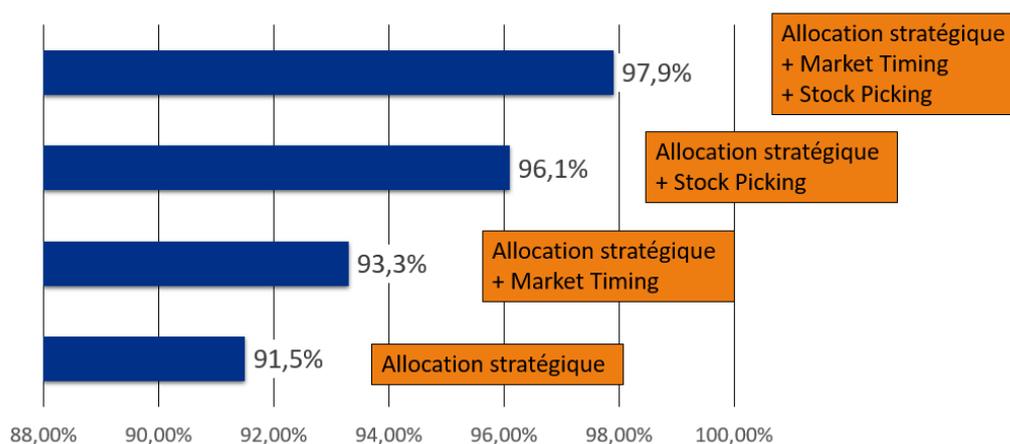


FIGURE 1.8 : Performance globale expliquée par certaines composantes de l'allocation d'actifs

En conséquence, notre étude se focalisera seulement sur l'allocation stratégique optimale. Généralement, l'allocation d'actifs distingue trois catégories, les actions, les obligations et le monétaire. Ces trois supports d'investissement sont connus du grand public car ce sont des actifs cotés et liquides, disponibles sur les marchés financiers. Cependant, d'autres classes d'actifs existent comme l'immobilier, les investissements non cotés aussi appelés private equity ou encore l'infrastructure.

Toutes ces classes d'actifs sont potentiellement des réponses aux besoins des investisseurs. Seulement, une bonne gestion de portefeuille ne s'obtient qu'en diversifiant ses placements à l'aide des différents produits d'investissement. Un investisseur avisé les utilisera de manière à minimiser le risque dans les contextes économiques et réglementaires actuels et futurs en les combinant. Outre cela, une diversification à l'intérieur de chaque classe d'actifs doit être recherchée et ceci est le travail du gérant et sort de notre périmètre d'étude. Sur les classes d'actifs cotées et liquides par exemple, les investissements sont généralement choisis par zones géographiques, secteurs d'activité ou encore tailles des capitalisations.

### 1.5.1 Action

Une action est un titre de propriété d'une part d'une société. Elle représente une partie du capital d'une entreprise. Les actionnaires (ceux qui détiennent une ou des actions) disposent de plus ou moins de pouvoir au cours des assemblées générales selon qu'ils soient minoritaires ou majoritaires. A ce niveau, une distinction est faite entre deux types d'action.

D'un côté, les actions ordinaires, sont toujours des titres de propriété d'une société. Il s'agit d'investissements présentant un certain risque pour l'investisseur dans la mesure où l'investissement dans la société est affecté par des tendances de marché et qu'il n'existe aucune garantie de préservation du capital initialement investi lors de la revente. Les actions ordinaires donnent le droit à leur propriétaire de voter lors des assemblées générales des actionnaires de la société, lui ouvrent droit à dividendes, mais l'actionnaire reste le dernier créancier dans l'ordre de priorité en cas de liquidation de l'entreprise. De l'autre côté, les actions à dividende prioritaire (ADP). Elles fonctionnent selon la même logique que les actions ordinaires, à la différence près qu'elles n'offrent pas de droit de vote. En conséquence de cette diminution de droits, elles bénéficient d'un dividende supérieur à celui d'une action ordinaire.

Les actions sont une catégorie d'investissements dont le potentiel de rendement est l'un des meilleurs dans une vision à long terme. Cependant le niveau de risque relatif, à savoir la volatilité (caractérisée par l'écart-type), reste assez élevée à court terme. Elles sont généralement détenues par les investisseurs dans deux buts différents : le dividende qui diffère selon chaque société et la plus-value espérée lors de la revente.

Dans cette étude, quatre indices seront utilisés pour modéliser les actions. D'abord, les actions monde : elles représentent l'ensemble des grandes capitalisations des grands marchés financiers mondiaux. L'indice utilisé est le MSCI World NR EUR, ici NR signifie Net Return pour rendement net et EUR exprime la devise dans laquelle il est exprimé. L'historique des rendements mensualisés est donné en figure 1.9 entre 1999 et 2021.

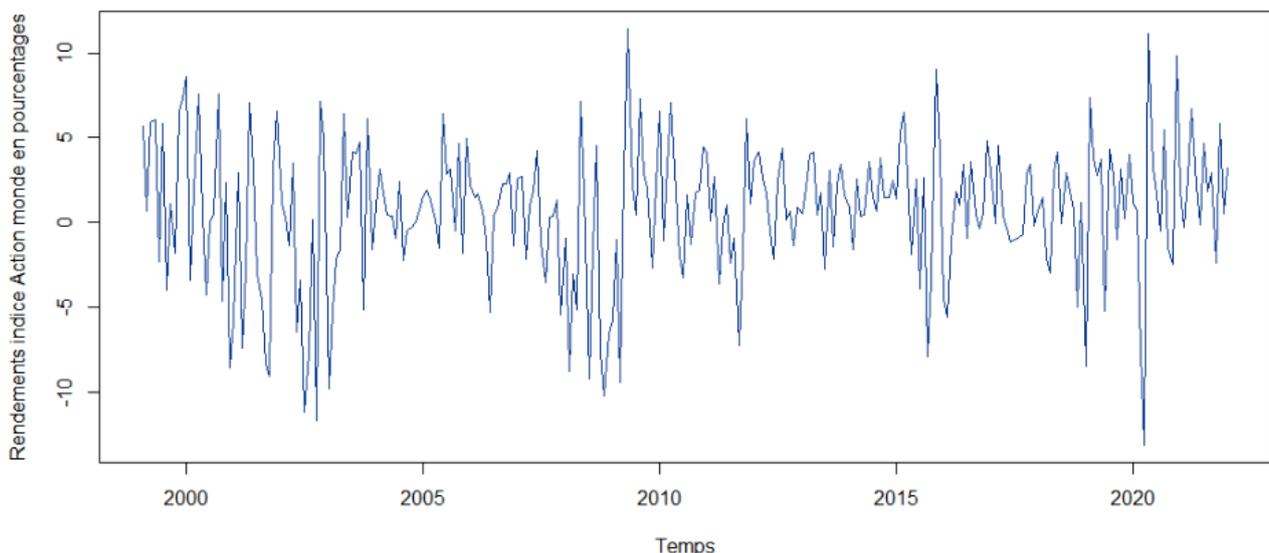


FIGURE 1.9 : Évolution des rendements d'un indice action monde

Puis, les actions européennes, cette classe d'actifs couvre des capitalisations qui viennent exclusivement de pays européens et non seulement de l'union européenne ou de la zone euro, il est donc composé

de titres français, allemands mais aussi de titres suisses et britanniques. L'indice utilisé est le MSCI Europe NR EUR. L'historique des rendements mensualisés est donné en figure 1.10 entre 1999 et 2021.

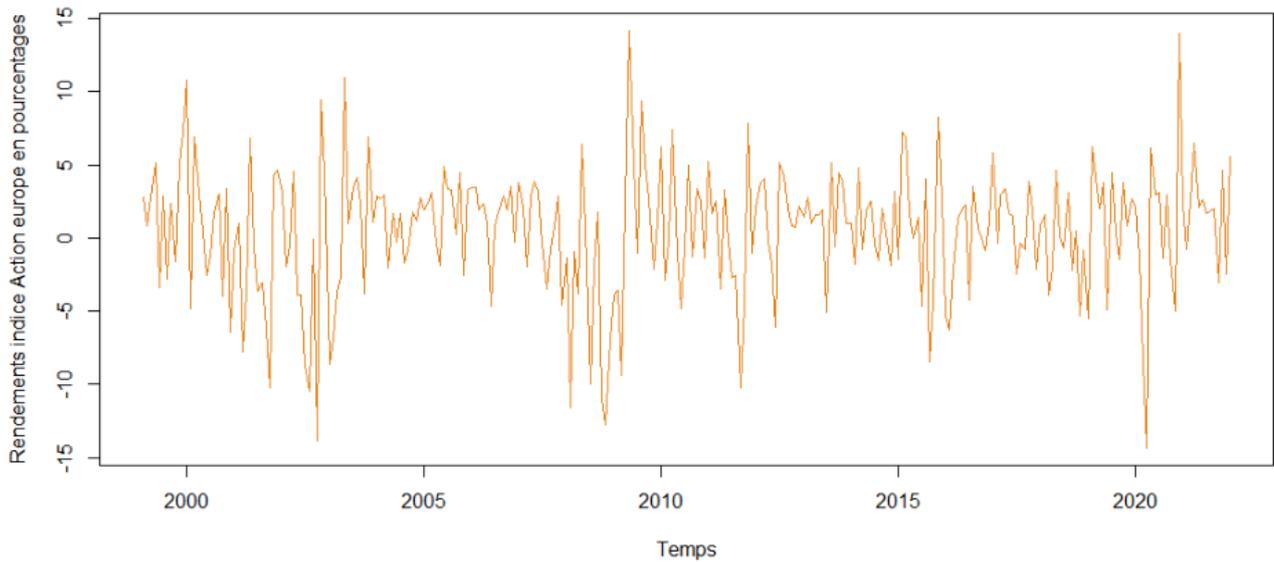


FIGURE 1.10 : Évolution des rendements d'un indice actions pays émergents

Ensuite, les actions pays émergents, cette classe d'actifs couvre des capitalisations qui viennent de pays émergents dont une majorité provient de la Chine. L'indice utilisé est le MSCI EM NR EUR. L'historique des rendements mensualisés est donné en figure 1.11 entre 1999 et 2021.

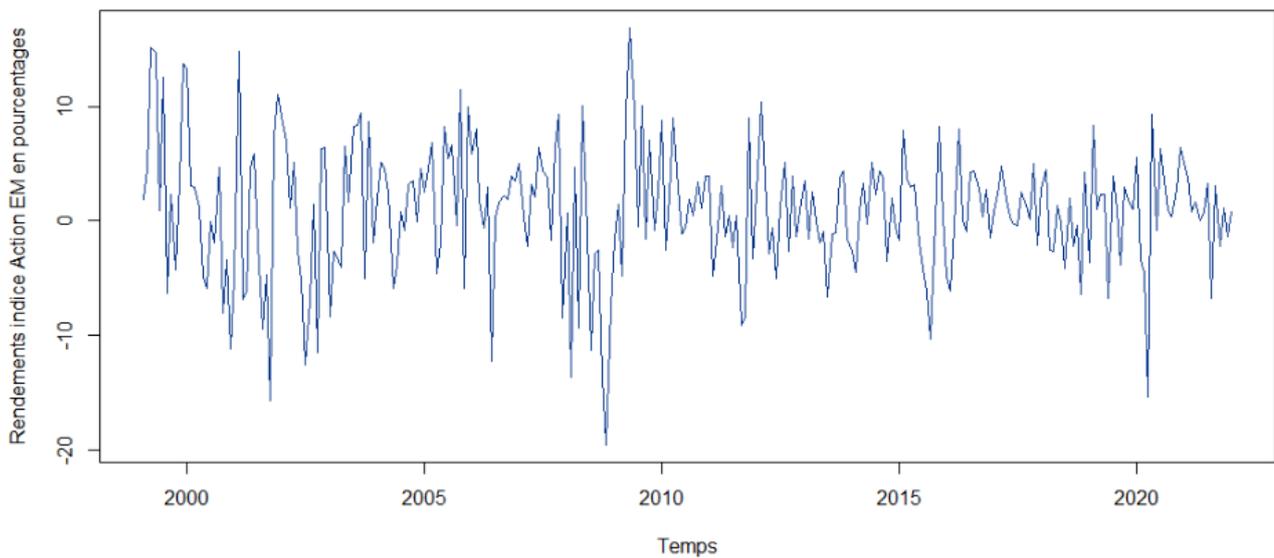


FIGURE 1.11 : Évolution des rendements d'un indice actions pays émergents

Enfin, les action PME, pour petites et moyennes entreprises, elles rassemblent les petites et moyennes capitalisations françaises. Cette classe d'actifs est presque indispensable dans cette étude car la loi PACTE vise à dynamiser la croissance et améliorer la performance des TPE (Très Petite Entreprise),

PME (Petite et Moyenne Entreprise) et ETI (Entreprises de Taille Intermédiaire), donc ce type d'investissement est principalement recherché. L'indice utilisé est le Euronext Paris CAC Mid& Small NR EUR. L'historique des rendements mensualisés est donné en figure 1.12 entre 1999 et 2021.

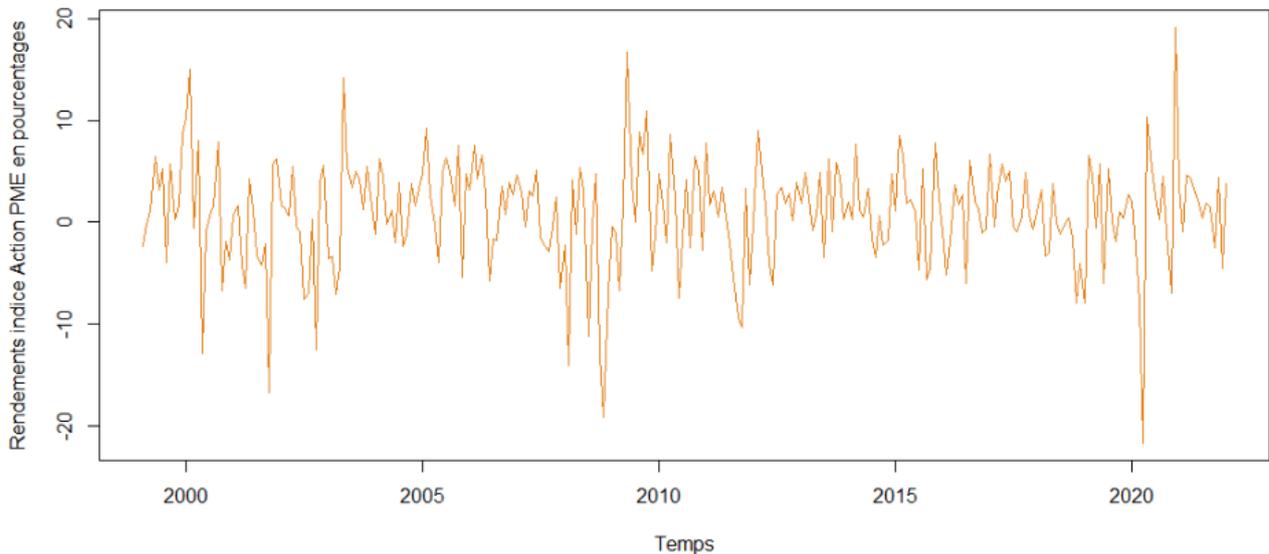


FIGURE 1.12 : Évolution des rendements d'un indice action PME

### 1.5.2 Produit de Taux

Les produits de taux regroupent selon l'usage les produits monétaires et les produits obligataires. Ils seront distingués suivant deux points dans la suite de la présentation.

#### Produits obligataires

Un produit obligataire ou obligation est un titre émis soit par un gouvernement (aussi appelée govies ou obligation d'État) soit par une entreprise (appelée corporate ou obligation crédit). Pendant la vie de l'obligation, le détenteur de celle-ci reçoit des paiements d'intérêts réguliers en fonction du taux de coupon. Il existe différents types d'obligation dont certaines font exception à ce qui vient d'être écrit, par exemple les obligations à taux zéro ou obligation zéro coupon, elles sont émises avec un discount par rapport à leur valeur faciale, c'est-à-dire que le titre ne verse pas de coupon jusqu'à sa maturité mais le montant remboursé est supérieur à sa valeur d'achat.

Les obligations présentent un degré de risque modéré par rapport à la précédente classe d'actifs. Elles sont connues et appréciées pour leur sécurité de placements, en particulier pour les obligations d'État car très peu risquée (en général bien notée). De plus les produits obligataires permettent, dans un contexte de gestion actif-passif, de se couvrir face à des gaps de duration et d'adosser l'actif au passif. Les corporates sont quant à elles plus rentables que les obligations d'État, conséquence d'un spread (écart) de taux notable entre ces deux obligations. Ceci est dû au fait que le risque de défaut est généralement plus élevé pour une entreprise que pour l'État.

Deux classes d'actifs obligataires seront retenues ici. D'abord, les obligations souveraines qui regroupent des titres obligataires seulement émis par des États. L'indice choisi est le FTSE EMU GBI

EUR. Ici, le terme EMU (European Monetary Union) indique que cet indice regroupe seulement des pays de la zone euro et le terme GBI (Government Bond Index) signifie que cet indice regroupe exclusivement des obligations d'État. L'historique des rendements mensualisés est donné en figure 1.13 entre 1999 et 2021.

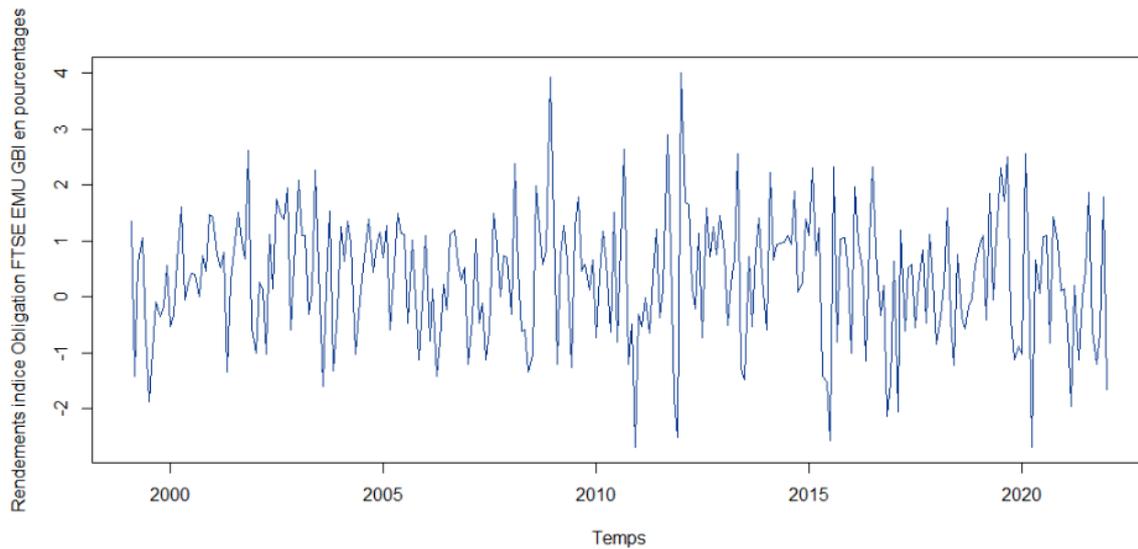


FIGURE 1.13 : Évolution des rendements d'un indice obligations souveraines

La deuxième classe d'actifs obligataires regroupe quant à elle exclusivement des obligations crédits (corporates). L'indice utilisé est le Bloomberg Euro Agg Bond TR EUR. , Ici TR signifie Total Return, c'est-à-dire que tous les dividendes sont réinvestis, ce type d'indice est aussi connu sous le nom d'indice de rendement total. De plus, le terme *Agg*, signifie que cet indice regroupe des obligation d'État ainsi que des corporate. De plus, le term *Agg*, signifie que cet indice regroupe des obligation d'État ainsi que des corporate. L'historique des rendements mensualisés est donné en figure 1.13 entre 1999 et 2021.

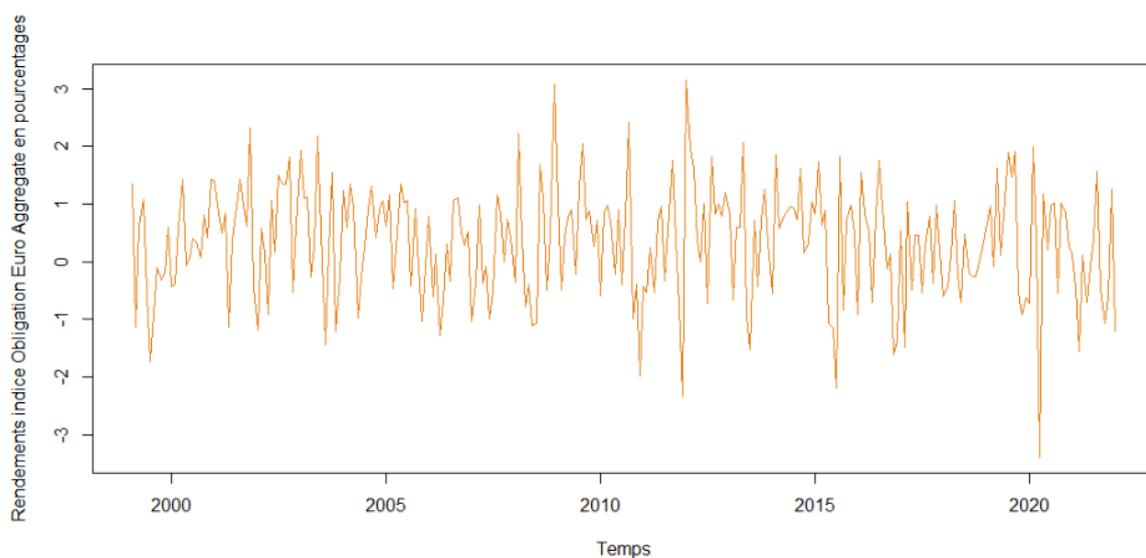


FIGURE 1.14 : Évolution des rendements d'un indice obligations crédits

En plus du risque de défaut, une obligation comporte un risque de marché. Ce risque provient des taux d'intérêts car une obligation peut être émise sur un horizon assez long. Ce titre étant achetable et vendable sur les principaux marchés boursiers, une hausse des taux fait diminuer la valeur de l'obligation et inversement, une baisse des taux fait augmenter la valeur de cette dernière. En effet, si les taux augmentent, et que je détiens une obligation à un taux inférieur à celui du marché, je n'ai donc pas un titre intéressant au regard des obligations du moment, je dois donc diminuer la valeur de mon obligation si je veux m'en débarrasser.

### Produits monétaires

Ce type de produits existe pour répondre à des contraintes de liquidité. Ces titres (Bons du Trésor, billet de trésorerie, papier commercial, acceptations bancaires, ...) ont des échéances qui varient de quelques jours à une année et sont sans risque, c'est-à-dire qu'il y a préservation de l'investissement initial de manière quasi certaine. Cependant, vis-à-vis des ces avantages en termes de disponibilité, ce produit procure une espérance de taux de performance la plus faible de toutes les classes d'actifs car ce taux est indexé sur celui de la Banque Centrale Européenne (BCE) et est toujours aujourd'hui très bas.

Pour la classe d'actifs monétaire, l'indice retenu est l'€STER pour Euro Short-Term Rate, c'est le taux d'intérêt interbancaire pour la zone euro avec une échéance de 1 jour. L'€STER est publié par la Banque centrale européenne et remplace le taux d'intérêt Eonia historiquement utilisé. L'historique des rendements mensualisés de cet indice entre 1999 et 2021 est donné en figure 1.15.

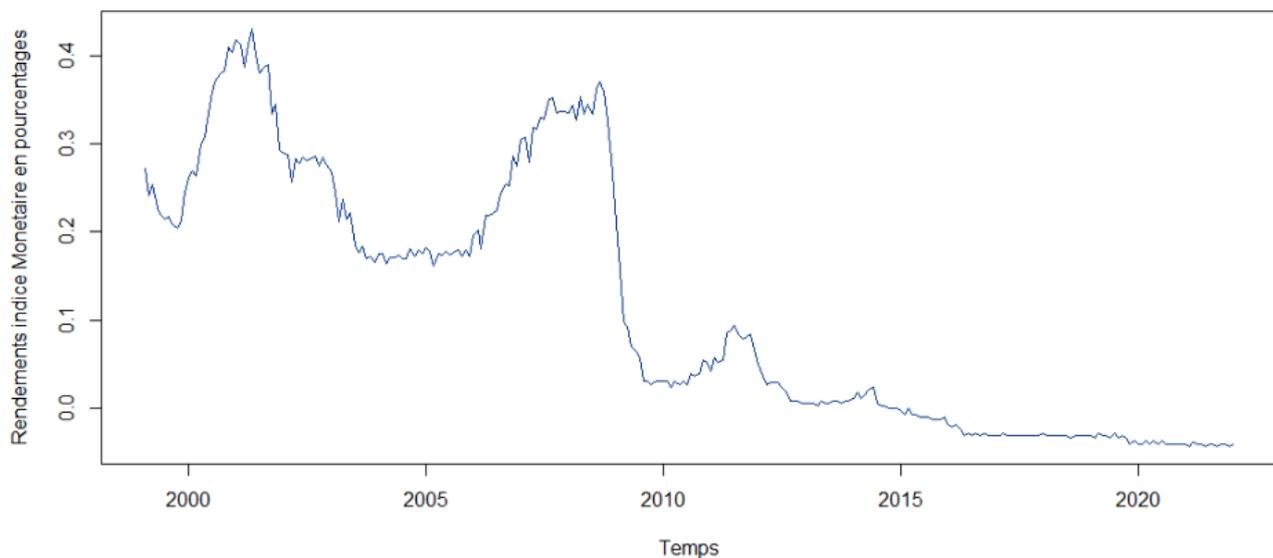


FIGURE 1.15 : Évolution des rendements d'un indice monétaire

### 1.5.3 Immobilier

Cette classe d'actifs mérite une attention particulière car elle soulève quelques questions. La première est de bien définir ce qui est mis dans la classe d'actifs Immobilier. Dans l'allocation d'actifs et plus généralement en finance, l'immobilier regroupe :

- les foncières cotées ou Sociétés d'Investissements Immobilier Cotées (SIIC), ce sont des entreprises qui investissent les capitaux collectionnés dans l'achat ou la construction de biens immobiliers. Ils sont par la suite mis en location et les loyers perçus, exonérés de frais, sont ensuite répartis aux actionnaires en dividendes.
- les Sociétés Civiles de Placement Immobilier (SCPI), ce sont aussi des foncières, cependant, celles-ci ne sont pas cotées en Bourse.

Dans cette étude, c'est l'immobilier au sens propre du terme qui sera retenu comme classe d'actifs et non la valorisation des foncières présentées précédemment. Par ailleurs cette classe d'actif regroupera aussi bien l'immobilier résidentiel que l'immobilier d'entreprise. Pour appuyer et justifier ce choix, voici en figure 1.16, l'historique sur 13 années entre 2009 et 2021 des foncières et de l'immobilier au sens propre.



FIGURE 1.16 : Performances historiques des foncières et de l'immobilier

Le graphique 1.16 montre de manière plus claire la différence entre ces deux types d'investissements, les foncières ont un profil beaucoup plus volatile que celui de l'immobilier. Elles ne reflètent pas la classe d'actifs immobilier comme elle se veut définie dans cette étude. L'immobilier ici en rouge montre une espérance de rendement relativement faible et une volatilité faible, caractéristique de ce type de support d'investissement.

C'est pourquoi, l'indice IEIF Immobilier France TR EUR est retenu pour modéliser la classe d'actifs

Immobilier de cette étude. L'IEIF (l'Institut de l'Épargne Immobilière et Foncière) est un centre d'études, de recherche et de prospective indépendant spécialisé dans l'immobilier. L'historique des rendements mensualisés de cet indice entre 1999 et 2021 est donné en figure 1.17.

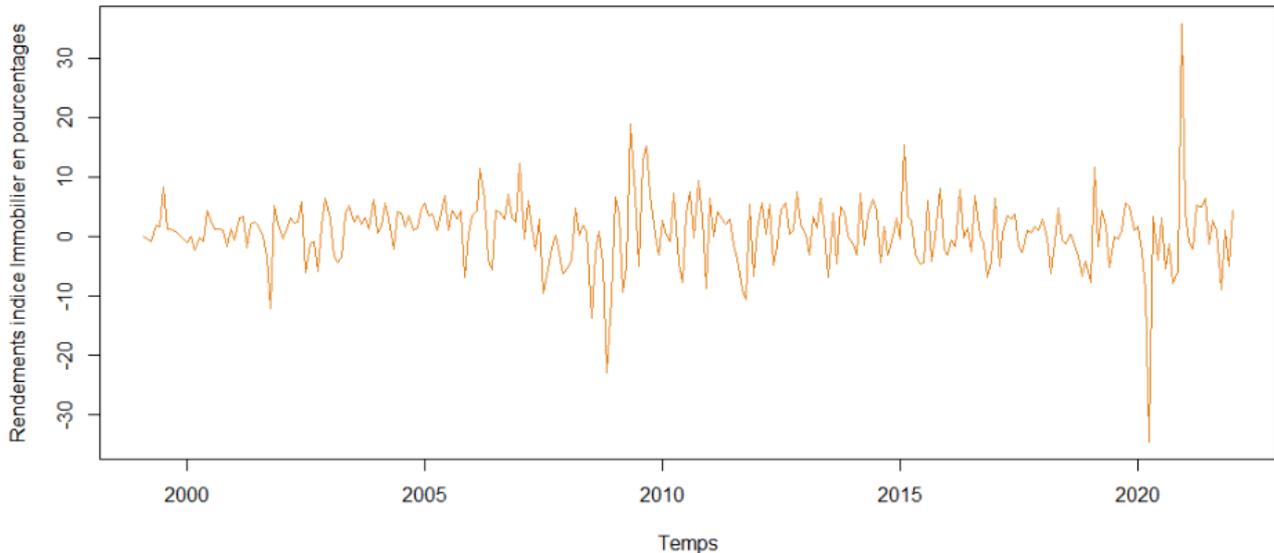


FIGURE 1.17 : Évolution des rendements d'un indice immobilier

Cependant, même si cet indice caractérise l'immobilier au sens propre du terme, ses hypothèses historiques d'espérance et de volatilité ne seront pas utilisées lors de la projection, néanmoins, cet indice fournira une base solide pour estimer les corrélations entre chaque classe d'actifs.

Après cette mise au point, de nouvelles questions se posent : l'immobilier reste difficilement divisible et peu liquide car non coté sur les marchés financiers et présentant également des coûts de transaction élevés. En outre, il n'est pas évident de prédire les prix et les revenus futurs pour ce type d'actifs. La raison principale est que pour des actifs cotés, une valorisation peut être constatée au jour le jour voire à chaque minute contrairement à un immeuble qui peut être valorisé dans le meilleur des cas annuellement ou semestriellement.

Ceci amène à la dernière question : comment mesurer le risque porté par cette classe d'actifs ? En réalité, il est porté principalement par le fait que ce type de titre est illiquide. Donc en résumé, l'immobilier offre une valorisation du capital certaine avec un fort risque d'illiquidité. Contrairement aux autres actifs présentés où le risque est complètement expliqué par la volatilité, ici la volatilité est très faible et ne reflète pas du tout le risque porté par cet actif. Il n'est donc pas intéressant de comparer directement la volatilité de l'immobilier avec celle des autres actifs. Or dans la suite de ce mémoire, la théorie de la recherche d'une allocation optimale repose exclusivement sur un principe de maximisation de l'espérance de rendement et de minimisation de la volatilité du rendement. C'est pourquoi, une volatilité dite abstraite sera exhiber pour porter tout le risque de cette classe d'actifs à savoir la très faible volatilité constatée et le risque d'illiquidité caractéristique des produits non cotés. C'est d'ailleurs ce processus qui sera appliqué aux supports d'investissement non cotés, comportant un risque d'illiquidité. Il sera présenté et détaillé par la suite.

#### 1.5.4 Private Equity

Le private equity aussi appelé investissement non coté désigne les titres financiers d'entreprise qui ne sont pas cotés sur le marché. En effet, des sociétés ou des fonds d'investissement fournissent des fonds à une entreprise pour lui permettre de se développer ou de se restructurer. Ces investisseurs sont souvent le dernier recours de certaines sociétés pour accéder à des financements car les solutions traditionnelles telles que le prêt bancaire ou l'émission d'actions ne leur sont pas accordées car trop risquées. L'aspect essentiel du private equity est de fournir un financement et des compétences techniques nécessaires pour transformer une entreprise peu performante ou en phase de démarrage en une entreprise prospère.

Aujourd'hui ces investissements sont de plus en plus demandés par les investisseurs car ils offrent d'une part des performances intéressantes et d'autre part un moyen de diversification du portefeuille. En effet ce type d'investissement non coté est très peu corrélé aux classes d'actifs traditionnelles.

Cependant, ces investissements non cotés ont le même inconvénient que l'immobilier, ils restent des placements illiquides et dégagent des revenus de manière irrégulière. En outre, ce marché ne comporte pas assez de transparence à ce jour et n'est pas facile d'accès, il est donc compliqué d'exhiber avec précision des hypothèses d'espérance et de volatilité de rendement pour cette classe d'actif.

#### 1.5.5 Infrastructure

Du point de vue des investissements, l'infrastructure se partage selon plusieurs caractéristiques. D'abord, elles jouent un rôle important dans la structure sociale et économique d'un pays. Ensuite, ce sont des actifs physiques à longue durée de vie qui nécessitent de lourds investissements initiaux en capital. Enfin, ils présentent de faibles coûts d'exploitation et des sources de revenus récurrentes une fois établies. Pour bien comprendre ces caractéristiques, voici quelques exemples de projets d'infrastructure typiques nécessitant un apport important de capitaux, les routes à péages, les aéroports, les systèmes de transport et la distribution d'énergie. Les infrastructures apportent une nouvelle forme de financement directe ou indirecte à la collectivité et par conséquent contribuent à la productivité et à la croissance du pays.

Les rendements longs termes de cette classe d'actifs sont, comme dit précédemment, stables et récurrents et indexés au moins partiellement à l'inflation. Cependant, les infrastructures, comme les dernières classes d'actifs présentées, restent illiquides avec en plus un accès restreint du fait de la capacité minimale d'investissement élevée à fournir.

### 1.6 Support d'investissements pour l'épargne

Les différents supports d'investissement qui interviendront dans l'étude ont été définis, cependant, nos clients, les entreprises, n'investissent pas directement dans des actions, des obligations ou même de l'immobilier. Des produits existent, dans lesquels des cotisations sont versées régulièrement, pour leur permettre d'investir sur ces différentes classes d'actifs. Les produits les plus connus sont les dispositifs de Plan Épargne Retraite (PER), de Plan Épargne Entreprise (PEE) et de l'ancien article 39 qui est le passif à couvrir dans le cadre de cette étude. Mais même dans ce produit d'épargne qu'est l'article 39, les fonds constituants l'enveloppe à investir ne sont, pour la majorité, pas investis directement dans une action ou une obligation. Concrètement c'est par l'intermédiaire de fonds que les épargnants ont accès aux classes d'actifs et non à des actions ou des obligations. Deux stratégies d'investissement existent.

### 1.6.1 Le Fonds euro

D'abord le fonds euro, que propose chacune des compagnies d'assurances. Il offre une allocation relativement standard selon tous les acteurs :

- 60 à 80% d'obligation d'État ou d'entreprise
- 10 à 15% d'immobilier
- 5 à 15% d'actions
- 10 à 15% monétaire.

Le rendement perçu par l'assuré selon cette stratégie d'investissement est composé de deux éléments, un taux minimum garantie (TMG) et d'un mécanisme de participation aux bénéfices (PB). Lorsqu'une entreprise choisit cette stratégie d'investissement, nous, en tant que courtier et consultant, n'avons pas de travail à fournir en terme de recherche d'une allocation optimale car celle-ci est définie en amont par l'assureur.

### 1.6.2 Les Organismes de placements collectifs en valeurs mobilières

Seulement, il existe une autre stratégie d'investissement ou le travail de la recherche d'une allocation optimale prend tout son sens et joue un rôle essentiel dans le choix des poids à donner à chaque classe d'actifs. Pour cela, l'investisseur a recours à des produits appelés Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM). Ce produit permet d'investir dans des sociétés (Société d'Investissement à Capital Variable ou SICAV) ou des fonds (Fonds Communs de Placements ou FCP) qui vont prendre en charge la gestion des capitaux qui leur ont été confiés. C'est à travers ces supports d'investissement que l'épargne est investie sur des actions, des obligations, du monétaire, ... ou alors sur un fonds mélangeant des actions avec des produits obligataires ou alors du monétaire avec des produits obligataires, ... Dans un produit d'épargne comme l'article 39, l'investissement n'est pas réalisé dans des actifs en particulier mais bien dans un fonds regroupant une ou plusieurs classes d'actifs ayant chacune leurs caractéristiques. Le travail réalisé dans la suite de ce mémoire a pour objectif d'obtenir une allocation stratégique en fonction des contraintes posées par l'entreprise et par la réglementation. Ce travail permettra de choisir le support qui aura l'allocation la plus proche de celle trouvée à l'aide de l'outil. À ce stade, deux possibilités sont envisageables :

- aucun fonds, dit ouvert, avec l'allocation recherchée n'existe sur le marché, dans ce cas, des fonds dits dédiés peuvent être créés par un assureur seulement pour cette entreprise. Il est alors construit de manière à prendre en compte toutes les caractéristiques de l'entreprise pour aboutir à une allocation proche de celle recherchée.
- Un ou plusieurs fonds proposent une allocation proche de celle obtenue. Dans ce cas un travail est réalisé afin de choisir le meilleur. Par ailleurs, le meilleur fonds ne sera pas nécessairement celui ayant le meilleur rendement car une contrainte de volatilité peut amener à vouloir préférer un peu moins de rendement en diminuant grandement la volatilité.

Pour tous les fonds, le Document d'Information Clé pour l'Investisseur (DICI) est accessible par l'intermédiaire financier et résume les risques portés par ce type de produit. Le régulateur a mis en place une échelle allant de 1 à 7 pour expliquer à tout investisseur, le profil de risque et de rendement

de chaque fonds. Un score de 1 signifiera que le fond comporte un risque faible et des rendements potentiellement bas, au contraire un score de 7 rendra compte d'un risque élevé avec un potentiel de rendement plus élevé. La mesure de risque utilisée pour associer un fonds à un score compris entre 1 et 7 est la volatilité et le tableau des équivalences est fournie en table 1.1 pour mieux comprendre le critère de notation. Ce score est appelé indicateur synthétique de risque et de performance connu sous le nom de SRRI (Synthetic Risk and Reward Indicator)

SRRI	Volatilité correspondante
1	Volatilité inférieure à 0,5%
2	Volatilité de 0,5% à moins de 2%
3	Volatilité de 2% à moins de 5%
4	Volatilité de 5% à moins de 10%
5	Volatilité de 10% à moins de 15%
6	Volatilité de 15% à moins de 25%
7	Volatilité de 25% ou plus

TABLE 1.1 : Équivalent entre SRRI et volatilité

Le SRRI a été mis en place pour communiquer sur les concepts de volatilité et de rendement à partir d'un visuel simple qui se présente comme sur la figure 1.18 dans les DICI. C'est aussi une volonté d'intéresser le plus de public possible à l'investissement et d'éduquer à ce sujet. Ce temps de formation, de vulgarisation et d'explication auprès de nos clients est un des aspects importants de notre travail.

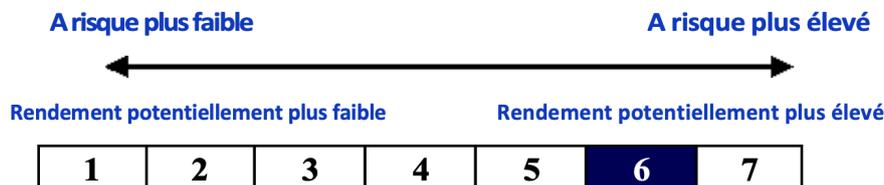


FIGURE 1.18 : Exemple d'un fonds SRRI 6

### 1.6.3 Concept de volatilité abstraite

Comme dit précédemment, la mesure de risque utilisée est la volatilité, or le risque porté par certaines classes d'actifs n'est pas porté seulement par la volatilité mais aussi par d'autres facteurs comme l'illiquidité. Cet indicateur présente donc certaines limites lorsqu'il s'agit de prendre en compte des actifs non cotés. De plus, au cours de l'étude, une approche rendement risque (approche qui sera détaillée théoriquement dans le prochain chapitre) sera retenue pour obtenir l'allocation optimale. La mesure de risque dans cette approche est la volatilité car la majorité des investissements sont réalisés dans des supports cotés sur les marchés. Une question se pose donc directement, comment intégrer les classes d'actifs non cotées à notre étude ?

C'est une méthode qui repose essentiellement sur le SRRI qui a été retenue et c'est pour cela qu'il a été présenté ici. L'idée est de définir pour ces classes d'actifs une volatilité dite abstraite. Cette volatilité représentera la volatilité propre à cette classe d'actifs ainsi que son caractère illiquide. Pour

cela, il convient d'abord d'estimer par des méthodes mathématiques et statistiques (définies dans le prochain chapitre) l'espérance de rendement de chacune de ces classes d'actifs, puis de trouver d'autres fonds cotés sur les marchés ayant la même espérance de rendement. Ces fonds étant cotés, l'accès à leur SRRI est donc immédiat et permettra à l'aide des tables d'équivalence d'estimer une nouvelle volatilité qui sera celle retenue pour ces classes d'actifs. L'objectif derrière cette méthode est d'étudier des rapports de **risque performance** comparables. Par exemple, l'immobilier a pour principale caractéristique d'être très rentable au regard de sa volatilité. Il apparaît donc dans des outils d'optimisation de portefeuille, sur pondéré par rapport aux autres classes d'actifs. Pour éviter ce biais, certaines méthodes consistent à mettre des bornes pour minorer le poids de ces classes d'actifs dans l'allocation obtenue. Dans cette étude, la méthode de la volatilité abstraite sera privilégiée.

## 1.7 Conclusion du chapitre 1

Ce premier chapitre avait pour objectif de présenter de manière générale l'engagement social des entreprises et la réglementation encadrant leur méthode d'évaluation. Cette présentation a permis de bien définir et cerner l'engagement à couvrir, les anciens Article 39. Les chiffres présentés démontrent que cet engagement représente des montants non négligeables pour les entreprises.

De plus, avec les changements économiques, réglementaires et démographiques actuels, la diversification des choix d'investissement devient essentielle. Pour cela, différents supports d'investissement sont disponibles dont les avantages et les inconvénients ont été présentés. En effet un portefeuille majoritairement investi en obligations pose aujourd'hui des questions en terme de rentabilité et pousse à s'intéresser à d'autres classes d'actifs. La suite de ce mémoire cherchera à apporter une réponse en exhibant une allocation optimale en fonction des contraintes des entreprises.



## Chapitre 2

# Analyse des outils théoriques pour un modèle d'allocation stratégique d'actifs adossé au passif

### 2.1 Modèles de projection d'actifs en monde réel

Pour répondre à la problématique posée dans ce mémoire, le travail a pu être divisé en deux grandes étapes. D'abord la mise en place d'un générateur de scénarios économiques (GSE), puis la recherche d'une allocation optimale pour adosser un passif de retraite.

La création d'un GSE permet de projeter selon un certain scénario économique, une grandeur financière, telle que les actions, les produits de taux, le monétaire ou encore l'immobilier. Le GSE est l'objet qui permettra de projeter à un horizon donné toutes ces grandeurs selon un grand nombre de scénarios économiques qui représente chacun un état possible de l'économie future. C'est à partir des données projetées, fournies par le GSE que sera déterminée l'allocation optimale recherchée dans un second temps. Même si les GSE seront ici utilisés à des fins de modèles ALM, ils restent un outil indispensable chez toutes les entreprises d'assurances pour effectuer la majorité des calculs réglementaires.

En effet cet outil est fortement apprécié des assureurs car il repose sur des théories mathématiques et financières. Il permet selon les facteurs de risques à prendre en compte de choisir la modélisation à adopter afin d'avoir une projection la plus **Représentative, Plausible économiquement** et **Transparente** possible. Aussi, une contrainte de **Parcimonie** reste importante à prendre en compte lors de la projection des actifs dans le but de rendre plus facile leur interprétation pour par exemple y inclure des avis ou jugements d'experts.

Un des premiers choix à faire lors de la création d'un GSE est de décider de l'environnement de modélisation qui distingue l'univers risque neutre et l'univers monde réel. Il dépend directement du cadre d'utilisation des projections futures.

#### 2.1.1 Justification du choix de l'univers monde réel à l'univers risque neutre

Comme dit précédemment, il existe deux environnements de modélisation correspondant à des besoins différents :

- l'univers risque neutre, dans lequel les référentiels actuels en assurance font référence à des évaluations des passifs ou des fonds propre de manière *market consistent* (Solvabilité II, MCEV, IFRS 17). Ce type de GSE est utilisé pour fournir un prix selon un raisonnement tiré de la finance de marché pour calculer les prix d'une couverture optionnelle. L'idée est donc de prendre une approche *market consistent* pour capturer le prix des risques financiers propres aux passifs d'assurance à l'aide des prix de produits financiers. Théoriquement, en présence d'un marché complet et sous condition d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA), une mesure risque neutre correspondante peut-être introduite, ainsi il est possible de calculer pour un actif financier le prix de sa couverture optionnelle. Ce mécanisme est donc utilisé par les assureurs pour les différents risques auxquels ils sont exposés. Pour résumer sous cette mesure, le rendement de tous les actifs est supposé être le taux sans risque. Les GSE dits risque neutre sont pour cela toujours calibrés sur les prix du marché en minimisant l'écart entre les prix obtenus par le modèle et les prix réellement observés. Cet univers ne sera pas utilisé dans ce mémoire car l'objet de ce dernier est de modéliser des actifs financiers à horizon long terme dans le but de construire une allocation stratégique optimale.
- L'univers monde réel, dans lequel les scénarios sont générés sous la probabilité historique. Ce générateur dit risque historique est utilisé pour modéliser l'évolution des actifs en univers réel. En effet, le but est ici de reproduire l'historique des grandeurs financières. Les paramètres des modèles sont estimés à partir de données historiques. Le choix de la profondeur d'historique est donc très important et dépend à fortiori de l'horizon de projection recherché, le pas de temps choisi pour la projection est aussi un paramètre à prendre en compte. Par exemple pour une projection sur un horizon de 40 ans avec un pas de temps annuel ou semestriel pour la projection, l'historique choisi n'a pas besoin d'avoir des données journalières, par contre un historique d'au moins 40 ans voire plus serait un choix judicieux pour capturer différents cycles financiers passés qui pourraient intervenir à nouveau pendant la période de projection. Ce type de générateurs peut être appliqué à des évaluations d'une mesure de risque pour le calcul du capital économique ou à la construction de stress-test. Cet outil est aussi utilisé comme outil de pilotage stratégique chez les assureurs pour la gestion actif-passif (ALM), il permet en partie la construction de stratégies d'allocation optimales et d'adosser les actifs aux passifs. C'est ainsi que cet univers de projections a été préféré pour la construction de GSE de l'outil. Toutefois, il présente certaines contraintes et limites lors de la simulation de scénarios extrêmes, de la prise en compte des sauts ou encore des structures de dépendances complexes. Ces contraintes donneront lieu à des discussions de certains résultats obtenus à la fin de l'étude.

Le générateur risque historique a été retenu, cependant chaque actif n'a pas vocation à être modélisé de la même manière. C'est pourquoi la prochaine partie de ce chapitre traitera les différents modèles à notre disposition permettant de projeter chacun de nos actifs selon leurs propres caractéristiques.

### 2.1.2 Structure de projection de scénarios pour un GSE

Le second choix est de se demander quelle forme schématique sera retenue pour représenter l'évolution dans le temps des scénarios des futures grandeurs financières (classes d'actifs). La question se pose au niveau de la transition entre deux pas de temps successifs pour la même variable. Théoriquement chaque variable du GSE pourrait avoir sa propre structure de projection, cependant pour simplifier l'analyse, la structure de projection restera identique pour chacune des variables. De plus, un nœud correspondra à la réalisation possible d'une variable modélisée à un instant donné et l'ensemble de ces nœuds successifs formera une trajectoire possible d'évolution d'une classe d'actifs.

Dans cette section, la structure de projection linéaire et la structure de projection d'arbre ou d'arborescence seront détaillées, ce sont les plus utilisées dans la pratique. La divergence entre ces deux structures intervient au niveau de chaque nœud. Pour la structure par arbre, à partir de chaque nœud sont créés plusieurs nœuds enfants. Au contraire, dans la structure linéaire, à partir de chaque nœud un seul nœud est créé.

Ces deux structures sont donc radicalement différentes car pour la structure linéaire le nombre de trajectoires est défini après le premier nœud contrairement à la structure par arbre où le nombre de trajectoires augmente à chaque pas de temps. Pour la première structure il est généralement choisi un grand nombre de trajectoires dès le début et pour la seconde le nombre de trajectoire est relativement faible au début de la structure et augmente rapidement au fur et à mesure de l'avancée dans la structure. La figure 2.1 permet de mieux se rendre compte de la différence de ces deux types de structures.

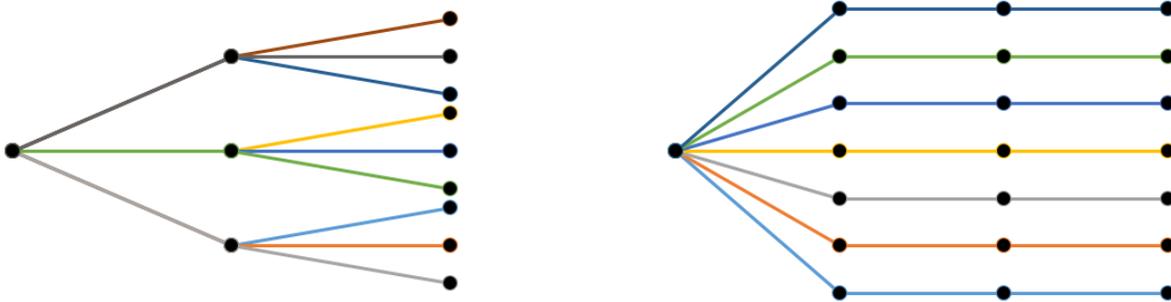


FIGURE 2.1 : Structure par arborescence à gauche et structure linéaire à droite

La structure par arborescence est la plus moderne mais reste à ce jour la plus compliquée à mettre en œuvre en pratique. Même si cette structure paraît plus adaptée que la structure linéaire pour l'optimisation dans le cadre de la recherche d'une allocation optimale, elle ne sera pas retenue dans la suite de cette étude. Le principale obstacle avec les arbres de scénarios est l'augmentation exponentielle du nombre de trajectoires. En effet, le passif à adosser est un engagement de retraite, la projection s'étendra sur une grande période avec un grand nombre de pas de temps. Par exemple, pour 2 scénarios générés à chaque instant sur un horizon de 40 années, le nombre final de scénarios s'élèverait à

$$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$$

ce qui est concrètement inenvisageable car il faudrait de plus le réaliser pour chacune des variables financières. C'est pourquoi la structure linéaire sera privilégiée pour projeter les classes d'actifs.

### 2.1.3 Profondeur d'historique et horizon de projection

Avant de passer à la présentation des différents modèles pouvant être à la projection des classes d'actifs, un point non encore traité jusqu'ici mérite une attention particulière. C'est celui de l'historique, il joue un rôle presque prépondérant autant dans la génération des scénarios que dans la calibration des paramètres des modèles.

D'abord la profondeur d'historique, elle correspond à l'intervalle de temps à partir duquel sont définis les hypothèses de volatilité et d'espérance de rendement de chaque classe d'actifs. Or, la principale mission d'un GSE et de fournir des scénarios futurs probables. Toute la question repose donc sur le fait de savoir si les crises ou mouvements de marchés sont susceptibles de survenir de nouveau dans le futur. C'est pourquoi par la suite une distinction sera faite entre les estimations historiques des paramètres et ceux réellement calibrés dans cette étude. De plus, les risques auxquels étaient soumis les classes d'actifs dans le passé ne sont plus les mêmes aujourd'hui et dans le futur c'est pourquoi une profondeur d'historique très grande est rarement retenue. Enfin un dernier point est à prendre en compte ici et a déjà été évoqué plus haut, c'est celui des cycles financiers. Aujourd'hui l'économie semble sortir d'un cycle dans lequel les actions semblaient proposer des rendements élevés pour des volatilités relativement faibles, le monétaire était négatif et les taux ne faisaient que diminuer. Or ceci semble terminer avec du monétaire positif, des taux qui remontent et une classe actions bien plus volatile. Voilà un début d'explication, pour justifier un choix de paramètres différents de ceux estimés historiquement.

Ensuite l'horizon de projection, qui se définit comme la durée pendant laquelle les classes d'actifs vont évoluer. Le contexte de l'étude est la retraite donc ici l'horizon est défini de manière standard à 40 ans car c'est celui qui est généralement adopté dans ce type d'études. Cependant, l'horizon de projection soulève une autre question qui est celle du pas de temps à retenir entre deux dates successives. Ce dernier peut-être quotidien, mensuel, semestriel voir même annuel. Si dans cette étude un pas quotidien ne semble pas adapté les trois autres semblent convenir, or le pas classiquement retenu est un pas mensuel et cette étude n'en fera pas l'exception. Ce choix est de plus motivé par le fait que ce pas de projection permet une projection plus fine de chaque classe d'actifs.

Pour résumer, l'horizon de projection de cette étude est de 40 ans avec un pas mensuel et la profondeur d'historique choisi est d'environ 20 ans, c'est-à-dire entre 1999 (début de l'euro, tous les pays de la zone euro émettent désormais leurs titres souverains en euros et sur les marchés financiers, la plupart des titres sont cotés en euros à partir du 1<sup>er</sup> janvier 1999) et 2021 (dernière année complète à ce jour).

## 2.2 Présentation du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est un des modèles qui appartient à une catégorie beaucoup plus large appelée modèles de taux. Les différents acteurs de la place utilisent généralement des modèles définis par des équations aux dérivés partielles (EDS) présentant une discrétisation simple ou exacte. Plus communément, ils sont classés selon quatre catégories (PLANCHET et al., 2009) :

- les modèles de d'équilibre partiel ou général, avec les modèles de Vasicek ou CIR pour Cox, Ingersoll et Ross.
- Les modèles s'appuyant sur l'absence d'arbitrage, avec les modèles de Hull and White aussi appelés modèles de Vasicek généralisé.
- Les modèles s'appuyant sur les taux forward, avec les modèles de types HJM pour Heath, Jarrow et Morton.
- Les modèles de marché avec les modèles de type Libor Market Model (LMM)

Le modèle de Vasicek présente une dynamique des taux courts instantanés décrite par l'équation (2.1)

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (2.1)$$

Avec :

- $\kappa$ , la vitesse de retour à la moyenne
- $r_t$ , le taux court
- $\sigma$ , la volatilité
- $\theta$ , le taux moyen
- $W_t$ , un mouvement brownien.

De plus,  $\kappa$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  strictement positifs.

Ce modèle à l'avantage d'être très simple à mettre en place car il possède une discrétisation exacte rappelée dans la formule de l'équation (2.2). Par contre son avantage est aussi son principal inconvénient car il permet de reproduire seulement des formes de courbes de taux simples. De plus, la caractérisation des paramètres de ce modèle n'est pas aussi simple que pour celui de Black-Scholes car même si la volatilité est dans chacun des cas représentée par sigma, l'espérance de rendement est quant à elle déterminée par le terme  $\kappa \times (\theta - r_t)$ . Ce dernier dépend du taux moyen et de la vitesse de retour à la moyenne ainsi que du processus de taux, donc le choix des paramètres à faire varier pour introduire des jugements d'experts afin d'ajuster l'espérance de rendement de ce processus n'est pas évidente. La méthode utilisée dans cette étude pour résoudre ce problème est détaillée dans la suite et pour cela, l'introduction de la discrétisation exacte du modèle de Vasicek est nécessaire

$$r_{t+\delta} = r_t \times \exp(-\kappa\delta) + \theta \times (1 - \exp(-\kappa\delta)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa\delta)}{2\kappa}} \epsilon. \quad (2.2)$$

Cette discrétisation permet de remarquer que le processus est homogène à un modèle AutoRégressif d'ordre 1 (AR(1)). En posant  $\delta = 1$  l'équation (2.2) se réécrit sous une forme plus simple dans l'équation (2.3)

$$r_{t+1} = a + b \times r_t + \epsilon(t). \quad (2.3)$$

Avec,

$$\begin{aligned} a &= \theta \times (1 - \exp(-\kappa\delta)) \\ b &= \exp(-\kappa\delta) \end{aligned}$$

Sous cette forme, un jugement d'expert peut plus facilement être apporté pour faire varier l'espérance de rendement attendue par le facteur de risque à modéliser. En effet, ce sont les paramètres **a** et **b** qui seront amenés à être revus et donc à l'aide des formules précédentes les paramètres  $\kappa$  et  $\theta$  du modèle initial.

Dans ce mémoire, interviendront plusieurs classes d'actifs obligataires. En particulier, les obligations sans risque (assimilées aux obligations gouvernementales) et celles présentant un risque de défaut (assimilées aux obligations corporate). La valeur de ces dernières seront donc différentes car elles comprendront un risque supplémentaire.

Les obligations zero-coupon comprennent un risque défaut qui est exprimé dans le calcul de leur prix dans l'équation (2.4)

$$v(t, T) = \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_t^T r_u du} (\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \phi \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) \mid \tau > t \right), \quad (2.4)$$

avec  $\tau$  la durée de vie sans défaut et  $\phi$  le taux de recouvrement en cas de défaut.

Afin de simplifier cette expression, l'hypothèse d'indépendance entre le taux et le risque de défaut comme expliqué dans l'approche défendue par (ROBERT et STUART, 1995). Cette approximation donne une nouvelle valeur de l'obligation risquée

$$\begin{aligned} v(t, T) &= p(t, T) \mathbb{E}_t^Q (\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \phi \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \mid \tau > t) \\ &= p(t, T) (\phi + (1 - \phi) Q(\tau > T \mid \tau > t, \mathcal{F}_t)), \end{aligned}$$

et permet avec  $p(t, T)$  un prix de zéro-coupon sans risque, d'en déduire un spread de crédit noté  $r_{(t, T)}$  exprimé dans l'équation (2.5)

$$r(t, T) = -\frac{\ln(\phi + (1 - \phi) Q(\tau > T \mid \tau > t, \mathcal{F}_t))}{T - t}. \quad (2.5)$$

Dans la suite, ce spread de crédit se rapportera à la prime de rendement accordée à une classe d'actifs obligation corporate par rapport à une classe d'actifs obligation gouvernementale.

### 2.3 Présentation du modèle de Black-Scholes

Le modèle classique de Black-Scholes aussi appelé brownien géométrique est très utilisé dans les GSE des assureurs (PLANCHET et al., 2009), principalement pour sa facilité d'utilisation. D'autres modèles inspirés de celui-ci existent comme le modèle à changement de régime de Hardy qui sera détaillé dans une prochaine section.

Ce type de modèle est adapté pour projeter des actifs ayant une volatilité importante. Il modélisera donc une des classes d'actifs les plus volatiles à savoir les actions. Ce type de modèle repose sur différentes hypothèses dont la première est l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Elle signifie qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse strictement positive à une date future avec une probabilité non nulle. De plus les coûts de transactions et les actifs sont considérés respectivement comme nuls et indivisibles. Enfin, le prix de l'actif, noté  $S_t$ , suit un mouvement brownien dont la volatilité, caractérisée par  $\sigma$ , sera constante. Formellement, l'équation différentielle stochastique (EDS) déterminant le modèle de Black-Scholes est donnée par l'équation (2.6)

$$dS_t = S_t \times (\mu dt + \sigma dW_t), \quad (2.6)$$

avec :

- $W$  : un mouvement brownien géométrique
- $\mu$  : l'espérance de rendement de l'actif
- $\sigma$  : la volatilité de l'actif
- $S$  : le prix de l'actif

Outre cela, une autre hypothèse est retenue. Non pas au sujet du modèle mais au sujet des actifs et particulièrement ceux distribuant du dividende (actions). Dans le cas de leur modélisation, et ce jusqu'à la fin de l'étude, l'actif  $S_t$  suppose que les dividendes sont réinvestis.

Cette dynamique possède une discrétisation exacte qui peut se réécrire de deux manières, l'une avec l'introduction d'un pas de temps, dans l'équation (2.7), dans ce cas,  $\epsilon$  représente une réalisation d'une loi normale centrée réduite. L'autre où le prix de l'actif à la date  $t$  dépend seulement du prix de ce même actif à la date  $t = 0$ , dans l'équation (2.8)

$$S_{t+\delta} = S_t \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta + \sigma\sqrt{\delta}\epsilon\right). \quad (2.7)$$

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right). \quad (2.8)$$

Les avantages de ce modèle sont multiples, d'abord, il permet de modéliser des actifs en univers monde réel. De plus, il est simple et donc facilement interprétable. En effet, il est relativement aisé pour un expert de faire varier les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  car chacun caractérise un concept financier et mathématique concret, à savoir l'espérance et la volatilité du rendement.

Mais ce modèle présente aussi certaines limites, la principale est que ce modèle propose des paramètres constants, or généralement les historiques des cours des actions ne présentent pas un rendement et une volatilité constantes.

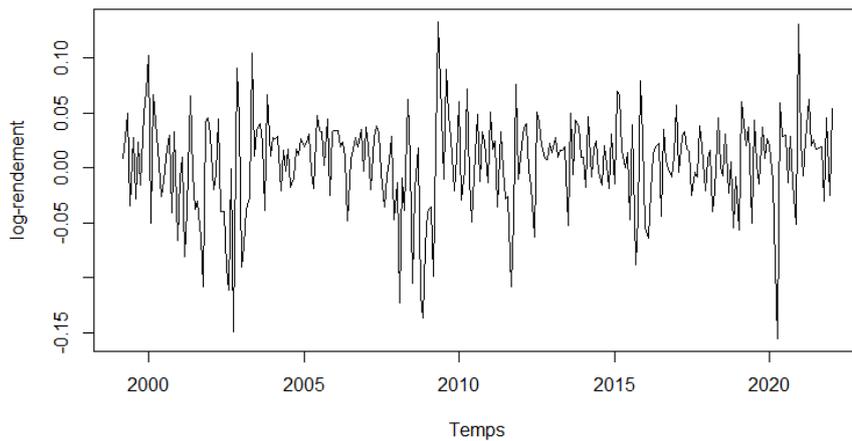


FIGURE 2.2 : Historique des log-rendements d'un indice action 1999 et 2021

En effet, sur la figure 2.2 le logarithme du rendement d'une action se présente généralement sous cette forme. L'hypothèse choisie peut donc être vue de manière légitime relativement contraignante.

De plus, l'hypothèse log-normale de l'actif et des rendements associés est également un biais puisque les événements extrêmes ne sont pas pris en compte.

## 2.4 Modèle à changement de régimes de Hardy : alternative au modèle de Black-Scholes

Aujourd'hui, une définition assez générale a été adoptée pour qualifier un cycle économique, (AIMAR et al., 2009). Il consiste en une phase d'expansion se produisant simultanément dans de nombreuses

branches de l'économie, suivies de phases de récession, de contraction et de reprise tout aussi générales, qui se fondent dans la phase d'expansion du prochain cycle. Même si cet enchaînement de modification se renouvelle presque à l'infini, il n'en est pas pour autant périodique du point de vue de la durée. Les cycles varient de quelques années à quelques dizaines d'années. En effet, différents cycles ont été identifiés suivant leur durée :

- d'abord le cycle de Kitchin, le plus court, mis au jour dans les années 1920, décrit un cycle de trois à quatre ans. Il est basé sur la politique de stock des entreprises et se caractérise par une phase d'expansion d'environ deux ans suivie par une phase de croissance ralentie d'environ deux ans aussi.
- Puis arrive le cycle de Juglar, théorisé en 1862, d'une période de huit à dix ans. Il correspond à la dynamique de l'investissement des entreprises qui se caractérise par une phase d'investissements soutenus accompagnée une fois que tous les investissements rentables ont été réalisés, par un plongeon de l'investissement et donc de la croissance. C'est, par sa définition, le cycle qui est à ce jour le plus intéressant, cependant les autres d'une importance moindre ne peuvent être écartés de l'étude.
- Ensuite, c'est au tour du cycle de Kuznets mis en évidence dans les années 1930. Il dure environ entre quinze et vingt cinq ans et serait basé sur des variations démographiques qui stimuleraient par vague l'activité économique.
- Enfin, le dernier est le cycle de Kondratiev, c'est le plus connu des cycles économiques, il a été mis au jour dans les années 1920 puis 1930. Il caractérise les innovations apparaissant par groupes qui tirent la croissance pendant vingt à trente ans. Puis la croissance se tasse attendant que d'autres innovations relancent à leur tour l'économie.

Face à certaines limites que présentent le modèle de Black-Scholes et aux cycles économiques détaillés dans le paragraphe précédent, l'utilisation du modèle à changement de régimes de Hardy paraît être une solution intéressante à ces problématiques. En effet, ce modèle allie simplicité et prise en compte de la volatilité stochastique des facteurs de risques. Il propose que la volatilité puisse prendre une des  $N$  valeurs discrètes et varier de l'une à l'autre par des probabilités de passage définies en amont par le modélisateur tout en gardant une projection à partir d'un modèle lognormal.

L'objectif initial était de modéliser des séries économétriques hebdomadaires. La théorie du changement de régime a été introduite par Hamilton, puis Hardy fut le premier à l'appliquer à la dynamique des actions (RAUTUREAU, 2004). Le projet est de distinguer deux états du marché, l'un caractéristique d'une faible volatilité et l'autre relativement plus élevée. Cependant, ce mécanisme peut proposer plus de deux régimes et ainsi générer des distributions de rendement plus cohérentes et plus réalistes par rapport à l'historique. Une matrice de transition définit les probabilités de passage d'un état à un autre. Plus formellement, soit  $X_t$ , un modèle multi-états décrivant le régime de l'économie au temps  $t \geq 0$  et prenant ces valeurs dans un espace d'états  $\mathbb{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Ce processus est supposé markovien homogène en temps et est décrit par une mesure de probabilité initiale et une matrice de probabilité de changement de régime  $\mathbf{Q}$  telle que montré dans l'équation (2.9)

$$\mathbb{P}(X_t = e_j | X_{t-1} = e_i) = q_{ij}. \quad (2.9)$$

Tout comme pour le modèle de Black-Scholes, les dividendes sont supposés réinvestis. Donc, dans ce modèle, l'actif évolue selon une dynamique de Black-Scholes conditionnellement à  $X_t = e_i$ .

$$S_t = S_{t-1} \times \exp \left( \left( \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) + \sigma_i (W_t - W_{t-1}) \right).$$

Ce modèle est généralement utilisé en univers monde réel avec une estimation à partir de rendements historiques profonds. De plus le processus latent permettant de définir les probabilités de transition d'un régime à un autre est le plus souvent obtenu à partir d'un modèle de Markov caché (aussi appelé Hidden Markov Model).

## 2.5 Prise en compte d'une structure de dépendance dans l'optimisation et la projection

Les modèles de projection présentés précédemment permettront de projeter les différentes classes d'actifs qui interviendront dans la recherche d'une allocation optimale. Cependant ces modèles ont été définis séparément or dans la réalité les actifs n'évoluent pas complètement de manière individuelle les uns des autres. Cette dépendance doit donc nécessairement être intégrée pour obtenir une projection cohérente.

Plusieurs outils sont disponibles pour prendre en compte cette dépendance. L'outil le plus moderne est la copule, une distinction se fait selon deux familles, les copules archimédiennes d'une part. Elles décrivent des structures de dépendances variées dont notamment les dépendances asymétriques. D'autre part, les copules elliptiques qui quant à elles, représentent des dépendances symétriques. La copule gaussienne appartient à cette dernière famille de copules et sera retenue dans cette étude pour modéliser la structure de dépendance des classes d'actifs projetées. Cette copule sera en particulier préférée à la copule de student car la loi suivie par chacune des dynamiques de nos actifs est la loi normale.

Afin de l'implémenter en pratique, des coefficients de corrélation linéaire de Pearson doivent être estimés. Pour cela un coefficient sera calculé pour chaque couple d'actifs comme défini dans l'équation (2.10) : Soient X et Y deux distributions représentant deux classes d'actifs

$$r_p(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \times Var(Y)}}, \quad (2.10)$$

avec :

- $Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \times \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$  où :
  - \*  $\bar{x} = \sum_{i=0}^n x_i$  est la moyenne de X
  - \*  $\bar{y} = \sum_{i=0}^n y_i$  est la moyenne de Y
  - \*  $x_i$  et  $y_i$  sont les réalisations de X et Y.
- $Var(X) = \sqrt{\frac{1}{N} \times \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}$  la variance de X
- $Var(Y) = \sqrt{\frac{1}{N} \times \sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}$  la variance de Y.

D'après la définition du coefficient de corrélation linéaire de Pearson,  $r_p(X, Y) = r_p(Y, X)$ , donc la matrice de corrélation linéaire est symétrique, ce qui en fera une caractéristique essentielle lors de la projection.

En effet, lors de la simulation des mouvements browniens pour modéliser une trajectoire d'une classe d'actifs par exemple actions ou immobilier, ce n'est pas directement le bruit blanc qui est récupéré. Avant d'être utilisé dans un des modèles définis précédemment, il doit être préalablement corrélé.

Cette étape s'appuie sur la décomposition de Cholesky. Cette formule permet d'obtenir la racine carré de la matrice de corrélation déterminée plus haut. Ensuite, cette dernière est multipliée par les bruits blancs, préalablement simulés et rangés dans une matrice. Ainsi les bruits corrélés sont obtenus et seulement après cette étape, ils sont intégrés aux modèles de projection des actifs à partir de leur formule discrétisée.

Voici un exemple théorique avec seulement, deux actifs, un pas de projection annuel et un horizon de trois ans. Les bruits blancs sont rangés dans une matrice ayant 3 lignes (horizon) et 2 colonnes (nombre d'actifs). De plus la matrice  $\mathcal{M}_{\text{corrélation}}$  est supposé avoir déjà subie la décomposition de Cholesky.

$$\mathcal{M}_{\text{bruit blanc}} \times \mathcal{M}_{\text{corrélation}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc_{11} & bc_{12} \\ bc_{21} & bc_{22} \\ bc_{31} & bc_{32} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\text{bruit corrélé}}$$

La matrice  $\mathcal{M}_{\text{bruit corrélé}}$  obtenue contient les bruits corrélés à intégrer dans les modèles qui ont été choisis pour projeter les deux actifs.

## 2.6 État de l'art des modèles d'allocation stratégique

Dans le cadre de la gestion de l'Actif et du Passif (ALM), les modèles d'allocation stratégique d'actifs sont des outils essentiels pour aider les investisseurs à déterminer la répartition optimale de leur portefeuille entre différentes classes d'actifs. Dans cette partie, quelques modèles d'allocation stratégique d'actifs couramment utilisés dans le cadre de la gestion ALM seront passer en revue :

1. d'abord, le modèle de Markowitz : ce modèle est l'un des modèles d'allocation stratégique d'actifs les plus couramment utilisés. Il a été développé par Harry Markowitz en 1952 (MARKOWITZ, 1952) et est basé sur l'hypothèse selon laquelle les investisseurs cherchent à maximiser leur rendement tout en minimisant leur risque. Le modèle utilise l'optimisation de portefeuille pour déterminer la répartition optimale des actifs dans un portefeuille. Il s'appuie sur l'estimation des rendements et des risques de chaque actif et sur la corrélation entre les actifs pour déterminer l'allocation optimale. Un focus plus détaillé sera apporté dans la suite de ce chapitre.
2. Ensuite, le modèle de Black-Litterman : Le modèle de Black-Litterman est une extension du modèle qui s'inspire de la théorie de Markowitz. Il a été développé par Fischer Black et Robert Litterman en 1992 (BLACK et LITTERMAN, 1992). Il utilise une approche bayésienne pour estimer les rendements et les risques de chaque actif en fonction de l'information disponible sur le marché. Le modèle permet également de prendre en compte les biais comportementaux des investisseurs et de les corriger pour obtenir une allocation plus réaliste et efficiente. Ce modèle est une méthode de gestion de portefeuille qui combine des hypothèses de marché avec les vues d'un investisseur pour générer un portefeuille optimisé. Il repose sur la théorie de l'équilibre des actifs financiers, qui stipule que les investisseurs ont des préférences d'investissement qui reflètent leur aversion au risque et leur horizon temporel. Le modèle commence par estimer les rendements attendus des actifs financiers en utilisant une approche de marché équilibrée. Cela signifie que les rendements attendus sont calculés en fonction de la relation entre les prix des actifs et les rendements passés. Aussi, l'investisseur peut fournir ses propres « vues » sur les rendements des actifs, qui peuvent être basées sur des informations privilégiées ou des perspectives macroéconomiques. Les vues de l'investisseur sont ensuite combinées avec les hypothèses de marché pour générer un portefeuille optimal qui reflète les préférences d'investissement de l'investisseur tout en respectant

les contraintes de marché. Le modèle de Black-Litterman est souvent utilisé pour ajuster un portefeuille existant ou pour créer un portefeuille à partir de zéro. Il est considéré comme une méthode sophistiquée et flexible de gestion de portefeuille, mais elle nécessite une expertise approfondie en matière de finance, d'économie et de marché financier. La théorie proposée par ces deux mathématiciens est particulièrement intéressante car elle intègre des jugements d'experts lors de la calibration des paramètres qui permettront de définir un couple rendement risque de nos classes d'actifs utiles à la fois pour la recherche d'un portefeuille optimale mais aussi lors de la projection des portefeuilles

Le modèle de durée : le modèle de durée est utilisé pour déterminer la répartition optimale des actifs à long terme. Il se base sur la durée de chaque actif, qui mesure la sensibilité de son prix aux variations des taux d'intérêt. Le modèle permet de minimiser le risque de taux d'intérêt en équilibrant la durée du portefeuille avec celle des passifs à long terme. Ce modèle n'a pas été retenu dans la suite de cette étude car la vision adoptée pour utiliser les différents actifs ne permet pas d'introduire une sensibilité sur les taux d'intérêt. De plus la question de durée de chaque actif n'a pas lieu de se poser car comme défini dans le premier chapitre les supports d'investissements sont des fonds communs de placement.

Le quatrième modèle à être présenté est le modèle de surplus, c'est un modèle d'allocation stratégique d'actifs utilisé dans la gestion de fonds de pension. Il consiste à déterminer la répartition optimale des actifs en fonction du niveau de capitalisation de la caisse de pension et de son objectif de financement des passifs à long terme. Le modèle permet de minimiser le risque de déficit de financement en ajustant la répartition des actifs en fonction de l'évolution de la capitalisation de la caisse de pension. Ce modèle repose sur une méthode de gestion de portefeuille qui est basée sur la maximisation de la richesse nette d'un investisseur par rapport à un objectif de richesse spécifique. Le modèle a été développé par Richard Grinold et Ronald Kahn en 1999. Le modèle de surplus utilise une approche de gestion active qui vise à maximiser le surplus, qui est la différence entre la richesse actuelle de l'investisseur et son objectif de richesse. Pour atteindre cet objectif, le modèle de surplus utilise une approche de prévision de la rentabilité qui tient compte à la fois des informations de marché et des connaissances internes de l'investisseur. Il est basé sur l'hypothèse selon laquelle les investisseurs cherchent à maximiser leur richesse nette par rapport à leur objectif de richesse spécifique, plutôt que de chercher à maximiser les rendements bruts ou à minimiser les risques. En d'autres termes, l'investisseur est prêt à prendre des risques plus importants si cela peut aider à atteindre l'objectif de richesse. Le modèle de surplus a été largement utilisé dans la gestion institutionnelle de portefeuille, en particulier pour les fonds de pension. Il est considéré comme une méthode sophistiquée de gestion de portefeuille, mais nécessite une expertise approfondie en matière de finance et une connaissance avancée en analyse quantitative. Cependant les fonds de pensions ne sont pas encore arrivés en France et même si les nouveaux dispositifs visent à se rapprocher de ce type de produit, leur gestion reste tout de même prudente. En effet, les caisses de retraites, tout comme les régimes de retraite supplémentaire ne sont pas encore prêts à se défaire significativement des contraintes de volatilité (risque principal pris dans ce type de gestion), c'est pourquoi cette approche n'a pas été retenue.

3. Enfin, le MEDAF ou Modèle d'Equilibre Des Actifs Financiers (CAPM for Capital Asset Pricing Model) (BERNARD, 2007) : un modèle d'allocation stratégique d'actifs qui prend en compte le ratio de Sharpe, qui mesure la rentabilité ajustée du risque d'un portefeuille. Le modèle consiste à maximiser le ratio de Sharpe en équilibrant la répartition des actifs entre les actifs à risque et les actifs sans risque (SHARPE, 1964). Ce modèle repose sur une mesure de l'excès de rendement d'un investissement par rapport à un investissement sans risque, ajusté en fonction du risque pris pour obtenir ce rendement. Plus précisément, le ratio de Sharpe calcule le ratio entre le rendement

excédentaire (c'est-à-dire la différence entre le rendement de l'investissement et le taux d'intérêt sans risque) et la volatilité de cet investissement. Ce ratio permet de quantifier la performance d'un portefeuille d'investissement par rapport à son risque. Il est souvent utilisé pour évaluer la performance des fonds d'investissement, des portefeuilles de gestion de patrimoine, des stratégies de trading, . . . Les investisseurs utilisent cette mesure pour sélectionner les portefeuilles qui offrent les meilleurs rendements ajustés en fonction du risque et pour comparer les performances des différents portefeuilles. A partir de ce modèle, le ratio de Sharpe sera retenu et donc utilisé dans la suite du mémoire. Un focus sera d'ailleurs donné dans la suite ainsi que le taux d'intérêt sans risque retenu. De plus ce ratio s'adapte complètement aux supports d'investissement dans lesquels les classes d'actifs seront investies ce qui lui donne un intérêt supplémentaire au regard des précédents modèles présentés.

En conclusion, il existe différents modèles d'allocation stratégique d'actifs dans le cadre de la gestion ALM. Chacun de ces modèles est adapté à des objectifs spécifiques et à des contextes particuliers. Les investisseurs doivent choisir le modèle qui convient le mieux à leur situation pour déterminer la répartition optimale. Cette revue a permis d'identifier des caractéristiques de certains modèles utiles à la construction de l'outil ALM.

## 2.7 Sélection de portefeuilles

Le processus de sélection de portefeuilles proposé par Harry Markowitz dans (MARKOWITZ, 1952) explique qu'il repose sur un principe fondamental selon lequel l'investisseur maximise les rendements espérés. Cependant, même si l'investisseur souhaite un rendement attendu maximisé, il cherchera à minimiser le plus possible la variance de ce dernier. Finalement, tout le travail repose sur une règle simple à formuler, le choix du portefeuille optimal doit répondre aux contraintes de rendement attendu versus variance des rendements. Deux types d'optimisation existent, soit une maximisation d'espérance de rendement sous une contrainte de variance donnée, soit au contraire une minimisation de la variance sous une contrainte de rendement donnée. Cette théorie vise à choisir judicieusement une combinaison d'actifs pour diversifier au mieux le portefeuille et ainsi en réduire sa variance.

### 2.7.1 Formulation du problème

La théorie de Markowitz est statique, dans le sens où seuls les instants  $t = t_0$ , l'instant initiale auquel l'allocation est construite et l'instant  $t = t_f$ , instant auquel l'évaluation du rendement de l'allocation construite est calculée. Le caractère mono-période de cette théorie convient très bien à notre problème. En effet, nos clients cherchent à adosser des passifs long terme (retraite) et ne sont pas expert en gestion d'actifs, une allocation stratégique avec des poids pour chaque actif identique dans le temps, est donc adaptée.

Le problème d'allocation stratégique de Markowitz consiste à déterminer la répartition optimale des actifs dans un portefeuille en fonction de leur rendement et de leur risque. La solution mathématique de ce problème est appelée la frontière efficiente de Markowitz.

Pour trouver cette frontière efficiente, il convient d'abord calculer la matrice de covariance des rendements des actifs, qui mesure la relation entre leurs rendements. Ensuite, il est nécessaire de calculer le vecteur des rendements attendus pour chaque classe d'actifs.

En utilisant ces informations, il est possible de construire une série de portefeuilles acceptables, en

variant la proportion de chaque classe d'actifs dans le portefeuille. Pour chaque portefeuille, les calculs du rendement attendu et du risque associé sont effectués. Et le risque associé est caractérisé par l'écart-type.

En plaçant les portefeuilles suivant leurs coordonnées (rendements attendus en fonction du risque), on obtient la frontière efficiente de Markowitz. Cette frontière représente tous les portefeuilles qui offrent un rendement maximal pour un niveau de risque donné. Ce qui peut aussi se voir comme l'ensemble des portefeuilles qui offrent un risque minimal pour un rendement donné.

La solution optimale dépendra alors des objectifs et des contraintes de l'investisseur, tels que son profil de risque, son horizon de placement et ses préférences en matière de rendement. Le choix final de la répartition des actifs sera donc une décision subjective de l'investisseur, en utilisant la frontière efficiente comme guide.

De manière plus analytique, le rendement  $R_i$  d'un actif  $i$  est défini par l'équation (2.11). De plus, dans cette étude  $N \in \mathbb{N}$  actifs seront considérés

$$R_i = \frac{S_i(t_f) - S_i(t_0)}{S_i(t_0)}, \forall i \in [1, N], \quad (2.11)$$

avec,  $S_i(t)$  le prix de l'actif  $i$  à l'instant  $t$ . Le prix de l'actif étant projeté à partir d'un des modèles défini précédemment dont la dynamique comporte un mouvement brownien, est une variable aléatoire donc par définition le rendement de chaque actif aussi. L'espérance du rendement d'un actif  $i$  est notée  $\mathbb{E}(R_i) = \mu_i$  et elles sont toutes regroupées dans un vecteur  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ . De plus le vecteur de poids  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$  représente la proportion investie dans chaque actif du portefeuille. Ces notations permettent maintenant d'introduire le rendement du portefeuille donné dans l'équation (2.12)

$$R_p = \sum_{i=1}^N x_i R_i. \quad (2.12)$$

De plus, la matrice  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1N} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$  de variance covariance des  $R_i$  permet d'exhiber les deux résultats les plus importants de l'étude, à savoir l'espérance de rendement du portefeuille notée  $\mu_p$  dans l'équation (2.13) et la volatilité du portefeuille (risque) définie par l'écart type  $\sigma_p (= \sqrt{\sigma_p^2})$  où  $\sigma_p^2$  est la variance qui est définie dans l'équation (2.14)

$$\mu_p = \mathbb{E}(R_p) = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad (2.14)$$

avec  $\sigma_i^2$  la variance de l'actif  $i$  et  $\rho_{ij}$  la corrélation entre les actifs  $i$  et  $j$ . En effet pour le calcul  $\sigma_p$  la dernière forme sera privilégiée car elle requiert les variances et les coefficients de corrélation qui sont disponibles au contraire des covariances.

Dans la théorie générale de la résolution du problème de Markowitz, c'est un problème de minimisation du risque sous contrainte de rendement qui est privilégié. Considérons les notations suivantes :

- $N$  est le nombre de classes d'actifs dans l'univers du gestionnaire

- $x_i$ , la proportion investie dans le titre  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$
- $R_p$ , le vecteur ( $N \times 1$ ) du rendement espéré du portefeuille constitué de tous les actifs de l'univers considéré.
- $R_k$ , le rendement espéré de la classe d'actifs  $k$ .
- $\sigma_k$ , l'écart type de la classe d'actifs  $k$ .

Le problème consiste à choisir les pondérations  $x_i$  qui permettent d'avoir un portefeuille ayant la plus faible variance pour chaque niveau de rendement donné. De manière équivalente, le problème peut être formulé comme consistant à choisir les pondérations qui permettent d'avoir le rendement le plus élevé pour chaque niveau de risque donné. La formulation mathématique du modèle est la suivante

$$(\mathbf{P}_M) \begin{cases} \min & \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s.c. :} & \\ & \sum_{i=1}^N x_i = 1; \\ & \sum_{i=1}^N x_i R_i = R_p^*; \end{cases}$$

La deuxième contrainte signifie que le rendement espéré du portefeuille doit être égal au rendement cible  $G = R_p^*$ . La forme matricielle du problème ( $P_M$ ) est formulée comme suit

$$(\mathbf{P}_M) \begin{cases} \min & x^T V x \\ \text{s.c. :} & \\ & x^T e = 1; \\ & x^T R = G; \end{cases}$$

La solution de ce problème a été obtenue grâce à (RICHARD, 1992) en utilisant les conditions nécessaires d'optimalité. Le lagrangien du problème est défini par

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^T V x + \lambda_1 (G - x^T R) + \lambda_2 (1 - x^T \mathbf{1}),$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre entraînent

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x} &= Vx - \lambda_1 R - \lambda_2 \mathbf{1} = 0 \\ x &= \lambda_1 V^{-1} R + \lambda_2 V^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Les deux contraintes nous permettent de déterminer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

$$\begin{aligned} x^T e = 1 &= \lambda_1 e^T V^{-1} R + \lambda_2 e^T V^{-1} e \\ x^T R = G &= \lambda_1 R^T V^{-1} R + \lambda_2 R^T V^{-1} e. \end{aligned}$$

Posons :  $a = R^T V^{-1} R$ ,  $b = R^T V^{-1} e$  et  $c = e^T V^{-1} e$ . Le système devient

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 b + \lambda_2 c \\ G &= \lambda_1 a + \lambda_2 b. \end{aligned}$$

En résolvant ce système d'équations à deux inconnues on trouve

$$\lambda_1 = \frac{Gc - b}{ac - b^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - Gb}{ac - b^2}.$$

En substituant  $(\lambda_1$  et  $\lambda_2)$ , on trouve l'expression de  $x$ .

$$x = \frac{Gc - b}{ac - b^2} V^{-1} R + \frac{a - Gb}{ac - b^2} V^{-1} e.$$

Tout portefeuille appartenant à la frontière efficiente s'écrit comme une combinaison linéaire du portefeuille de variance minimale ( $VM$ ) et du portefeuille tangent ( $TG$ ) qui maximise le rendement espéré. En notant  $x_{MV}$  et  $x_{TG}$  respectivement les vecteurs des poids du portefeuille de variance minimale et du portefeuille tangent alors on démontre que  $x_{MV} = V^{-1} \frac{1}{c}$  et  $x_{TG} = V^{-1} \frac{R}{b}$

$$x = \left( \frac{Gb - b^2/c}{d} \right) x_{TG} + \left( \frac{a - Gb}{d} \right) x_{MV},$$

où  $d = a - b^2/c$ .

Le portefeuille de variance minimale se calcule en minimisant la variance avec la seule contrainte  $x^T e = 1$ . Le portefeuille tangent se calcule en maximisant le rendement avec une contrainte de variance cible.

Dans cette étude le principe est identique, seulement l'approche diffère puisque l'objectif est de déterminer le portefeuille optimal qui maximise le rendement en se donnant un niveau de risque cible  $\sigma_p$ . C'est à partir d'échanges avec nos clients que ce choix a été pris car ils préfèrent raisonner par niveau de risque. Ainsi, le problème d'optimisation sous contrainte se formalisera selon l'équation (2.15)

$$\max_x \quad \mu^T x \quad \text{s.c.} \quad \begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= \sigma_p \\ \sum_{i=0}^N x_i &= 1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.7.2 Contraintes d'optimisation et limites

Dans la section précédente, la contrainte sur les poids imposait un plein investissement car la somme des poids devait être égale à un. Cependant, ceci ne suffit pas car elle offre une possibilité à de la vente à découvert, c'est-à-dire avoir des poids strictement négatifs. Or dans ce contexte ce type d'opérations n'est pas autorisé. Ainsi, une contrainte supplémentaire d'inégalité est retenue,  $\forall i \in [1, N], x_i \geq 0$ . Ces  $N$  dernières contraintes ne permettent plus d'obtenir une solution explicite à notre problème d'optimisation. Néanmoins, des solutions numériques existent au moyen d'algorithmes d'optimisation quadratique. Formellement, le nouveau problème d'optimisation sous contrainte est résumé dans l'équation (2.16)

$$\max_x \quad \mu^T x \quad \text{s.c.} \quad \begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= \sigma_p \\ \sum_{i=0}^N x_i &= 1 \\ \forall i \in [1, N], x_i &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De plus, l'ajout de contraintes de quantité est une pratique généralement réalisée afin de décider d'un seuil minimum d'un actif en portefeuille ou au contraire de bloquer à une certaine limite proportion d'un autre actif dans le portefeuille. De plus, ce type de contrainte n'est pas nécessairement appliqué à un seul actif, mais peut aussi être utilisé sur un groupe d'actifs, par exemple, avec  $N = 5$  actifs, la somme des poids des actifs 1 et 2 peut être fixée à plus de 50% ou au contraire à moins de 20% suivant ce que représentent ces actifs.

Enfin, cette approche dite Moyenne/Variance comporte certaines limites. Ici la mesure de risque est caractérisée par la volatilité, celle-ci définit un intervalle autour de la moyenne où la valeur du rendement peut se trouver. Or dans la réalité les distributions ne sont pas toujours symétriques, une mesure

de risque plus précise faisant intervenir des moments d'ordres plus élevés (que 2 dans cette théorie) peuvent être amenés à être considérés. De plus la variance donne autant d'importance aux valeurs en dessous de la moyenne qu'aux valeurs au-dessus. Or un investisseur cherche surtout à se prémunir contre une baisse, une mesure de risque qui capturerait seulement le risque baissier serait alors plus adaptée.

Aussi, cette théorie repose grandement, pour ne pas dire totalement sur les inputs qui lui sont fournies, à savoir les projections du générateur de scénarios économiques. Celle-ci peuvent aussi présenter certaines limites par rapport aux modèles utilisés pour les projeter.

### 2.7.3 Le rebalancement

Une fois la sélection de portefeuille réalisée, l'étude continue et se conclue par une évaluation des caractéristiques de ce dernier. En effet, ce portefeuille va être projeté selon différents scénarios économiques à l'aide du GSE construit précédemment. Il permettra d'obtenir des informations sur le rendement de l'allocation dans des cas favorables (quantiles 75%, 95%, 99%, ...), dans le cas médian et dans des cas défavorables (quantiles 25%, 5%, 1%, ...). Cependant, la théorie d'allocation d'actifs repose ici sur une stratégie de gestion dite statique. C'est-à-dire que les poids de l'allocation définis par le modèle doivent nécessairement rester constants au fur et à mesure de l'horizon de projection. Dans la littérature, cette stratégie est aussi appelée *Fixed Mix*, (FALEH, 2011) et elle a pour but de garder inchangé le risque porté par le client. Généralement, les différents actifs ne procurent pas des rendements identiques, ce qui conduit à modifier la proportion en portefeuille dès le premier pas de temps. De ce fait, en l'absence d'un ajustement récurrent, l'allocation de portefeuille peut diverger vers une allocation finale très éloignée de celle définie à partir de l'outil d'optimisation. A terme, le portefeuille pourrait devenir trop risqué ou trop prudent par rapport au profil de risque de l'investisseur.

C'est donc le rebalancement qui permettra de répondre à cette contrainte. De ce fait, un rééquilibrage sera constaté annuellement pour éviter à long terme des rendements en dessous des espérances si le portefeuille devenait trop prudent ou au contraire d'éviter à une poche trop importante du portefeuille d'être touchée par une éventuelle crise du marché actions. L'objet est donc de garder une exposition au risque constante et égale à celle préalablement définie, durant toute la projection.

De manière plus concrète, les actifs sur-représentés dans le portefeuilles sont vendus pour revenir au niveau de l'allocation cible. Les fonds récupérés par ces ventes sont ensuite réinvestis dans les actifs sous-représentés pour, ici aussi, se ramener à l'allocation cible. Après ce mécanisme, le portefeuille est de nouveau alloué suivant l'allocation cible définie par l'outil d'optimisation.

Le rebalancement est ici détaillé dans un cas simple avec un portefeuille de montant égal à 200 avec deux actifs notés A1 et A2 dans lequel l'allocation cible est à 50/50. De plus A1 a une performance de 10% sur une année et A2 une performance de 30% sur la même année. L'allocation au bout d'une année n'est donc plus à 50/50 car le montant total du portefeuille est maintenant de 240 avec A1 à 110 et A2 à 130. Une ré-allocation d'actifs est donc nécessaire pour se ramener à l'allocation cible (50/50 définie plus haut) et donc avoir A1 et A2 à des montants égaux de  $240/2 = 120$ . Voici en figure 2.3, une représentation du rebalancement qui dans le mémoire est réalisée chaque année.

## 2.8 Mesures de risques

La volatilité étant une mesure de risque relativement simple et déjà explicitée dans la section précédente, elle ne sera pas reprise ici. Cette partie présente des mesures de risques souvent utilisées mais relevant

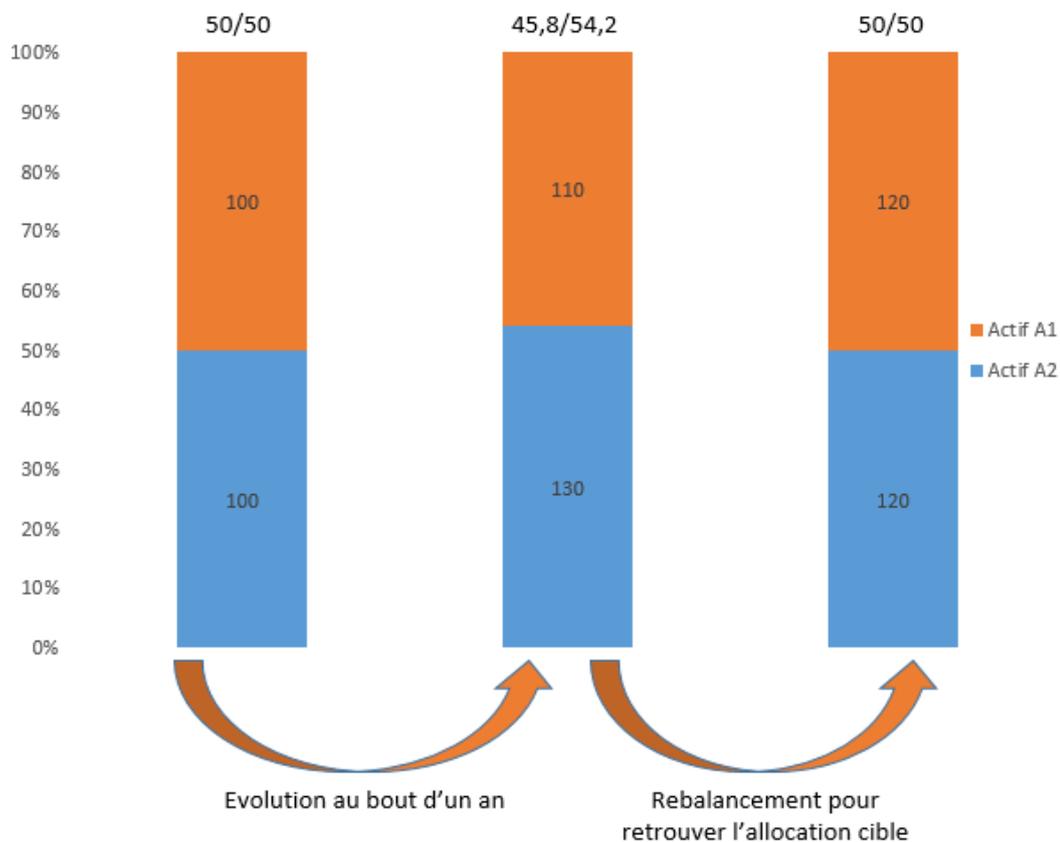


FIGURE 2.3 : Représentation du rebalancement sur 1 année

d'une définition plus complexe. En effet, la VaR, suivie de la TVaR et enfin du Ratio de Sharpe sont détaillées dans les prochaines lignes de ce mémoire car ce sont autant d'indicateurs nécessaires pour le client ou l'investisseur afin de choisir son portefeuille final.

### La Value-at-Risk : VaR

La notion de Value-at-Risk a été introduite dans les marchés financiers à la fin des années 1980. Elle a été particulièrement popularisée par la banque américaine JP Morgan en 1993 à travers son service *Riskmetrics*. La réglementation internationale a fortement appuyé l'utilisation de la VaR comme mesure de risques, notamment suite à des faillites telles que la banque *Barings* en 1995 ou bien la banque *Sumitomo* en 1996. C'est donc sous l'influence du Comité de Bâle que la VaR est devenue un outil majeur dans l'évaluation des risques.

Du côté assurantiel, la VaR est arrivée rapidement comme une mesure de risques centrale dans les problématiques de gestion des risques. En effet, elle est au centre du nouveau référentiel prudentiel Solvabilité II. La VaR est aussi employée chez les institutions financières. Elle mesure la perte probable maximale que peut subir un portefeuille à un niveau de risque  $\alpha$  sur un horizon fixé.

La VaR a l'avantage d'indiquer la probabilité des pertes d'un portefeuille pour un horizon de temps donné à l'aide d'une statistique. Il ne s'agit pas de donner la perte maximale, mais bien de donner un chiffre seuil de la perte potentielle avec un niveau de probabilité fixe a priori.

Formellement, soit  $X$ , une variable aléatoire représentant le rendement d'un actif financier. Lorsqu'elle

est positive elle représente un gain, dans le cas contraire elle représente une perte. Soit  $\alpha \in [0, 1]$ , le niveau de confiance par rapport auquel est déterminé la perte probable. Généralement, lorsqu'il s'agit de rendements financiers, les acteurs prennent  $\alpha$  tel que  $(1 - \alpha) \in \{0, 5\%; 1\%; 5\%\}$ . Pour un horizon de gestion donnée, la  $\text{VaR}_\alpha$  correspond à un montant au-delà duquel survient une perte avec une probabilité de  $(1 - \alpha)$ . Elle est donc donnée par le quantile d'ordre  $(1 - \alpha)$  de la distribution des rendements :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha) = -F_X^{-1}(\alpha)$$

Avec  $F_X$  la fonction de répartition de la variable  $X$ ;

Pour le dire autrement,  $\mathbb{P}(X \geq \text{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$ . La  $\text{VaR}_\alpha$ , exprime la perte maximale pouvant être constante dans les  $\alpha$  cas les plus favorables ou encore la moindre perte pouvant être constatée dans les  $(1 - \alpha)$  cas défavorables.

### La Tail-Value-at-Risk : TVaR & La Conditionnal-Value-at-Risk : CVaR

La TVaR est une autre mesure de risque qui considère un coussin de sécurité au-delà du quantile. De plus dans le cas continu (c'est le cas de notre étude), elle coïncide avec une autre mesure de risque, la Conditionnal-Value-at-Risk, qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X|X > \text{VaR}_\alpha(X)]$$

La CVaR de niveau  $\alpha$  représente le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau  $\alpha$ . Elle sera préférée à la TVaR dans la suite de l'étude.

Graphiquement, la VaR ainsi que la CVaR se mesurent comme montré dans la figure 2.4

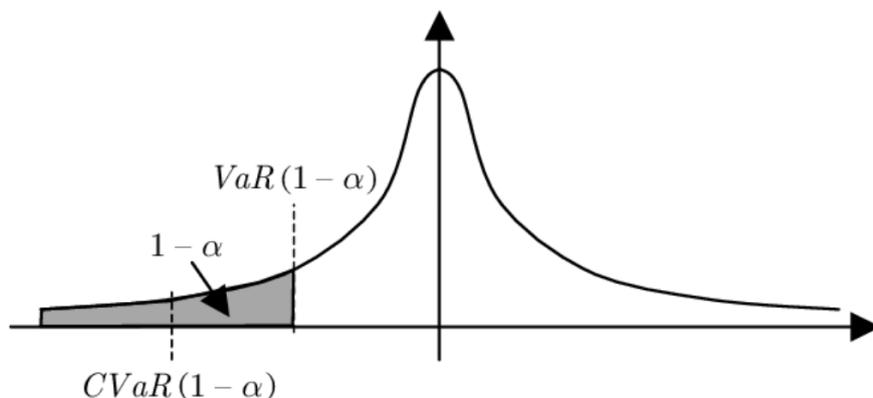


FIGURE 2.4 : Détermination de VaR et de la CVaR

### Le Ratio de Sharpe

Le ratio de Sharpe sera aussi utilisé au cours de cette étude. Il se note  $S$  et est défini de la manière suivante :

$$S = \frac{R_S - R_f}{\sigma_S}$$

Ici,  $R_S$  correspond au rendement du portefeuille,  $R_f$  à celui du taux sans risque et  $\sigma_S$  représente la volatilité du portefeuille.

Ce ratio permet de classer des portefeuilles de risques et de performances différents. Sur un même horizon, le portefeuille ayant la valeur de ratio la plus élevée est considéré comme le plus performant. Dans la suite de cette étude, le taux sans risque sera le taux zéro coupon publié par l'institut des actuaires avec l'aide de SIX Financial Information France. Ce taux sera aussi utilisé pour actualiser les prestations afin de calculer des taux de couverture. La figure 2.5 représente la courbe des taux zéro coupons mensuels entre 2022 et 2072.

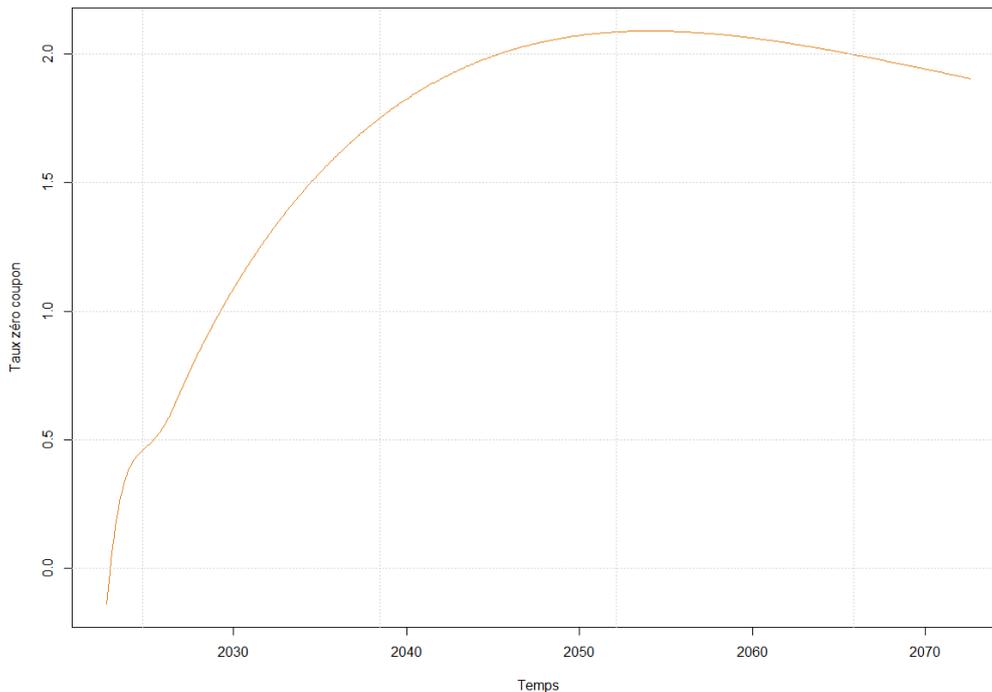


FIGURE 2.5 : Courbe des taux zéro coupon

L'ensemble de ces mesures apporte des informations supplémentaires à nos clients afin que leur choix soit fait en toute connaissance de cause. Ces mesures seront reprises dans le cas pratique du prochain chapitre lors de l'étude de différents portefeuilles optimaux.

### Taux de couverture

Enfin, ce chapitre se termine avec la définition du taux de couverture. C'est le point qui intéresse le plus nos clients car il donne une indication forte sur la viabilité du régime étudié. De plus le taux de couverture n'est pas défini de la même manière selon les études, d'où l'intérêt de définir ici, celui adopté. Il est noté  $\theta_t^c$  et se calcule à une date d'évaluation  $t$  donnée et sur un horizon donné (égal à 40 ans dans cette étude). Formellement, il est exprimé dans l'équation (2.17)

$$\theta_t^c = \frac{R_t + (\text{Cotisations actualisées})_t}{(\text{Prestations actualisées})_t}. \quad (2.17)$$

D'abord, les cotisations et prestations actualisées. Elles dépendent chacune de la date d'évaluation car les cotisations (respectivement les prestations) actualisées sont égales à la somme des cotisations reçues (respectivement prestations servies) chaque année, durant l'horizon donné, actualisées à l'aide de la courbe des taux zéro coupon présentée précédemment.

Ensuite,  $R_t$ , représente la réserve totale à l'instant  $t$  du régime. Cette réserve évolue selon deux paramètres :

- le contexte économique, en effet, cette réserve est complètement investie sur les marchés, elle est donc soumise aux aléas financiers.
- Le solde technique. Il représente le flux, entrant si les cotisations perçues sont supérieurs aux prestations servies, ou, sortant si les prestations servies sont supérieurs aux cotisations perçues. Dans cette étude, ce solde technique est calculé annuellement et est intégré au portefeuille au moment où le rebalancement est effectué.

Cette définition du taux de couverture se rapproche de celle donnée dans (SECRÉTARIAT GÉNÉRAL DU CONSEIL D'ORIENTATION DES RETRAITES, 2009) pour le taux de couverture dynamique.

## 2.9 Conclusion du chapitre 2

Ce second chapitre a permis de faire l'état des lieux de toute la théorie qui entoure ce mémoire. En effet, les premières sections ont exposé et détaillé l'univers de projections des portefeuilles, à savoir en univers monde réel, et les modèles les plus classiquement utilisés dans ce type d'études.

Ensuite, la théorie de l'allocation de portefeuilles a été introduite avec en outre les problématiques inhérentes à prendre en compte lors de la mise en place de ce type d'outil.

Enfin, la définition de certaines mesures de risques ainsi que celle du taux de couverture ont été rappelées car nécessaire dans le choix de l'allocation finale.

Tout ceci amène au dernier chapitre de ce mémoire, dans lequel les outils seront calibrés aux paramètres de notre étude pour apporter une réponse à notre problématique d'allocation optimale dans un cadre long terme. Une première phase de détermination d'hypothèses sera étudiée puis une phase de restitution des résultats et phase critique termineront cette étude.

## Chapitre 3

# Application d'un cas pratique et études d'impacts dans un cadre long terme

### 3.1 Calibration des modèles de projection d'actifs

La calibration d'un GSE nécessite plusieurs étapes, dont une, particulièrement importante qui consiste à sélectionner les données. En effet, elle doit assurer que l'ensemble des données retenues couvre presque intégralement le périmètre de l'étude avec une granularité assez fine pour prendre en compte les caractéristiques de chacune et en même temps assez large pour être représentative d'une classe d'actifs.

#### 3.1.1 Hypothèses

Pour définir les hypothèses retenues dans cette étude, les indices utilisés pour chaque classe d'actifs sont rappelés dans le tableau 3.1 :

Classe d'actifs	Sous-catégorie	Indice
Action	Action Monde	MSCI World NR EUR
Action	Action Européenne	MSCI Europe NR EUR
Action	Action pays émergent	MSCI EM NR EUR
Taux	Obligation crédit	FTSE EMU GBI EUR
Taux	Obligation souveraine	Blommborg Euro Corps Bond TR EUR
Monétaire	Monétaire	€STER
Immobilier	Immobilier direct	IEIF Immobilier France TR EUR
Action non cotées	Action PME	Euronext Paris CAC Mid& Small NR EUR

TABLE 3.1 : Récapitulatifs des indices retenus pour chaque classe d'actifs

En effet, huit sous-catégories sont retenus dans cette étude, trois classes actions ainsi qu'une classe d'actifs monétaire qui ne sont soumises à aucune contrainte d'investissement, c'est-à-dire que le poids de chaque actif peut varier entre 0 et 100% dans le portefeuille. Cependant pour la classe d'actions non cotées une contrainte d'investissement a été retenue : la proportion d'actions non cotées présente en portefeuille ne peut excéder 5%. De plus, pour les deux classes obligataires une contrainte d'in-

vestissement a aussi été fixée : la somme des poids des produits de taux ne peut être inférieure à un seuil de 34%. Enfin, la classe d'actifs immobilier présente elle aussi une contrainte d'investissement : la proportion d'immobilier ne pourra dépasser une limite de 20%.

Ici, les indices seront principalement utilisés pour déterminer les matrices de corrélation car des hypothèses de risque et de performance seront proposées et justifiées dans la suite de cette étude.

Cependant, avant de fournir les hypothèses pour chaque classe d'actifs, un regard important mérite d'être porté sur ces indices. Pour chacun d'eux, le terme *EUR* est retrouvé à la fin. Cette indication sur la devise dans laquelle est exprimé cet indice est très importante et mérite une justification. En effet certains indices regroupent des titres émis dans des devises différentes de l'euro. Le choix aurait très bien pu être de prendre l'indice MSCI World NR USD c'est-à-dire un indice action monde émis en dollars américains. Or, les passifs (retraites) des entreprises à couvrir sont tous en euro, ce qui permet de justifier le choix de la devise. Cependant les taux de change évoluent et donc les dynamiques des ces indices ne sont pas les mêmes suivant la devise dans laquelle ils sont émis. Par exemple dans la figure 3.1, ce sont les hypothèses de taux de rendement de l'indice MSCI Europe Index selon 9 devises différentes.

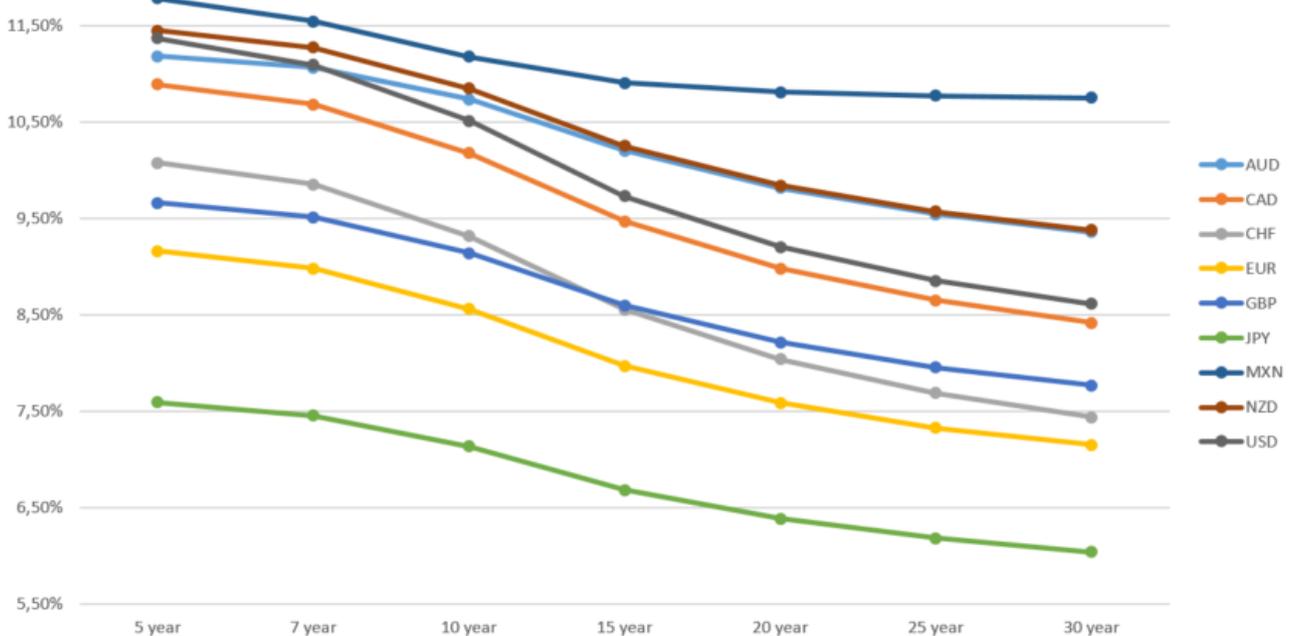


FIGURE 3.1 : Évolution du taux de rendement espéré de l'indice MSCI Europe Index dans 9 devises différentes

Les 9 devises apparaissant dans le tableau sont le dollar australien (AUD), le dollar canadien (CAD), le franc suisse (CHF), l'Euro (EUR), la livre britannique (GBP), le yen japonais (JPY), le pesos mexicain (MXN), le dollars néo-zélandais (NZD) et le dollar américain (USD). Même si une tendance peut se dégager de ces courbes, les taux de rendement ne sont pas identiques. De plus certaines courbes se croisent ou d'autres présentent des pentes plus fortes ou plus faibles, ce qui permet de rendre compte que le choix de la devise n'est pas anodin et doit être vérifié sérieusement pour des entreprises de taille internationale.

### 3.1.2 Méthodologie

Dans la suite de cette étude l'approche adoptée s'organisera en plusieurs étapes. Pour chacune des classes d'actifs retenues, une hypothèse d'espérance de rendement et une hypothèse de volatilité seront déterminées dans un cadre central, dans un cadre pessimiste et dans un cadre optimiste. À partir de ces trois grands scénarios économiques possédant des hypothèses qui leurs sont propres, une recherche de portefeuilles optimaux sera apportée, suivie d'une mesure de leur taux de couverture. En effet chacun des portefeuilles optimaux sera projeté à partir des modèles définis précédemment en intégrant les engagements à venir. La dernière étape consistera à estimer la viabilité financière du régime à différents horizons temporels à l'aide de calculs de percentiles (5%, 50% médiane, 95%).

Cette approche fait suite à un contexte et un environnement macroéconomique à court et moyen terme relativement incertain. En effet, une crainte grandissante de récession avec des prévisions de croissance mondiale à 3,2% en 2022 et 2,9% pour 2023 d'après (GOURINCHAS, 2022). De plus, la situation géopolitique reste instable avec, en particulier, la guerre en Ukraine. Enfin, une inflation mondiale soutenue que ce soit sur les denrées alimentaires ou l'énergie mais aussi sur la perturbation des chaînes d'approvisionnement ne vont pas dans le sens d'un futur solide et durable.

Du côté des banques centrales, depuis 2021 et face aux phénomènes d'inflation, elles ont amorcé le début d'un cycle de hausse des taux d'intérêt et sont en train de commencer la normalisation de leur politique monétaire.

Du côté des entreprises, elles sont plus susceptibles d'être affectées par un contexte économique en récession, l'inflation et la hausse des taux. Ceci augmente le risque de défaut et représente donc un facteur générant l'accroissement de la volatilité sur les marchés. Ceci explique aussi la séparation de la classe d'actifs taux en crédit et souverain pour prendre en compte cette caractéristique.

Le but de cette approche est d'abord de proposer des hypothèses pour chacun des scénarios.

C'est pourquoi le scénario pessimiste décrira un contexte géopolitique tendu avec, d'une part, une guerre en Ukraine de longue durée nuisant à la confiance et à la consommation et participant à l'intensification de l'inflation. D'autre part, de tensions entre la Chine et les États-Unis. La Covid-19, connaîtra quant à elle, de possibles résurgences et mutations du virus qui mèneront à de nouvelles restrictions de mobilités et à des perturbations importantes des chaînes d'approvisionnement. Du point de vue économique, l'hypothèse retenue est une inflation élevée et incontrôlée. Ce qui aura un fort impact sur les politiques monétaires et budgétaires pour faire face à la récession et à des défaillances liées à la dette de certains pays émergents. Tout ceci affectera aussi la transition énergétique avec un report des politiques et des investissements destinés à la lutte contre le réchauffement climatique. En résumé ce scénario est le reflet d'une hausse des taux et d'une inflation non maîtrisée.

Pour le scénario central, la guerre en Ukraine ne s'intensifiera pas mais les prix des matières premières comme celui de l'énergie resteront à des niveaux élevés. La Covid-19 sera caractérisée comme maladie endémique (qualifie une maladie constamment présente dans une population donnée). L'économie connaîtra un ralentissement progressif de la croissance mondiale sur 2022 et 2023. Et malgré un pic, l'inflation restera à un niveau élevé. Au niveau des politiques monétaires et budgétaires une différence sera faite entre les États-Unis et l'Europe. Un cycle de hausse des taux touchera sévèrement les États-Unis tandis qu'en Europe il sera plus modéré. Un soutien budgétaire lié aux tensions énergétiques se poursuivra. La transition énergétique, quant à elle, subira des perturbations du cycle des matières premières.

Enfin le scénario optimiste sera marqué par la fin de la guerre en Ukraine avec un retrait progressif des sanctions induisant une détente des prix de l'énergie et des matières premières. Ce sera aussi le

recul de l'endémie de Covid-19. L'économie connaîtra un excédent d'épargne ainsi qu'une reprise de la consommation avec une inflation contrôlée. Les politiques monétaires et budgétaires feront face à des dettes soutenables du fait d'un retour à la croissance. La transition énergétique redevient un sujet central tout comme les investissements liés au climat. En définitive ce scénario décrira une hausse des taux limitée et une inflation sous contrôle.

### 3.2 Intégration du passif

Avant de commencer à partir dans les différents scénarios pour l'actif, une étape de présentation des flux de cotisations et de prestations est nécessaire. Dans cette étude, un régime fictif caractéristique d'un régime de retraite est présenté. Il représente l'engagement qu'il doit à ses pensionnés. De plus, cet engagement est le même quel que soit le scénario (central, pessimiste, optimiste) choisi. Il n'est donc présenté qu'une seule fois.

Dans ce régime, les données de cotisations et de prestations commencent en 2022 et se termine en 2070. La figure 3.2 présente l'évolution du solde technique (= cotisations – prestations) sur toute cette période. De plus, ce régime dispose d'une réserve à la date d'évaluation qui sera évidemment à prendre en compte lors du calcul des taux de couverture.

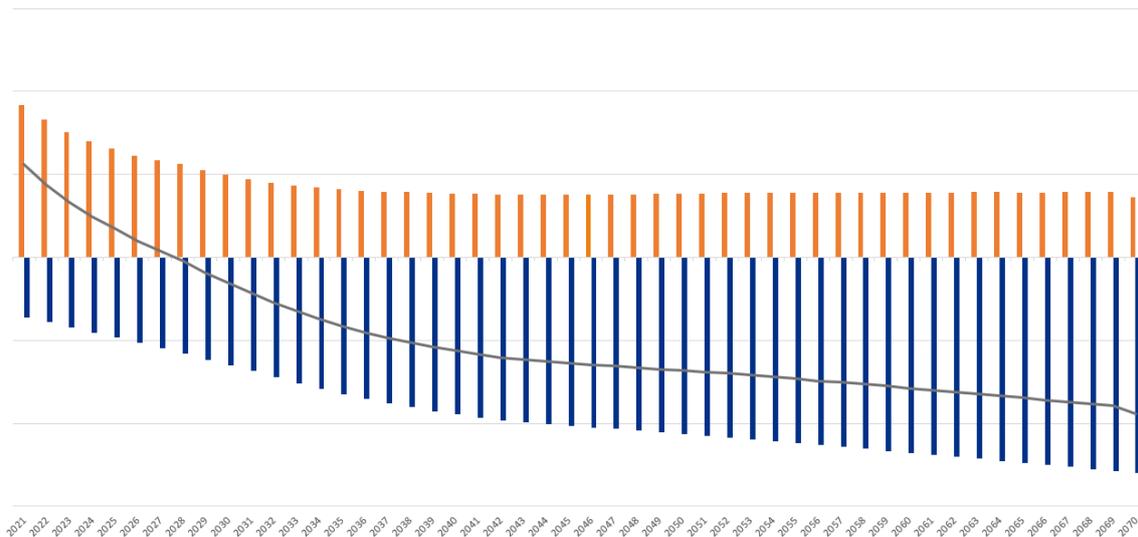


FIGURE 3.2 : Évolution du solde technique du régime étudié

Sur ce graphique les bâtons orange représentent les montants de cotisations, les bâtons bleus les montants des prestations et la courbe grise le solde technique.

Une première observation est faite à partir de ce graphique : après la cinquième année, les prestations deviennent supérieures aux cotisations. Ceci peut surprendre de voir un régime devenir déficitaire dans les 5 prochaines années, mais il y a des explications. D'abord, il a été réformé récemment et a donc perdu une grande partie de ses cotisants. Ensuite, il a connu une recrue de nouveaux actifs depuis cette réforme qui permet de disposer d'un solde technique positif. Or à plus long terme, le pic de nouveaux cotisants se fera ressentir sur le montant des prestations à verser tandis que les hypothèses démographiques ne supposent pas que le nombre de cotisants continue d'augmenter. Ce graphique montre à la fois l'importance et l'urgence de l'étude afin d'anticiper dès maintenant les prestations à

verser à long terme.

### 3.3 Scénario central

#### 3.3.1 Couple risque/performance

Pour construire une allocation stratégique, le scénario central consiste à s'appuyer sur les indicateurs statistiques stables des catégories d'investissement observables sur très longue période (20 ans) et d'y intégrer des vues discrétionnaires (jugements d'experts).

Étant donnée la forte régularité de l'indicateur de volatilité sur une très longue période, le scénario central s'appuie sur la moyenne de la volatilité glissante 20 ans pour chacune des catégories. On en déduit alors une hiérarchie du risque positionnant par exemple les actions des pays émergents et les actions non cotées européennes comme étant les actifs les plus risqués, et le monétaire comme étant les moins risqués. La volatilité du crédit entreprises a toutefois été révisée à la hausse, de l'ordre de +20 points de base par rapport à la moyenne historique, en raison du contexte de remontée des taux. De même, le risque associé à l'immobilier a également été revu à la hausse, de l'ordre de +50 points de base.

En ce qui concerne le calibrage des hypothèses d'espérance de performance, l'exercice diffère légèrement. Il consiste cette fois-ci à s'appuyer sur les grandes tendances observées à long terme et d'y apporter quelques modifications selon certaines convictions économiques ou de marché.

En particulier, la performance historique glissante 20 ans de l'indice actions Monde ex Europe est retenu et à partir de cela a été déduit les perspectives des sous-catégories suivantes :

- actions Europe subit une dégradation de 5 points de base par rapport à la performance de l'indice actions monde ex Europe
- Actions pays émergents jouit d'une amélioration de 10 points de base de la performance attendue par rapport à la performance de l'indice actions monde ex Europe
- Actions PME jouit lui d'une amélioration de 15 points de base de la performance attendue par rapport à la performance de l'indice actions monde ex Europe

Concernant la sous-catégorie taux :

- obligation crédit reste proche de la performance moyenne sur 20 ans de l'indice MSCI EMU GBI EUR
- Obligation souveraine subit une dégradation de 15 points de base par rapport à l'espérance de performance de l'indice MSCI EMU GBI EUR en raison du contexte de remontée des taux

Toujours en raison de la remontée des taux, l'espérance de performance long-terme du monétaire est fixée à 1%.

Enfin, l'espérance de performance de l'immobilier physique a été dégradée de l'ordre de 15 points de base par rapport à la performance moyenne historique.

Dans le tableau 3.2, sont renseignées les hypothèses calibrées à partir de l'historique et de vues discrétionnaires où : d'une part elles serviront à la recherche de l'allocation optimale d'autre part

elles seront utilisées lors de la projection des classes d'actifs dans la calibration des modèles. Ce premier jeu d'hypothèses décrit le scénario central.

Classe d'actifs	rendement calibré	volatilité calibrée
Actions Monde	5,38%	14,15%
Actions pays émergents	5,11%	15,07%
Actions Europe	5,92%	18,88%
Obligation souveraine	3,40%	3,96%
Obligation crédit	4,00%	4,41%
Immobilier direct	3,13%	3,01%
Monétaire	1,00%	0,48%
Actions PME	5,88%	18,23%

TABLE 3.2 : Présentation de l'historique et des hypothèses de projection dans le scénario central

### 3.3.2 matrice de corrélation

A l'instar du calibrage des hypothèses de volatilité, la matrice de corrélation retenue correspond à une période longue allant de janvier 2001 à décembre 2019 (date antérieure à la crise sanitaire de la Covid-19). Durant cette période, une phase de remontée des taux puis une phase de baisse des taux a notamment été observée.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Actions monde	1,00							
2. Actions europeene	0,84	1,00						
3. Actions pays émergents	0,75	0,78	1,00					
4. Dette souveraine	-0,17	-0,17	-0,13	1,00				
5. Credit entreprise	0,17	0,26	0,28	0,63	1,00			
6. Monetaire	-0,25	-0,20	-0,09	0,04	-0,06	1,00		
7. Actions PME	0,76	0,91	0,80	-0,18	0,31	-0,19	1,00	
8. Immobilier	0,37	0,52	0,36	0,31	0,34	0,06	0,50	1,00

FIGURE 3.3 : Matrice de corrélation utilisée dans le scénario central

Durant cette période plusieurs observations peuvent être faites. Tout d'abord, la présence d'une forte

corrélation entre les sous-catégories actions, avec des coefficients de corrélations variant entre 0,91 et 0,75. Ensuite, des coefficients de corrélation négatifs de l'ordre de -0,15 entre la dette souveraine et les actions, ainsi que des coefficients de corrélation négatifs de l'ordre de 0,20 entre le monétaire et les actions (sauf actions pays émergents avec un coefficient de -0,09). Enfin, des coefficients de corrélation de l'ordre de 0,4 entre l'immobilier et les actions. Au regard de la forte corrélation entre les actions et des couples risque/performance associés, un phénomène d'éviction devrait s'appliquer pour certaines sous-catégories.

### 3.3.3 Génération de la frontière efficiente

Les hypothèses présentées permettent maintenant, dans le cas du scénario central, d'exhiber, d'une part, une frontière efficiente et d'autre part, la répartition des actifs dans chacun de ces portefeuilles.

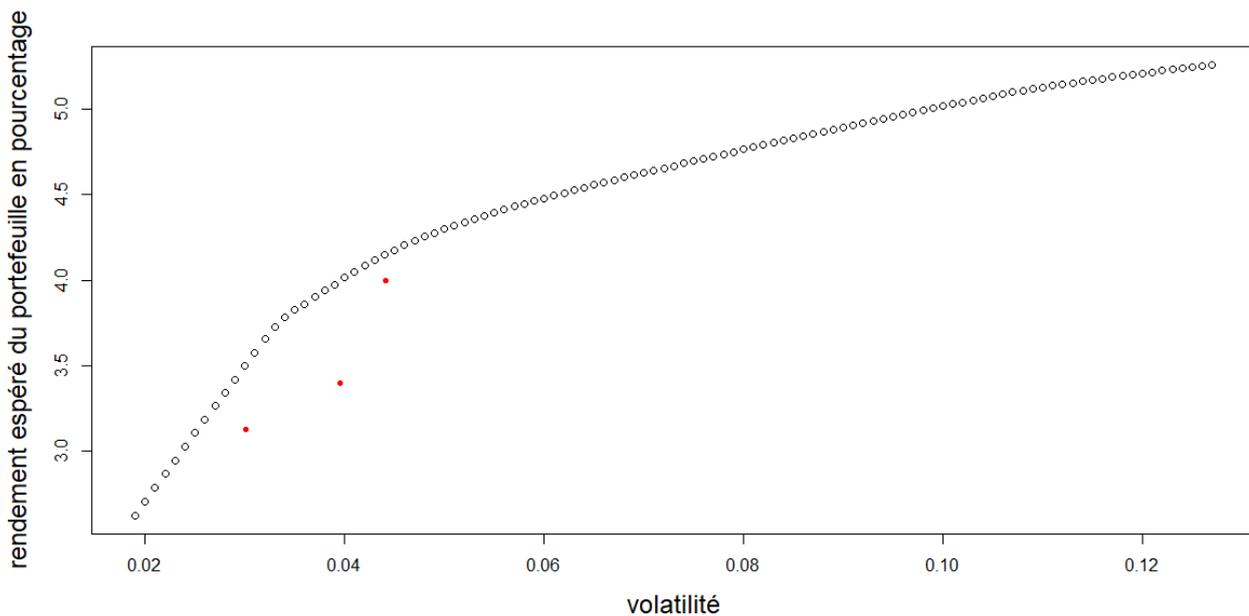


FIGURE 3.4 : Frontière efficiente obtenue pour le scénario central

Premièrement, en figure 3.4, est présentée la frontière efficiente dans le cas central. Elle a été obtenue en maximisant la performance de portefeuille sous contrainte de volatilité. Cette frontière nous donne la performance maximale que l'investisseur peut espérer pour un niveau de risque donné. Chaque rond noir correspond donc à une optimisation, pour laquelle la contrainte de volatilité varie entre 1,9% et 12,7%. Ces deux valeurs n'ont pas été choisies au hasard, elles correspondent au minimum et maximum de volatilité accessibles avec les contraintes d'investissement définies au niveau des hypothèses. Des points rouges apparaissent aussi sur la figure 3.4, ils correspondent aux portefeuilles comportant 100% d'un seul actif. Le tableau des hypothèses en table 3.2 permet aisément d'associer au point le plus à gauche, le portefeuille exclusivement d'immobilier, celui du milieu d'obligations souveraines et le troisième d'obligations crédit. Par ailleurs, ces points rouges ont un intérêt non négligeable car ils mettent en évidence un concept très important en gestion d'actifs : la diversification. En effet, un produit constitué à 100% d'obligations souveraines présente un rendement plus faible qu'un portefeuille diversifié pour un même niveau de risque. Il présente aussi une volatilité beaucoup plus importante qu'un autre portefeuille diversifié qui présenterait la même espérance de rendement. La plage de

volatilité ne permet malheureusement pas de visualiser les portefeuilles constitués uniquement de monétaire ou d'une seule sous-catégorie d'actions.

De plus cette courbe montre que pour des portefeuilles peu risqués, une faible variation de la contrainte de volatilité a un impact fort sur la performance espérée du portefeuille. Au contraire, pour des portefeuilles plus risqués, un gain significatif de performance n'est réalisable que par une variation importante de la contrainte de volatilité. Ceci est caractéristique de la diversification. En effet, deux actifs peu risqués fortement corrélés présentent un risque presque similaire à un portefeuille présentant un actif risqué et un actif peu risqué faiblement corrélé, voire même corrélé négativement. Vers la fin de la courbe, seuls des actifs risqués, fortement corrélés, permettent d'obtenir une performance importante, c'est pourquoi la diversification a un impact très faible et qu'un gain de performance coûte cher par rapport au risque prix.

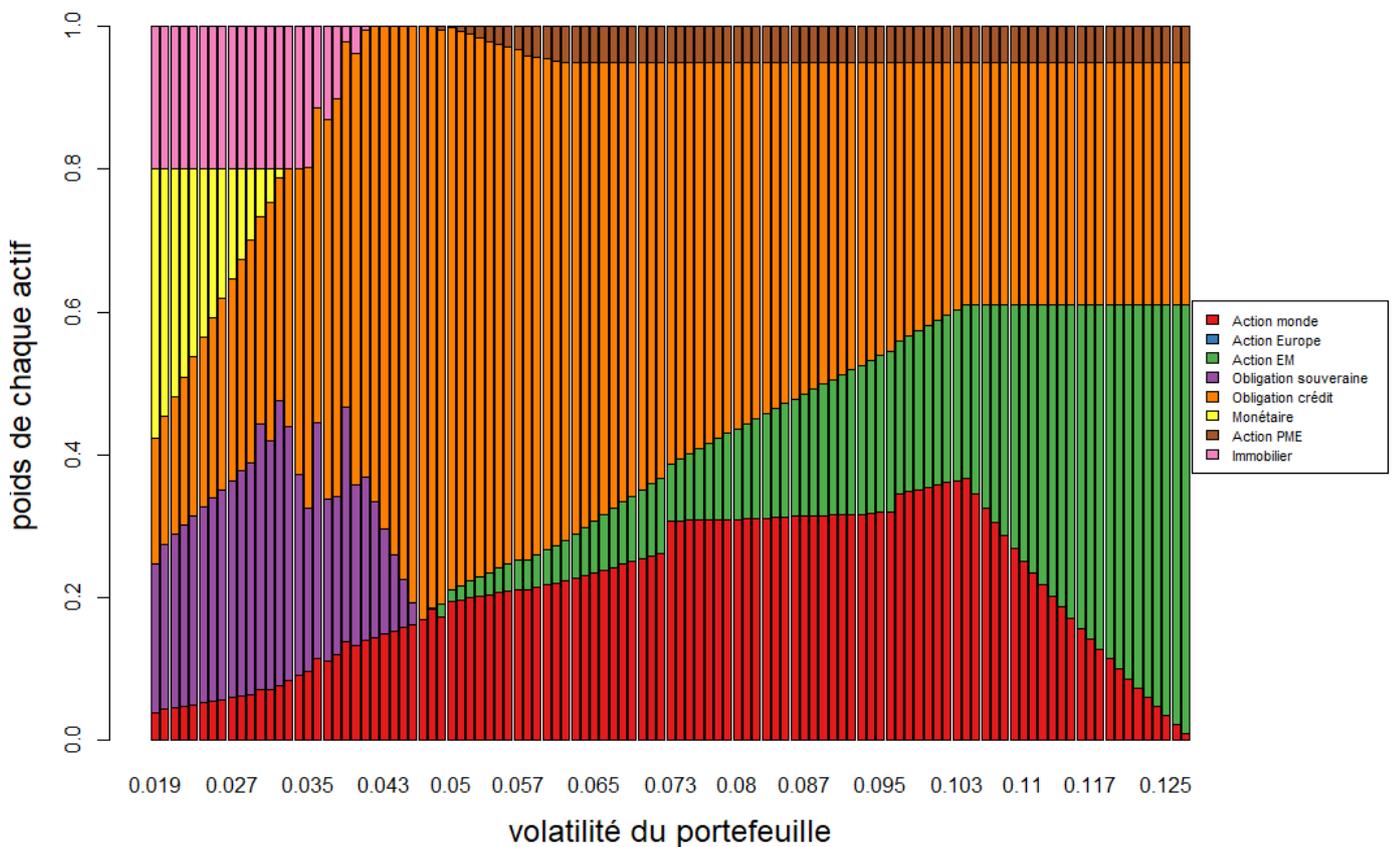


FIGURE 3.5 : Composition de chaque portefeuille de la frontière efficiente

Deuxièmement, dans la figure 3.5, est résumé les poids de chacun des actifs dans chacun des portefeuilles efficaces. Plusieurs observations peuvent être apportées à la suite de cette figure :

- d'abord, la forte corrélation entre les actions et le meilleur positionnement du couple rendement/risque de l'indice « Actions internationales ex Europe » entraîne une éviction des autres indices actions. A partir d'un certain niveau d'espérance de performance attendue, les indices actions PME et actions pays émergents font leur apparition afin de générer un surplus de per-

formance.

- Ensuite, la forte présence du monétaire pour les portefeuilles les moins risqués s'explique par le faible niveau de volatilité des portefeuilles associés.
- Enfin, la saturation des contraintes se fait rapidement sentir, que ce soit au niveau de l'immobilier dès le début du graphique à un seuil de 20%, mais aussi au niveau de l'investissement non coté représenté par les actions PME à un seuil de 5%. Quant aux produits de taux, la contrainte est elle aussi saturée et empêche à l'investisseur d'obtenir des portefeuilles exprimés 100% en actions en imposant un seuil minimal d'obligations de 34%.

### Identification des portefeuilles cibles

Une fois cette première étude achevée, une seconde plus poussée est nécessaire et demande de s'intéresser à seulement certains portefeuilles cibles. Pour cela, de manière ici assez arbitraire, dix portefeuilles sont choisis à partir de leur volatilité (ou de leur performance) de manière à ce que la distance entre la volatilité (ou la performance) de deux portefeuilles successifs soit constante. Dans la table 3.3, la composition des dix portefeuilles choisis est détaillée, ainsi que leur hypothèse de rendement et de performance.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Poids Action monde	0.04	0.07	0.14	0.20	0.24	0.31	0.32	0.36	0.19	0.01
Poids Action Europe	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Action EM	0.00	0.00	0.00	0.03	0.08	0.11	0.19	0.23	0.42	0.60
Poids Obligation souveraine	0.21	0.37	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Obligation crédit	0.18	0.29	0.67	0.74	0.63	0.53	0.44	0.35	0.34	0.34
Poids Monétaire	0.38	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Action PME	0.00	0.00	0.00	0.02	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Poids Immobilier	0.20	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Espérance de rendement	2.62	3.50	4.08	4.38	4.57	4.74	4.89	5.04	5.16	5.26

TABLE 3.3 : Composition des 10 portefeuilles cibles

### Caractéristiques financières des portefeuilles cibles

Ici, les mesures de risque simples seront rappelées comme la performance et la volatilité pour chaque portefeuille cible, mais aussi les mesures de risque plus complexes comme le ratio de Sharpe, la CVaR à 5 % ou encore la VaR à 5% déjà définies mathématiquement dans le chapitre précédent. Elles sont toute résumées dans la table 3.4.

Ici, les 10 portefeuilles ont été sélectionnés selon leur volatilité de la manière définie juste avant. En effet, entre deux portefeuilles successifs un écart de volatilité de l'ordre de 1,2 point est identifiable. Pour étudier ces portefeuilles, le ratio de sharpe sera repris avant d'approfondir l'étude avec la VaR et la CVaR.

Le ratio de Sharpe, est ici calculé en prenant le taux zéro coupon présenté au chapitre précédent or, il varie dans le temps. Dans cette étude le taux zéro coupon 10 ans a été retenu et sera le même pour chaque portefeuille. Ce ratio correspond à un indicateur de rentabilité par unité de risque. Il permet ainsi de savoir si le gestionnaire parvient à obtenir un meilleur rendement que le taux sans risque mais

Portefeuille	Performance	Volatilité	Ratio de Sharpe	CVaR à 5%	VaR à 5%
P1	2.62	1.9	0.65	-3.28	-2.26
P2	3.50	3.0	0.71	-6.20	-4.47
P3	4.08	4.2	0.64	-9.75	-7.52
P4	4.38	5.4	0.56	-11.61	-8.87
P5	4.57	6.6	0.48	-12.94	-10.08
P6	4.74	7.8	0.43	-14.43	-11.27
P7	4.89	9.0	0.39	-16.32	-12.90
P8	5.04	10.2	0.36	-18.32	-14.54
P9	5.16	11.4	0.33	-20.43	-16.79
P10	5.26	12.7	0.31	-22.84	-18.90

TABLE 3.4 : Résumé des mesures de risques des 10 portefeuilles cibles

en prenant autant de risque. En se basant sur le ratio de Sharpe, le portefeuille le plus intéressant semble être le portefeuille P2 car il présente le ratio de Sharpe le plus élevé avec  $S = 0,71$ . Au contraire les portefeuilles les plus risqués paraissent beaucoup moins intéressants. Cependant, se restreindre au ratio de Sharpe comme seul indicateur de risque est trop faible, c'est pourquoi les scénarios extrêmes sont aussi étudiés à l'aide de la VaR ainsi que de la CVaR.

Comme expliqué dans le chapitre précédent, la VaR représente la perte minimum à partir d'un certain niveau de quantile (il est ici fixé à 5%). Comme indiqué dans le tableau 3.4, elle augmente avec le niveau de risque. Ceci s'explique par le fait que plus la volatilité d'un portefeuille est importante, plus l'étendue des rendements simulés sera importante. À cette mesure vient s'ajouter la CVaR représentant la perte moyenne, à laquelle un investisseur peut s'attendre lorsqu'il se trouve dans ces 5 pourcentèmes pires scénarios. Elle augmente, elle aussi avec le niveau de risque. L'horizon temporel généralement retenu est une journée ou un mois, or ici le pas de projection est annuel c'est pourquoi les résultats sont mesurés à horizon 1 an. Ce calcul est aussi réalisable pour un horizon plus grand en annualisant les rendements obtenus. Dans ce dernier cas un effet capitalisant fera, par définition, diminuer ces pertes.

### Projection et taux de couverture

L'inconvénient de ces trois mesures de risques est qu'elles ne prennent pas en compte le passif. Elles mesurent seulement le risque de la stratégie d'investissement, or nos clients ont des engagements, c'est-à-dire qu'ils ne recherchent pas nécessairement le meilleur ratio de Sharpe, ou une VaR et CVaR les plus faibles possible, ils cherchent un portefeuille leur permettant de faire face à leur engagement, en prenant le moins de risque possible. Pour cela, chacun des portefeuilles a été projeté en intégrant le passif à couvrir. Puis le taux de couverture a été calculé à différents quantiles : 5%, 25%, 50%, 75% et 95%. Pour ne pas afficher les taux de couverture des dix portefeuilles, un seul a été retenu, c'est le portefeuille P4. Il n'a pas été choisi arbitrairement, c'est celui qui aurait été conseillé et cela pour plusieurs raisons.

Comme dit précédemment, l'objectif premier pour ce type de régime est de payer ses engagements. C'est donc à partir du quantile défavorable (25%), du quantile extrêmement défavorable (5%) et de la médiane que le choix se fera. De plus, mis à part le portefeuille P1, les taux de couverture médians à horizon 1 et 5 ans sont très similaires entre les portefeuilles, donc les horizons plus longs seront plus importants.

Ensuite, le quantile défavorable du portefeuille P4 à horizon 20 ans, présente le meilleur taux de couverture (76,80%) par rapport aux dix autres portefeuilles.

Enfin, le taux de couverture à 40 ans (horizon cible de l'étude) du portefeuille P4 est dans la cas médian le portefeuille de volatilité le plus faible proposant un taux de couverture supérieur à 100% (121,36%), c'est pourquoi il est choisi dans le cadre de cette étude et aurait été conseillé dans le cadre d'une mission réelle.

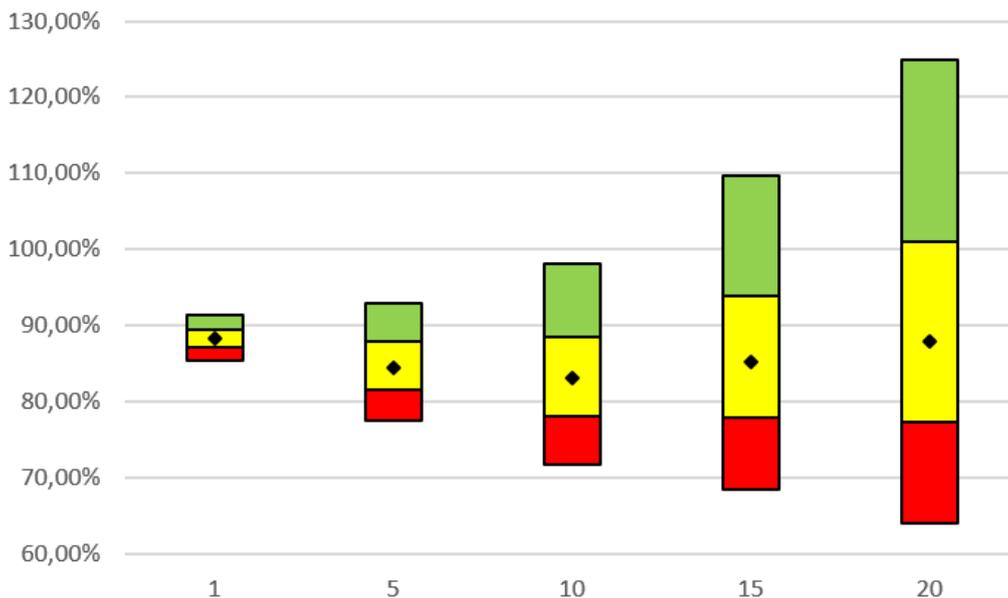


FIGURE 3.6 : Taux de couverture du portefeuille P4

En figure 3.6 sont représentés les taux de couverture à horizon 1, 5, 10, 15 et 20 ans du portefeuille P4 avec pour chacun, les différents quantiles retenus. En effet, la partie rouge regroupe les scénarios entre le quantile à 5% et celui à 25%, ensuite la partie jaune représente l'écart inter quartile et la partie verte correspond aux scénarios compris entre le quantile à 75% et celui à 95%. Le point correspond au scénario médian

Les valeurs exactes de ces quantiles sont résumées dans le tableau 3.5.

Horizon	5%	25%	50%	75%	95%
1	85.57	87.03	88.21	89.49	91.26
5	77.52	81.56	84.44	87.64	92.80
10	71.73	77.92	82.98	88.56	98.05
15	68.19	77.65	85.85	94.23	109.91
20	64.24	76.80	87.89	101.04	125.67

TABLE 3.5 : Valeurs en pourcentage des quantiles du portefeuille P4

En figure 3.7 est représentée l'évolution des quantiles du montant de la réserve sur 40 ans lorsque celle-ci a été allouée selon le portefeuille P4. La droite noire, horizontale, est celle d'équation  $y = 0$ , elle permet de mettre en évidence que le régime étudié serait provisionné correctement dans plus de 75% des scénarios et serait en faillite dans moins d'un scénario sur quatre. Le portefeuille P4 médian reste bien au-dessus de la droite noire, ce qui confirme qu'à horizon 40 ans les réserves du régime ne sont pas consommées totalement et présentent donc un taux de couverture supérieur à 1.

Pour plus d'informations sur les taux de couverture et la projection des quantiles des autres portefeuilles, le lecteur pourra se référer aux annexes en fin de mémoire.

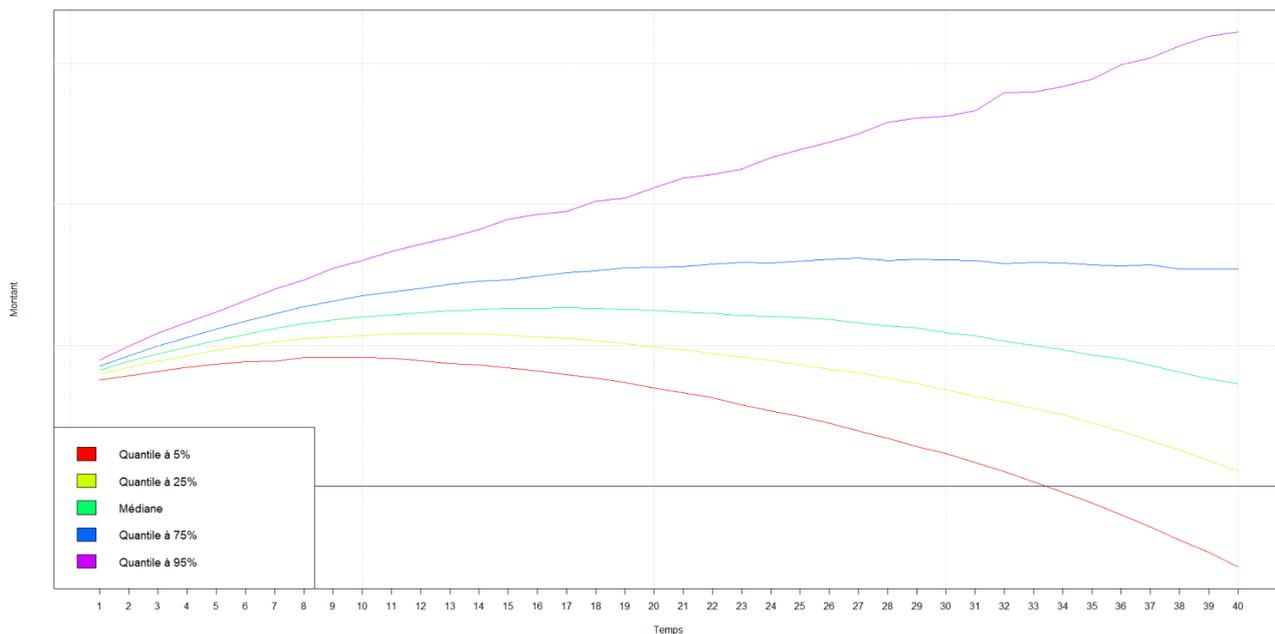


FIGURE 3.7 : Projection des quantiles du portefeuille P4

## 3.4 Scénario pessimiste

### 3.4.1 Couple risque/performance

Pour construire le scénario pessimiste, le calibrage des hypothèses consiste à s'appuyer sur des indicateurs de volatilité caractéristiques d'une période baissière, tout en tenant compte des hypothèses choisies pour le scénario central.

Les indicateurs de volatilité actions sont ceux correspondant à la moyenne glissante 10 ans observées entre la période « 01/01/1999 – 31/12/2008 » et « 01/01/2001 – 31/12/2010 », une période marquée par deux crises majeures : la bulle internet et la crise des subprimes.

Les indicateurs de volatilité taux correspondent à des niveaux observés durant les années 1980, avec un niveau de risque plus élevé pour les crédits d'entreprise. Pour des raisons de profondeur de données, les informations s'appuient sur la zone US en devise locale.

En termes d'espérance de performance, les estimations proposées s'appuient sur celles du scénario central auquel s'applique une dégradation de l'ordre de 15 points de base. De même, l'espérance de performance de l'immobilier est dégradée de 20 points de base.

En supposant une remontée des taux de très forte ampleur, l'hypothèse long-terme de l'espérance de performance du monétaire est fixée à 1,5%.

Dans le tableau 3.6 est renseigné le jeu d'hypothèses décrivant le scénario pessimiste à partir des observations et des remarques qui ont été données précédemment.

Classe d'actifs	rendement calibré	volatilité calibrée
Actions Monde	4,58%	16,43%
Actions Europe	4,35%	17,04%
Actions pays émergents	5,03%	23,57%
Obligation souveraine	2,89%	5,80%
Obligation crédit	3,40%	7,54%
Immobilier direct	2,50%	3,46%
Monétaire	1,50%	0,50%
Actions PME	5,29%	20,93%

TABLE 3.6 : Présentation de l'historique et des hypothèses de projection dans un cas pessimiste

### 3.4.2 Matrice de corrélation

Pour le scénario pessimiste, la matrice de corrélation retenue est une matrice de corrélation long-terme 10 ans et correspondant à une période avec une forte corrélation des actifs qui caractérise également les périodes de krach. C'est pourquoi, la matrice de corrélation 10 ans s'étalant du 01/08/2012 au 31/08/2022 est retenue dans cette étude. Cette période est marquée par une politique monétaire très expansionniste qui a conduit à une corrélation de toutes les classes d'actifs.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Actions monde	1,00							
2. Actions europeene	0,83	1,00						
3. Actions pays émergents	0,65	0,64	1,00					
4. Dette souveraine	0,25	0,24	0,16	1,00				
5. Credit entreprise	0,58	0,57	0,49	0,78	1,00			
6. Monetaire	0,03	0,07	-0,01	0,23	0,18	1,00		
7. Actions PME	0,80	0,93	0,61	0,23	0,62	0,10	1,00	
8. Immobilier	0,45	0,56	0,53	0,40	0,51	0,28	0,55	1,00

FIGURE 3.8 : Matrice de corrélation utilisée dans le scénario pessimiste

Durant cette période toutes les classes d'actifs sont corrélées positivement entre elles (exceptés le monétaire et les actions pays émergents). C'est-à-dire que la majorité des actifs évolue dans le même sens.

### 3.4.3 Génération de la Frontière efficiente

Les hypothèses présentées permettent maintenant, dans le cas du scénario pessimiste, d'exhiber, d'une part, une frontière efficiente et d'autre part, la répartition des actifs dans chacun de ces portefeuilles.

Une étude similaire à la précédente a été réalisée, c'est pourquoi les résultats sont exposés plus brièvement. Seules les hypothèses d'espérance de rendement, de volatilité et de corrélation diffèrent. Une partie d'interprétation sera quant à elle nécessaire afin d'expliquer les différences observées par rapport au cas central. Premièrement, en figure 3.9, est présentée la frontière efficiente dans le cas pessimiste. Les trois portefeuilles représentés par les trois points rouges les plus à gauche sont ceux définis dans la section précédente. Ici deux autres portefeuilles apparaissent en haut à droite du graphique 3.9, ils caractérisent les portefeuilles composés exclusivement d'actions européennes, pour celui le plus à gauche et d'actions internationales pour celui le plus à droite. Un des points rouge semble être au-dessus de la frontière efficiente signifiant qu'il existerait un meilleur portefeuille que ceux obtenus avec l'outil d'optimisation. Or, des contraintes ont été définies précédemment par le client, dont l'une d'entre elles est d'avoir un minimum de 34% de produits de taux en portefeuille. Ce portefeuille n'est donc pas admissible dans ce type d'étude.

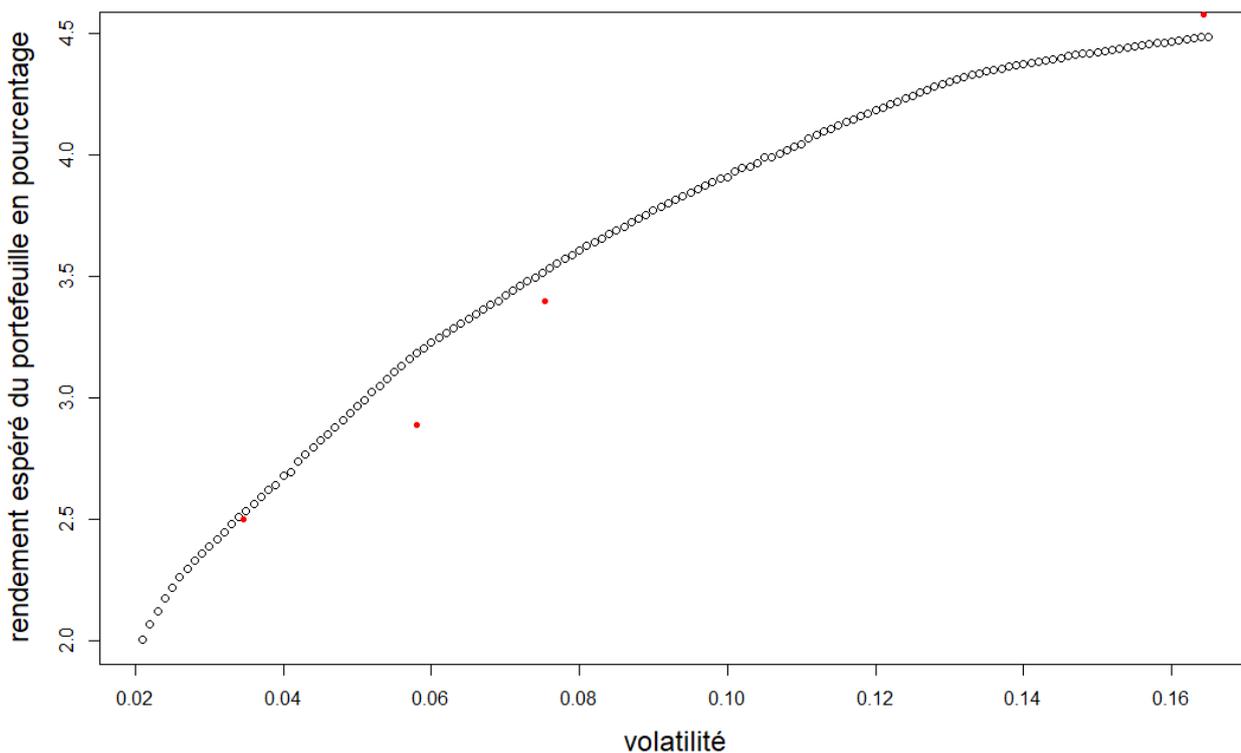


FIGURE 3.9 : Frontière efficiente obtenue pour le scénario pessimiste

Dans la figure 3.10, sont résumés les poids de chacun des actifs dans chacun des portefeuilles efficients. Des similitudes et des différences notables apparaissent entre ces allocations de portefeuilles et celles obtenues dans le cas central :

- d'abord, pour les similitudes, au niveau des contraintes, elles sont toutes saturées à partir d'un

certain niveau de volatilité. Que ce soit l'immobilier, les actions non cotées ou les produits de taux, ils atteignent leur bornes, aussi bien que des tendances ou comportements peuvent être repérés. Pour des volatilités faibles, le monétaire, l'immobilier et les obligations souveraines constituent la majorité des portefeuilles. Pour des volatilités importantes le produit le plus risqué (actions pays émergents) prend de plus en plus de place dans le portefeuille. Cette tendance est identique à celle observée dans le scénario central, cependant, les performances et les volatilités de ces portefeuilles différent.

- Il apparaît quelques différences. Premièrement la frontière efficiente du graphique 3.9 présente une courbure plus uniforme que celle du graphique 3.4. Ceci s'explique par la forte corrélation entre les actifs. La diversification a donc moins d'impact. De plus le portefeuille proposant le meilleur rendement, soit environ 4,5%, est obtenu pour un niveau de risque de 16,5%. Dans le cas central le portefeuille le plus performant proposant environ 5,25% de rendement est obtenu pour une volatilité de 12,7%.

De plus, les obligations souveraines deviennent des produits intéressants car présents en plus grande proportion dans les portefeuilles moins risqués.

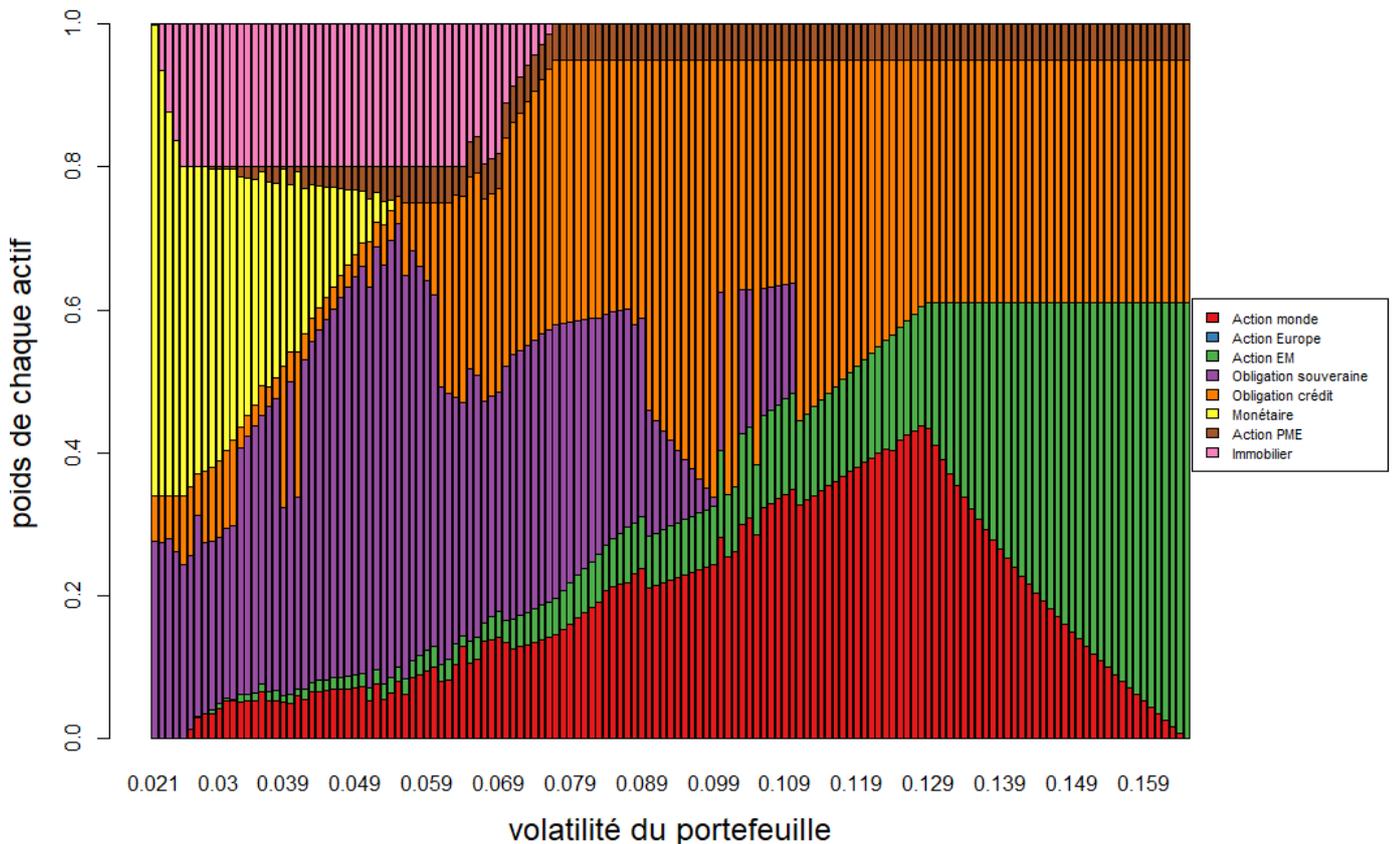


FIGURE 3.10 : Composition de chaque portefeuille de la frontière efficiente

Dans ce scénario, l'immobilier est détenu, jusqu'à des niveaux de volatilité plus importants que dans le scénario central (7,9% contre 3,9%). Ceci se justifie à partir des hypothèses formulées dans le cas

pessimiste, les volatilités des produits de taux ont augmenté fortement, de l'ordre de 200 points de base pour le souverain et de 300 points de base pour le crédit. La volatilité de l'immobilier a, quant à elle, subi une augmentation de 45 points de base.

La catégorie d'obligations souveraines est elle aussi beaucoup plus utilisée car sa volatilité augmente en des niveaux plus faibles que la catégorie des obligation crédit.

Pour le reste des catégories d'actifs, leurs hypothèses de volatilité et de performance ont évolué de manière conjointe les unes par rapport aux autres, ce qui explique de retrouver des tendances similaires.

### Identification des portefeuilles cibles

Après cette vue d'ensemble dans le cas du scénario pessimiste, l'identification de 10 portefeuilles apportera une analyse plus fine et permettra d'interpréter et d'expliquer les premières différences précédemment exposées.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Poids Action monde	0.00	0.07	0.08	0.14	0.21	0.28	0.36	0.37	0.16	0.00
Poids Action Europe	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Action EM	0.00	0.01	0.02	0.03	0.06	0.12	0.13	0.24	0.45	0.61
Poids Obligation souveraine	0.28	0.38	0.59	0.31	0.32	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Obligation crédit	0.06	0.04	0.03	0.28	0.36	0.33	0.46	0.34	0.34	0.34
Poids Monétaire	0.66	0.30	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Action PME	0.00	0.01	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Poids Immobilier	0.00	0.20	0.20	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Espérance de rendement	2.01	2.57	3.02	3.38	3.68	3.91	4.14	4.32	4.42	4.49

TABLE 3.7 : Composition des 10 portefeuilles cibles

### Caractéristiques financières des portefeuilles cibles

Le tableau 3.7 présente 10 portefeuilles cibles. Ils ont été sélectionnés de la même manière que dans le cas central. Or, ici, l'étendue de volatilité considérée étant plus important, l'écart de volatilité entre deux portefeuilles consécutifs est de l'ordre de 1,6 point. Afin de les étudier plus précisément, les mesures de risque définies dans le chapitre précédent leurs sont appliquées. Le résultat de chacune est présenté dans le tableau 3.8.

Au sujet des ratio de Sharpe, un comportement se répète, à savoir, que le meilleur ratio est celui du portefeuille P2 avec  $S = 0,33$ . Cependant, dans ce scénario pessimiste, les valeurs des ratios de chaque portefeuille sont sensiblement proches ce qui confère au ratio de Sharpe un pouvoir relativement faible, lors du choix du portefeuille final. En effet, dans le cas central, l'étendue des ratio de Sharpe était de  $0,71 - 0,31 = 0,4$ , alors qu'ici elle est seulement de  $0,33 - 0,19 = 0,14$ .

La VaR et la CVaR apportent d'autres informations sur le risque porté par ces portefeuilles dans un scénario de récession. Pour des niveaux de risque similaires les VaR à 5% sont plus faibles que dans le scénario central. Autrement dit, même si la performance est plus faible, les scénarios extrêmes semblent moins dramatiques. Ceci se confirme avec les valeurs de la CVaR à 5% qui caractérise toujours la perte moyenne pour les scénarios en deçà du quantile à 5%.

En résumé, le scénario pessimiste propose des rendements plus faibles par niveau de volatilité par

Portefeuille	Performance	Volatilité	Ratio de Sharpe	CVaR à 5%	VaR à 5%
P1	2.01	2.1	0.30	-2.15	-1.27
P2	2.57	3.6	0.33	-4.57	-3.26
P3	3.02	5.2	0.32	-7.25	-5.33
P4	3.38	6.8	0.29	-9.69	-7.29
P5	3.68	8.4	0.27	-12.36	-9.47
P6	3.91	10.0	0.25	-14.82	-11.05
P7	4.14	11.6	0.24	-17.59	-13.34
P8	4.32	13.2	0.22	-20.16	-15.47
P9	4.42	14.8	0.21	-22.69	-18.30
P10	4.49	16.5	0.19	-25.41	-20.64

TABLE 3.8 : Résumé des mesures de risques des 10 portefeuilles cibles

rapport au scénario central (d'après le ratio de Sharpe). Mais, les cas extrêmes sont plus désastreux dans le cas central (d'après le VaR et la CVaR).

### Projection et taux de couverture

Comme dit précédemment, l'étude des mesures de risque est insuffisante car elle ne prend pas en compte le passif. En effet, le taux de couverture est la seule mesure prise en compte dans ce mémoire qui relie le portefeuille d'actif à la chronique de flux du passif. Cependant, dans ce scénario, les hypothèses de rendements des classes d'actifs ont évolué pour décrire un nouvel état de l'économie (pessimiste). Afin de rester cohérent avec les hypothèses prises, la courbe des taux utilisée pour actualiser les cotisations et prestations du régime a été modifiée dans ce sens. En pratique la courbe utilisée est celle présentée en figure 2.5, translatée de 50 points de base vers le bas. Ce choix résulte de la différence de rendement entre les scénarios pessimiste et central pour la classe d'actifs obligation souveraine ( $2,89 - 3,40 \simeq 0,50$ ) car les taux d'actualisation sont fortement corrélés avec les obligations souveraines.

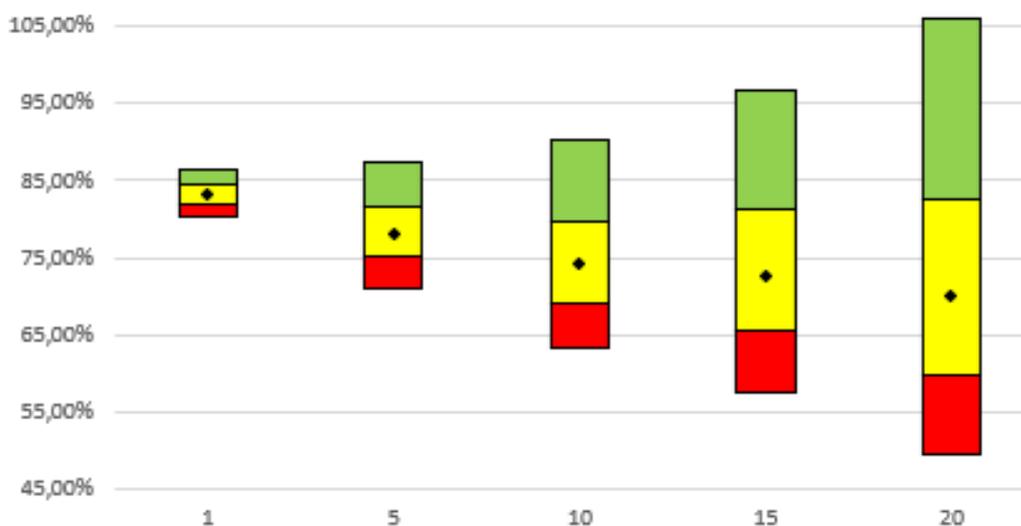


FIGURE 3.11 : Taux de couverture du portefeuille P4

En figure 3.11 sont représentés les taux de couverture à horizon 1, 5, 10, 15 et 20 ans du portefeuille P4 avec pour chacun, les différents quantiles retenus. En effet, la partie rouge regroupe les scénarios entre le quantile à 5% et celui à 25%, ensuite la partie jaune représente l'écart inter quartile et la partie verte correspond aux scénarios compris entre le quantile à 75% et celui à 95%. Le point correspond au scénario médian

Les taux de couverture médians observé en figure 3.11 sont plus faibles que ceux présentés dans le scénario central. En effet, la caractéristique principale de ce scénario est une espérance de rendement plus faible. Cependant les taux de couverture médians, défavorables et extrêmement défavorables ne cessent de diminuer entre la vue à 1 an et celle à 20 ans. Au contraire dans le scénario central l'évolution des taux de couverture médians s'inverse et augmente à partir de la vue 10 ans.

Les valeurs exactes de ces quantiles sont résumées dans le tableau 3.9.

Horizon	5%	25%	50%	75%	95%
1	80.22	81.80	83.09	84.56	86.55
5	70.94	75.03	78.16	81.50	87.26
10	63.25	69.05	74.07	79.61	90.19
15	57.46	65.38	72.52	81.31	96.68
20	49.57	59.69	70.17	82.65	106.19

TABLE 3.9 : Valeurs en pourcentage des quantiles du portefeuille P4

En figure 3.12 est représentée l'évolution des quantiles du montant de la réserve sur 40 ans lorsque celle-ci a été allouée selon le portefeuille P4. Ici, plus de 50% des scénarios ne permettent pas de couvrir les engagements du régimes.

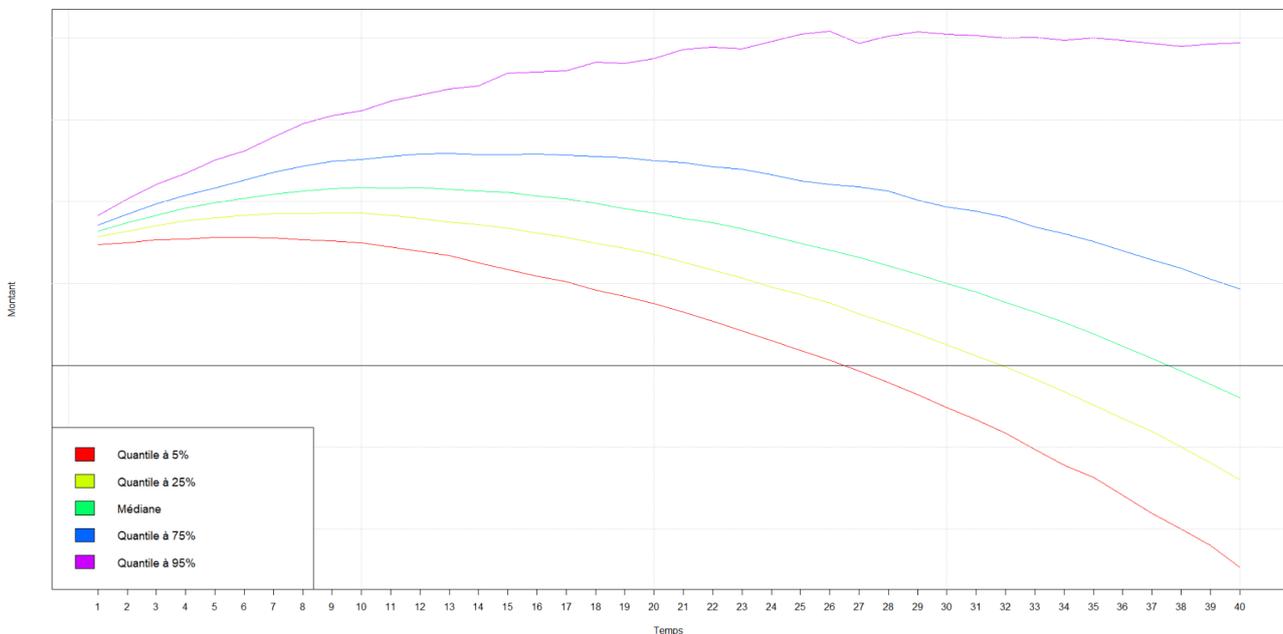


FIGURE 3.12 : Projection des quantiles du portefeuille P4

Ces quantiles représentent le montant de la réserve sur les 40 prochaines années. En effet, tant que la courbe reste au-dessus de la droite noire, le régime peut payer les prestations de l'année.

Cependant, mis à part le quantile à 95% les autres courbes diminuent, ce qui signifie que chaque année le régime doit piocher dans ses réserves. Autrement dit le montant des cotisations n'est pas suffisant pour payer seul les prestations. Tout cela pour dire que même si cette étude est réalisée sur un horizon de 40 ans, le but n'est pas d'épuiser la totalité des réserves car le régime ne semble pas montrer de signes selon lesquelles le montant des cotisations reviendrait à un niveau égale à celui des prestations. C'est pourquoi, une réserve positive au bout de 40 ans est une condition obligatoire pour répondre à l'urgence d'aujourd'hui mais n'est pas suffisante pour préparer les années ultérieures à cet horizon d'étude.

## 3.5 Scénario optimiste

### 3.5.1 Couple risque/performance

Pour construire le scénario optimiste, le calibrage des hypothèses consiste à s'appuyer sur des indicateurs de volatilité caractéristiques de périodes haussières de long-terme ayant néanmoins rencontrés des périodes de courtes perturbations.

Les indicateurs de volatilité actions sont ceux correspondant à la moyenne glissante 10 ans observées entre la période « 01/02/2006 – 31/01/2016 » et « 01/01/2008 – 31/12/2017 », une période bénéficiant de la politique monétaire expansionniste, mais ayant également été marquée par la crise de la zone euro et la dette grecque.

En termes d'espérance de performance, les estimations proposées s'appuient sur celles du scénario central auquel s'applique une amélioration de l'ordre de 15 points de base. De même, l'espérance de performance de l'immobilier est améliorée de 10 points de base.

En supposant une remontée des taux de moins forte ampleur et d'inflation maîtrisée, l'hypothèse long-terme de l'espérance de performance du monétaire est fixée à 0,9%.

Dans le tableau 3.10 est renseigné le jeu d'hypothèses décrivant le scénario optimiste à partir des observations et des remarques qui ont été données précédemment.

Classe d'actifs	rendement calibré	volatilité calibrée
Actions Monde	6,19%	13,22%
Actions Europe	5,88%	15,38%
Actions pays émergents	6,81%	18,93%
Obligation souveraine	3,91%	4,31%
Obligation crédit	4,60%	3,98%
Immobilier direct	3,44%	2,71%
Monétaire	0,90%	0,43%
Actions PME	7,06%	18,78%

TABLE 3.10 : Présentation de l'historique et des hypothèses de projection dans un cas optimiste

### 3.5.2 Matrice de corrélation

Pour le scénario optimiste, la matrice de corrélation retenue correspond à une matrice de long-terme d'une période plus traditionnelle, ayant connu une phase de remontée des taux puis de baisse des

taux, hors politique monétaire expansionniste. C'est pourquoi la matrice de corrélation 10 ans retenue s'étale du 01/01/2003 au 31/12/2012.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Actions monde	1,00							
2. Actions europeene	0,82	1,00						
3. Actions pays émergents	0,77	0,81	1,00					
4. Dette souveraine	-0,20	-0,21	-0,16	1,00				
5. Credit entreprise	0,28	0,38	0,37	0,54	1,00			
6. Monetaire	-0,26	-0,24	-0,18	-0,04	-0,31	1,00		
7. Actions PME	0,76	0,92	0,83	-0,20	0,43	-0,27	1,00	
8. Immobilier	0,11	0,30	0,07	0,04	0,05	0,03	0,34	1,00

FIGURE 3.13 : Matrice de corrélation utilisée dans le scénario optimiste

Durant cette période, la matrice de corrélation obtenue en figure 3.13 se rapproche de celle obtenue dans le cas central. En effet, les actifs souverains et monétaires sont une nouvelle fois corrélés négativement vis-à-vis des actions. De plus, ici, les coefficients de la dernière ligne qui exprime la corrélation entre l'immobilier et les autres actifs sont relativement proches de 0, ce qui donne un moyen supplémentaire de diversification et de diminution du risque.

### 3.5.3 Génération de la Frontière efficiente

Les hypothèses présentées permettent maintenant, dans le cas du scénario optimiste, d'exhiber, d'une part, une frontière efficiente et d'autre part, la répartition des actifs dans chacun de ces portefeuilles.

Une étude similaire à celle dans le cas central a une nouvelle fois été réalisée, c'est pourquoi les résultats sont exposés plus brièvement. Seules les hypothèses d'espérance de rendement, de volatilité et de corrélation diffèrent. Une partie d'interprétation sera quant à elle nécessaire afin d'expliquer les différences observées par rapport au cas central. Premièrement, en figure 3.14, est présentée la frontière efficiente dans le cas optimiste.

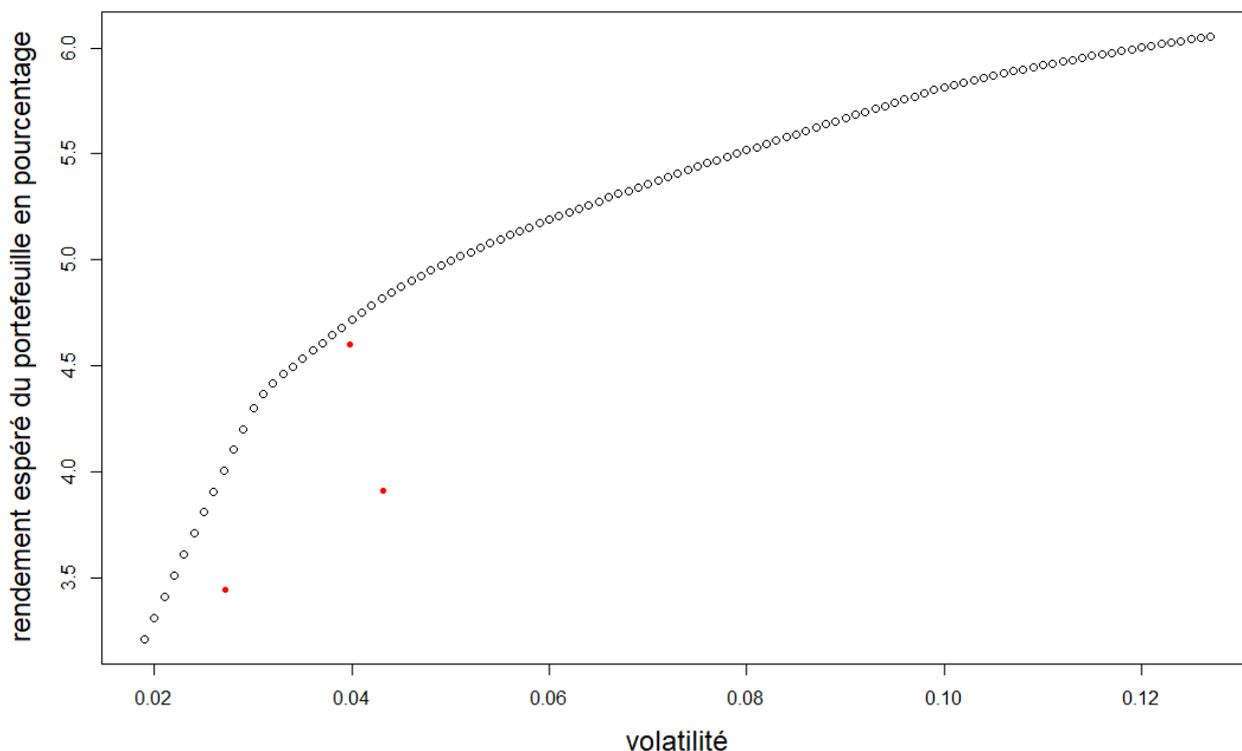


FIGURE 3.14 : Frontière efficiente obtenue pour le scénario optimiste

Dans la figure 3.15, sont résumés les poids de chacun des actifs dans chacun des portefeuilles efficients. Des similitudes et des différences notables apparaissent entre ces allocations de portefeuilles et celles obtenues dans le cas central :

- que ce soit au niveau de la frontière efficiente ou de la composition des portefeuilles efficients, la tendance entre ce scénario et le scénario central est quasiment identique. Les portefeuilles proposant le rendement maximal sont obtenus selon le même niveau de risque. De plus les contraintes sont ici aussi rapidement saturées.
- C'est au niveau des performances que les différences apparaissent. En effet, dans ce scénario le portefeuille le plus performant propose un rendement d'environ 6% quand pour le même niveau de risque le rendement du portefeuille le plus performant dans le cas central est de 5,25%. Les obligations souveraines sont encore moins utilisées, même pour des portefeuilles peu risqués, tout comme les actions pays émergents, présentes en plus faible proportion jusqu'au seuil des 10% de volatilité.

Dans ce scénario, les résultats présentent une tendance similaire à ceux obtenus dans le cas central. Ceci s'explique aisément, par l'augmentation des hypothèses de performance de chaque classe d'actifs dans des ordres de grandeurs similaires, tout en gardant des niveaux de risque équivalents à ceux du scénario central. De plus, la matrice de corrélation est elle aussi très proche de celle obtenue dans le scénario central.

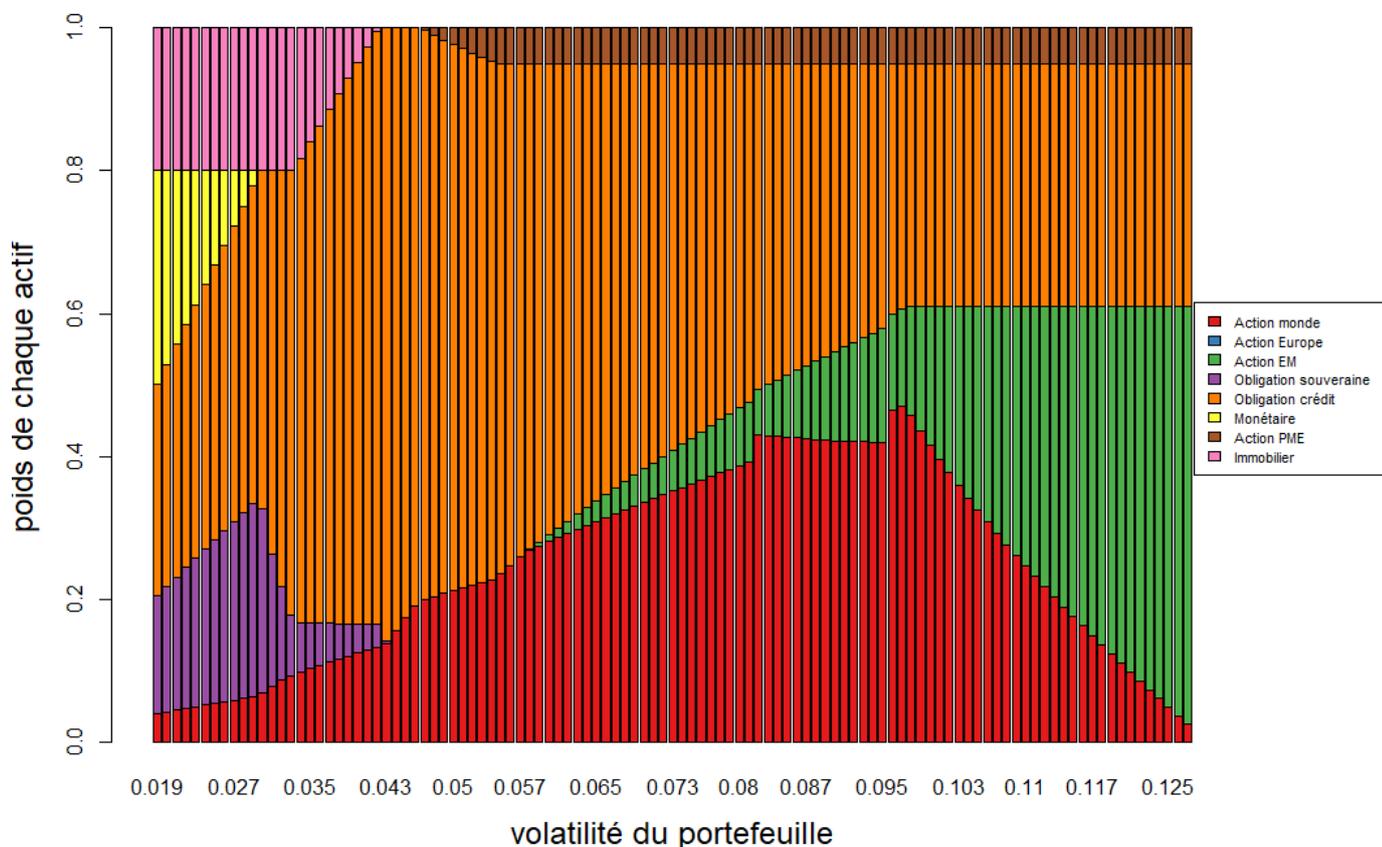


FIGURE 3.15 : Composition de chaque portefeuille de la frontière efficiente

### Identification des portefeuilles cibles

Après cette vue d'ensemble dans le cas du scénario optimiste, l'identification de 10 portefeuilles apportera une analyse plus fine et permettra d'interpréter et d'expliquer les premières remarques précédemment exposées.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Poids Action monde	0.04	0.07	0.13	0.23	0.31	0.38	0.42	0.38	0.19	0.03
Poids Action Europe	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Action EM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.07	0.12	0.23	0.42	0.58
Poids Obligation souveraine	0.17	0.26	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Obligation crédit	0.29	0.47	0.83	0.73	0.60	0.50	0.40	0.34	0.34	0.34
Poids Monétaire	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Poids Action PME	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Poids Immobilier	0.20	0.20	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Espérance de rendement	3.21	4.30	4.78	5.08	5.29	5.49	5.67	5.84	5.95	6.06

TABLE 3.11 : Composition des 10 portefeuilles cibles

### Caractéristiques financières des portefeuilles cibles

Le tableau 3.11 présente 10 portefeuilles cibles. Ils ont été sélectionnés de la même manière que dans le cas central. De plus, l'étendue de volatilité considérée est la même que celle du cas central car les niveaux de risque sont relativement équivalents. L'écart de volatilité entre deux portefeuilles consécutifs est donc de l'ordre de 1,2 point. Afin d'étudier plus précisément ces portefeuilles, les mesures de risque définies dans le chapitre précédent sont appliquées. Le résultat de chacune est présenté dans le tableau 3.12.

Portefeuille	Performance	Volatilité	Ratio de Sharpe	CVaR à 5%	VaR à 5%
P1	3.21	1.9	0.96	-3.43	-2.43
P2	4.30	3.0	0.97	-6.40	-4.93
P3	4.78	4.2	0.81	-10.23	-8.12
P4	5.08	5.4	0.68	-11.58	-9.24
P5	5.29	6.6	0.59	-13.29	-10.49
P6	5.49	7.8	0.53	-15.31	-11.97
P7	5.67	9.0	0.48	-17.50	-13.76
P8	5.84	10.2	0.44	-19.69	-15.49
P9	5.95	11.4	0.40	-21.68	-17.57
P10	6.06	12.7	0.37	-23.97	-19.82

TABLE 3.12 : Résumé des mesures de risques des 10 portefeuilles cibles

Au sujet des ratio de Sharpe, même si le ratio du portefeuille P2 avec  $S = 0,97$  est le plus élevé, celui du portefeuille P1 est très proche. De plus, les autres ratio diminuent très rapidement à partir du portefeuille P2 mais restent pour chacun supérieurs à ceux observés dans le cas central. Enfin, pour les portefeuilles les plus risqués, leur ratio continue de diminuer avec la volatilité mais semble trop proche pour les différencier.

La VaR et la CVaR apportent d'autres informations sur le risque porté par ces portefeuilles dans un scénario expansionniste. Pour des niveaux de risque similaires les VaR à 5% sont plus élevées que dans le scénario central. Autrement dit, les scénarios extrêmes semblent plus dramatiques dans un scénario optimiste. Ceci se confirme avec les valeurs de la CVaR à 5% caractérisant toujours la perte moyenne pour les scénarios en deçà du quantile à 5% qui est supérieure à celle obtenue dans le cas central.

En résumé, le scénario optimiste propose des rendements plus importants par niveau de volatilité par rapport au scénario central (d'après le ratio de Sharpe). Mais, les cas extrêmes sont plus désastreux dans le cas optimiste (d'après le VaR et la CVaR).

À ce niveau de l'étude, des mesures de risque ont été appliquées à des portefeuilles dans un cas central, dans un cas pessimiste et dans un cas optimiste. Dans chacun des scénarios, trois matrices de corrélation ont été utilisées. La matrice de corrélation dans le cas pessimiste est celle dans laquelle les actifs sont les plus corrélés. Ensuite, arrive la matrice de corrélation dans le cas central. Et la matrice de corrélation dans le cas optimiste est celle montrant les actifs encore moins corrélés.

Tout cela pour dire que plus les actifs sont décorrélés voire anticorrélés, plus les pertes extrêmes sont importantes. Et d'après les observations, dans le cas pessimiste, la réciproque est vraie.

### Projection et taux de couverture

Cependant, cette dernière remarque aussi importante soit-elle ne permet pas de choisir le portefeuille final. Comme dit précédemment, l'étude des mesures de risque est insuffisante car elle ne prend pas en compte le passif. D'où l'intérêt de regarder le taux de couverture. Or, dans ce scénario, l'économie décrit un état encore différent des deux derniers. Un ajustement de la courbe des taux a donc aussi été opéré. Cette fois, la courbe en figure 2.5 subit une translation de 50 points de base vers le haut de manière à être cohérent avec la différence de rendement des obligations souveraines entre les scénarios optimiste et central ( $3,91 - 3,40 \simeq 0,50$ ). Afin de comparer des portefeuilles similaires, un focus est plus particulièrement réalisé sur les quantiles du portefeuille P4 à différents horizons en figure 3.16.

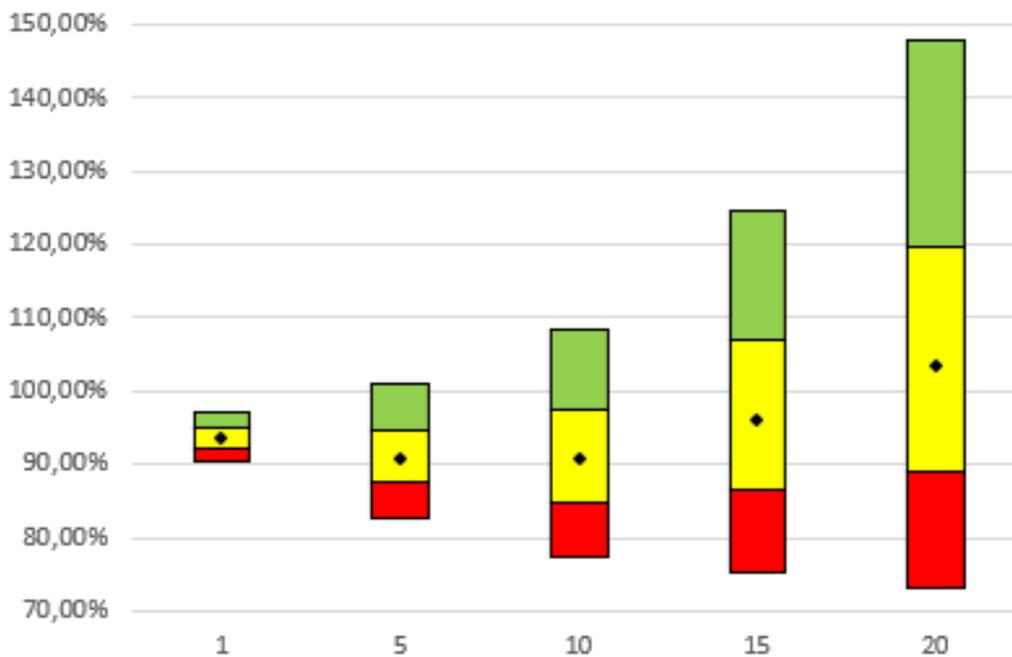


FIGURE 3.16 : Taux de couverture du portefeuille P4

En figure 3.16 sont représentés les taux de couverture à horizon 1, 5, 10, 15 et 20 ans du portefeuille P4 avec pour chacun, les différents quantiles retenus. En effet, la partie rouge regroupe les scénarios entre le quantile à 5% et celui à 25%, ensuite la partie jaune représente l'écart inter quartile et la partie verte correspond aux scénarios compris entre le quantile à 75% et celui à 95%. Le point correspond au scénario médian.

Horizon	5%	25%	50%	75%	95%
1	90.29	92.32	93.50	94.90	96.95
5	82.59	87.47	90.94	94.81	100.87
10	77.21	84.92	90.91	97.47	108.39
15	75.33	86.46	96.13	106.83	124.62
20	73.24	89.10	103.51	119.58	147.98

TABLE 3.13 : Valeurs en pourcentage des quantiles du portefeuille P4

Les taux de couverture médians observés en figure 3.16 sont plus élevés que ceux présentés dans le scénario central. En effet, la caractéristique principale de ce scénario est une espérance de rendement

plus grande. De plus, comme pour le cas central, les taux de couverture défavorables et extrêmement défavorables ne cessent de diminuer entre la vue à 1 an et celle à 20 ans.

Les valeurs exactes de ces quantiles sont résumées dans le tableau 3.13.

En figure 3.17 est représentée l'évolution des quantiles du montant de la réserve sur 40 ans lorsque celle-ci a été allouée selon le portefeuille P4. Ce graphique permet de rendre compte que dans un cas optimiste près de 95% des scénarios sont en mesure de faire face aux engagements.

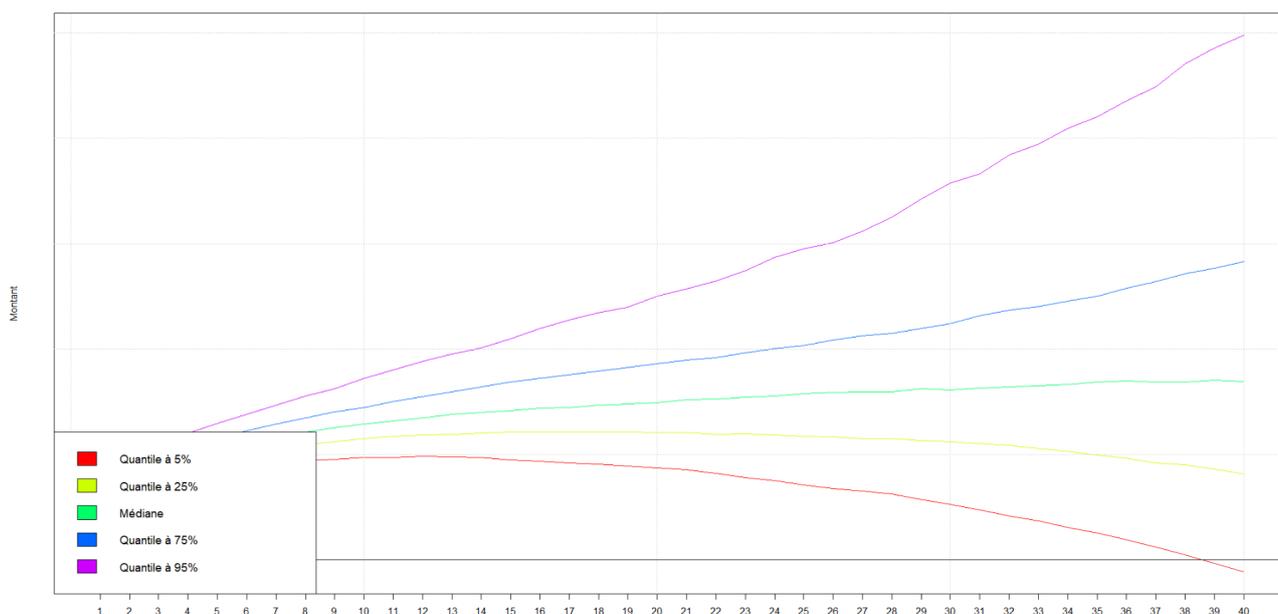


FIGURE 3.17 : Projection des quantiles du portefeuille P4

Par ailleurs à 20 ans, le taux de couverture est proche de 1 (= 98.42%), ce qui veut dire que les engagements à cette date sont complètement couverts. Ceci permet d'ouvrir sur une pratique volontairement écartée de l'étude qui serait d'intégrer une gestion tactique. En effet, comme montré dans le graphique 3.2, le solde technique n'est pas constant dans le temps : durant les 20 premières années il décroît fortement, puis durant les 20 dernières années la décroissance devient plus douce. À partir de cette observation, une approche aurait pu identifier deux cas indépendants et proposer deux portefeuilles différents pour deux horizons différents.

Ceci permet de se tourner vers la dernière section de ce mémoire, consistant à donner les limites que pose l'approche ici adoptée et les prolongements qu'elle suscite

### 3.6 Synthèse et prolongements

Pour comprendre l'ensemble des résultats une remise en contexte des différentes étapes qui ont conduit à leur obtention est essentielle. En effet, cet outil est ici appliqué à un régime de retraite. Or, il a pour vocation d'être aussi utilisé pour tous types d'engagements sociaux définis dans le chapitre 1 car la majorité de nos clients sont des entreprises.

### 3.6.1 Interprétation des résultats et confrontation des scénarios

Un point de départ est nécessaire pour comprendre et analyser ces résultats, c'est le taux de couverture du régime étudié à l'instant  $t = 0$ . Dans le cas d'une économie dans un état qualifié de central il vaut  $\tau_0 = 87,42\%$ . Plusieurs manières d'observer les résultats en figure 3.18 sont possibles. D'abord par colonne, pour les portefeuilles P1 à P3 les taux de couvertures diminuent au fur et à mesure que l'horizon augmente. Pour les portefeuilles P4 à P10, le contraire se produit. Cette première observation indique que la réserve augmente moins vite que le passif. En particulier, en figure 3.2, à partir de 2028 et ce jusqu'à la fin du périmètre temporel de l'étude, le solde technique est négatif, donc à chaque année (à partir de 2028) de calcul du taux de couverture la réserve diminue du fait d'un solde technique négatif et augmente du fait de la capitalisation. De plus, ce tableau indique aussi que le portefeuille ayant le rendement le plus élevé (c'est-à-dire le portefeuille le plus risqué) n'est pas le plus performant. Excepté pour l'horizon 1 an le portefeuille présentant le meilleur taux de couverture est le portefeuille P8.

Horizon \ Portefeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an	87,74%	88,02%	88,19%	88,25%	88,23%	88,24%	88,20%	88,18%	88,18%	88,14%
5 ans	81,52%	83,02%	84,00%	84,52%	84,66%	84,77%	84,94%	85,01%	84,86%	84,71%
10 ans	75,98%	79,37%	81,80%	82,95%	83,48%	84,02%	84,29%	84,49%	84,27%	83,79%
15 ans	72,70%	78,92%	83,30%	85,26%	86,45%	87,10%	87,58%	87,90%	87,79%	86,12%
20 ans	67,83%	77,50%	84,70%	88,33%	90,58%	91,66%	92,62%	92,78%	91,97%	90,81%

FIGURE 3.18 : Récapitulatif des taux de couverture dans le cas médian pour le scénario central

Lorsque l'économie décrit le contexte pessimiste développé précédemment, le taux de couverture initial vaut  $\tau_0 = 82,81\%$ . La tableau en figure 3.19 montre une tendance différente. Quelle que soit le portefeuille les taux de couverture diminuent au fur et à mesure que l'horizon augmente. Par contre, une similitude se retrouve avec le cas précédent : le portefeuille présentant le meilleur taux de couverture n'est pas non plus le plus risqué.

Horizon \ Portefeuille	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an	82,89%	83,00%	83,10%	83,09%	83,12%	83,10%	83,07%	83,05%	83,06%	83,07%
5 ans	76,26%	77,09%	77,78%	78,16%	78,48%	78,76%	78,83%	78,77%	78,42%	78,02%
10 ans	70,01%	71,73%	73,02%	74,07%	74,59%	74,99%	75,27%	75,00%	74,82%	74,09%
15 ans	65,86%	68,67%	70,97%	72,52%	73,51%	74,06%	74,49%	74,50%	73,63%	72,23%
20 ans	59,55%	64,08%	67,70%	70,17%	71,45%	72,67%	72,98%	72,49%	71,41%	69,21%

FIGURE 3.19 : Récapitulatif des taux de couverture dans le cas médian pour le scénario pessimiste

Enfin, dans le cas optimiste, le taux de couverture initial vaut  $\tau_0 = 92,32\%$ . Le tableau en figure 3.20 se rapproche beaucoup plus de celui en figure 3.18 avec les deux premiers portefeuilles qui présentent des taux de couverture plus faible qu'à l'instant initial. Aussi le portefeuille le plus risqué n'est toujours pas le plus performant selon la mesure du taux de couverture.

De manière plus globale, une nouvelle observation intéressante ressort en confrontant ces trois tableaux : le portefeuille P1 (décrit le portefeuille le moins risqué) présente le pire taux de couverture dans le cas optimiste et le meilleur dans le cas pessimiste. Au contraire pour le portefeuille P10 (le plus risqué), dans le cas optimiste, présente le meilleur taux de couverture. Cette observation rappelle et va

Portefeuille \ Horizon	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1 an	92,88%	93,28%	93,41%	93,50%	93,57%	93,66%	93,71%	93,74%	93,76%	93,74%
5 ans	87,24%	89,45%	90,52%	90,94%	91,30%	91,53%	91,79%	91,95%	91,86%	91,85%
10 ans	82,49%	87,55%	89,76%	90,91%	91,52%	91,99%	92,39%	92,63%	92,80%	92,13%
15 ans	80,38%	89,70%	93,76%	96,13%	97,84%	99,11%	99,58%	99,42%	98,85%	98,44%
20 ans	77,23%	92,37%	99,62%	103,51%	105,87%	107,93%	108,49%	108,65%	107,73%	106,20%

FIGURE 3.20 : Récapitulatif des taux de couverture dans le cas médian pour le scénario optimiste

dans le sens du résultat obtenu à la fin de la partie 3.5.3. Dans un scénario où les actifs sont corrélés positivement, les pertes sont plus faibles. Ces trois tableaux permettent d'aller plus loin dans cette déduction : les écart de taux de couverture sont significativement plus faible dans le cas pessimiste (10 points à horizon 20 ans) que dans le cas central (23 points à horizon 20 ans) que dans le cas optimiste (29 points à horizon 20 ans). La mesure du taux de couverture va donc dans le même sens que les conclusions obtenues avec les mesures de risques VaR et CVaR.

Ce dernier résultat est sûrement le plus important à retenir de ce cas pratique. Il est gardé à l'esprit dès lors que quelqu'un traite d'un sujet d'investissement. Que ce soit pour adosser un passif social ou plus généralement en assurance vie lors de l'adossement d'un fond en euro ou de tout autre produit garanti.

### 3.6.2 Limites

Ces résultats ont été obtenus à partir de modèles stochastiques, par définition, sensibles à la génération de scénarios économiques. Ces modèles admettent des limites à partir desquelles des prolongements sont envisageables. Par exemple, l'ensemble des modèles retenus au cours de cette étude n'admettent pas de volatilité stochastique. C'est pourquoi un modèle à changement de régimes a été présenté, afin de mixer les trois grands scénarios étudiés (central, pessimiste et optimiste) lors d'une nouvelle projection.

Une seconde remarque sur la gestion des corrélations est nécessaire. En effet, la projections des portefeuilles est réalisée sur un horizon relativement long. Il laisse envisager différents cycles économiques qui rendent notre hypothèse de stabilité des corrélations entre les classes d'actifs fragile. De plus, un regard est apporté à différents instants en ce qui concerne le taux de couverture et que ce soit au niveau des corrélations mais aussi des hypothèses de rendements et de volatilités des classes d'actifs, elles restent identiques pour chacun des trois grands jeux de scénarios.

De plus, l'introduction d'un regard à dire d'experts reste une modification subjective reposant sur des convictions qui impactent les résultats. Tout comme le choix de 8 catégories d'actifs, parmi lesquelles certaines n'ont pas été modélisées comme les infrastructures ou les fonds de loans.

Par ailleurs, le choix de la granularité des actifs pour proposer des réallocations ont un impact significatif sur les résultats. Dans cette étude, l'investissement en actions européennes n'est pas intéressant dans le contexte actuel. Ce qui n'aurait pas été visible si une seule catégorie action avait été gardée.

Aussi, des choix de modélisation ont été faits dans le but de répondre de manière pragmatique à une problématique à la fois d'investissement et d'adossement. Ils ont donc un impact sur les résultats qui restent par ailleurs cohérents dans le cadre de cette étude.

Enfin, des remarques plus techniques sont aussi à garder à l'esprit, il est important de noter que ce

travail repose sur une modélisation déterministe du passif, ce qui constitue une limite significative à prendre en compte dans notre contexte d'étude. Cela signifie que différentes sources d'incertitudes telles que le risque de mortalité, de rachat ou de sortie, ainsi que l'augmentation des cotisations, ont été négligés, alors qu'elles auraient pu avoir une influence non négligeable sur les choix d'allocation. Le lecteur doit bien comprendre pourquoi il n'a pas été possible de prendre en compte ces sensibilités compte tenu des données disponibles. En effet, aucune information sur la construction de la chronique de flux n'a été obtenue ni même sur l'élaboration des hypothèses retenues.

Cependant, certaines publications traitent du risque de mortalité et l'intègrent dans leur étude. En particulier, le mémoire (BLAQUIÈRE, 2007), prend en compte le risque de longévité à plusieurs niveaux. Dans son étude, Simon Blaquièrre estime l'accroissement de l'espérance de vie à partir d'un modèle de Lee Carter. Ce dernier permet mesurer une certaine dérive de la mortalité. Cette étude lui permet dans un premier temps de caractériser une augmentation de l'espérance de vie de plus de 6 ans entre 1970 et 2030. Suite à ce constat, il s'intéresse aux impacts des chocs indiqués dans Solvabilité II. En effet, le régulateur recommande un choc de +10% pour simuler le risque de mortalité et un choc de -25% pour simuler le risque de longévité sur les taux de mortalité.

- Premièrement ces chocs entraînent une variation de la valeur du passif, de -4% dans le cas d'une hausse de la mortalité et de +12% dans le cas d'une baisse de la mortalité. Dans ce dernier cas, l'augmentation a un impact direct sur le ratio de financement du fonds, qui dans l'étude se révèle être de -10,4%, d'où une nécessité pour l'employeur de réapprovisionner le fonds.
- Deuxièmement, un allongement de la durée de vie (chocs de -25% sur les taux de mortalité) entraîne mécaniquement un allongement de la durée des versements ainsi qu'une augmentation des flux probables de passif. Tout ceci engendre une augmentation de la durée du passif de l'ordre d'une année ce qui a comme principal impact de dérégler la couverture contre le risque de taux.
- Troisièmement, Simon Blaquièrre estime l'impact de l'effet croisé d'un choc sur les taux et d'un choc sur la mortalité. En effet, à chacun des chocs de mortalité est appliqué un choc de taux de -2% qui correspond à une translation de la courbe des taux vers le bas. Pour rappel, c'est aussi cette approche qui a été retenue au cours de la construction de l'outil ALM. Ce double choc entraîne finalement une augmentation de 43% de la valeur du passif, ce qui est à comparer avec une augmentation de 26% du passif dans le cas où seul un choc de taux est appliqué sans choc de mortalité. Ce point met en lumière que le risque entre choc sur les taux et choc sur la mortalité est un risque croisé, une mauvaise anticipation de la longévité peut conduire à un effet combiné de baisse des taux et d'augmentation de la longévité.

Cette étude montre donc que le risque de longévité peut avoir un impact important sur une solution ALM.

D'autre part, le choix de retenir le modèle de Black-Scholes pour la modélisation des produits obligataires est critiquable mais a été motivé par le fait de vouloir modéliser directement un prix et non un taux. Cependant, une modélisation des taux d'intérêt et des spreads aurait pu être plus pertinente, c'est pourquoi une prime de risque a néanmoins été retenu pour rendre compte d'un risque de défaut plus important pour le crédit. En effet les modèles s'appuyant sur une loi log normale se sont imposés pour modéliser des prix. Or d'autre modèle s'appuyant sur cette logique existe, en particulier les modèles à changement et de régime qui proposent une modélisation log normale avec des hypothèses différentes en fonction de l'état dans lequel se trouve le processus de prix. En effet cette approche à attirer notre attention car nous avons déjà pensé à organiser l'étude selon trois grands scénarios économiques. Les

modèles à changements de régimes sont précieux pour la simulation des actifs financiers parce qu'ils sont capables de capter des phases dans lesquelles les marchés financiers se comportent de manière différente. Ces modèles sont particulièrement adaptés pour saisir les périodes où il y a des variations soudaines du processus de prix, comme les périodes de forte volatilité. En intégrant ces changements de régimes, ces modèles fournissent une représentation plus réaliste des données financières, ce qui peut améliorer et faciliter la gestion des risques.

C'est dans ce sens que Robert Engle, lauréat du prix Nobel d'économie en 2003, a introduit le concept de modèles ARCH dans les années 1980 qu'il décrit dans son article (ENGLE, 2004), ce qui a marqué un tournant dans la manière dont la volatilité des données financières était abordée. Ces modèles ont permis de reconnaître que la volatilité n'est pas constante, mais varie au fil du temps. Cependant, il ne s'est pas arrêté là. Il a ensuite développé les modèles à changements de régimes de type ARCH, également connus sous le nom de "SWARCH" (Switching ARCH), pour mieux capturer les variations de volatilité dans différents régimes. Ces modèles ont été conçus pour refléter les variations brusques et inattendues de la volatilité dans les données financières. Ces modèles reconnaissent que la volatilité peut passer d'une période de faible volatilité à une période de volatilité accrue en réponse à des événements économiques ou financiers. Ils permettent de modéliser ces changements en ajustant les paramètres du modèle en fonction des conditions actuelles ou passées du marché. Cependant la mise en oeuvre et l'interprétation des modèles à changement de régimes de type ARCH s'avèrent complexes car ils nécessitent la spécification de seuils et de fonctions de changements de régimes appropriées. Ces modèles sont souvent appliqués à des domaines tels que la gestion des risques et la prévision des marchés.

Dans le mémoire (GILLOT, 2020), GILLOT prend en compte des cycles financiers en utilisant une approche par Markov Switching. En effet à l'aide de l'algorithme de Baum-Welsh, il cherche à détecter différentes crises économiques et financières. Il exhibera pour chaque facteur de risque (inflation, taux d'intérêt, action et immobilier) un régime stable et un régime de crise. Finalement, il retiendra un GSE markovien seulement pour la modélisation des actions et de l'inflation. Cette étude aura eu l'avantage de proposer une meilleure adéquation aux données avec la prise en compte de périodes de crise et permettant aussi une meilleure intégration de jugements d'expert dû en particulier au nombre plus important de paramètres. Au contraire cette surparamétrisation soulève des questions quant à la fiabilité des estimations. Aussi, il convient de se demander si les crises passées ont réellement une chance significative de se reproduire dans le futur.

Il convient aussi d'être plus précis quant aux limites des modèles stochastiques utilisés pour l'actif. Le modèle de Black-Scholes, par exemple, est relativement simpliste et ignore les phénomènes responsables des queues épaisses dans la distribution des rendements. Les calculs de mesure de risque basés sur ce modèle peuvent être biaisés, et ce biais n'est pas nécessairement prudent lors de la prise de décision.

### 3.6.3 Extrapolation des résultats et extensions possibles

Les indicateurs présentés (VaR, CVar, taux de couverture) mettent en lumière les sorties de l'outil d'allocation stratégique construit au cours de ce mémoire. Dans cette mise en pratique, un régime de retraite a été retenu pour jouer le rôle du passif à adosser. Cependant, l'outil a pour vocation de répondre à l'adossement d'autres passifs comme des produits de retraite supplémentaires et / ou des IFC. Des produits de préretraite pourraient aussi très bien fonctionner dans ce cas. Ils sont peu nombreux sur le marché mais vont sûrement arriver très vite sur le marché en particulier avec le décalage de l'âge de la retraite du fait de la dernière réforme.

De manière évidente cet outil pourrait faire l'objet d'ajout. Et ceci en était un des objectifs car même

s'il répond de manière convaincante à la question qui lui était posé, les limites présentées dans la section 3.6.2 sont nombreuses et constituent un nouvel axe de recherche en terme d'étude sur le passif, d'étude sur les corrélation, de modèles à changement de régimes, ...

# Conclusion

De manière générale, la construction d'un outil ALM nécessite de faire certaines hypothèses. L'outil construit lors de cette étude ne déroge pas à cette règle car les hypothèses prises ont été rappelées tout au long du mémoire. C'est pourquoi les résultats quantitatifs obtenus sont à interpréter avec prudence. En effet ces résultats ne sont pas généralisables car ils sont obtenus dans un cadre précis et simplifié. Toutefois, notre étude ainsi que nos analyses permettent de mettre en avant les principales tendances d'investissement dans un contexte de long terme suivant différents scénarios de l'économie future. Cela peut produire divers changements allant du simple ajustement jusqu'à une réallocation complète des portefeuilles d'investissement.

Plus précisément, la construction et la mise en place de critères d'allocation requièrent des hypothèses économiques et techniques solides pour modéliser les actifs. Pour ce faire, la construction de cet outil a nécessité plusieurs étapes.

- Premièrement, la recherche d'une allocation optimale en terme de maximisation de rendement sous contrainte de volatilité et de seuils appliqués à certaines catégories d'actifs.
- Deuxièmement, l'utilisation de modèles pour construire un GSE permettant de projeter les portefeuilles optimaux. Dans cette étude, le modèle utilisé est celui de Black & Scholes.
- Troisièmement, l'intégration du passif à la projection des portefeuilles a permis de déterminer un portefeuille idéal.

Avant cela, un chapitre de présentation des différents passifs pouvant être adossés à partir de cet outil a été donné. En effet, en tant que courtier en assurance, les clients sont, pour la majorité, des entreprises et dans une moindre mesure, des caisses de retraite. De plus, les différents actifs éligibles à la charte d'investissement des clients ont été définis ainsi que les différents supports d'investissement pour l'épargne.

Ensuite, un chapitre dédié à l'explication des modèles, que ce soit pour la génération et la projection des scénarios ou la recherche d'une allocation optimale a été fourni. Tous ces modèles ont permis d'aboutir à la création de l'outil décrit dans ce mémoire dans un univers de projection risque historique.

Le dernier chapitre a permis de mettre en lumière l'approche utilisée au travers de l'adossement d'un régime de retraite fictif. Cette étude de cas a apporté une réponse solide et claire à la problématique posée en début de mémoire : **Comment construire une allocation stratégique optimale pour adosser un passif de retraite ?**

En effet, l'approche se base sur des hypothèses à la fois quantitatives et qualitatives, en mixant des modèles techniques et une vision du contexte macroéconomique futur. La distinction entre trois jeux d'hypothèses caractérisant trois états probables de l'économie future ont permis d'illustrer cette étude

avec plus de pragmatisme. Le client, en fonction de son appétence aux risques, aura autant de clés que d'indicateurs tels que VaR, CvaR, taux de couverture, ... pour choisir l'allocation finale.

Toutefois, ces résultats sont à mettre en perspective, du fait de nombreuses approximations apportées à cette étude. Une première remarque sur la gestion des corrélations est nécessaire. En effet, la projections des portefeuilles est réalisée sur un horizon relativement long. Il laisse envisager différents cycles économiques qui rendent l'hypothèse de stabilité des corrélations entre les classes d'actifs fragile. De plus, un regard est apporté à différents instants en ce qui concerne le taux de couverture et que ce soit au niveau des corrélations mais aussi au niveau des hypothèses de rendements et de volatilités des classes d'actifs, elles restent identiques dans chacun des trois grands jeux de scénarios. Ce mémoire comporte aussi des limites au sujet des hypothèses de modélisation, que ce soit pour le passif ou l'actif. Le passif est modélisé de manière déterministe, ignorant le risque de moralité, de rachat, de hausse de cotisations ou d'autres incertitudes. Au sujet de l'actif, l'outil utilise seulement le modèle de Black-Scholes pour la projection des classes d'actifs et ne prend pas en compte la modélisation des taux d'intérêt et des spreads.

De plus, certaines étapes méritent d'être approfondies dans le cadre d'une nouvelle étude et constituent une extension possible de ce travail. En particulier, la question de la réallocation, suite à ce nouveau portefeuille, en terme de temps d'application (instantané, en plusieurs mois, en début d'année, ...) mais aussi en terme de période favorable (économie stable, remontée des taux ...).

Pour constituer ce nouveau portefeuille, plusieurs horizons mériteront d'être étudiés pour en comparer les impacts sur la réserve et le taux de couverture. Une approche progressive pourrait être traitée dans un premier cas puis une approche instantanée. À ce titre, une vision sur une période courte serait à privilégier. Des modèles dits à gestion dynamique (au contraire de l'approche adoptée ici, dite à gestion statique) pourraient répondre à cette nouvelle question soulevée par cette étude. Avec le choc de marché de ce début d'année, le choix de l'horizon temporel est encore plus important et pourrait aussi avoir un impact sur les hypothèses des différents scénarios énoncés dans le chapitre 3.

Aussi, une considération plus forte des incertitudes sur les flux du passif nécessiterait une nouvelle étude et un juste prolongement de ce travail. En effet, le passif a ici été traité de façon sommaire, du fait de la contrainte liée aux données. Il n'a ni été soumis à une valorisation, ni choqué par quelconques événements extérieurs (fusion / rachats de régime, variation significative d'actifs et / ou de retraités, modification d'âge de départ en retraite ...).

# Bibliographie

- AIMAR, T., BISMANS, F. et DIEBOLT, C. (2009). Le cycle économique : une synthèse. *Revue française d'économie* Volume XXIV.4, p. 3-65.
- BERNARD, P. (2007). Le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers. URL : <https://bm.com.tn/ckeditor/files/medaf.pdf>.
- BLACK, F. et LITTERMAN, R. (1991). Asset Allocation : Combining investor views with market equilibrium. *The journal of fixed income*, p. 1-12.
- BLACK, F. et LITTERMAN, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *CFA Institute* 48, p. 28-43.
- BLAQUIÈRE, S. (2007). Problématique ALM d'un fonds de pension au Royaume-Uni. Mémoire d'actuariat.
- BRINSON, G. P., SINGER, B. D. et BEEBOWER, G. L. (1991). Determinants of Portfolio Performance II: An Update. *Financial Analysts Journal* 47.3, p. 40-48.
- CHEN, X. et YIN, X. (2019). NlcOptim: Solve Nonlinear Optimization with Nonlinear Constraints. URL : <https://CRAN.R-project.org/package=NlcOptim>.
- CLAVERIE, S. (2021). Actuariat de la retraite.
- ENGLE, R. (2004). Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice. *The American Economic Review* 94.3, p. 405-420.
- FALEH, A. (2011). Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite. Thèse de doct.
- FALEH, A. (2015). ALM et allocation stratégique d'actifs : cas des régimes de retraite et des fonds de pension. Mémoire d'actuariat. CEA.
- GILLOT, G. (2020). Générateur de scénarios économiques en monde réel : approche Markov Switching. Mémoire d'actuariat.
- GOURINCHAS, P.-O. (2022). Perspectives de l'économie mondiale, Mise à jour, Un horizon sombre et plus incertain. Rapp. tech. Fonds Monétaire International, p. 22. URL : <https://www.imf.org/fr/Publications/WEO/Issues/2022/07/26/world-economic-outlook-update-july-2022>.
- LEE, R. D. et CARTER, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87.419, p. 659-671.
- MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, p. 77-91.
- PLANCHET, F., THÉRON, P.-E. et KAMEGA, A. (nov. 2009). Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation. Assurance Audit Actuariat. *Economica*, p. 235.
- RAUTUREAU, N. (2004). Modèles à changement de régime et test de la théorie des anticipations rationnelles de la structure par terme des taux d'intérêt en France. *Économie prévision* 163.2, p. 117-129.
- RICHARD, R. (1992). A Mean/Variance Analysis of Tracking Error. *The journal of portfolio management* 18.4, p. 13-22.
- ROBERT, A. J. et STUART, M. T. (1995). Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *The Journal of Finance* 50.1, p. 53-85. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1995.tb05167.x>.

- SECRETARIAT GÉNÉRAL DU CONSEIL D'ORIENTATION DES RETRAITES (2009). Les indicateurs de pilotage d'un système de retraite. Rapp. tech. Conseil d'Orientation des retraites, p. 15. URL : <https://www.cor-retraites.fr/sites/default/files/2019-06/doc-1220.pdf>.
- SHARPE, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The journal of finance*, p. 425-442.

# Annexe A

## Annexes

### A.1 Panorama des régimes de retraite en France



## A.2 Taux de couverture dans le scénario central



FIGURE A.1 : Taux de couverture des portefeuilles P1 à P4

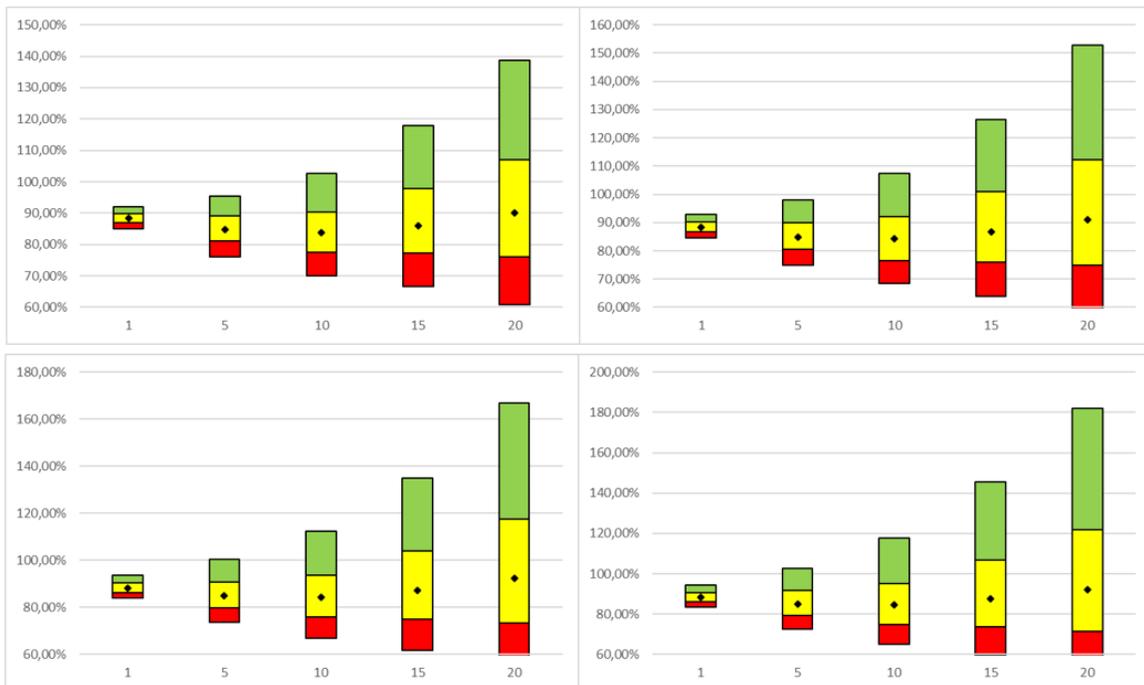


FIGURE A.2 : Taux de couverture des portefeuilles P5 à P8

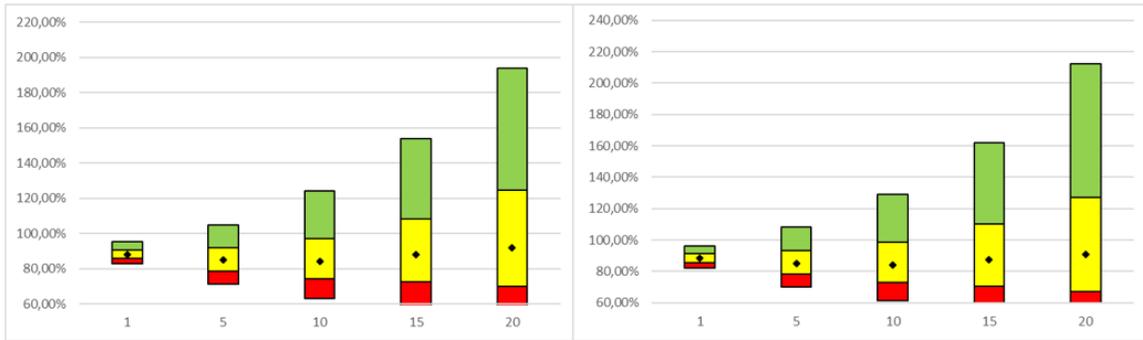


FIGURE A.3 : Taux de couverture des portefeuilles P9 et P10

### A.3 Taux de couverture dans le scénario pessimiste

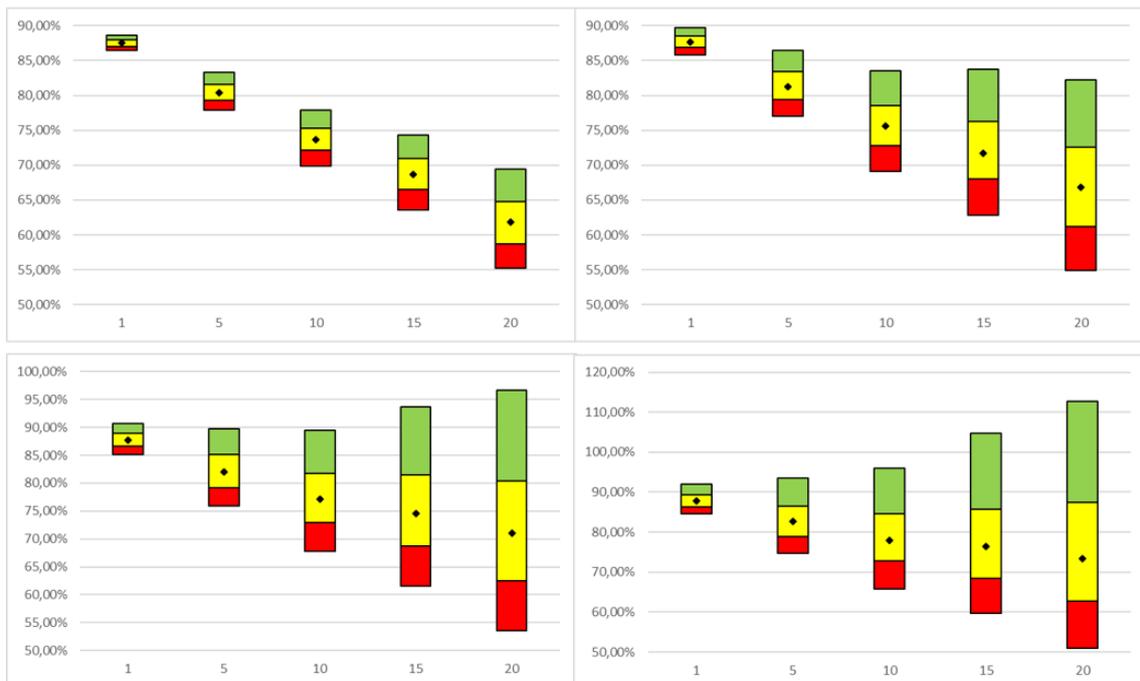


FIGURE A.4 : Taux de couverture des portefeuilles P1 à P4

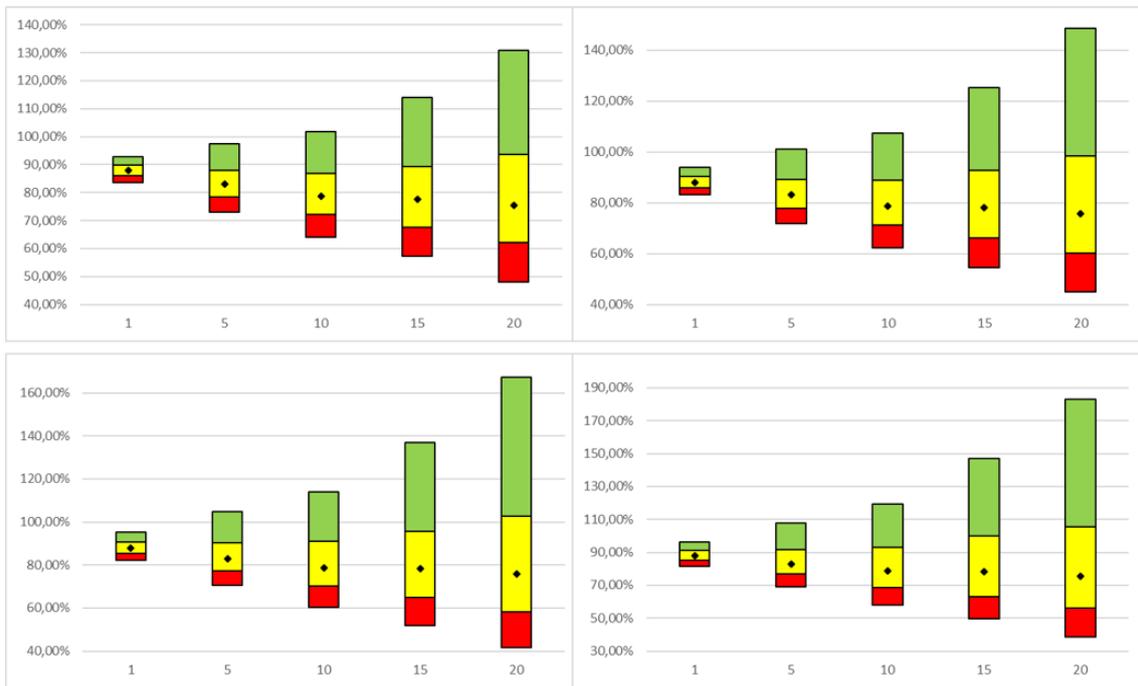


FIGURE A.5 : Taux de couverture des portefeuilles P5 à P8

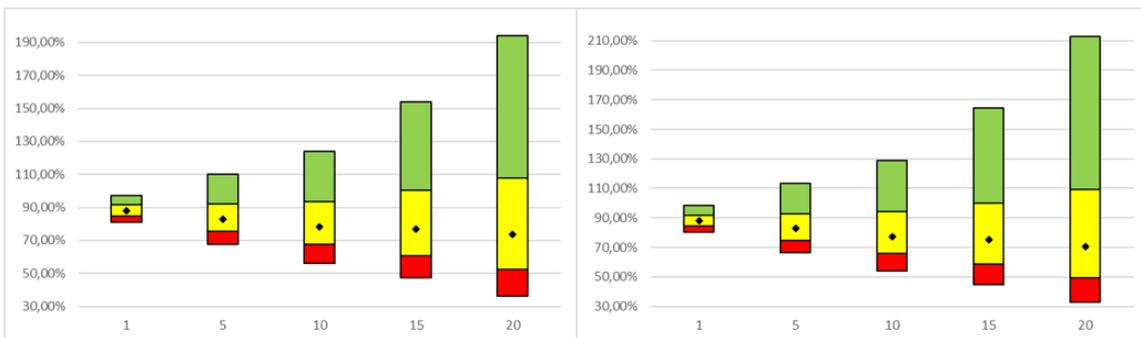


FIGURE A.6 : Taux de couverture des portefeuilles P9 et P10

### A.4 Taux de couverture dans le scénario optimiste

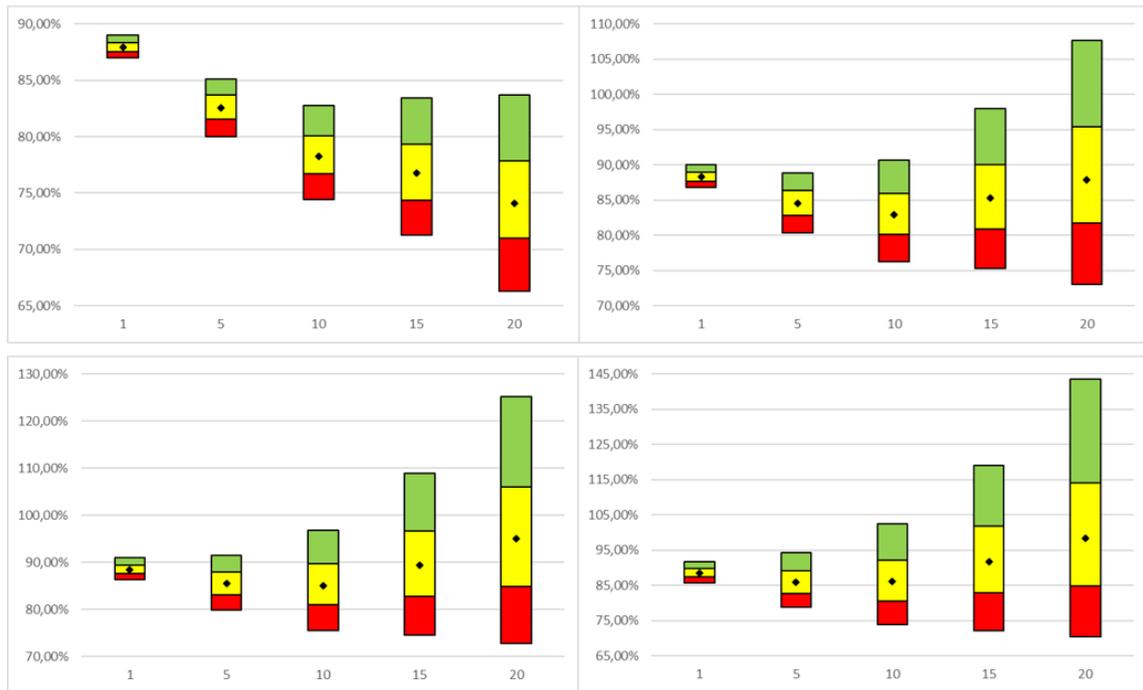


FIGURE A.7 : Taux de couverture des portefeuilles P1 à P4



FIGURE A.8 : Taux de couverture des portefeuilles P5 à P8

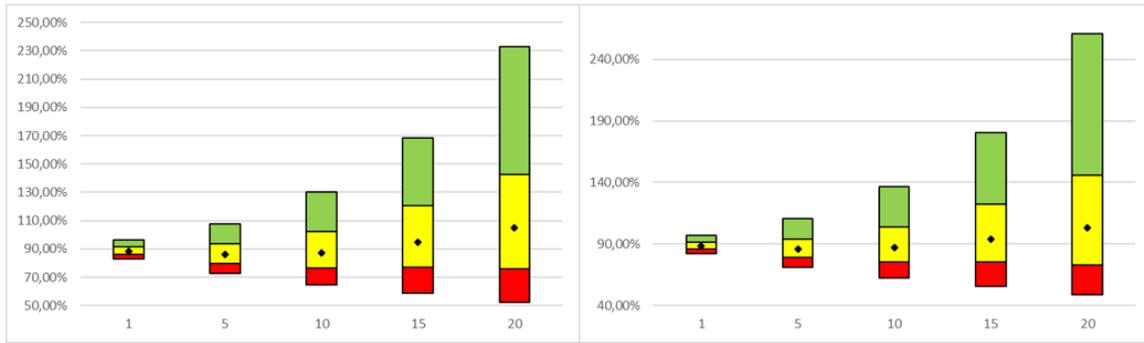


FIGURE A.9 : Taux de couverture des portefeuilles P9 et P10