

**Mémoire présenté pour la validation de la Formation
 « Certificat d'Expertise Actuarielle »
 de l'Institut du Risk Management
 et l'admission à l'Institut des actuaires
 le**

Par : **Georges Farah**

Titre : **Estimation des provisions techniques en assurance-crédit et prise en compte de données exogènes**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire*

*Membres présents du jury de l'Institut
du Risk Management*

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : **CCR**

Signature et cachet :

**Caisse Centrale de Réassurance
157, boulevard Haussmann
75008 PARIS**

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : **COHIGNAC Thierry**

Signature :

Invité :

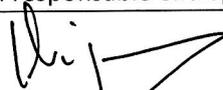
Nom :

Signature :

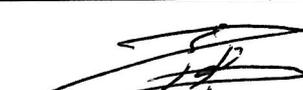
**Autorisation de publication et de mise en ligne
sur un site de diffusion de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

Le calcul des provisions de sinistre est un enjeu majeur en assurance. Les assureurs non-vie disposent d'un nombre important de méthodes de provisionnement, la plupart connues comme étant agrégées, c'est-à-dire basées sur des triangles de sinistre. La référence incontournable au sein de la communauté actuarielle est la méthode de Chain-Ladder. Nous nous intéressons à l'élaboration d'une méthode alternative, agrégée et plus précise pour le calcul des réserves. Notre choix se porte sur le filtre de Kalman, connu pour sa capacité à corriger les estimations en fonction des observations. Nous adaptons le filtre de Kalman au provisionnement des sinistres, dans le cadre de l'assurance-crédit, en particulier pour les trois dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+, ayant vu le jour à la suite de l'épidémie de la COVID19. Les résultats démontrent que le calcul des réserves par le filtre de Kalman est beaucoup plus précis que par la méthode de Chain-Ladder. Grâce à un compromis entre la confiance accordée dans le modèle et celle accordée dans les observations, il est tout à fait possible d'améliorer significativement les performances du filtre de Kalman notamment pour traiter le cas des données aberrantes ou le cas d'inadéquation entre le modèle et la réalité. Nous présentons ensuite une modélisation de l'évolution de la sinistralité au titre de CAP Relais en fonction de celle d'indicateurs relatifs à la conjoncture économique. L'intégration de cette modélisation dans le filtre de Kalman n'a pas permis, dans notre cas, d'améliorer les résultats en termes de RMSE par rapport à un filtre de Kalman sans prise en compte de la conjoncture économique. Enfin, nous calculons les réserves au titre du dispositif CAP Relais pour les périodes futures de sinistre à partir d'un historique d'observations jusqu'à une période de sinistre donnée. En conclusion, le filtre de Kalman est pertinent comme méthode de provisionnement en assurance non-vie. Il permet de gérer nativement l'évolution des montants garantis et la prise en compte des données exogènes.

Mots-clés : provisionnement, filtre de Kalman, assurance-crédit, Chain-Ladder, réserves de sinistre

Abstract

The calculation of claims reserves is a major issue in insurance. Non-life insurers share a lot of reserving methods, most of them based on loss triangles and known as aggregated methods. The Chain-Ladder constitutes an international reference within the actuarial community. We are interested in developing an alternative, aggregated and more accurate method for reserving. Our choice is the Kalman filter, known for its ability to correct estimates based on observations. We adapt the Kalman filter to the provisioning of claims, in the context of credit insurance, for the CAP Relais, CAP and CAP+ systems, which emerged following the COVID19 epidemic. The calculation of the reserves by the Kalman filter is much more precise than by the Chain-Ladder method. Thanks to a compromise between the confidence granted to the model and that granted to the observations, it is entirely possible to significantly improve the performance of the Kalman filter, to deal with the case of aberrant data or the case of inadequacy between the model and reality. We then present a model of the evolution of claims for CAP Relais with respect to that of indicators relating to the economic situation. The integration of this modeling in the Kalman filter did not improve the results in terms of RMSE compared to a Kalman filter without considering these exogenous data. Finally, we calculate the reserves for future loss periods under the CAP Relais system based on a history of observations up to a given loss period. In conclusion, the Kalman filter is relevant as a provisioning method in non-life insurance. It manages natively the evolution of the guaranteed outstandings and the consideration of exogenous data.

Keywords: provisioning, Kalman filter, credit insurance, Chain-Ladder, loss reserves

Note de synthèse

Introduction

L'inversion du cycle de production fait partie des spécificités du secteur de l'assurance. En effet, contrairement aux autres secteurs où le vendeur d'un produit ou d'un service connaît son prix de revient, et peut par conséquent déterminer le prix de vente, un assureur vend un contrat d'assurance pour lequel il doit déterminer le prix sans connaissance des coûts des sinistres qui y seront relatifs. Pour cela, les assureurs doivent constituer des provisions. En assurance non-vie, plusieurs types de provisions techniques existent, dont celles liées aux montants des sinistres que l'assureur devra verser au titre de ses engagements. Ces provisions sont donc destinées à régler les sinistres survenus mais non encore complètement indemnisés ou qui sont encore inconnus de l'assureur.

Nous nous intéressons dans cette étude au provisionnement en assurance-crédit. Cette dernière joue un rôle économique essentiel, en couvrant les entreprises contre le risque de défaillance des clients auxquels elles accordent des délais de paiement, et ainsi, en sécurisant leur trésorerie. Plus précisément, l'assureur-crédit protège ses assurés (les fournisseurs) contre le risque du non-paiement des factures de la part de leurs clients (les acheteurs). Dans le contexte de crise sanitaire liée à la COVID19 et de ses conséquences sur l'économie, la Direction Générale du Trésor a habilité CCR en mars 2020 à agir avec la garantie de l'état pour pratiquer des opérations de réassurance des risques d'assurance-crédit dans le cadre de trois dispositifs d'aide aux entreprises : CAP Relais, CAP et CAP+. Le dispositif CAP Relais fonctionne selon un mécanisme de quote-part classique sur le portefeuille global de l'assureur-crédit. Quant au dispositif CAP, son fonctionnement est similaire à une réassurance XS par risque : une garantie complémentaire est accordée en plus de la garantie primaire dont dispose un assuré sur un acheteur donné. En cas de sinistre, la garantie CAP ne joue que si l'impayé dépasse le montant de la garantie primaire. Enfin, le dispositif CAP+ est une garantie de substitution que l'assureur-crédit peut accorder et qui sera prise en charge par le réassureur. Ce dispositif fonctionne de façon analogue à un quote-part classique, mais s'applique uniquement aux contrats pour lesquels l'assureur-crédit souhaite résilier la garantie relative sur un acheteur donné.

Nous sommes donc dans un contexte de provisionnement en assurance non-vie, pour laquelle l'estimation des provisions se fait en général à l'aide de méthodes agrégées basées sur des triangles, avec en ligne les périodes de survenance et en colonne les périodes de développement. Parmi ces méthodes, Chain-Ladder fait figure de référence incontournable, connue pour sa simplicité et son intuitivité. D'autres méthodes dites déterministes sont également connues telles que Bornhuetter-Ferguson et le modèle factoriel de De Vylder. Quant aux méthodes stochastiques, le modèle de Mack et celui de Renshaw et Verrall sont souvent utilisés.

Du fait du manque de données à la maille acheteur, le provisionnement individuel ou ligne par ligne ne peut être applicable. Notre objectif est donc de proposer une méthode agrégée, alternative au Chain- Ladder, et plus précise que cette dernière pour l'estimation des provisions de sinistre. Nous proposons pour cela de s'appuyer sur les modèles Espace Etat, et plus particulièrement sur le filtre de Kalman, bien connu dans le monde de l'automatique et de la défense. Certaines publications traitant de l'utilisation du filtre de Kalman pour des problématiques de provisionnement existent à l'international, mais la méthode reste très peu

utilisée au sein de la communauté actuarielle française. Notre problématique est d'étudier si le filtre de Kalman est pertinent pour le calcul des provisions de sinistre dans le cadre des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+.

Données et méthodes

Données assurantielles et indicateurs relatifs à la conjoncture économique

La mise en place des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+ s'est accompagnée par la définition et la production de reportings dans l'objectif de suivre l'exposition de l'État et la sinistralité. Ces données relatives aux sinistres sont mensuelles et caractérisées pour chaque couple assuré/acheteur par la date du sinistre (date de livraison du bien ou du service), la date de déclaration du sinistre, la date de dernière indemnisation et enfin l'indemnisation cumulée à la date de dernière indemnisation. Dans une optique de méthode agrégée pour le provisionnement, la date du sinistre servira à identifier la période de survenance du sinistre. Quant à la date de déclaration, elle permettra d'identifier la période de développement.

Afin d'expliquer la sinistralité, nous avons exploré des données exogènes, et en particulier six indicateurs relatifs à la conjoncture économique. En effet, une forte activité économique peut être synonyme d'une faible sinistralité car une forte production est souvent corrélée à une forte demande et la santé des entreprises se trouve améliorée. En revanche, une forte production est synonyme d'un nombre important de factures émises, ce qui par effet de volume peut conduire à un nombre probablement important de sinistres. Deux indicateurs parmi les six semblent pertinents : il s'agit de l'indice mensuel de la production industrielle en industrie manufacturière, et du nombre mensuel de défaillances d'entreprises. En effet, plus le nombre de défaillances augmente, plus la sinistralité en assurance-crédit est supposée augmenter.

Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif en contexte discret. Il consiste en deux étapes distinctes : La prédiction de l'état actuel à partir de l'état précédent, et ensuite la mise à jour de la prédiction de l'état actuel en fonction des observations de l'instant courant. Cette étape permet d'affiner les estimations.

Un filtre de Kalman est caractérisé par les équations suivantes : si \mathbf{z}_k désigne le vecteur observation à l'instant k , et \mathbf{x}_k désigne l'état au même instant k , les équations de Kalman s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Avec :

- \mathbf{F}_k : la matrice de transition permettant de passer de l'état $k - 1$ à l'état k
- \mathbf{u}_k : un vecteur de « commande » (cette dénomination est issue du monde de l'automatique)
- \mathbf{B}_k : la matrice qui relie le vecteur de « commande » \mathbf{u}_k à l'état \mathbf{x}_k
- \mathbf{w}_k : le bruit du processus, supposé suivre une distribution normale gaussienne de moyenne $\mathbf{0}$ et de matrice de covariance \mathbf{Q}_k , $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$
- \mathbf{H}_k : matrice des observations, qui relie l'état \mathbf{x}_k à l'observation \mathbf{z}_k

- \mathbf{v}_k : le bruit des observations, supposé suivre une distribution normale gaussienne de moyenne $\mathbf{0}$ et de matrice de covariance \mathbf{R}_k , $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$

Nous supposons que le triangle des charges incrémentales de sinistre s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} & \dots & S_{0,p-1} & S_{0,p} \\ S_{1,0} & S_{p-1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,p-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ S_{p-2,0} & S_{p-2,1} & S_{p-2,2} & & & \\ S_{p-1,0} & S_{p-1,1} & & & & \\ S_{p,0} & & & & & \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, nous modélisons \mathbf{z}_k comme étant le vecteur, de dimension $p + 1$, des charges de sinistre observées à l'instant $t = k$. $\mathbf{z}_k = (S_{k,0}, S_{k-1,1}, S_{k-2,2}, \dots, S_{1,k-1}, S_{0,k}, 0, \dots, 0)^T$.

Quant à l'état \mathbf{x}_k , il est supposé représenter le vecteur des charges de sinistre à l'ultime pour les périodes de sinistre allant de 0 à k . Ce vecteur de dimension $p + 1$ s'écrit en fonction des charges de sinistre à l'ultime $S_k = \sum_{j=0}^{\infty} S_{k,j}$. Dans ce cas, le vecteur $\mathbf{x}_k = (S_k, S_{k-1}, \dots, S_1, S_0, 0, \dots, 0)^T$.

Nous supposons la matrice \mathbf{H}_k diagonale, carrée et indépendante du temps. Un développement mathématique des équations de Kalman permet d'estimer ses éléments par l'équation :

$$h_{j,j} = \frac{\sum_{i=0}^{i=k-j} S_{i,j}}{\sum_{i=0}^{i=k-j} S_i}$$

Nous mettons en place des méthodes d'estimation des différents paramètres caractérisant le filtre de Kalman de telle sorte qu'ils soient indépendants de la période de sinistre. Trois cas d'usage concrets sont explorés : dans le premier cas, les montants garantis sont supposés constants, et aucune donnée exogène n'est introduite dans la modélisation. Dans le second cas, les montants garantis sont supposés évolutifs, ce qui induit du changement dans l'équation d'état du filtre de Kalman. Enfin, dans le dernier cas, une adaptation du filtre de Kalman est effectuée pour tenir compte de la conjoncture économique.

Les matrices \mathbf{F}_k et \mathbf{Q}_k sont composées majoritairement de 0. Le terme $F_{0,0}$ égal à 1 dans le cas où les montants garantis sont constants. Quant à $Q_{0,0}$, ce terme reflète la variance du modèle.

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} F_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Quant à la matrice d'observation \mathbf{R}_k , elle est supposée diagonale, et indépendante du temps. Nous préconisons une écriture de la forme $\mathbf{R}_k = r^2 \mathbf{I}$ avec \mathbf{I} la matrice identité, et r^2 la variance des résidus du modèle $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$.

Les performances du filtre de Kalman sont appréciées par rapport à celles de la méthode de Chain-Ladder, en réalisant un backtesting qui s’inspire de la technique présentée par Michel Denuit et Arthur Charpentier en 2005 s’appliquant aux triangles de développement. Il s’agit d’extraire des sous-triangles à partir du triangle principal et de comparer les estimations des réserves effectuées à partir de ces sous-triangles avec les données réelles.

Résultats

Performances du filtre de Kalman

Nous nous restreignons à présenter les performances du filtre de Kalman dans le cas des montants garantis constants, étant donné que les résultats dans le cas des montants garantis évolutifs et leurs interprétations restent équivalentes. Au titre du dispositif CAP Relais, le filtre de Kalman est plus précis que la méthode de Chain-Ladder comme le démontre le tableau ci-dessous. Quelle que soit la période de sinistre étudiée, le filtre de Kalman améliore significativement les performances par rapport à Chain-Ladder, le ratio entre les erreurs d’estimation des réserves est toujours inférieur à 1. Certaines périodes sont caractérisées par des erreurs plus importantes en montant, et ces erreurs sont dues soit à des observations aberrantes, soit à une inadéquation entre le modèle véhiculé par le filtre de Kalman et la réalité. Globalement, le filtre de Kalman est mieux armé pour faire face à ces situations pouvant engendrer des estimations des réserves souvent éloignées de la réalité.

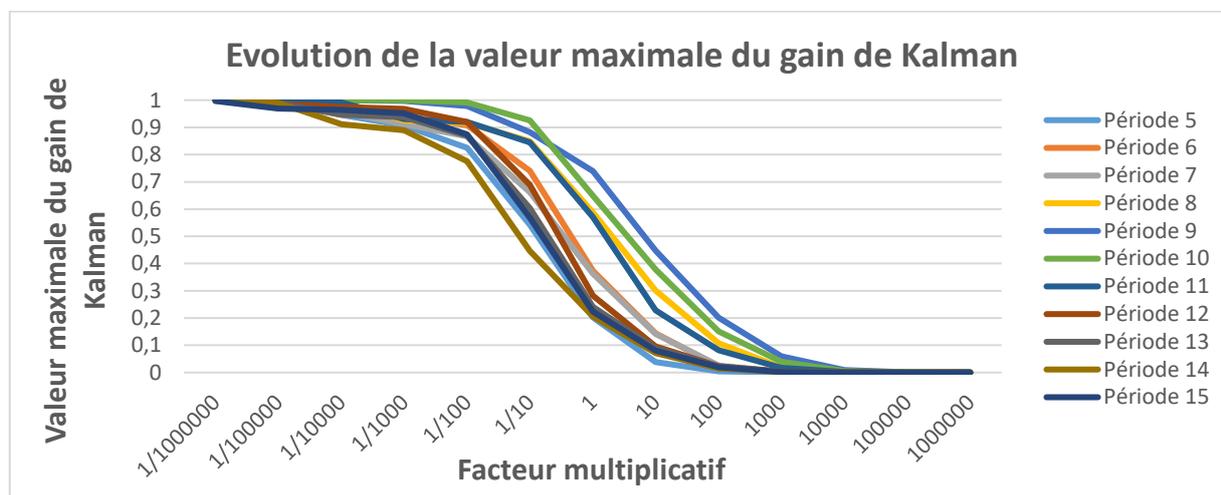
Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d’estimation par Chain-Ladder (CL)	Erreur d’estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	13 400 133	-8 118 654	-6 433 945	0,79
6	16 082 686	-2 834 962	613 914	-0,21
7	18 425 200	-3 163 736	1 697 605	-0,54
8	18 368 042	98 937 691	8 961 353	0,09
9	18 350 083	19 113 970	11 905 656	0,62
10	17 753 242	1 780 948	-155 039	-0,09
11	18 314 769	-5 678 211	-1 327 686	0,23
12	19 232 117	-5 470 916	-1 182 502	0,22
13	20 681 261	-8 367 029	-4 295 553	0,51
14	22 366 196	-13 312 714	-6 805 621	0,51
15	25 460 747	-15 858 608	-10 572 207	0,67

Concernant le dispositif CAP, la méthode de Chain-Ladder et le filtre de Kalman sont peu pertinents car aucune régularité dans les cadencements des sinistres ne semble exister. Les résultats pour le dispositif CAP+ sont similaires à ceux pour le dispositif CAP Relais : l’erreur d’estimation des réserves par le filtre de Kalman est toujours inférieure à celle par la méthode de Chain-Ladder.

Analyse de sensibilité et optimisation des résultats

La mise à jour des estimations faites par le filtre de Kalman se fait en tenant compte de l’écart entre ces estimations et les observations. Le fonctionnement est similaire à la crédibilité, où un coefficient (fonction du gain de Kalman) permet de pondérer l’apport du modèle et celui de l’observation lors de la mise à jour. La figure ci-dessous montre qu’en multipliant la matrice de covariance des observations par un facteur

donné, le gain de Kalman se trouve modifié, tout en évoluant entre 0 et 1. Nous pouvons utiliser cette courbe pour optimiser les résultats du filtre de Kalman. Si l'augmentation de l'erreur d'estimation des réserves est due à une valeur aberrante, il est alors possible d'utiliser un facteur multiplicatif supérieur à 1 pour la matrice de covariance des observations de telle sorte que le poids du modèle soit plus influençant. En revanche, si cette erreur s'explique par un changement de modèle, le facteur multiplicatif sera inférieur à 1 et permettra d'accorder plus de poids aux observations.



Grâce à ce compromis entre la confiance accordée au modèle et celle accordée aux observations, une nette amélioration des résultats du filtre de Kalman peut être effectuée, comme le démontre le tableau ci-dessous :

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par filtre de Kalman	
		Sans optimisation	Avec optimisation
8	18 368 042	8 961 353	424 804
9	18 350 083	11 905 656	-59
12	19 232 117	-1 182 502	507 347
13	20 681 261	-4 295 553	120 088
14	22 366 196	-6 805 621	-4 527
15	25 460 747	-10 572 207	-3 697 225

Prise en compte de la conjoncture économique

Parmi les indicateurs relatifs à la conjoncture économique, une certaine corrélation semble exister entre le nombre de défaillances mensuelles, la production manufacturière et la sinistralité à l'ultime au titre du dispositif CAP Relais comme le démontre la figure ci-dessous.

Une relation monotone semble exister entre la dérivée de la sinistralité à l'ultime et celles du nombre de défaillances mensuelles et de la production manufacturière. Compte-tenu du nombre restreint de données, nous optons pour une modélisation linéaire même si un tel modèle ne suffit pas à expliquer les évolutions.

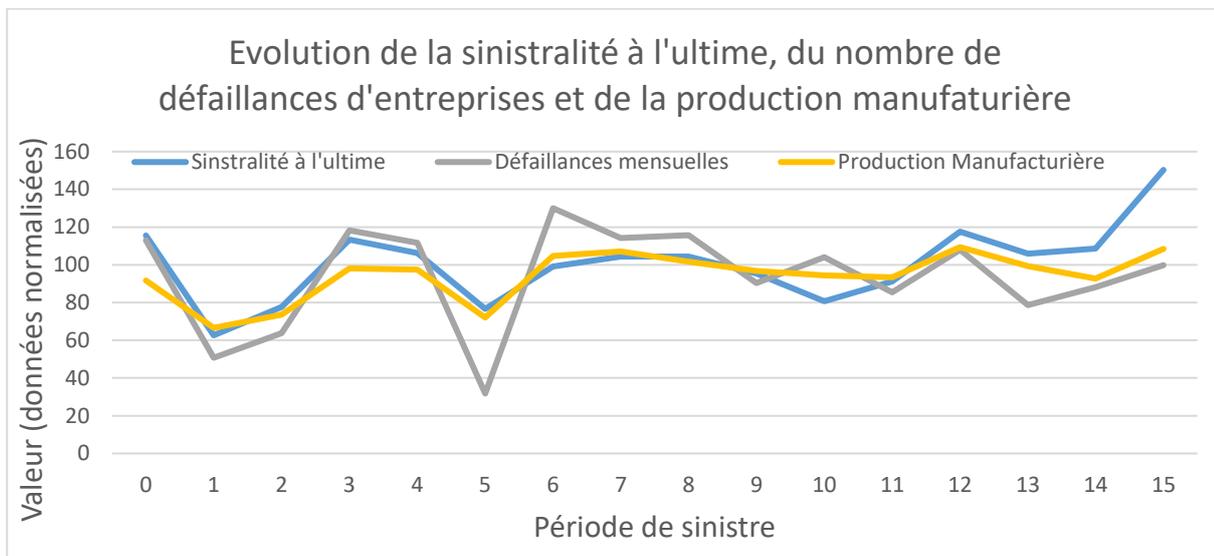
La prise en compte de cette modélisation dans le filtre de Kalman est aisée grâce au terme $B_k u_k$. Elle comprend une variable ou deux selon que la prise en compte de la conjoncture économique se fait à l'aide de nombre de défaillances, de la production manufacturière ou des deux variables. Dans tous les cas, pour

passer de la sinistralité à l'ultime depuis l'instant $t = k - 1$ à l'instant $t = k$, la relation ci-dessous est supposée valable :

$$S_k - S_{k-1} = b_{31}(u_{k,0} - u_{k-1,0}) + b_{32}(u_{k,1} - u_{k-1,1}) + b_{30},$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} b_{31} & -b_{31} & b_{32} & -b_{32} & b_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k-1,0} \\ u_{k,1} \\ u_{k-1,1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Les assureurs-crédit disposent d'un historique suffisant de la sinistralité de leur portefeuille pour déduire les différents paramètres ci-dessus. Nous supposons pour cela que la régression linéaire estimée à partir de l'historique de sinistralité antérieure au dispositif CAP Relais ne se trouve pas modifiée par ce dernier. De notre côté, ne disposant pas de sinistralité antérieure, nous estimons les paramètres à partir de la sinistralité observée au titre du dispositif CAP Relais. Nous supposons que la relation décrivant l'évolution des différentes grandeurs pendant le dispositif CAP Relais est restée identique à celle qui aurait été estimée par un assureur-crédit avant la mise en place du dispositif.

Nous observons d'après le tableau ci-dessous que même si pour certaines périodes de sinistre, la prise en compte de données exogènes améliore les estimations, au global, cette modélisation n'améliore pas les résultats d'estimation des réserves en termes de RMSE. Le filtre de Kalman le plus performant est celui qui ne tient pas compte de la conjoncture économique. Notre interprétation est que la modélisation linéaire sur l'ensemble de l'historique détériore les résultats, vraisemblablement à cause d'une modélisation peu précise de la sinistralité en fonction des indicateurs de la conjoncture économique. Le fait que cette dernière soit effectuée au global ne permet de prendre en compte ni le caractère local de la relation, ni les évolutions de cette relation au fil du temps. De ce fait, l'estimation de la sinistralité à l'ultime se trouve dégradée.

Période de sinistre	Erreur d'estimation par filtre de Kalman à partir des variables			
	Sans conjoncture	Défaillances	Production	Défaillances + production
5	-6 433 945	- 5 911 019	- 5 938 439	- 5 723 535
6	613 914	725 669	592 793	670 301
7	1 697 605	2 546 370	2 811 732	2 788 831
8	424 804	3 942 344	4 120 846	3 817 789
9	-59	26 875	-33 881	-72 366
10	-155 039	- 191 727	- 268 731	- 298 521
11	-1 327 686	- 1 247 336	- 1 969 760	- 2 304 586
12	507 347	291 022	690 581	953 248
13	120 088	-821 037	-195 796	217 994
14	-4 527	-1 052 193	-183 275	-284 086
15	-3 697 225	-3 286 155	-5 817 028	-3 027 232
RMSE	2 346 428	2 553 978	2 997 630	2 543 579

Conclusions

Nous avons appliqué et adapté le filtre de Kalman pour le calcul des provisions de sinistre pour trois dispositifs d'assurance-crédit. Nous avons démontré que le calcul des réserves est plus précis avec le filtre de Kalman qu'avec la méthode de Chain-Ladder. Une erreur d'estimation élevée peut s'expliquer, soit par des observations aberrantes, soit par une inadéquation entre le modèle et les cadences réelles de développement. Grâce au compromis entre la confiance accordée dans le modèle et celle accordée dans les observations, il est tout à fait possible d'améliorer de façon significative les performances du filtre de Kalman. Ces constats sont valables pour le dispositif CAP Relais, que les montants garantis soient constants ou évolutifs. Concernant le dispositif CAP, ni le filtre de Kalman ni la méthode de Chain-Ladder ne semblent pertinents pour calculer les réserves. Ceci est dû à un mouvement erratique des cadences de développement des sinistres, qui empêche toute modélisation fiable. En revanche, grâce à une certaine régularité dans les cadences de développement au titre du dispositif CAP+, le filtre de Kalman améliore de façon importante les résultats de la méthode de Chain-Ladder.

Ensuite, nous avons modélisé la sinistralité au titre de CAP Relais en fonction de l'évolution d'indicateurs relatifs à la conjoncture économique. Le modèle a été intégré au filtre de Kalman et a permis d'estimer la sinistralité à l'ultime pour une période de sinistre donnée en fonction de celle de la période précédente. Nous avons montré que, pour ce cas d'usage, la prise en compte de la conjoncture économique n'améliore pas les résultats d'estimation des réserves en termes de RMSE, même si les erreurs d'estimation pour certaines périodes de sinistre se trouvent réduites.

Dans cette étude, nous avons proposé une méthode permettant de calculer les provisions techniques, s'adaptant aussi bien aux problématiques avec montants garantis constants qu'à celles avec montants garantis évolutifs. Cette méthode peut intégrer des indicateurs de la conjoncture économique. Ses performances dépassent significativement celles de la méthode de Chain-Ladder. Tout en restant simple et facilement auditable, le filtre de Kalman a d'importants atouts pour pouvoir se démocratiser au sein du monde actuariel français.

Executive Summary

Introduction

The inversion of the production cycle is one of the specificities of the insurance sector. Indeed, unlike other sectors where the seller of a product or service knows its cost price, and can therefore determine the selling price, an insurer sells an insurance contract for which he must determine the price without knowledge of the costs of the future claims. For this, insurers must set aside provisions. In non-life insurance, several types of technical provisions exist, including those related to the amounts of claims that the insurer will have to pay in respect of its commitments. These provisions are intended for claims that have occurred but have not yet been fully indemnified or that are still unknown to the insurer.

In this study, we are interested in provisioning in credit insurance. This sector plays an essential economic role, by covering companies against the risk of default by customers to whom they grant payment terms, and thus, by securing their cash flow. More specifically, the credit insurer protects its policyholders (suppliers) against the risk of non-payment of invoices by their customers (buyers). In the context of the health crisis linked to COVID19 and its consequences on the economy, the Direction Générale du Trésor authorized CCR in March 2020 to act with the guarantee of the state to conduct reinsurance operations for three business schemes: CAP Relais, CAP and CAP+. The CAP Relais system operates according to a classic quota-share mechanism on the overall portfolio of the credit insurer. As for the CAP system, its operation is like XS reinsurance by risk: an additional guarantee is granted in addition to the primary guarantee available to an insured on a given buyer. In the event of a claim, the CAP guarantee only comes into play if the unpaid amount exceeds the amount of the primary guarantee. Finally, the CAP+ system is a substitution guarantee that the credit insurer can grant, and which will be paid for by the reinsurer. This device works in an equivalent way to a traditional quota-share, but only applies to contracts for which the credit insurer wishes to terminate the relative guarantee on a given buyer.

We are therefore in a context of provisioning in non-life insurance, for which the estimation of provisions is done using aggregate methods based on triangles, with the periods of occurrence in rows and the periods of development in columns. Among these methods, Chain-Ladder is an essential reference, known for its simplicity and intuitiveness. Other so-called deterministic methods are also known such as Bornhuetter-Ferguson and the De Vylder factorial model. As for stochastic methods, the Mack model and that of Renshaw and Verrall are often used.

Due to the lack of data at the buyer level, individual provisioning or line by line cannot be applied. Our objective is therefore to propose an aggregated method, an alternative to the Chain-Ladder, and more precise than the latter for estimating claims reserves. For this, we propose to rely on State Space models, and more particularly on the Kalman filter, well known in the world of automatic control and defense. Few publications dealing with the use of the Kalman filter for provisioning issues exist internationally, but the method remains extraordinarily little used within the French actuarial community. Our problem is to study whether the Kalman filter is relevant for the calculation of claims reserves in the context of CAP Relais, CAP and CAP+ systems.

Material and methods

Insurance data and economic indicators

The implementation of the CAP Relais, CAP and CAP+ systems was accompanied by the definition and then production of reports with the aim of monitoring the exposure of the French State and the total loss amount. These data relating to claims are monthly and characterized for each insured/purchaser couple by the date of the claim (date of delivery of the goods or service), the date of declaration of the claim, the date of the last compensation and finally the cumulative compensation to the date of the last compensation. From the perspective of an aggregate method for provisioning, the date of the claim will be used to identify the accident period. As for the date of declaration, it will identify the development period.

To explain the loss amount, we explored exogenous data, and six indicators relating to the economic situation. Indeed, strong economic activity can be synonymous with low claims because strong production is often correlated with strong demand and the health of companies is improved. On the other hand, a high production is synonymous with many invoices issued, which by volume effect can lead to a considerable number of claims. Two of the six indicators seem relevant: the monthly index of industrial production in the manufacturing industry, and the monthly number of business failures. Indeed, the more the number of insolvencies increases, the more the claims in credit insurance are supposed to increase.

Kalman filter

The Kalman filter is a recursive estimator in discrete context. It consists of two distinct steps: The prediction of the current state from the previous state, and then the update of the prediction of the current state according to the observations of the current instant. This step makes it possible to refine the estimates.

A Kalman filter is characterized by the following equations: if \mathbf{z}_k designates the observation vector at time k , and \mathbf{x}_k designates the state at the same time k , the Kalman equations are written as follows:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

with :

- \mathbf{F}_k the transition matrix from state $k - 1$ to state k
- \mathbf{u}_k the control vector (this term is issued from the automatics domain)
- \mathbf{B}_k the matrix that links the vector \mathbf{u}_k to the state \mathbf{x}_k
- \mathbf{w}_k is the noise process, following a gaussian normal distribution with mean $\mathbf{0}$ and covariance matrix \mathbf{Q}_k , $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$
- \mathbf{H}_k the observation matrix, which links the state \mathbf{x}_k to the observation \mathbf{z}_k
- \mathbf{v}_k is the observation noise, following a gaussian normal distribution with mean $\mathbf{0}$ and covariance matrix \mathbf{R}_k , $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$

We suppose that the incremental claims triangle is written as the following:

$$\begin{pmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} & \dots & S_{0,p-1} & S_{0,p} \\ S_{1,0} & S_{p-1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,p-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ S_{p-2,0} & S_{p-2,1} & S_{p-2,2} & & & \\ S_{p-1,0} & S_{p-1,1} & & & & \\ S_{p,0} & & & & & \end{pmatrix}$$

In this case, we model \mathbf{z}_k , a $p + 1$ dimension vector, as the vector of claims observed at time $t = k$. $\mathbf{z}_k = (S_{k,0}, S_{k-1,1}, S_{k-2,2}, \dots, S_{1,k-1}, S_{0,k}, 0, \dots, 0)^T$.

On the other hand, we suppose that \mathbf{x}_k represents the vector of ultimate claims for the accident periods from 0 to k . This $p + 1$ dimension vector may be written as depending on the ultimate loss $S_k = \sum_{j=0}^{\infty} S_{k,j}$. Then, $\mathbf{x}_k = (S_k, S_{k-1}, \dots, S_1, S_0, 0, \dots, 0)^T$.

We suppose then matrix \mathbf{H}_k diagonal, square and time independent. It is easy to deduce that each of its elements may be estimated as:

$$h_{j,j} = \frac{\sum_{i=0}^{i=k-j} S_{i,j}}{\sum_{i=0}^{i=k-j} S_i}$$

We set up methods for estimating the various parameters characterizing the Kalman filter so that they are independent of the accident period. Three concrete use cases are explored: in the first one, the guaranteed amounts are assumed to be constant, and no exogenous data is introduced into the modelling. In the second case, the guaranteed amounts are assumed to evolve, which induces a change in the state equation of the Kalman filter. Finally, in the last case, an adaptation of the Kalman filter is conducted to take account of the situation.

The matrixes \mathbf{F}_k and \mathbf{Q}_k are supposed to be full of zeros. The term $F_{0,0}$ is equal to 1 when the guaranteed amounts are constant. The term $Q_{0,0}$ is related to the model variance.

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} F_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Finally, the observation matrix \mathbf{R}_k is supposed to be diagonal and time independent. It may be written as $\mathbf{R}_k = r^2 \mathbf{I}$ with \mathbf{I} the identity matrix and r^2 the variance of the residuals of the $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$ model.

The performances of the Kalman filter are assessed in relation to those of the Chain-Ladder method, by conducting a backtesting which is inspired by the technique presented by Michel Denuit and Arthur Charpentier in 2005 applied to development triangles. This technique involves extracting sub-triangles from the main triangle and comparing the reserve estimates made from these sub-triangles with the actual data.

Results

Kalman filter performances

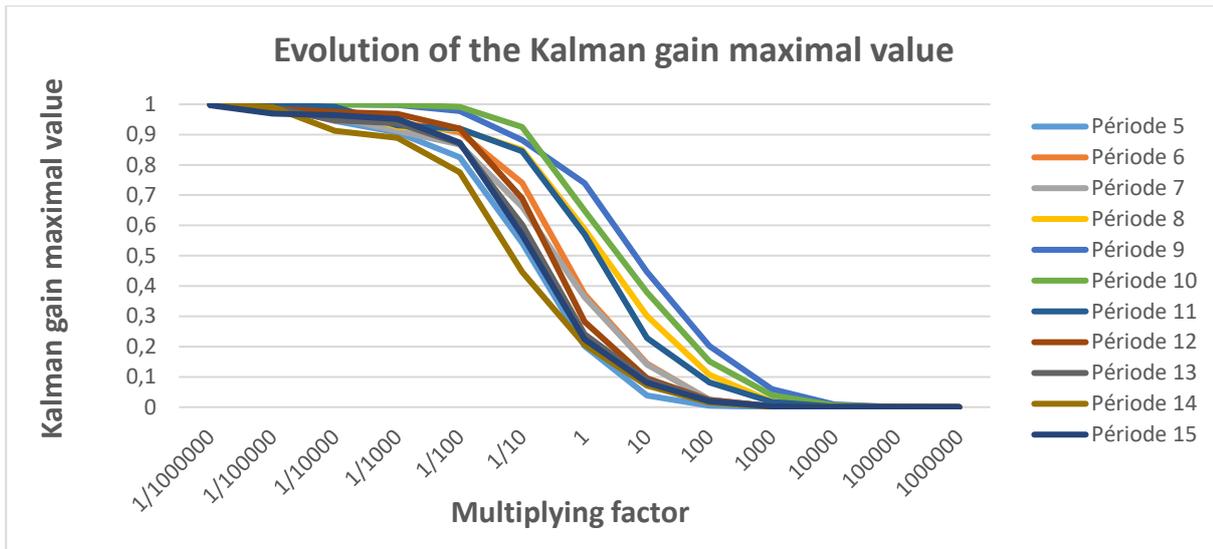
We only present the performance of the Kalman filter in the case of constant guaranteed amounts, given that the results in the case of evolving guaranteed amounts and their interpretations remain equivalent. Under the CAP Relais system, the Kalman filter is more precise than the Chain-Ladder method as shown in the table below. Whatever the loss period studied, the Kalman filter significantly improves performance compared to Chain-Ladder, the ratio between the reserve estimation errors is always less than 1. Certain periods are characterized by larger errors in amount, and these errors are due either to aberrant observations, or to a mismatch between the model conveyed by the Kalman filter and reality. Overall, the Kalman filter is better equipped to deal with these situations that can lead to reserve estimates that are often far from reality.

Accident period	Amount of reserves	Chain-Ladder estimation error (CL)	Kalman estimation error	Ratio Kalman/CL
5	13 400 133	-8 118 654	-6 433 945	0,79
6	16 082 686	-2 834 962	613 914	-0,21
7	18 425 200	-3 163 736	1 697 605	-0,54
8	18 368 042	98 937 691	8 961 353	0,09
9	18 350 083	19 113 970	11 905 656	0,62
10	17 753 242	1 780 948	-155 039	-0,09
11	18 314 769	-5 678 211	-1 327 686	0,23
12	19 232 117	-5 470 916	-1 182 502	0,22
13	20 681 261	-8 367 029	-4 295 553	0,51
14	22 366 196	-13 312 714	-6 805 621	0,51
15	25 460 747	-15 858 608	-10 572 207	0,67

Concerning the CAP system, the Chain-Ladder methods and the Kalman filter are not truly relevant because no regularity in the declaration of claims seems to exist. The results for the CAP+ system are like those for the CAP Relais system: the reserve estimation error by the Kalman filter is always lower than that by the Chain-Ladder method.

Sensitivity analysis and results optimization

The updating of the estimates made by the Kalman filter is done by considering the difference between these estimates and the observations. The operation is like credibility, where a coefficient (linked to the Kalman gain) makes it possible to weight the contribution of the model and that of the observation in the update. The figure below shows that by multiplying the covariance matrix of the observations by a given factor, the Kalman gain is modified, and it evolves between 0 and 1. We can use this curve to optimize the results of the Kalman filter. If the increase in the reserve estimation error is due to an outlier, then it is possible to use a multiplicative factor greater than 1 for the covariance matrix of the observations so that the model will have greater influence. On the other hand, if this error is explained by a change of model, the multiplicative factor will be less than 1 and will make it possible to grant more weight to the observations.



Thanks to this compromise between the confidence granted to the model and that granted to the observations, a clear improvement in the results of the Kalman filter can be made, as shown in the table below.

Accident period	Amount of reserves	Kalman filter estimation error	
		Without optimization	With optimization
8	18 368 042	8 961 353	424 804
9	18 350 083	11 905 656	-59
12	19 232 117	-1 182 502	507 347
13	20 681 261	-4 295 553	120 088
14	22 366 196	-6 805 621	-4 527
15	25 460 747	-10 572 207	-3 697 225

Considering the economic situation

Among the indicators relating to the economic situation, a certain correlation seems to exist between the number of monthly insolvencies, manufacturing production and the ultimate loss under the CAP Relais system, as shown in the figure below.

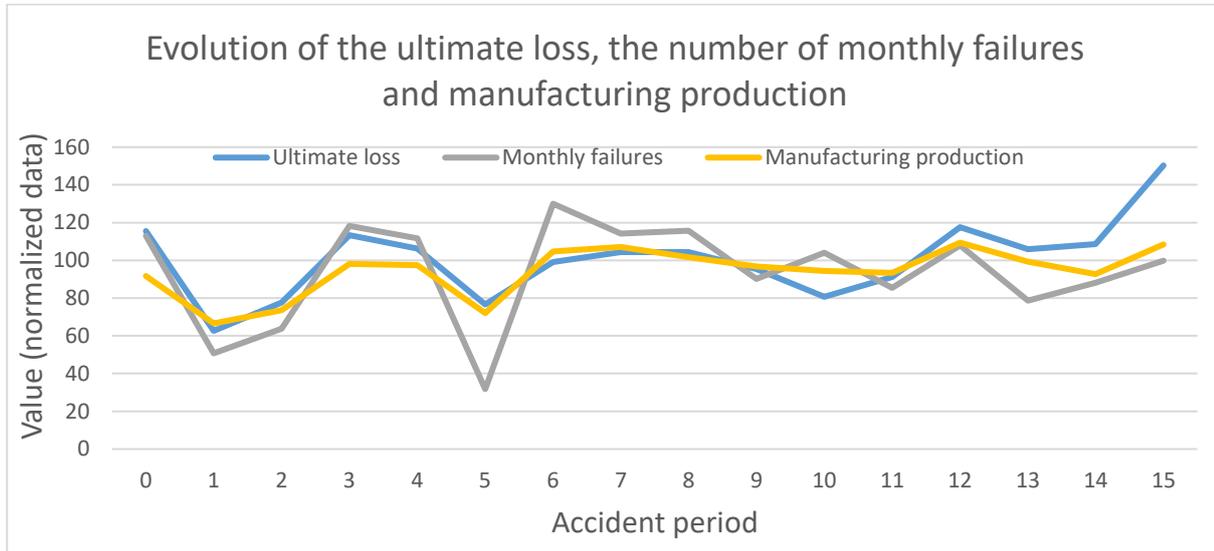
A monotonous relationship seems to exist between the derivative of ultimate claims and those of the number of monthly failures and manufacturing production. Due to limited number of data, we opt for a linear model even if such a model is not sufficient to explain the changes.

Taking this modeling into account in the Kalman filter is easy by using the term $B_k u_k$. It includes one or two variables depending on whether the economic situation is considered using the number of failures, manufacturing production or both variables. To move from the ultimate loss at $t = k - 1$ to the ultimate loss at $t = k$, the following equation is proposed:

$$S_k - S_{k-1} = b_{31}(u_{k,0} - u_{k-1,0}) + b_{32}(u_{k,1} - u_{k-1,1}) + b_{30}$$

In other terms,

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} b_{31} & -b_{31} & b_{32} & -b_{32} & b_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k-1,0} \\ u_{k,1} \\ u_{k-1,1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Credit insurers have sufficient history of losses of their portfolio to deduce the various parameters above. For this, we assume that the linear regression estimated from the history of claims prior to the CAP Relais scheme is not modified by its implementation. For our part, we estimate the parameters based on the loss data observed under the CAP Relais system. We assume that the relationship describing the evolution of the different quantities during the CAP Relais system remained identical to that which would have been estimated by a credit insurer before the implementation of the system.

Accident period	Kalman filter error considering the following variables			
	Without variables	Failures	Production	Failures + production
5	-6 433 945	- 5 911 019	- 5 938 439	- 5 723 535
6	613 914	725 669	592 793	670 301
7	1 697 605	2 546 370	2 811 732	2 788 831
8	424 804	3 942 344	4 120 846	3 817 789
9	-59	26 875	-33 881	-72 366
10	-155 039	- 191 727	- 268 731	- 298 521
11	-1 327 686	- 1 247 336	- 1 969 760	- 2 304 586
12	507 347	291 022	690 581	953 248
13	120 088	-821 037	-195 796	217 994
14	-4 527	-1 052 193	-183 275	-284 086
15	-3 697 225	-3 286 155	-5 817 028	-3 027 232
RMSE	2 346 428	2 553 978	2 997 630	2 543 579

We observe from the table above that even if for certain claim periods, taking exogenous data into account improves the estimates, overall, this modeling does not improve the reserve estimation results in terms of

RMSE. The most efficient Kalman filter is the one that does not consider the economic situation. Our interpretation is that linear modeling over the entire history deteriorates the results, due to inaccurate modeling of the relationship between losses and economic indicators. The fact that the latter is conducted globally does not consider either the local nature of the relationship, or the changes in this relationship over time. As a result, the estimate of the ultimate loss is degraded.

Conclusions

We have applied and adapted the Kalman filter for the calculation of claims provisions under three credit insurance systems. We demonstrated that the reserve calculation is more accurate with the Kalman filter than with the Chain-Ladder method. A high estimation error can be explained either by aberrant observations or by a mismatch between the model and the actual rates of development. Thanks to the compromise between the confidence granted in the model and that granted in the observations, it is quite possible to significantly improve the performance of the Kalman filter. These observations are valid for the CAP Relais system, whether the guaranteed amounts are constant or evolving. Concerning the CAP system, neither the Kalman filter nor the Chain-Ladder method seem relevant for calculating the reserves. This is due to an erratic movement in the development rates of claims, which prevents any reliable modelling. On the other hand, thanks to a certain regularity in the development rates under the CAP+ system, the Kalman filter significantly improves the results of the Chain-Ladder method.

Then, we modeled the evolution of claims for CAP Relais according to indicators relating to the economic situation. The model was integrated into the Kalman filter to estimate the ultimate loss for a given accident period based on that of the previous period. We have shown that, for this use case, taking the economic situation into account does not improve the reserve estimation results in terms of RMSE, even if the estimation errors for some claim periods are reduced.

We have proposed a method for calculating technical provisions, which can be adapted to problems with constant guaranteed amounts and to those with evolving guaranteed amounts. This method can integrate indicators of the economic situation. Its performance significantly exceeds that of the Chain-Ladder method. While remaining simple and easily auditable, the Kalman filter has important strengths to be democratized within the French actuarial community.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	5
Note de synthèse.....	7
Executive Summary	15
Table des matières	23
Liste des figures	24
Liste des tableaux	25
Introduction générale.....	27
Chapitre 1. Contexte et problématique	29
1.1 L'assurance-crédit.....	29
1.2 La COVID19 et son impact sur l'économie	32
1.3 La Caisse Centrale de Réassurance.....	36
1.4 Problématique	37
1.5 Conclusions.....	40
Chapitre 2. Méthodes de provisionnement en assurance non-vie.....	43
2.1 Introduction.....	43
2.2 Notations et notions.....	43
2.3 Principales familles de méthodes.....	44
2.4 Méthodes basées sur les triangles	46
2.5 Modèles Espace-état	53
2.6 Comparaison des méthodes de provisionnement	56
2.7 Méthodes de provisionnement en assurance-crédit	56
2.8 Conclusions.....	57
Chapitre 3. Filtre de Kalman pour le calcul des réserves	59
3.1 Introduction.....	59
3.2 Montants garantis constants, sans donnée exogène.....	60
3.3 Montants garantis évolutifs, sans donnée exogène.....	66
3.4 Prise en compte de la conjoncture économique.....	71
3.5 Formule de calcul des réserves	74
3.6 Algorithme du filtre de Kalman pour le calcul des réserves.....	75
3.7 Conclusions.....	75
Chapitre 4. Application aux dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+	77
4.1 Introduction.....	77
4.2 CAP Relais avec montants garantis constants	77
4.3 CAP Relais avec montants garantis évolutifs.....	84
4.4 CAP et CAP+	85
4.5 Analyse de sensibilité et optimisation des résultats du filtre de Kalman.....	89
4.6 Prise en compte de la conjoncture économique.....	94
4.7 Calcul des réserves sur l'ensemble du dispositif CAP Relais	102
4.8 Conclusions.....	106
Conclusion générale	107
Références bibliographiques	111

Liste des figures

Figure 1.	Assurance-crédit et les principaux assureurs-crédit en France.....	31
Figure 2.	Évolution des sommes assurées sur la période 2006-2020 [19]	31
Figure 3.	Évolution des ratios Sinistres sur Primes sur la période 2006-2020 [20]	32
Figure 4.	Garantie Top-up en cas de réduction du plafond de garantie	34
Figure 5.	Exemple de 3 sous-triangles pouvant servir au backtesting : en vert les données supposées connues, en jaune celles à estimer par la méthode de provisionnement et en orange les données non utilisées dans le backtesting	56
Figure 6.	Représentation schématique des vecteurs zk	61
Figure 7.	Cadence des charges de sinistre par période de sinistre : l'axe des abscisses représente la période de développement, et celui des ordonnées représente la part en % de la sinistralité à l'ultime.....	79
Figure 8.	Linéarité des facteurs de développement pour passer d'une période j à une période $j + 1$. Les charges de sinistre relatives à la première période sont en abscisse et celles relatives à la deuxième sont en ordonnée.	81
Figure 9.	Cadence des charges de sinistre en % pour les périodes de sinistre 12, 13, 14 et 15 en comparaison avec les périodes antérieures.....	83
Figure 10.	Cadence des charges de sinistre pour le dispositif CAP : l'axe des abscisses représente la période de développement, et celui des ordonnées représente la part en % de la sinistralité à l'ultime	87
Figure 11.	Cadence des charges de sinistre pour le dispositif CAP+ : l'axe des abscisses représente la période de développement, et celui des ordonnées représente la part en % de la sinistralité à l'ultime	87
Figure 12.	Evolution de la valeur maximale du gain de Kalman en fonction du facteur multiplicatif de la matrice de covariance des observations	90
Figure 13.	Evolution de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais et des indices de chiffre d'affaires dans les services et le commerce	95
Figure 14.	Evolution de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais, du cumul des défaillances d'entreprises et de la consommation des ménages	96
Figure 15.	Evolution de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais, des défaillances mensuelles d'entreprises et de la production manufacturière	96
Figure 16.	Evolution de la dérivée de la sinistralité CAP Relais en fonction de celle de la production manufacturière et du nombre de défaillances.....	97
Figure 17.	Triangle de sinistres avec deux exemples de période de sinistre : le montant des réserves se calcule jusqu'à la fin du dispositif CAP Relais. Les observations sont surlignées en vert ; la sinistralité à prédire est surlignée en orange	102

Liste des tableaux

Tableau 1. Evolution des charges de sinistre à l'ultime, en euros et en pourcents, sur la durée du dispositif CAP Relais	78
Tableau 2. Comparaison des erreurs d'estimation des réserves par les méthodes de Chain-Ladder et du filtre de Kalman sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis constants	82
Tableau 3. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis évolutifs	85
Tableau 4. Evolution de la sinistralité à l'ultime, en euros et rapportée à 1 M€ de garanties, au titre des dispositifs CAP et CAP+	86
Tableau 5. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman pour le dispositif CAP	88
Tableau 6. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman pour le dispositif CAP+	89
Tableau 7. Impact d'une covariance plus forte des observations dans le cas d'observations aberrantes	91
Tableau 8. Montant des réserves estimé par filtre de Kalman	92
Tableau 9. Impact d'un changement de covariance des observations dans le cas d'un changement dans les cadences de développement suivi de valeurs aberrantes	93
Tableau 10. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman « optimisé » sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis constants	93
Tableau 11. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman « optimisé » sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis évolutifs	93
Tableau 12. Comparaison des erreurs d'estimation des réserves selon 4 méthodes de Kalman, avec et sans prise en compte de la conjoncture économique. Modélisation sur l'ensemble de l'historique	100
Tableau 13. Comparaison de l'erreur d'estimation des réserves par la méthode de Chain-Ladder avec la pire erreur obtenue par filtre de Kalman pour le dispositif CAP Relais avec montants garantis constants	101
Tableau 14. Coefficients d'extrapolation à l'ultime par période de développement	103
Tableau 15. Erreur d'estimation des réserves, jusqu'à la fin du dispositif CAP Relais, par filtre de Kalman, sans et avec prise en compte de la conjoncture économique	104
Tableau 16. Part de la sinistralité à l'ultime entre les périodes de développement 2 et 7, d'un côté jusqu'à la période de sinistre et de l'autre pour les périodes futures	105

Introduction générale

L'inversion du cycle de production fait partie des spécificités du secteur de l'assurance. En effet, contrairement aux autres secteurs où le vendeur d'un produit ou d'un service connaît son prix de revient, et peut par conséquent déterminer le prix de vente, un assureur vend un contrat d'assurance pour lequel il doit déterminer le prix sans connaissance des coûts des sinistres qui y seront relatifs. Pour cela, les assureurs doivent constituer des provisions. En assurance non-vie, plusieurs types de provisions techniques existent, dont celles liées aux montants des sinistres que l'assureur devra verser au titre de ses engagements. Ces provisions sont donc destinées à régler les sinistres survenus mais non encore complètement indemnisés ou qui sont encore inconnus de l'assureur.

Avoir une estimation précise des provisions constitue un enjeu crucial pour les assureurs. En effet, la réglementation prudentielle contraint ces derniers à estimer de manière adéquate leurs provisions techniques de telle sorte que le bénéficiaire du contrat d'assurance soit protégé et que le risque d'insolvabilité des assureurs soit réduit. De plus, un sur-provisionnement comme un sous-provisionnement induisent une volatilité des résultats de l'assureur. En effet, le sous-provisionnement génère des revenus à court-terme, mais finit par mener à leur baisse ultérieure du fait des malis. Quant au sur-provisionnement, il peut mener à un redressement fiscal et entraîne le mécontentement des actionnaires qui perçoivent un dividende plus faible. Les assureurs améliorent leurs pratiques de provisionnement : la réglementation Solvabilité 2 demande une évaluation *Best Estimate* des provisions, c'est-à-dire sans que celles-ci soient sur-estimées ou sous-estimées.

L'estimation des provisions de sinistre se fait en général en assurance non-vie à l'aide de méthodes agrégées basées sur des triangles, avec en ligne les périodes de survenance (ou de sinistre) et en colonne les périodes de développement. Parmi ces méthodes, Chain-Ladder fait figure de référence incontournable, connue pour sa simplicité et son intuitivité. Néanmoins, ces méthodes n'utilisent qu'une partie de l'information disponible, en écartant notamment les informations sur les sinistres individuels ou sur les acheteurs. Les méthodes qui combinent ce dernier type d'information sont connues sous le terme de méthodes individuelles ou ligne à ligne. Même si elles sont censées être plus précises, leur mise en œuvre nécessite la disponibilité d'un nombre important de données.

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à proposer une méthode agrégée, alternative au Chain-Ladder, et plus précise que cette dernière pour l'estimation des provisions de sinistre. Nous proposons pour cela de s'appuyer sur les modèles Espace Etat, et plus particulièrement sur le filtre de Kalman, bien connu dans le monde de l'automatique, du traitement du signal et de la défense. Certaines publications traitant de l'utilisation du filtre de Kalman pour des problématiques de provisionnement existent à l'international, mais la méthode reste très peu utilisée au sein de la communauté actuarielle française.

Le Chapitre 1 présente le contexte de l'étude, l'assurance-crédit et la mise en place des dispositifs publics CAP Relais, CAP et CAP+ à la suite de l'épidémie de la COVID19. Ce chapitre explicite la problématique et les données nous permettant d'y répondre.

Le Chapitre 2 est un état de l'art sur les méthodes de provisionnement en assurance non-vie. Ce chapitre ne détaille pas l'exhaustivité des méthodes, mais présente celles qui sont les plus connues parmi les méthodes agrégées avant d'introduire le principe des méthodes de provisionnement individuel. Le filtre de Kalman ainsi que sa théorie mathématique sont ensuite présentés. Un état de l'art spécifique au provisionnement en assurance-crédit permet de sélectionner la méthode de Chain-Ladder pour le benchmark avec le filtre de Kalman.

Quant au Chapitre 3, il présente l'adaptation du filtre de Kalman au provisionnement des sinistres, dans le cadre de l'assurance-crédit. Trois cas sont traités : tout d'abord, le provisionnement avec des montants garantis constants pour toutes les périodes de sinistre, ensuite l'extension de ce cas à celui où les montants garantis sont évolutifs, et enfin la prise en compte de la conjoncture économique. Pour chacun des cas, nous présentons les choix méthodologiques aussi bien en termes de modélisation que d'initialisation des paramètres.

Le Chapitre 4 présente l'application du filtre de Kalman, conçu au Chapitre 3, aux dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+, et selon les trois cas ci-dessus. Une comparaison détaillée des résultats avec ceux de la méthode de Chain-Ladder est réalisée, avant de présenter une analyse de sensibilité des résultats à certains paramètres. Cette analyse nous permet par ailleurs d'identifier des pistes d'optimisation des performances du filtre de Kalman, tout d'abord dans le cas où les données sont aberrantes et ensuite dans le cas où le modèle est peu conforme à la réalité. Enfin, ce chapitre se termine par la prise en compte de la conjoncture économique et le calcul des réserves pour les périodes futures de sinistre à partir d'un historique d'observations jusqu'à une période de sinistre donnée.

Une conclusion générale clôt ce mémoire. Elle reprend les principales conclusions des différents chapitres avant d'apporter un éclairage supplémentaire quant à la pertinence du filtre de Kalman pour les problématiques de provisionnement en assurance non-vie.

Chapitre 1. Contexte et problématique

Dans ce premier chapitre, nous présentons quelques éléments de contexte relatifs à cette étude : l'assurance-crédit, l'impact de la COVID19 sur l'économie, et les actions mises en place par l'État Français pour soutenir l'économie. Une présentation détaillée est ensuite consacrée aux dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+ ainsi qu'à la réassurance publique par CCR. Ce chapitre se termine par l'exposition de la problématique et des données disponibles pour tenter d'y répondre.

1.1 L'assurance-crédit

1.1.1 Rôle de l'assurance-crédit

Les entreprises s'accordent entre elles des crédits dans le cadre de leurs relations commerciales. Ce crédit interentreprises constitue leur cœur de financement, et pèse plus lourd que les crédits bancaires et les fonds propres : En France, il y a deux ans, les crédits interentreprises pesaient 3 fois plus que le crédit bancaire, soit plus de 700 milliards d'euros [17].

Dans le cadre de tout échange commercial entre des entreprises, les délais de paiement accordés par les fournisseurs à leurs clients créent la notion du crédit interentreprises. Ces délais sont essentiels à la continuité des échanges et au fonctionnement même de l'économie. Les entreprises se retrouvent avec des créances de leurs clients pouvant représenter jusqu'à 40% de leurs actifs [17], avec un risque que ces créances ne soient jamais payées ou sinon payées en retard.

La plupart des entreprises sont donc exposées à un risque de crédit en ayant consenti un délai de paiement à leurs acheteurs. Les entreprises doivent alors limiter le risque client afin d'éviter leur propre défaillance. C'est alors qu'intervient l'assurance-crédit en sécurisant les transactions commerciales via la garantie des entreprises contre le risque d'impayés.

L'assurance-crédit est apparue en France en 1926. C'est un produit qui permet à l'assuré de se protéger contre le risque de défaut ou l'insolvabilité d'un acheteur lorsqu'une transaction a été effectuée avec ce dernier. L'assurance-crédit permet le maintien de la trésorerie, la réduction du besoin en fonds de roulement, le remboursement des créances et la garantie des recouvrements en cas de défaillance des créanciers. Dans de nombreux cas, les assureurs-crédit peuvent recouvrir jusqu'à 95 % de la dette.

1.1.2 Métiers de l'assurance-crédit

Le modèle économique des assureurs-crédit s'articule autour de trois métiers :

- Tout d'abord, la prévention, ou la gestion du poste client des entreprises. Par prévention, il est entendu la gestion des risques commerciaux, permettant aux fournisseurs d'établir les bonnes relations d'affaires, en se basant sur des informations fiables sur leurs acheteurs actuels et futurs. L'assureur-crédit effectue une analyse et un suivi continu de la situation financière des acheteurs et avertit l'assuré qui peut déterminer s'il souhaite leur octroyer un crédit.
- Ensuite, le recouvrement des factures : L'assureur prend en charge les démarches nécessaires à la récupération des créances et gère les contentieux.
- Et enfin, l'indemnisation des impayés : En cas d'échec du recouvrement de la créance, l'assureur indemnise son assuré selon les conditions contractuelles qu'ils ont négociées ensemble. Un recouvrement post-indemnisation peut avoir lieu. L'assureur-crédit exerce donc une activité d'assurance classique : il perçoit des primes d'assurance en échange de la couverture d'un risque, qui dans ce cas est le non-paiement d'une facture de la part d'un acheteur. La prime est souvent forfaitaire pour les petites entreprises et se calcule comme un pourcentage fixe du chiffre d'affaires (plus précisément, de la part du chiffre d'affaires faisant l'objet du contrat d'assurance). D'après la Banque de France [16], ce pourcentage varie généralement entre 0,1% et 2%.

Les deux premiers métiers sont liés à une activité de service aux entreprises. Contrairement à d'autres branches d'assurance où la composante « services » constitue une part limitée de l'activité, en assurance-crédit, cette composante « services » est très importante et représente une part significative de la prime d'assurance. Les assureurs-crédit surveillent de très près la solvabilité des clients de leurs assurés et imposent généralement des plafonds au montant des factures qu'ils couvrent pour chacun des clients de leurs assurés. Ils peuvent également réduire (jusqu'à 0) le plafond de garantie qui s'applique à un client de leur assuré. Les factures déjà envoyées au client restent garanties mais les nouvelles factures ne seront couvertes que dans la limite du nouveau plafond (ou ne seront plus couvertes si le plafond a été réduit à zéro). Le fournisseur, sachant que son assureur ne le couvre que partiellement (ou ne le couvre plus) peut être tenté de réduire les livraisons à son client voire d'arrêter de le livrer par crainte que les factures ne soient plus payées à l'issue du délai de paiement. De même, si les doutes de l'assureur-crédit sur une entreprise cliente venaient à être connus, rares seront ceux qui voudront travailler avec cette entreprise, précipitant ainsi sa faillite.

1.1.3 Le marché de l'assurance-crédit

Trois principaux acteurs contrôlent environ 80% du marché mondial hors Chine [15] :

- Allianz Trade (ex Euler Hermès), filiale du groupe allemand Allianz, numéro un mondial avec 34,6% de part de marché
- Atradius, filiale du groupe espagnol Catalana Occidente, numéro 2 mondial avec 24,5% de part de marché
- Coface, filiale du groupe français Natixis, numéro 3 mondial avec 17,2% de part de marché

En France, d'autres acteurs de l'assurance-crédit sont également présents, parmi lesquels figurent Groupama, spécialisé sur le créneau de l'agro-alimentaire et AXA Assurcrédit, spécialisé sur les PME/TPE. La Figure 1 rappelle le fonctionnement de l'assurance-crédit et présente les principaux assureurs en France.

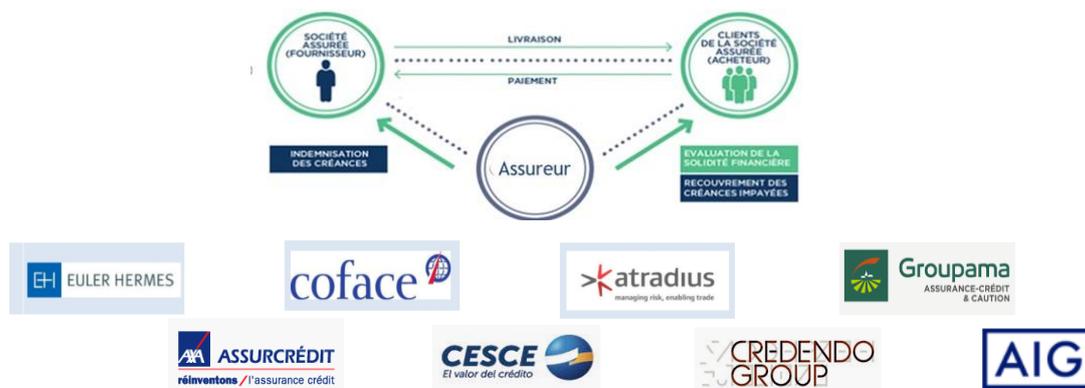


Figure 1. Assurance-crédit et les principaux assureurs-crédit en France

En France, l'assurance-crédit constitue la branche 14 du code des assurances. Le marché de l'assurance-crédit est mature et concurrentiel. La concurrence est essentiellement liée aux prix, d'autant plus que la souscription de ce produit par les entreprises n'est pas obligatoire.

Selon l'ICISA [19][20], le total des sommes assurées à travers le Monde, en 2020, était de 2 400 milliards €, ce qui illustre l'importance de cette branche. Le total des primes est de 6,2 milliards €, le total des sinistres est de 3,8 milliards €. Le ratio Sinistres sur Primes est donc d'environ 60%. Historiquement, ce ratio se situe plutôt autour de 50%. La Figure 2 et la Figure 3 présentent l'évolution des sommes assurées, des primes, des sinistres et des ratios Sinistres sur Primes sur la période 2006 à 2020.

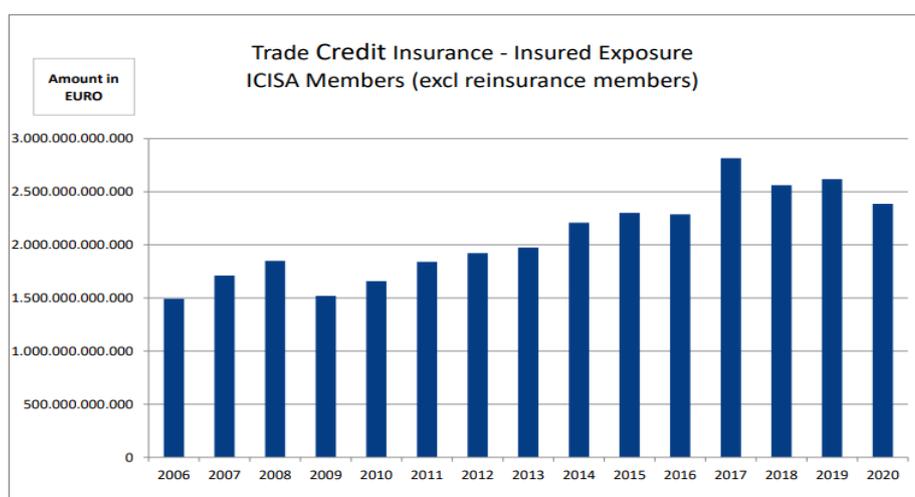


Figure 2. Évolution des sommes assurées sur la période 2006-2020 [19]

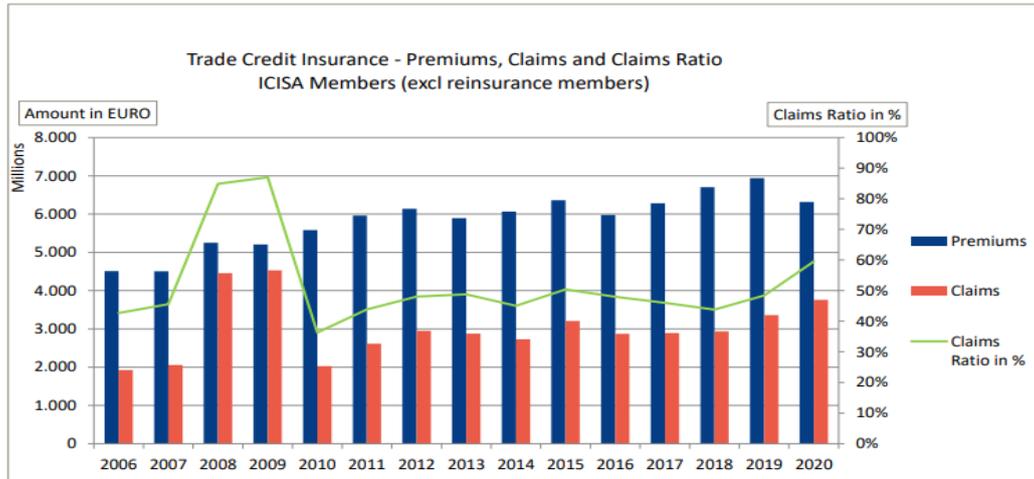


Figure 3. Évolution des ratios Sinistres sur Primes sur la période 2006-2020 [20]

Le secteur ne dispose pas de fonds propres permettant d’offrir la garantie à moyen ou long terme nécessaire aux entreprises en période de crise. Par exemple, Allianz Trade [3] garantit 890 milliards € de créances avec 2,7 milliards € de fonds propres. Sans fonds propres importants et avec des primes d’assurance de l’ordre de 1/1000, les assureurs-crédit ne peuvent faire face qu’à des défauts ponctuels.

Les assureurs-crédit sont réassurés auprès du marché privé pour faire face à des dérives contenues de leur sinistralité. Avec la crise de la COVID19, et du fait d’une sinistralité théorique maximale allant jusqu’à plusieurs centaines de Mds€, la réassurance privée ne permet pas de faire face à une sinistralité extrême, le niveau de fonds propres nécessaires étant très important. D’où l’intervention de l’État dans ces situations.

1.2 La COVID19 et son impact sur l’économie

1.2.1 Les principaux faits marquants

L’épidémie COVID19 est apparue pour la première fois en Chine en décembre 2019. Rares sont ceux qui osaient prédire une telle ampleur, et surtout qu’environ 3 ans plus tard, l’épidémie continue de faire partie du quotidien.

Afin d’endiguer sa propagation, la Chine a décidé de mettre en quarantaine la province de Hubei le 23 janvier 2020. Un double choc venait de naître : un choc d’offre, avec des contraintes sur l’approvisionnement des entreprises, ce qui a entraîné une baisse de la production, et un choc de demande avec une baisse de la demande extérieure, entraînant une baisse des exportations, et des difficultés pour certains secteurs comme le luxe ou le tourisme.

En février 2020, l’épidémie s’est propagée en Europe, et l’Italie a pris ses premières mesures sanitaires pour endiguer sa propagation. La France a mis en place le premier confinement le 17 mars 2020. Un double choc domestique venait d’avoir lieu : un choc d’offre, avec des contraintes d’approvisionnement des entreprises, ce qui a entraîné une forte baisse de la production, avec un confinement d’une partie de la force de travail,

la mise à l'arrêt d'usines et une réduction de la fourniture de services ; et un choc de demande avec une forte baisse de la demande domestique, en particulier dans les métiers de services.

D'après la Banque de France [33], l'économie française a subi un choc d'une ampleur inédite au cours de l'année 2020. Avec une contraction du PIB de 7,9%, la France a enregistré le recul le plus important dans l'histoire des comptes nationaux, établis depuis 1949.

La crise économique a mis à rude épreuve la trésorerie des entreprises : des charges ont continué à courir malgré des rentrées souvent absentes. Le risque de baisse des encours par les assureurs-crédit devant la vague imminente de défaillances conjugué au côté procyclique de l'assurance-crédit (le risque de défaillance implique la baisse des encours qui entraîne une augmentation du risque de défaillance) ont poussé l'État français à mis en place des dispositifs de soutien à l'économie en un temps record, à destination des entreprises. Le Président de la République a décidé dès le 16 mars de sauver les entreprises françaises « quoi qu'il en coûte ».

1.2.2 Aides de l'État

L'État français a mis en place des dispositifs de soutien à l'économie, s'adressant aux entreprises et permettant de soutenir les échanges commerciaux.

L'assouplissement du recours au chômage partiel a été parmi les premières mesures prises à la suite du confinement. Cette mesure a été complétée par le fond de solidarité, les reports d'échéances fiscales et la mise en place du Prêt Garanti par l'État (PGE). Les montants des aides accordées sont très importants, comme le démontrent les chiffres suivants [36] :

- Au 29 octobre 2021, le montant des prêts garantis par l'État (PGE) est de 141,5 milliards € et le dispositif a pris fin le 30 juin 2022
- Au 23 novembre 2021, Le fond de solidarité atteint un montant de 37,7 milliards €
- Le coût de l'activité partielle est de 42 milliards €
- Le report des échéances fiscales coûte quant à lui 3,6 milliards €

Seuls le fond de solidarité et le chômage partiel constituent une aide financière : des revenus pour le premier et des baisses de charges d'exploitation pour le deuxième. Les autres mesures contribuent à l'endettement des entreprises et les dettes devront être soldées dans les années à venir. Ces dispositifs n'ont pas suffi à eux seuls de soutenir la trésorerie des entreprises françaises.

L'État français a complété ces mesures par la mise en place des dispositifs complément public. Le CAP (Complément d'Assurance-crédit Public) se décline sous les garanties CAP, CAP+ et CAP EXPORT. Ces dispositifs ont déjà fait leurs preuves lors de la crise de 2008-2009 et permettent aux entreprises françaises disposant d'un contrat d'assurance-crédit de bénéficier de couvertures complémentaires ou de substitution, accordées par leur assureur et contre-garanties par l'État. En 2020, l'État français a complété les dispositifs historiques CAP par CAP Relais, toujours selon le principe de partage de risque entre les assureurs-crédit et l'État.

1.2.3 Retour sur les dispositifs CAP en 2008-2009

Le dispositif CAP 2008

Ce dispositif public a été en vigueur du 8 décembre 2008 au 30 juin 2011 et visait les situations de réduction de garantie par les assureurs-crédit. Il a été porté par la Caisse Centrale de Réassurance (CCR), chargée de réassurer avec la Garantie de l'État les risques d'assurance-crédit des PME et ETI en France en application de la loi de finance rectificative n° 2008-1443 (art. 125) du 30 décembre 2008.

Ce dispositif visait à la fois à permettre aux assureurs-crédit de continuer à couvrir les besoins de leurs assurés, mais aussi à amortir les éventuelles difficultés que pourraient rencontrer les clients des assurés.

Lorsqu'un assureur-crédit souhaitait réduire le plafond de garantie sur l'un des clients de son assuré, il pouvait proposer à cet assuré de conserver l'ancien plafond en souscrivant une garantie complémentaire (qui s'appelle "top-up" dans le langage des assureurs-crédit) pour la différence entre l'ancien et le nouveau plafond, en contrepartie d'une prime pour cette garantie "top-up" comme le schématise la Figure 4.

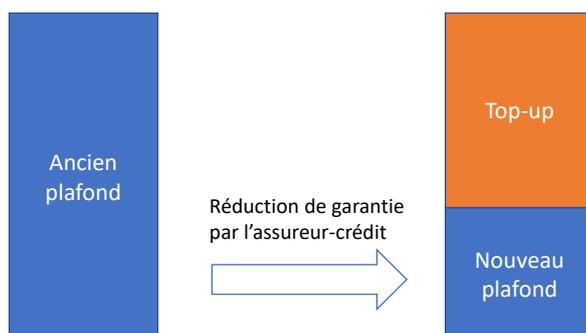


Figure 4. Garantie Top-up en cas de réduction du plafond de garantie

L'assureur-crédit pouvait rétrocéder ces garanties "top-up" (et la prime afférente) à CCR agissant avec la garantie de l'État.

Le dispositif CAP+ 2009

Ce dispositif public a été en vigueur du 1er mai 2009 au 31 décembre 2010 et visait les situations de résiliation ou refus de garantie par les assureurs-crédit. Compte tenu des tensions de trésorerie subies par des PME et ETI, l'État a créé le FSCI (Fonds de Sécurisation du Crédit Interentreprises) par la loi de finance rectificative n° 2009-431 (art. 21) du 20 avril 2009 et en a confié la gestion à CCR. Ce fonds était destiné à garantir les encours consentis à des acheteurs dont la probabilité de défaut à 1 an se situe entre 2 et 6%. Une convention était conclue entre l'assureur-crédit et le FSCI représenté par CCR.

Le dispositif CAP EXPORT 2009

Ce dispositif public a été en vigueur du 8 octobre 2009 au 31 décembre 2011 et correspondait à l'équivalent à l'exportation des CAP et CAP+ domestiques. Il s'agissait de soutenir les exportations françaises.

Le dispositif était porté par la Coface Direction des garanties publiques (DGP) en qualité de réassureur pour le compte de l'État, qui en délégait la gestion à CCR. Cette dernière intervenait en qualité de mandataire de l'État en vue de permettre le fonctionnement pratique de ce dispositif entre COFACE DGP et chaque assureur-crédit (préparation des traités, agrégation des comptes, traitement des éléments particuliers de chaque cédante).

1.2.4 Les dispositifs CAP en 2020

En 2020, l'État a reconduit les dispositifs CAP, CAP+ et CAP EXPORT, très similaires à ceux mis en place en 2008. Il a également créé le dispositif spécifique CAP Relais. La Direction Générale du Trésor a habilité CCR en mars 2020 à agir avec la garantie de l'état pour pratiquer des opérations de réassurance des risques d'assurance-crédit dans le cadre des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+. La BPIFrance a été désignée pour la réassurance des dispositifs CAP destinés à l'export.

Le dispositif CAP

Le dispositif CAP est une garantie complémentaire permettant de proposer aux assurés une solution de couverture complémentaire dans le cas où l'assureur-crédit souhaiterait réduire la garantie accordée sur un acheteur donné de l'assuré (couverture ligne à ligne) en cas d'évolution défavorable du risque. Cette garantie vient en complément de la garantie primaire accordée déjà par l'assureur-crédit. Ce dispositif a été mis en place le 15 mars 2020 et les souscriptions ont cessé le 31 décembre 2021. Cinq assureurs y ont participé : Allianz Trade, Coface, Atradius, Groupama et AXA Assurcrédit, représentant 95% du marché français de l'assurance-crédit.

L'idée du dispositif CAP est de maintenir un niveau d'encours suffisant malgré la dégradation subite de la situation d'un acheteur. Les primes sont un pourcentage de la garantie accordée par l'assureur à l'assuré sur l'acheteur. En cas de sinistre, la garantie CAP ne joue que si l'impayé dépasse le montant de la garantie primaire (fonctionnement analogue à une réassurance XS par risque).

Le dispositif CAP+

Le dispositif CAP+ est une garantie de substitution permettant de proposer aux assurés une solution de couverture dans le cas où l'assureur-crédit souhaiterait résilier la garantie accordée sur un acheteur donné de l'assuré (couverture ligne à ligne) en cas d'évolution défavorable du risque. Le Fonds FSCI n'a pas été reconduit. Ce dispositif a été mis en place le 15 mars 2020 et les souscriptions ont cessé le 31 décembre 2021. Cinq assureurs y ont participé : Allianz Trade, Coface, Atradius, Groupama et AXA Assurcrédit.

Les primes sont un pourcentage de la garantie accordée par l'assureur à l'assuré sur l'acheteur. Le fonctionnement est analogue à une réassurance en quote-part classique à 95%. L'assureur cède à CCR 95% des primes, en échange, CCR couvre 95% de la sinistralité.

Les dispositifs CAP Francexport et CAP Francexport+

Ces dispositifs sont équivalents à CAP et CAP+, mais concernent les acheteurs étrangers. La BPIFrance a été désignée pour leur réassurance.

Le dispositif CAP Relais

Compte-tenu de l'ampleur de la crise et du temps nécessaire à la délivrance des garanties CAP et CAP+, et devant le risque de réduction massive des garanties par les assureurs-crédit, le dispositif CAP Relais a été mis en place de façon à l'éviter en attendant le déploiement de CAP et CAP+. Ce dispositif concerne l'ensemble du portefeuille des assureurs-crédit. C'est un mécanisme de réassurance par CCR en quote-part classique qui s'applique au portefeuille entier, à l'instar des autres dispositifs européens, couvrant l'intégralité des risques des assureurs-crédit (risques sur les acheteurs ayant une probabilité de défaut à 1 an < 6%) incluant l'ensemble des entreprises françaises (quelle que soit leur taille) et les acheteurs étrangers (export).

Ce traité a été souscrit par cinq assureurs en 2020 (Allianz Trade, Coface, Atradius, Groupama et AXA Assurcrédit) représentant une part de marché de l'ordre de 95%. Le taux de quote-part a été de 75%.

Compte-tenu du retour à une situation plus saine de l'économie, le dispositif CAP Relais n'a été prorogé que de 6 mois en 2021 pour à la demande des assureurs-crédit. Quatre assureurs (Allianz Trade, Coface, Groupama et AXA Assurcrédit) y ont souscrit, et cela représente une part de marché >80%. Le taux de quote-part a été de 20%. En souscrivant ces traités, les assureurs se sont engagés à maintenir l'encours global de leurs engagements, tel qu'ils étaient lors de la mise en place du dispositif, selon un calendrier défini contractuellement.

1.3 La Caisse Centrale de Réassurance

1.3.1 Rôle de CCR

La Caisse Centrale de Réassurance, CCR, est une entreprise détenue à 100 % par l'État. Elle intervient pour couvrir des carences de marché à la demande de l'Etat. Elle assure, sur certaines activités, des missions essentielles pour les pouvoirs publics. CCR est habilitée à proposer aux assureurs opérant sur le marché français une réassurance publique des risques de catastrophes naturelles. Cette réassurance est la contrepartie de l'obligation faite aux assureurs d'inclure dans leur contrat une extension de garantie couvrant les risques de catastrophes naturelles. Elle n'est néanmoins pas obligatoire. Actuellement, environ 96% du marché français fait le choix de se réassurer auprès de CCR.

De plus, CCR remplit le rôle de secrétaire de la Commission interministérielle Catastrophes Naturelles. A ce titre, elle ne donne pas d'avis sur les reconnaissances des communes. CCR apporte aux membres de la commission sa connaissance du secteur assurantiel. Du fait de sa participation, CCR a pu constituer une base de données des arrêtés Cat Nat. Elle informe les assureurs et les experts de la parution d'un arrêté, et leur met à disposition une information tabulaire plus exploitable que le texte de l'arrêté publié au Journal Officiel. En particulier, CCR calcule la franchise à appliquer pour chaque commune reconnue en état de catastrophe naturelle à la suite d'un événement.

En plus de son rôle central dans la couverture des catastrophes naturelles, CCR couvre également les risques d'attentat, d'actes de terrorisme et de responsabilité civile des exploitants nucléaires. De plus, CCR est chargée de la gestion comptable et financière de fonds publics pour le compte de l'Etat.

1.3.2 CCR et l'assurance-crédit

Contrairement à l'assurance des catastrophes naturelles, CCR n'a pas à proprement parler de modèle économique en matière d'assurance-crédit. En effet CCR est intervenue de façon conjoncturelle en soutien à l'assurance-crédit à la demande de l'État, aussi bien en 2008 qu'en 2020.

Le fonctionnement de la réassurance-crédit de CCR ne diffère pas de celui des autres réassurances publiques : en échange du versement d'une prime de réassurance, CCR prend en charge une part des sinistres des assureurs-crédit, via une réassurance proportionnelle. Afin de compenser les frais de gestion supportés par les assureurs-crédit, CCR reverse une commission de réassurance.

Si le résultat technique de CCR, pour l'assurance-crédit, est négatif, l'État prend en charge la part des sinistres conduisant à ce résultat. CCR est donc amenée à effectuer un provisionnement pour l'assurance-crédit comme c'est le cas pour ses autres activités de réassurance publique. Ce provisionnement s'appuie sur les décomptes de réassurance (primes, sinistres et provisions) fournis par tous les assureurs-crédit et tient compte de leur part de marché en primes. De plus, les dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+ étant en run-off depuis plusieurs mois, les montants des provisions évoluent peu, et la plupart d'entre elles ont déjà été liquidées en grande partie. Ceci nous amène à poser la problématique traitée dans le cadre de ce mémoire.

1.4 Problématique

1.4.1 Provisionner autrement les dispositifs CAP

Les travaux menés dans le cadre de ce mémoire concernent le calcul par CCR des provisions techniques pour les dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+, non plus en s'appuyant sur les provisions calculées par les assureurs-crédit, mais en étudiant la pertinence d'une nouvelle méthode, en l'occurrence le filtre de Kalman.

En effet, comme nous le verrons à la section 2.7, les assureurs-crédit optent tous pour des méthodes classiques de type Chain-Ladder pour le calcul des provisions des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+. Ces méthodes malgré leur forte réputation et leur utilisation quasi systématique dans le monde assurantiel restent simples et non forcément adaptées à la problématique. Etudier une méthode alternative et comparer ses performances à celles obtenues par une méthode de type Chain-Ladder en se basant sur la sinistralité observée permettra de répondre à la question suivante :

Le filtre de Kalman est-il pertinent comme méthode de provisionnement ?

Notre réponse sera apportée dans le cadre des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+. En conclusion de ce mémoire, nous tentons de généraliser les conclusions en expliquant les conditions qui pourraient rendre favorables l'utilisation du filtre de Kalman comme méthode de provisionnement.

Le calcul des provisions de primes n'est pas traité dans ce mémoire. En effet, la politique de souscription de chaque assureur-crédit impacte de façon importante le montant des primes. De plus, et concernant plus spécifiquement CAP Relais, les montants des primes dépendent de la politique de tarification et des services

que chaque assureur-crédit propose. Ces spécificités de chaque assureur-crédit ne nous sont pas connues, il ne nous paraît donc pas pertinent de proposer une méthode pour le calcul des provisions de primes. De plus, à la date où ces lignes sont rédigées, les montants de provisions de primes sont très négligeables. Il est important de noter qu'en assurance-crédit existe le mécanisme de ristournes, appelé « no-claim bonus ». Quand aucun sinistre n'est observé pour un assuré, une ristourne sur les primes peut lui être versée. Le mécanisme de calcul des ristournes et les conditions contractuelles sont spécifiques à chaque assureur-crédit et peut l'être en fonction des contrats. Ces informations n'étant pas disponibles, les provisions des ristournes sont exclues du périmètre de ces travaux.

Quant aux sinistres, ils dépendent fortement du secteur d'activités et des aides de l'État accordées aux entreprises. En effet, malgré la forte détérioration du contexte économique, l'année 2020 fait partie des années les moins sinistrées en assurance-crédit, les aides de l'État, en particulier le PGE, ayant servi au remboursement par les entreprises de leurs créances commerciales. L'enjeu des provisions de sinistre est donc très important. Contrairement aux primes dont l'évolution d'un exercice à l'autre peut être expliquée entre autres par le volume garanti, la sinistralité peut évoluer fortement à la hausse ou à la baisse d'une année à l'autre, en fonction de la conjoncture économique par exemple, et savoir l'anticiper reste un exercice compliqué. C'est le calcul des provisions de sinistre qui est étudié dans ce mémoire. En revanche, les provisions pour récupération ne sont pas traitées car aucune donnée permettant de les estimer n'est disponible (historique des récupérations, frais, conditions contractuelles, etc.).

La problématique dont il est question dans ce mémoire peut donc être reformulée comme suit :

Le filtre de Kalman est-il pertinent comme pour le calcul des provisions de sinistre ?

Avant de répondre à la problématique posée, il est nécessaire d'explicitier les principales difficultés qui entourent le provisionnement des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+ :

- Ces dispositifs sont récents, donc à historique réduit, et les méthodes classiques de provisionnement de type Chain-Ladder peuvent ne pas être pertinentes.
- Les dispositifs CAP/CAP+ ont été mis en place entre 2008 et 2011. Néanmoins, la crise de 2008 n'était pas comparable avec celle de la COVID19. De plus, il existe très peu de données fiables disponibles permettant d'en déduire un modèle historique et de le transposer aux dispositifs 2020.
- Les assureurs-crédit jugent très difficile le provisionnement des dispositifs CAP/CAP+ et certains disent être incapables de déterminer les IBNR.
- Pour certaines branches d'activités, des sinistres peuvent être déclarés jusqu'à 12 mois après émission des factures.
- L'utilisation des dispositifs CAP et CAP+ s'est trouvée impactée par CAP Relais jusqu'en juin 2021.
- Les aides de l'état français, en particulier le PGE, ont contribué à une baisse des défaillances d'entreprises, ces aides étant entre autres utilisées par les entreprises pour rembourser leurs créances commerciales.
- Certains assureurs-crédit se basent sur une hypothèse de loss-ratio cible pour calculer les provisions CAP Relais. Ces ratios sont plutôt issus d'une décision du management et moins d'une méthode mathématique.

- Enfin, le contexte d'incertitude en ce qui concerne les confinements/déconfinements, le prolongement des aides de l'état et la faillite « décalée dans le temps » des entreprises rend compliqué le travail de calcul des provisions.

1.4.2 Données disponibles

Afin de répondre à la problématique posée, un recueil de données est nécessaire. Il concerne des données relatives à l'assurance-crédit et d'autres relatives à la conjoncture économique.

Concernant les données assurantielles, la mise en place des trois dispositifs CAP s'est accompagnée par la définition et la production de reportings adressés par les assureurs-crédit à CCR, dans l'objectif de suivre l'exposition de l'État et la sinistralité.

- Pour les dispositifs CAP et CAP+, CCR dispose de données mensuelles à la maille assuré/acheteur, relatives aux garanties et aux sinistres
- Quant au dispositif CAP Relais, CCR dispose des données mensuelles de sinistres à la maille assuré/acheteur.

Les données de sinistres sont caractérisées pour chaque couple assuré/acheteur par :

- La date du sinistre : c'est la date à laquelle l'assuré a émis une facture non honorée à destination de l'acheteur, à la suite d'une vente d'un produit ou d'un service
- La date de déclaration du sinistre : c'est la date à laquelle l'assuré déclare auprès de son assureur une menace de sinistre concernant un acheteur donné
- La date de dernière indemnisation : c'est la date la plus récente à laquelle l'assureur indemnise l'assuré pour un sinistre concernant un acheteur donné
- Indemnisation cumulée à date : c'est le montant cumulé des indemnisations du sinistre, à la date de dernière indemnisation

Comme nous le verrons plus loin, la date du sinistre servira à identifier la période du sinistre. Quant à la date de déclaration, elle permettra d'identifier la période de développement.

Pour les besoins du projet, des données exogènes ont été explorées afin de tenter d'expliquer la sinistralité. Six indicateurs relatifs à la conjoncture économique sont retenus.

- Les deux premiers indicateurs concernent l'indice du chiffre d'affaires (ICA) [21]. Cet indice permet de mesurer l'évolution de l'activité des entreprises, en se basant sur les déclarations mensuelles de ces dernières pour le paiement de leur TVA (taxe à la valeur ajoutée). À partir de ces déclarations, l'INSEE mesure l'ICA par code NAF (Nomenclature d'Activité Française). Ces indices donnent une image pertinente de l'activité économique. Des montants élevés de ces indices correspondent à une production élevée. Deux indices ICA ont été explorés :
 - Indice mensuel du chiffre d'affaires (ICA) dans les services [22]
 - Indice mensuel du chiffre d'affaires (ICA) dans le commerce [23]

- Ensuite, un troisième indicateur concerne la consommation mensuelle des ménages en biens [26]. Cet indicateur peut être interprété comme l'ICA. Une plus forte consommation des ménages en biens est synonyme d'une forte activité économique. En revanche, quand la consommation est faible, cela indique que l'activité économique ne tourne pas à plein régime.
- Quant au quatrième indicateur, il représente l'indice mensuel de la production industrielle en industrie manufacturière [25]. Cet indicateur permet de suivre l'évolution mensuelle de l'activité industrielle. Les hypothèses que nous émettons restent similaires à celles émises pour les indicateurs précédents.
- Enfin, les deux derniers indicateurs sont relatifs au nombre de défaillances d'entreprises. La pertinence de ces données se justifie par le fait qu'une entreprise défaillante sera dans l'incapacité d'honorer ses engagements. En d'autres termes, plus le nombre de défaillances augmente, plus la sinistralité en assurance-crédit est supposée augmenter. Les indicateurs sont à l'échelle France-entière et tous secteurs d'activité. Les deux indicateurs sont les suivants :
 - o Cumul des défaillances sur 12 mois [24], donnée CVS-CJO, c'est-à-dire corrigée des variations saisonnières et des jours ouvrables
 - o Nombre mensuel de défaillances [5], donnée non corrigée des variations saisonnières et des jours ouvrables

Les quatre premiers indicateurs donnent une image pertinente de l'activité économique, que nous pouvons interpréter de deux façons. En effet, une forte activité économique peut être synonyme d'une faible sinistralité car une forte production est souvent corrélée à une forte demande et la santé des entreprises se trouve améliorée. En revanche, une forte production est synonyme d'un nombre important de factures émises, ce qui par effet de volume peut conduire à un nombre probablement important de sinistres.

D'autres indicateurs relatifs à la conjoncture économique ont été explorés. L'évolution de ces indicateurs a été jugée comme étant peu corrélée à celle de la sinistralité. Quant aux données relatives aux prêts garantis par l'État, elles ont été collectées mais n'ont pas servi à ces travaux. Ces données étaient pressenties pour expliquer le niveau peu important de la sinistralité au titre des trois dispositifs CAP. En revanche, étant donné qu'elles ne sont pas à une maille individuelle (à l'échelle d'une entreprise), elles n'ont pas pu servir.

1.5 Conclusions

Ce premier chapitre a présenté le contexte des travaux qui sont réalisés dans ce mémoire avant de décrire la problématique : il s'agit d'étudier la pertinence du filtre de Kalman pour calculer les réserves de sinistre pour chacun des dispositifs d'assurance-crédit, CAP Relais, CAP et CAP+. Des données mensuelles issues de reportings transmis par les assureurs-crédit à CCR ainsi que six indicateurs renseignant sur la conjoncture économique sont croisés pour apporter une réponse à la problématique posée.

Le chapitre suivant présente les techniques de provisionnement les plus connues avant de dresser un état des lieux des principales méthodes utilisées en assurance-crédit. Une méthodologie de comparaison des

méthodes de provisionnement sur des données réelles sera proposée. En conclusion, le Chapitre 2 identifie les méthodes dont les performances pour le calcul des réserves pour les trois dispositifs CAP seront comparées.

Chapitre 2. Méthodes de provisionnement en assurance non-vie

2.1 Introduction

Ce chapitre dresse les principales méthodes de provisionnement en assurance non-vie. Il n'a pas la prétention de couvrir l'exhaustivité des méthodes utilisées, mais de rappeler celles qui sont les plus familières au sein du monde actuariel.

Avant de les présenter, il convient de définir les notations qui seront utilisées tout au long de ce document.

2.2 Notations et notions

2.2.1 Règles de notation

Dans l'ensemble du document, les variables en caractère non gras sont utilisées pour indiquer un nombre scalaire. Quand ces variables sont en minuscule et en gras, elles sont relatives aux vecteurs. En revanche, les matrices sont indiquées par des variables en majuscule et en gras. Enfin, une variable notée avec un accent circonflexe désigne une estimation de cette même variable (en opposition à la valeur réelle qui n'est pas connue).

2.2.2 Triangles de charges de sinistre et réserves

Les triangles des charges de sinistre sont des outils bien répandus au sein du monde actuariel. Ces triangles se présentent sous la forme de matrices triangulaires, avec en ligne les périodes de sinistre i et en colonne les périodes de développement j . Nous utilisons le terme période au lieu d'exercice car dans cette étude, nous raisonnons en mois (ou en ensemble de mois) et non pas en année. Si l'on s'intéresse aux triangles des charges de sinistre, leurs éléments sont en général des montants cumuls de paiement des sinistres, comme attendu par la plupart des méthodes de calcul des provisions. Néanmoins, il existe également d'autres méthodes qui se basent sur des triangles incrémentaux, c'est-à-dire avec des charges non cumulées. Les éléments de ces triangles correspondent aux charges de sinistre observées pour une période d'origine de sinistre et une période de développement données.

Les périodes d'origine de sinistre, que nous appellerons les périodes de sinistre, i sont des entiers entre 0 et I . Les périodes de développement des sinistres, que nous appellerons périodes de développement, j sont des entiers entre 0 et J .

Les montants incrémentaux des charges de sinistre pour une période de sinistre i et une période de développement j sont indiqués par $s_{i,j}$. Le montant cumulé de ces charges pour une période de sinistre i

jusqu'à la période de développement j est noté $C_{i,j}$. Il se calcule par $C_{i,j} = \sum_{k=0}^j S_{i,k}$. Dans le cas où la période de développement est J , le montant cumulé $C_{i,J} = \sum_{k=0}^J S_{i,k}$. Le montant des charges de sinistre à l'ultime S_i pour une période de sinistre i n'est autre que le montant cumulé $C_{i,J}$ quand la période de développement $J \rightarrow \infty$. En pratique, ce montant à l'ultime peut être atteint après quelques périodes de développement pour certaines branches d'assurance, notamment si celles-ci sont à déroulement court.

Pour une période de sinistre i , le montant de réserves se note R_i et se calcule comme étant la somme des charges de sinistre à l'ultime dont on soustrait les charges de sinistre connues jusqu'à la période de développement i . L'estimation des réserves peut se faire selon la formule suivante :

$$\hat{R}_i = \sum_{j=0}^{j=J} S_{i,j} - \sum_{j=0}^{j=i} S_{i,j}.$$

Cette formule permet d'estimer les réserves de façon partielle sauf quand la période de développement J est suffisamment grande. Le montant total des réserves est la somme des réserves pour toutes les périodes de sinistre : $R = \sum_{i=0}^I R_i$.

Enfin, avant de clore ce paragraphe, nous schématisons les deux types de triangles de charges de sinistre :

Exemple d'un triangle incrémental de charges de sinistre :

$$\begin{pmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} & \dots & S_{0,J-1} & S_{0,J} \\ S_{1,0} & S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,J-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ S_{I-2,0} & S_{I-2,1} & S_{I-2,2} & & & \\ S_{I-1,0} & S_{I-1,1} & & & & \\ S_{I,0} & & & & & \end{pmatrix}$$

Exemple d'un triangle cumulé de charges de sinistre :

$$\begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & \dots & C_{0,J-1} & C_{0,J} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,J-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ C_{I-2,0} & C_{I-2,1} & C_{I-2,2} & & & \\ C_{I-1,0} & C_{I-1,1} & & & & \\ C_{I,0} & & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 Principales familles de méthodes

Ce paragraphe oppose d'une part les méthodes agrégées aux méthodes individuelles et d'autre part les méthodes déterministes aux méthodes stochastiques. Il ne couvre pas la totalité des familles de méthodes pour le calcul des provisions, mais présente celles que nous rencontrons souvent dans l'état de l'art ou au sein du monde des actuaires.

2.3.1 Méthodes agrégées vs méthodes individuelles

Dans le cadre du provisionnement en assurance non-vie, deux grandes familles de méthodes sont utilisées. La première est plutôt classique et consiste à utiliser des données agrégées (triangles des charges de sinistre) et la seconde est plus moderne, et consiste à calculer les provisions de façon individuelle.

Les méthodes agrégées sont caractérisées par leur facilité de mise en œuvre, par le peu de puissance de calcul nécessaire et par un faible niveau de granularité des données. Ces méthodes bien documentées sont utilisées depuis longtemps dans le monde actuariel. Même si elles ont l'avantage d'être simples, ces méthodes n'exploitent qu'une partie des données disponibles et de ce fait, seule une partie de l'information est utilisée. Par exemple, les données relatives aux sinistres individuels ou aux risques sinistrés ne sont pas prises en compte. De plus, les provisions sont calculées au niveau agrégé alors que la tarification se fait au niveau individuel, ce qui implique une différence de traitement entre le provisionnement et la tarification. Comme nous le verrons plus loin, ces méthodes se basent sur une hypothèse de stabilité dans le temps de la sinistralité, c'est-à-dire le développement des sinistres au sein du portefeuille est censé rester relativement stable. De plus, ces méthodes supposent souvent l'absence de modifications dans la gestion des sinistres de l'assureur. Même si certaines méthodes agrégées tiennent compte de l'inflation et modélisent les différentes évolutions temporelles, la plupart des autres méthodes supposent la stabilité de l'environnement économique et légal. D'autres inconvénients des méthodes agrégées seront abordés lors de la présentation de la méthode de Chain-Ladder, méthode la plus connue pour le calcul des provisions.

Pour pallier ces inconvénients, le provisionnement individuel a vu le jour et est souvent opposé au provisionnement agrégé utilisant les triangles. Le principe des méthodes de provisionnement individuel est de calculer une réserve pour chaque sinistre en fonction de ses caractéristiques. Ceci se fait en prenant en compte les données détaillées de chaque sinistre et a pour objectif de rendre plus précis le calcul des réserves. De plus, ces méthodes peuvent traiter des contrats segmentés et des sinistres graves mélangés à des sinistres moins graves, ce qui n'était pas possible avec les méthodes agrégées. Les méthodes individuelles peuvent prendre en compte les évolutions temporelles de la sinistralité car elles intègrent l'ensemble des informations relatives à chaque sinistre. Il n'y a donc aucune perte d'information, en dehors de la sélection qui peut être faite par la méthode elle-même (par exemple, sélection des variables les plus pertinentes). Parmi les méthodes individuelles, nous pouvons citer les travaux de Pigeon et al [32] qui ont proposé un modèle similaire au Chain-Ladder mais en travaillant au niveau individuel. Les périodes de développement sont remplacées par les périodes de paiement. Une autre méthode a été proposée par Larsen [29] et se base sur des GLM pour prendre en compte l'information individuelle dans la modélisation. Cette dernière s'applique aux sinistres ou aux paiements incrémentaux. D'autres références utilisant le Machine Learning ou le Deep Learning ont vu le jour grâce à la puissance de calcul sur du GPU. Par exemple, Wüthrich utilise les arbres de régression [39] ou les réseaux de neurones [40] pour le provisionnement individuel. Lopez et al. [30] ont adapté la méthode CART aux données censurées, notamment l'élagage des arbres de régression. En effet, le provisionnement individuel doit gérer le fait que certains sinistres sont connus par l'assureur, alors que d'autres sont déjà survenus mais non encore déclarés ou vont survenir au-delà de la période d'observation. Ces sinistres sont donc absents de la base de données au moment du traitement. Réaliser un provisionnement ligne à ligne en se restreignant aux seuls sinistres connus et en omettant les sinistres non encore ouverts induira donc un biais non négligeable.

2.3.2 Méthodes déterministes vs Méthodes stochastiques

Les méthodes de provisionnement sont dites déterministes quand elles fournissent une valeur moyenne comme estimateur des provisions, sans aucune précision sur la distribution. Le terme déterministe provient du fait que ces méthodes ne nécessitent pas l'usage de modèles probabilistes pour quantifier l'incertitude sur l'estimation des provisions. Or, le référentiel solvabilité 2 impose aux assureurs de quantifier de façon plus précise les risques et l'incertitude autour de ces risques. Pour cela, les méthodes stochastiques sont utilisées.

Les méthodes stochastiques se basent sur des modèles permettant d'évaluer la variabilité des provisions et peuvent fournir une distribution et des intervalles de confiance autour des provisions calculées. Les méthodes stochastiques nécessitent de choisir une loi, d'où le risque d'erreur de spécification, en d'autres termes, il s'agit du risque de choisir une loi qui s'éloigne de la réalité. Les modèles stochastiques peuvent utiliser des triangles cumulés (comme le modèle de Mack par exemple) ou des triangles incrémentaux. Des modèles GLM peuvent également être exploités avec les lois de Poisson, Gamma ou Normale. Pour plus de précisions, England et Verrall [14] présentent une liste de modèles pouvant servir au provisionnement stochastique.

2.4 Méthodes basées sur les triangles

Dans ce paragraphe, nous présentons les principales méthodes de calcul des provisions parmi celles utilisant les triangles. Le lecteur y trouve notamment la méthode de Chain-Ladder qui fait figure de benchmark incontournable et quelques-unes de ses variantes.

2.4.1 Méthode de Chain-Ladder

C'est la méthode la plus couramment utilisée car elle est facile à comprendre et à implémenter. Elle s'applique uniquement aux triangles cumulés. Elle fait partie des méthodes agrégées et déterministes. Le principe est le suivant : il existe des facteurs de développement λ_j tels que :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}, \forall i \in [0, I-1] \text{ et } j \in [0, J-1].$$

En d'autres termes, on suppose que l'évolution de la charge de sinistre d'une période de développement à la période suivante est indépendante de la période du sinistre. Les facteurs λ_j sont évalués à partir de l'historique des observations et permettront d'estimer la charge cumulée à l'ultime pour une période de sinistre donnée. Une fois que le triangle de charge est complété, il sera aisé de calculer les réserves R_i pour chaque année de sinistre i . En effet, nous pouvons démontrer que les coefficients λ_j s'estiment par la formule suivante :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad \forall j \in [0, J-1]. \quad (2-1)$$

Une fois les coefficients $\hat{\lambda}_j$ estimés, la partie basse du triangle se calcule grâce aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{C}_{i,I-i+1} &= \hat{\lambda}_{I-i} C_{i,I-i} \quad \forall i \in [0, I-1], \\ \hat{C}_{i,j+1} &= \hat{\lambda}_j C_{i,j} \quad \forall i \in [0, I-1], j \in [I-i+1, J-1], \\ \hat{S}_i &= \hat{C}_{i,J} = \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{\lambda}_j \right) C_{i,I-i}, \quad \forall i \in [0, I-1].\end{aligned}$$

De ce fait, le montant des réserves peut être estimé par :

$$\hat{R}_i = \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{\lambda}_j - 1 \right) C_{i,I-i}, \quad \forall i \in [0, I-1].$$

Hypothèses de la méthode de Chain-Ladder

La méthode de Chain Ladder repose sur les 2 hypothèses suivantes :

- 1- Indépendance des périodes de survenance (ou de sinistre)

$$\forall i \neq k, (C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,J}) \text{ et } (C_{k,0}, C_{k,1}, \dots, C_{k,J}) \text{ sont indépendants}$$

La dépendance se trouve non vérifiée en cas d'inflation significative ou d'effet périodique. Le test statistique utilisé est le test du « pile ou face ». Il consiste à affecter à chaque élément du triangle un signe « + » ou « - » selon que la valeur est supérieure à la médiane de la colonne ou non. L'indépendance des périodes de survenance équivaut à ce que le nombre d'éléments marqués « + » ne soit pas différent de celui relatif aux éléments marqués « - » dans chaque diagonale. Une description plus détaillée de ce test se trouve dans le mémoire d'actuariat de Guillaumin en 2008 [18].

- 2- Linéarité des développements : pour passer d'une colonne de développement à une autre, il faut multiplier par un coefficient unique. En d'autres termes,

$$\forall i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J-1, E[C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j}.$$

La validation de cette deuxième hypothèse se fait en général de façon visuelle. Pour cela, le simple fait de tracer la colonne j en fonction de la colonne $j+1$ et d'observer un nuage de points sous forme de droite passant par l'origine sert à valider cette hypothèse.

Avantages et inconvénients de la méthode de Chain-Ladder

La méthode de Chain Ladder a comme principal avantage sa simplicité et son interprétabilité. De plus, elle est facilement auditable. Elle s'avère performante pour les branches courtes, et se trouve peu adaptée à des branches longues comme la RC.

Cependant, cette méthode n'est pertinente que dans le cas de portefeuilles homogènes. Par exemple, si des sinistres graves sont identifiés, il convient de les écarter avant de l'appliquer. De plus, cette méthode capte mal les phénomènes d'inflation, le changement de comportement des assurés ou les évolutions dans la gestion de sinistre.

De plus, la dernière période de sinistre se base sur un seul point. Il suffit que ce point soit atypique pour que l'estimation soit erronée. Ceci est d'autant plus important que cette dernière période représente un pourcentage non négligeable de la provision totale.

Enfin, les dernières périodes de développement servent à extrapoler toutes les lignes du triangle, et des valeurs atypiques peuvent perturber fortement le calcul des provisions. Ce point est moins alarmant que le précédent car la sinistralité relative aux périodes de développement les plus récentes est en général faible.

2.4.2 Variantes de la méthode de Chain-Ladder

Certaines variantes de la méthode Chain-Ladder existent. Elles permettent de modifier légèrement la méthode sans impact important sur les avantages et les inconvénients.

Facteurs de développement par année de survenance

Cette méthode diffère très légèrement de la méthode Chain Ladder. Elle consiste à calculer différemment les facteurs λ_j :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{I+1} \sum_{i=0}^I \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall j \in [0, J-1].$$

Cette formule se réécrit de la façon ci-dessous, permettant de mettre en évidence le terme à droite, issu de la formule de Chain-Ladder :

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{i=0}^I \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-1} C_{i,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall j \in [0, J-1].$$

Contrairement à la méthode de Chain-Ladder qui pour chaque période de développement accorde plus de poids aux lignes dont les montants $C_{i,j}$ sont les plus élevés, la méthode de facteurs de développement accorde la même importance aux poids $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$. C'est donc équivalent à une moyenne des ratios, alors que la méthode de Chain-Ladder calcule un ratio moyen.

London Chain

Cette méthode a été introduite par Benjamin et Eagles en 1986 pour le calcul des réserves au Lloyd's [6]. C'est en quelque sorte une généralisation de la méthode de Chain-Ladder en supposant une relation affine entre les montants $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$, ce qui permet de relâcher l'hypothèse d'une droite passant par l'origine pour l'hypothèse de linéarité des développements. En revanche, la relation linéaire reste requise.

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \gamma_j, \forall i \in [0, I-1] \text{ et } j \in [0, J-1].$$

Les paramètres λ_j et γ_j sont estimés par la méthode des moindres carrés.

Méthode des coûts moyens

Cette méthode consiste à appliquer Chain-Ladder 2 fois, une fois sur le nombre de sinistres et une autre fois sur le coût moyen des sinistres. Le nombre de sinistres à l'ultime est multiplié par le coût moyen à l'ultime pour obtenir la sinistralité à l'ultime. Les hypothèses de Chain-Ladder doivent donc être vérifiées pour les 2 triangles.

Le montant de la charge à l'ultime est alors

$$\hat{C}_{i,J} = \hat{N}_{i,J} \hat{C}M_{i,J}.$$

Avec $\hat{N}_{i,J}$ est le nombre de sinistres à l'ultime et $\hat{C}M_{i,J}$ le coût moyen à l'ultime.

Cette méthode permet d'interpréter si la sinistralité est plutôt liée à la sévérité ou à la fréquence. Grâce à l'évolution du coût moyen, elle peut capter l'effet de l'inflation. Elle suppose néanmoins une indépendance entre les lois de fréquence et de coût, et de plus elle ne corrige pas les faiblesses de la méthode Chain-Ladder.

2.4.3 Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Cette méthode développée en 1972 par Bornhuetter et Ferguson [7] introduit une donnée supplémentaire qui est le loss-ratio à l'ultime, c'est-à-dire le ratio sinistres sur primes à l'ultime estimé a priori. Ensuite, un taux de liquidation croissant sur les périodes de développement est appliqué à la charge à l'ultime. De la sorte, les résultats se trouvent plus stables car les estimations pour les périodes récentes deviennent moins dépendantes des dernières charges de sinistre qu'avec la méthode de Chain-Ladder. La méthode de Bornhuetter-Ferguson fait partie des méthodes agrégées et déterministes. Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

1- Indépendance des périodes de survenance

$$\forall i \neq k, (C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,J}) \text{ et } (C_{k,0}, C_{k,1}, \dots, C_{k,J}) \text{ sont indépendants}$$

2- Il existe des coefficients β_j et μ_i permettant de passer d'une période de développement à une autre. Les coefficients μ_i représentent les charges à l'ultime « à dire d'expert » pour chaque période de survenance i , et les coefficients β_j sont les cadences de charges cumulées. L'équation est la suivante :

$$\forall i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J-1, E[C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + (\beta_{j+1} - \beta_j) \mu_i,$$

$$E[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i.$$

De la même façon que pour la méthode de Chain-Ladder, les coefficients β_j s'estiment par la formule suivante :

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{\prod_{k=i}^{j-1} \hat{\lambda}_k}$$

Avec les coefficients λ_j pouvant être estimés par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{j-1} C_{i,j}} \quad \forall j \in [0, J-1].$$

L'estimation de la charge future se calcule selon la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,j-i} + (\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{j-i})\mu_i.$$

Le principal avantage de la méthode de Bornhuetter-Ferguson est l'introduction de données extérieures et de ne pas se limiter aux données sur les charges de sinistre. Néanmoins, la fiabilité de cette méthode dépend de la justesse des données extérieures utilisées.

2.4.4 Modèle de Mack

Le modèle de Mack, est le pendant stochastique de la méthode de Chain-Ladder. Cette méthode publiée en 1993 par Thomas Mack [31] s'appelle également Distribution-free Chain Ladder car aucune hypothèse de distribution n'est faite sur les triangles.

L'application de cette méthode nécessite que 3 hypothèses soient vérifiées :

- 1- Indépendance des exercices de survenance

$$\forall i \neq k, (C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,J}) \text{ et } (C_{k,0}, C_{k,1}, \dots, C_{k,J}) \text{ sont indépendants}$$

- 2- Linéarité des développements : pour passer d'une période de développement à une autre, il faut multiplier par un coefficient unique. En d'autres termes,

$$\forall i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J-1, E[C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j}.$$

- 3- Existence de facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_I$, tels que $\forall i = 0, 1, \dots, I$,

$$V[C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = V[C_{i,j+1} | C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

Les 2 premières hypothèses sont les mêmes que celles de la méthode de Chain-Ladder. De ce fait, l'estimation des coefficients λ_j s'obtient via les formules suivantes :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{J-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{J-1} C_{i,j}} \quad \forall j \in [0, J-1].$$

Quant à l'hypothèse 3, elle permet d'estimer les σ_j^2 selon les formules suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{J-j-1} \sum_{i=1}^{J-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2 \\ \hat{\sigma}_j^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{j-2}^4}{\hat{\sigma}_{j-3}^3}, \min(\hat{\sigma}_{j-2}^2, \hat{\sigma}_{j-3}^2) \right) \end{cases}, \forall j = 0, 1, \dots, J-2$$

Grâce à ces coefficients, cette méthode permet de quantifier l'incertitude d'estimation des facteurs $\hat{\lambda}_j$ ce qui donne une estimation de la volatilité des réserves par période de sinistre.

2.4.5 Modèle factoriel de De Vylder

Cette méthode agrégée et déterministe a été développée en 1978 par De Vylder [13]. Elle utilise des triangles de paiement incrémentaux. Ces paiements que nous notons $X_{i,j}$ sont expliqués par la multiplication de trois facteurs :

- Le premier est relatif à la période d'origine, que nous notons a_i
- Le deuxième facteur est relatif à la période de développement. Il est noté b_j
- Quant au troisième facteur, il est en rapport avec la période calendaire $i + j$ et peut représenter l'inflation. Ce facteur est noté $l_{i,j}$.

Les paiements $X_{i,j}$ sont supposés suivre la relation suivante :

$$X_{i,j} = a_i b_j l_{i,j}.$$

Si l'inflation est constante, la relation ci-dessus devient $X_{i,j} = a_i b_j$.

Si l'on suppose que $\sum_{j=0}^J b_j = 1$, nous déduisons la formule suivante

$$\sum_{j=0}^J X_{i,j} = a_i \sum_{j=0}^J b_j = a_i.$$

Le terme a_i représente donc la charge de sinistre à l'ultime pour la période de sinistre i , et b_j la part de cette charge à l'ultime payée lors de la période de développement j .

La résolution de ce système se fait par la méthode des moindres carrés consistant à minimiser la somme des carrés des résidus :

$$(\hat{a}_i, \hat{b}_j) = \operatorname{argmin} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{J-i} (X_{i,j} - a_i b_j)^2 \quad (2-2)$$

Les coefficients \hat{a}_i et \hat{b}_j sont solutions de ce système d'équations :

$$\hat{a}_i = f_i(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_J),$$

$$\hat{b}_j = f_j(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_I).$$

La résolution se fait de manière récursive à partir de valeurs initiales $b_j^0, j = 0, \dots, J$. De cette valeur dépend la qualité de la convergence. Le nombre de paramètres à estimer étant $I + J + 2$, il existe un risque d'avoir un modèle non identifiable.

2.4.6 Modèle de Renshaw et Verrall

Ce modèle poissonnien fait partie des modèles GLM (Modèle Linéaire Généralisé) où les variables à expliquer suivent une loi de Poisson et la fonction lien est logarithmique. Il appartient à la famille des méthodes agrégées et déterministes. Renshaw et Verrall [35] ont montré que le résultat de ce GLM appliqué aux charges cumulées de sinistre coïncide exactement avec celui obtenu par un Chain-Ladder.

Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

$$E[C_{i,j}] = l_{i,j} \text{ et } V[C_{i,j}] = V[l_{i,j}] = l_{i,j},$$

$$\ln(l_{i,j}) = m + a_i + b_j.$$

L'interprétation des différents paramètres est la suivante : e^m est un effet lié à l'inflation, e^{a_i} est lié à un effet volume garanti ou primes pour la période de sinistre i . Quant à e^{b_j} , cela indique la part des sinistres relatifs à une période de développement j .

L'estimation des différents paramètres se fait via la maximisation de la fonction de vraisemblance. La résolution de ce problème ne peut être faite que numériquement. L'estimation des réserves pour l'année de sinistre i se fait selon la formule suivante :

$$\hat{R}_i = \sum_{j=J-i+1}^J e^{\hat{m} + \hat{a}_i + \hat{b}_j}.$$

2.5 Modèles Espace-état

2.5.1 Etat de l'art d'utilisation de ces méthodes pour le calcul des provisions

Ce paragraphe présente les modèles Espace-Etat pour le calcul des provisions. Bien que ces méthodes soient agrégées et utilisent les triangles de développement, nous avons décidé de séparer ce paragraphe du précédent car ces méthodes vont nous être utiles pour calculer les réserves en assurance-crédit.

Les données servant au calcul de provisions sont des séries temporelles. Néanmoins, la plupart des méthodes de provisionnement des sinistres ne se basent pas des modèles de séries temporelles. Parmi ces derniers, les modèles Espace-Etat offrent une flexibilité de modélisation et une bonne estimation de la dynamique temporelle d'un système (voir Chukhrova et Johannssen [10]). De plus, les modèles Espace-Etat sont suffisamment flexibles pour s'adapter aux cas univariés et multivariés et aux séries temporelles stationnaires et non stationnaires, ce dernier cas se manifestant quand un changement structurel dans la souscription ou la gestion de sinistre survient.

Le filtre de Kalman fait partie de ces modèles Espace-état et peut être appliqué pour améliorer le calcul des provisions de sinistre. De Jong et Zehnwirth en 1983 [12] ont été les premiers à construire un filtre de Kalman pour le calcul des provisions à partir de triangles de paiements incrémentaux, en prenant en compte également la variation du volume d'affaires et l'inflation. En 1990, Wright [38] a construit un modèle pour les paiements incrémentaux et a modélisé les variations des paramètres parmi les différentes périodes de sinistre en utilisant un filtre de Kalman. En 1994, Verrall [37] a appliqué un filtre de Kalman quand l'hypothèse de linéarité des facteurs de développement n'est pas vérifiée pour toutes les périodes de sinistre. Alpuim et Ribeiro [2] ont proposé un filtre de Kalman où les paiements incrémentaux sont modélisés en fonction des paiements de la première période de développement, c'est-à-dire la période de sinistre. Chukhrova et Johannssen [9] ont présenté un filtre de Kalman pour les paiements cumulés.

D'une façon générale, ces travaux supposent une évolution paramétrique des données (par exemple les charges de sinistre ou les paiements) à travers les différentes périodes de développement. D'autres travaux modélisent les paiements incrémentaux par une loi lognormale.

Avant de présenter une formalisation mathématique du filtre de Kalman, il est important de noter que ce dernier est plutôt connu en traitement de signal ou en automatique et sert soit à opérer un lissage de signaux bruités, soit à des opérations de guidage de missiles ou de robots. La quasi-totalité des publications traitant de l'utilisation du filtre de Kalman pour des problématiques de provisionnement se trouvent chez les actuaires anglophones ou allemands.

2.5.2 Formalisation mathématique du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif en contexte discret. Par récursif, nous entendons que l'état à un instant quelconque est déterminé exclusivement à partir des mesures effectuées au même instant et de l'état à l'instant précédent.

Le filtre de Kalman consiste en deux étapes distinctes : La première est une prédiction de l'état actuel à partir de l'état précédent, et la deuxième est une mise à jour de la prédiction de l'état actuel en fonction des

observations de l'instant courant. Cette étape permet d'affiner les estimations. Les premières descriptions du filtre de Kalman datent de 1960 [27][28].

Un filtre de Kalman est caractérisé par les équations suivantes : si \mathbf{z}_k désigne le vecteur observation à l'instant k , et \mathbf{x}_k désigne l'état au même instant k , les équations de Kalman s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.\end{aligned}\tag{2-3}$$

Avec :

- \mathbf{F}_k la matrice de transition permettant de passer de l'état $k - 1$ à l'état k
- \mathbf{u}_k est un vecteur de « commande » (cette dénomination est issue du monde de l'automatique)
- \mathbf{B}_k est la matrice qui relie le vecteur de « commande » \mathbf{u}_k à l'état \mathbf{x}_k
- \mathbf{w}_k est le bruit du processus, supposé suivre une distribution normale gaussienne de moyenne $\mathbf{0}$ et de matrice de covariance \mathbf{Q}_k , $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$
- \mathbf{H}_k la matrice des observations, qui relie l'état \mathbf{x}_k à l'observation \mathbf{z}_k
- \mathbf{v}_k est le bruit des observations, supposé suivre une distribution normale gaussienne de moyenne $\mathbf{0}$ et de matrice de covariance \mathbf{R}_k , $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$

Afin de faciliter la compréhension du filtre de Kalman, introduisons la notation suivante : $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ représente l'estimation du vecteur d'état à l'instant k , étant donné les différentes observations jusqu'à l'instant $k - 1$. De plus, nous supposons que l'état à l'instant k est caractérisé par son estimation $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ et par sa matrice de covariance $\mathbf{P}_{k/k}$.

La mise en œuvre du filtre de Kalman se fait à travers les équations suivantes :

Etape de prédiction :

- Prédiction a priori de l'état : $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1/k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$.
- Prédiction a priori de la covariance de l'estimation : $\hat{\mathbf{P}}_{k/k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$.

Etape de mise à jour :

- Calcul de l'innovation ou du résidu du modèle : $\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$,
- Calcul de la covariance de l'innovation : $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$,
- Calcul du gain de Kalman : $\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$,
- Estimation a posteriori de l'état : $\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k$,
- Estimation a posteriori de la covariance : $\hat{\mathbf{P}}_{k/k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{P}}_{k/k-1}$.

L'estimation a posteriori de l'état s'écrit sous une autre forme :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k,$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}),$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k).$$

Cette dernière équation s'obtient en utilisant (2-3). Chaque élément de $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ s'écrit donc sous la forme :

$$(1 - t)a + tb, t \in [0,1] \tag{2-4}$$

avec t le terme en rapport avec le gain de Kalman ($\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k$). a désigne l'estimation par le modèle et b celle issue des observations. Cela rappelle bien la théorie de la crédibilité connue dans le monde actuariel. En d'autres termes, la mise à jour de l'état est un compromis entre la confiance que l'on peut accorder au modèle et celle accordée à l'observation. Cette notion de compromis nous sera utile quand il s'agit d'améliorer les résultats de calcul des réserves par le filtre de Kalman.

Afin que le filtre de Kalman puisse s'appliquer, les trois hypothèses suivantes doivent être vérifiées (les 2 premières concernant le bruit du processus et des observations ont été explicitées auparavant) :

- $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$
- $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$
- Les vecteurs de bruit pour chaque pas de temps ($\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k, \dots, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k, \dots$) sont supposés mutuellement indépendants

Si ces hypothèses sont vérifiées, et dans le cas de modèle linéaire, le filtre de Kalman est optimal : la variance de l'erreur d'estimation est minimale. Dans le cas non linéaire, une variante appelé filtre de Kalman étendu peut résoudre des problèmes non linéaires, sans garantir une variance minimale de l'erreur.

La présentation du filtre de Kalman faite dans ce chapitre permet de comprendre les principes généraux. Néanmoins, l'adaptation du filtre de Kalman au calcul des réserves pour les dispositifs d'assurance-crédit sera présentée dans le Chapitre 3 en tenant compte de plusieurs cas d'usage possibles. Avant de clore ce paragraphe sur le filtre de Kalman, quelques éléments restent à clarifier concernant son initialisation.

Initialisation du filtre de Kalman

Afin d'utiliser le filtre de Kalman, il est nécessaire d'initialiser la première estimation du vecteur d'état \mathbf{x}_0 et les matrices de covariance de l'erreur \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k . Le premier est caractérisé par la valeur estimée à l'instant $t = 0$ et par la matrice de covariance à ce même instant. Comme nous le verrons au Chapitre 3, les observations correspondant à la période de sinistre 0 permettent de déduire le vecteur $\hat{\mathbf{x}}_0$. Quant à la matrice de covariance \mathbf{P}_0 , elle est choisie comme étant égale à la matrice identité. D'autres initialisations ont été testées et leur impact est jugé très faible en termes de résultats.

Concernant les matrices de covariance \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k , elles peuvent être estimées par la méthode ALS (Autocovariance Least Squares) [34] qui peut s'avérer compliquée à mettre en place, et peu pertinente en

particulier dans un contexte où peu de données sont disponibles. Dans notre cas, nous allons proposer une estimation beaucoup plus simple à partir des observations comme nous le verrons plus loin.

2.6 Comparaison des méthodes de provisionnement

Les différentes méthodes présentées dans ce chapitre peuvent être candidates pour le provisionnement en assurance non-vie. Comme nous le verrons dans le Chapitre 3, il sera nécessaire de comparer les performances des méthodes en termes d'erreur d'estimation des montants de réserves.

Sachant que nous disposons déjà de données relatives aux dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+, il est possible de réaliser un backtesting. Nous nous inspirons pour cela d'une technique présentée par Michel Denuit et Arthur Charpentier en 2005 [8] s'appliquant aux triangles de développement. Il s'agit d'extraire des sous-triangles à partir du triangle principal et de comparer les estimations des réserves effectuées à partir de ces sous-triangles avec les données réelles. En d'autres termes, en se basant sur les données du passé, il s'agit de prédire le futur qui est connu. Afin de comprendre cette technique, la Figure 5 montre un triangle de développement et une extraction de 3 sous-triangles afin de réaliser le backtesting, le dernier sous-triangle étant égal au triangle complet. La comparaison des performances se fera sur chacun de ces sous-triangles : il y aura autant d'écarts d'estimation que de sous-triangles. Il sera alors possible de calculer par exemple une erreur quadratique moyenne (MSE).

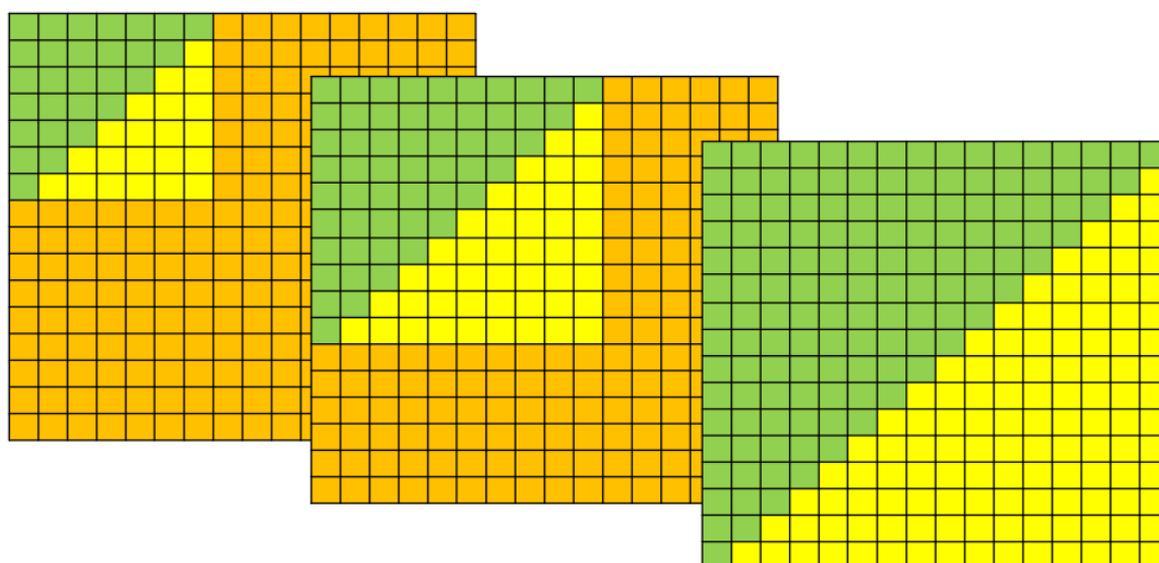


Figure 5. Exemple de 3 sous-triangles pouvant servir au backtesting : en vert les données supposées connues, en jaune celles à estimer par la méthode de provisionnement et en orange les données non utilisées dans le backtesting

2.7 Méthodes de provisionnement en assurance-crédit

Pour rappel, CCR n'étant pas spécialiste en assurance-crédit, nous avons sondé les assureurs-crédit participant aux dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+ pour connaître leurs méthodes de calcul des réserves.

Nous retrouvons sensiblement les mêmes méthodes au sein de tous les acteurs du marché, et notamment deux méthodes qui font l'unanimité : il s'agit des méthodes agrégées et déterministes, Chain-Ladder et Bornhuetter-Ferguson. Ces méthodes sont citées dans les rapports SFCR d'Allianz-Trade [1] et de Coface [11] qui évoquent également la méthode des Loss Ratio, qui consiste à déterminer un ratio S/P cible et de calculer la sinistralité à l'ultime comme étant le produit entre le Loss Ratio et la prime à l'ultime.

La recherche du côté des mémoires d'actuariat relatifs au calcul des provisions en assurance-crédit n'a pas été très fructueuse. Seule un mémoire réalisé au sein de Coface [4] traite l'application du modèle de De Vylder et de celui de Renshaw et Verrall.

Il est nécessaire de rappeler que ces méthodes à base de triangles conçoivent les périodes de sinistre et de développement de la façon suivante : un sinistre en assurance-crédit peut être caractérisé par la date du sinistre, c'est-à-dire la date à laquelle l'assuré a émis une facture à destination de l'acheteur, à la suite d'une vente d'un produit ou d'un service, et également par la date de déclaration du sinistre, c'est-à-dire la date à laquelle l'assuré déclare auprès de son assureur une menace de sinistre concernant un acheteur donné. La première date sert à identifier la période du sinistre. Quant à la deuxième, elle permet d'identifier la période de développement.

2.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales méthodes de provisionnement parmi celles utilisées en assurance non-vie. Nous avons développé en particulier les méthodes agrégées, basées sur les triangles de développement. Parmi les méthodes déterministes, nous pouvons énumérer la méthode de Chain-Ladder et ses variantes, la méthode de Bornhuetter-Ferguson et le modèle factoriel de De Vylder. Quant aux méthodes stochastiques, en plus du modèle de Mack, nous avons présenté le modèle de Renshaw et Verrall.

Une recherche des méthodes utilisées en assurance-crédit confirme qu'en dehors du filtre de Kalman, les méthodes ci-dessus sont parmi celles les plus utilisées et notamment les méthodes de Chain-Ladder et de Bornhuetter-Ferguson.

Notre problématique étant d'explorer l'apport du filtre de Kalman pour le calcul des réserves dans le cadre des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+, nous avons souhaité effectuer un benchmark avec d'autres méthodes.

Tout d'abord, concernant les méthodes de provisionnement individuel, il est important de rappeler que nous ne disposons pas de données permettant de caractériser précisément les risques assurés ou les sinistres. En effet, les données relatives à la santé financière des entreprises ne sont pas disponibles, et seule une classe de risque attribuée par l'assureur-crédit l'est. De plus, cette classe de risque peut évoluer sans que les reportings en tiennent compte dans les temps. Les données relatives aux bilans financiers et aux aides de l'état (notamment le PGE) auraient pu être bénéfiques si elles étaient disponibles à une maille individuelle. De plus, les risques assurés pour le dispositif CAP Relais ne sont pas disponibles, seules quelques caractéristiques relatives aux sinistres sont fournies par les assureurs-crédit. Pour toutes ces raisons,

appliquer un provisionnement individuel n'est aucunement pertinent. De ce fait, nous avons écarté cette famille de méthodes de notre étude.

Ensuite, si l'on s'intéresse aux méthodes basées sur des triangles, notre problématique n'est pas une estimation stochastique des réserves. De ce fait, les méthodes stochastiques et déterministes peuvent être toutes candidates. Le modèle de Bornhuetter-Ferguson nécessitant une connaissance de la sinistralité à l'ultime pour chaque période de sinistre, ce modèle sera écarté de notre étude. Les méthodes de De Vylder et de Renshaw et Verrall étant gourmandes en calcul et nécessitant de résoudre un problème d'optimisation qui ne peut être effectué que numériquement pour la deuxième nous amène à les écarter de notre étude. Le modèle de Mack, étant une version stochastique de la méthode de Chain-Ladder, nous retenons le deuxième, surtout pour son côté de benchmark incontournable.

Connaissant la sensibilité de la méthode de Chain-Ladder aux données, nous procéderons lors du calcul des ratios de développement à la suppression de la valeur maximale et de la valeur minimale du triangle pour une période de développement donnée. Cette suppression permettra de limiter la sensibilité de la méthode aux valeurs extrêmes lors des calculs des ratios de développement. En revanche, cela ne résout pas l'impact d'une valeur aberrante, si elle est observée pendant la première période de développement, dans la complétion du triangle. En effet, la valeur complétée n'est autre que la multiplication de la valeur aberrante par le ratio calculé.

Les performances du filtre de Kalman seront donc appréciées par rapport à celles de la méthode de Chain-Ladder, conformément à la méthode présentée dans le paragraphe 2.6. Il s'agira, comme nous le verrons dans le Chapitre 4 de calculer les réserves pour plusieurs périodes de sinistre, ce qui permettra d'apprécier les performances sur un nombre important de périodes.

Chapitre 3. Filtre de Kalman pour le calcul des réserves

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, une adaptation du filtre de Kalman au calcul des réserves est présentée. Ce chapitre se veut didactique et détaille le filtre de Kalman étape par étape afin que le lecteur puisse comprendre le fonctionnement et l'adaptation à la problématique de calcul des réserves.

Trois cas sont explicités :

- Pour commencer, la méthodologie présentée ne tient compte d'aucune donnée exogène. Ce cas le plus simple permet de se familiariser avec les différentes notions et le calcul des réserves se base exclusivement sur des triangles de charges de sinistre. Ce cas simple suppose concrètement que les montants garantis en assurance-crédit n'ont pas évolué tout au long des périodes de l'étude.
- Ensuite, ce cas simple sera généralisé pour tenir compte des évolutions des montants garantis. Il s'agit donc de calculer le montant des réserves en intégrant aux triangles de charges de sinistre une donnée représentant les montants garantis dans le temps.
- Enfin, le dernier cas consiste à tenir compte de données exogènes censées refléter la conjoncture économique.

Les équations de Kalman seront adaptées à chacun de ces cas avant d'être appliquées au calcul des réserves des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+. Afin de permettre au lecteur d'apprécier les performances du filtre de Kalman, les résultats de ce dernier seront comparés avec ceux issus d'un modèle de Chain-Ladder. L'objectif n'est pas d'optimiser chacune des méthodes, mais de les utiliser en toute simplicité et de la façon la plus générique possible : par exemple, la méthode de Chain-Ladder s'utilise dans sa version standard, tout en calculant les coefficients λ_j conformément à l'équation (2-1) en supprimant pour chaque période de développement les montants extrêmes, c'est-à-dire la valeur la plus élevée et la valeur la plus faible des charges de sinistre. Quant au filtre de Kalman, aucune optimisation n'est effectuée : le modèle est utilisé d'un point de vue global sans qu'il ne s'adapte spécifiquement à chaque période de sinistre : en d'autres termes, sauf cas particuliers explicités dans la suite de ce chapitre, les matrices de covariance \mathbf{Q} et \mathbf{R} sont calculées indépendamment de la période de sinistre.

L'optimisation des méthodes est un travail fastidieux et s'applique aussi bien aux méthodes de type Chain-Ladder qu'au filtre de Kalman. Pour ce dernier, en fonction de la période étudiée, il est possible d'optimiser le calcul de telle sorte que le modèle tienne compte des observations ou des spécificités des périodes de sinistre. Le chapitre 4 présentera quelques pistes d'optimisation qu'il est possible d'effectuer notamment pour prendre en compte la qualité des données ou d'une inadéquation entre le modèle de Kalman et la réalité.

3.2 Montants garantis constants, sans donnée exogène

3.2.1 Equations

Pour rappel, le filtre de Kalman se caractérise par les deux équations :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k,$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

avec $\hat{\mathbf{x}}_k$ l'estimation de l'état et \mathbf{z}_k l'observation au même instant k .

En l'absence de toute donnée exogène, il peut être déduit que le vecteur de commande $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. Dans ce cas, les équations de Kalman deviennent :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad (3-1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3-2)$$

3.2.2 Modélisation du problème

Nous rappelons que le triangle des charges de sinistre se présente sous la forme ci-dessous avec les termes s_{ij} représentant la charge de sinistre relative à la période de sinistre i et à la période de développement j . Nous supposons que le nombre de périodes de sinistre est $p + 1$, les périodes de sinistre vont donc de $t = 0$ à $t = p$.

$$\begin{pmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & \dots & s_{0,p-1} & s_{0,p} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,p-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ s_{p-2,0} & s_{p-2,1} & s_{p-2,2} & & & \\ s_{p-1,0} & s_{p-1,1} & & & & \\ s_{p,0} & & & & & \end{pmatrix}$$

Dans les équations de Kalman, l'indice k intervient dans tous les termes, ce qui sous-entend que l'ensemble des vecteurs et matrices sont variables. Ce n'est généralement pas le cas sauf pour certains paramètres explicités plus loin dans ce chapitre. De plus, nous supposons que la dimension du problème est $p + 1$, c'est-à-dire que tous les vecteurs et toutes les matrices comportent $p + 1$ lignes.

Signification de \mathbf{z}_k

Nous supposons que \mathbf{z}_k est le vecteur des charges de sinistre observées à l'instant $t = k$. Pour un autre instant, $t = l$ avec $l \neq k$, le vecteur \mathbf{z}_l contient les différentes charges de sinistre observées à l'instant $t = l$.

Le vecteur \mathbf{z}_k comprend $p + 1$ lignes et ce quel que soit le temps k .

$$\forall k, \dim(\mathbf{z}_k) = [p + 1, 1].$$

Au temps $t = 0$, la seule observation disponible est la charge de sinistre à $t = 0$, pour la période de sinistre $t = 0$. De ce fait, le vecteur $\mathbf{z}_0 = (s_{0,0}, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Au temps $t = 1$, deux observations sont disponibles : $s_{1,0}$, c'est-à-dire la charge de sinistre à $t = 1$ pour la période de développement $t = 0$, et $s_{0,1}$ la charge de sinistre à $t = 0$, pour la période de développement $t = 1$. De ce fait, $\mathbf{z}_1 = (s_{1,0}, s_{0,1}, 0, \dots, 0)^T$.

En suivant le même raisonnement, à l'instant $t = p$,

$$\mathbf{z}_p = (s_{p,0}, s_{p-1,1}, s_{p-2,2}, \dots, s_{1,p-1}, s_{0,p})^T.$$

Ces vecteurs représentent donc les diagonales du triangle comme le schématise la Figure 6.

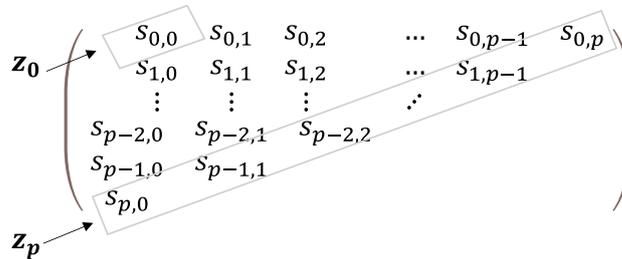


Figure 6. Représentation schématique des vecteurs \mathbf{z}_k

Signification de \mathbf{x}_k

L'état \mathbf{x}_k est la variable inconnue. Nous supposons dans notre modélisation que \mathbf{x}_k représente le vecteur de la charge de sinistre à l'ultime. Ce vecteur varie avec le temps, et pour un instant $t = l$ donné, \mathbf{x}_l contient les charges de sinistre à l'ultime pour les différentes périodes de sinistre allant de $t = 0$ à $t = l$. Par analogie avec les vecteurs \mathbf{z}_l , tous les vecteurs \mathbf{x}_l comprennent $p + 1$ lignes.

$$\forall l, \dim(\mathbf{x}_l) = [p + 1, 1].$$

A l'instant $t = 0$, seules des charges de sinistre relatives à la période de sinistre $t = 0$ sont connues. Donc les charges à l'ultime concernent uniquement la période de sinistre $t = 0$, et par conséquent, $\mathbf{x}_0 = (s_0, 0, \dots, 0, 0)^T$.

A l'instant $t = 1$, des charges de sinistre relatives aux périodes de sinistre $t = 0$ et $t = 1$ sont connues. Donc les charges à l'ultime concernent les périodes de sinistre $t = 0$ et $t = 1$, et par conséquent, $\mathbf{x}_1 = (s_1, s_0, \dots, 0, 0)^T$.

D'un point de vue générale, le vecteur \mathbf{x}_p s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_p = (s_p, s_{p-1}, \dots, s_1, s_0)^T.$$

Dans toutes les équations précédentes, $S_k = \sum_{j=0}^{\infty} s_{k,j}$. En effet, la charge de sinistre à l'ultime pour la période de sinistre $t = k$ se calcule comme étant la somme de toutes les charges de sinistre relatives à la période de sinistre $t = k$, observées pour toutes les périodes de développement allant jusqu'à l'infini. Dans les faits, il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'infini pour le calcul de la sinistralité à l'ultime. Quelques périodes peuvent suffire, cela dépend bien évidemment de la branche d'assurance étudiée.

Comme nous les verrons plus loin, et pour des questions de comparaison entre le filtre de Kalman et la méthode de Chain-Ladder, dans certains cas, le calcul des réserves s'arrête à la dernière période de développement connue, les réserves sont donc estimées partiellement.

Estimation de la matrice de transition F_k

Sachant que $x_k = F_k x_{k-1} + w_k$, et que :

$$x_k = (S_k, S_{k-1}, \dots, S_1, S_0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$x_{k-1} = (S_{k-1}, S_{k-2}, \dots, S_0, 0, \dots, 0)^T.$$

Il peut être alors aisé de déduire la forme de la matrice de transition F_k . Cette dernière satisfait l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} S_k \\ S_{k-1} \\ \vdots \\ S_1 \\ S_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = F_k \begin{pmatrix} S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ \vdots \\ S_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + w_k \text{ avec } w_k \sim N(\mathbf{0}, Q_k).$$

Une solution à ce système consiste en une matrice F_k carrée, creuse (sparse), c'est-à-dire composée majoritairement de 0, et dont quelques valeurs sont égales à 1. Cette matrice F_k est supposée indépendante du temps, c'est à dire $\forall l \leq p, m \leq p, \text{ et } l \neq m, F_l = F_m$. De plus,

$$\dim(F_k) = [p + 1, p + 1].$$

Il est possible de construire F_k de la façon suivante :

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette écriture de F_k implique qu'en faisant abstraction de l'erreur et du premier élément w_{k0} , $\hat{S}_k = S_{k-1}$. En d'autres termes, la sinistralité à l'ultime pour une période de sinistre k peut être estimée au départ comme étant égale à la sinistralité à l'ultime pour la période de sinistre $k - 1$ à laquelle nous ajoutons le terme w_{k0} . Cette hypothèse peut être considérée comme étant valable car les montants garantis sont supposés

constants dans cette section. Au fur et à mesure des observations et des itérations, le filtre de Kalman mettra à jour cette sinistralité à l'ultime.

Estimation de la matrice de covariance \mathbf{Q}_k

D'après l'équation (3-1), nous pouvons écrire

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1}.$$

En remplaçant chaque terme par sa définition,

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k,0} \\ w_{k,1} \\ w_{k,2} \\ \vdots \\ w_{k,k-1} \\ w_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k \\ S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ \vdots \\ S_1 \\ S_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ S_{k-3} \\ \vdots \\ S_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k,0} \\ w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k - S_{k-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seul le premier élément du vecteur \mathbf{w}_k est non nul, et sa valeur n'est autre que l'écart entre les charges à l'ultime S_k et S_{k-1} . Le vecteur \mathbf{w}_k varie avec le temps et pour $t = l$, avec $l \neq k$, le premier élément de \mathbf{w}_l est $S_l - S_{l-1}$.

Introduisons le vecteur \mathbf{w}_{cumul}^k comme étant la première ligne de la matrice $\mathbf{W}^k = (\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}, \dots, \mathbf{w}_1)$.

$$\mathbf{w}_{cumul}^k = (S_k - S_{k-1}, S_{k-1} - S_{k-2}, \dots, S_1 - S_0).$$

La sinistralité à l'ultime S_k étant inconnue au départ, il est possible d'utiliser soit des montants a priori de la sinistralité à l'ultime s'ils sont connus, soit les estimations issues de la méthode de Chain-Ladder par exemple. Ces dernières ne servent qu'à une estimation des éléments du vecteur \mathbf{w}_{cumul}^k .

La variance de \mathbf{w}_{cumul}^k peut être interprétée comme étant la variance du modèle. Elle peut donc être utilisée pour l'estimation des éléments de la matrice \mathbf{Q}_k . Dans l'équation (3-1), seule la première ligne est soumise à une variance, il convient alors d'estimer \mathbf{Q}_k comme étant une matrice remplie de 0 à part pour son premier élément.

Une proposition pour la matrice \mathbf{Q}_k est donc la suivante :

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} r_w^{k^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

avec $r_w^{k^2} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (w_{cumul_i}^k - \overline{w_{cumul}^k})^2$,

et $\overline{w_{cumul}^k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_{cumul_i}^k$.

La matrice \mathbf{Q}_k se trouve donc dépendante du temps car à chaque période $t = k$ correspond une nouvelle estimation de la variance $r_w^{k^2}$. L'application du filtre de Kalman aux dispositifs CAP a permis de comparer les performances en optant pour une matrice \mathbf{Q}_k dépendante du temps par rapport à une matrice constante, dont le terme $r_w^{k^2}$ est calculé comme étant la variance correspondant à $t = k = p$. Il s'est avéré qu'une matrice \mathbf{Q}_k constante rend le calcul des réserves plus stable et plus fiable que celui obtenu avec une matrice dépendante du temps. De ce fait, l'équation que nous retenons pour calculer le premier élément de \mathbf{Q}_k est la suivante :

$$r_w^{p^2} = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (w_{cumul_i}^p - \overline{w_{cumul}^p})^2,$$

avec $\overline{w_{cumul}^p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p w_{cumul_i}^p$,

et $w_{cumul}^p = (\hat{S}_p - \hat{S}_{p-1}, \hat{S}_{p-1} - \hat{S}_{p-2}, \dots, \hat{S}_1 - \hat{S}_0)$.

Estimation de la matrice d'observation \mathbf{H}_k

D'après la définition du filtre de Kalman,

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \text{ avec } \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k),$$

Nous supposons la matrice \mathbf{H}_k diagonale, carrée et indépendante du temps, c'est à dire $\forall l \leq p, m \leq p, \text{ et } l \neq m, \mathbf{H}_l = \mathbf{H}_m$. De plus,

$$\dim(\mathbf{H}_k) = [p + 1, p + 1].$$

Si l'on fait abstraction du terme relatif à l'erreur \mathbf{v}_k , la relation ci-dessus devient $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$. En remplaçant chaque terme par sa définition, il est aisé d'estimer les différents éléments de la matrice \mathbf{H}_k .

A titre illustratif, et afin de permettre au lecteur de comprendre le raisonnement, l'exemple ci-dessous propose une estimation pour $k = p = 4$. Les calculs et les résultats peuvent être facilement généralisables pour d'autres valeurs de k ou de p .

Le vecteur \mathbf{v}_k peut donc être aisément calculé, tous les autres éléments de l'équation ci-dessus sont connus.

Ensuite, l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v}_l, l \leq p$ sont regroupés pour construire la matrice

$$\mathbf{V}_{cumul} = (\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p-1}, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0).$$

Cette matrice contient les résidus du modèle $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, k \leq p$. La variance r^2 de l'ensemble de ces résidus peut servir d'estimateur aux éléments de la matrice \mathbf{R}_k .

Nous supposons cette dernière diagonale, et que l'ensemble des périodes de sinistre sont caractérisés par la même variance r^2 . Comme nous le verrons plus tard, les performances du filtre de Kalman quand il est appliqué à la problématique de calcul des réserves en assurance-crédit valident la pertinence de ce choix.

$$\mathbf{R}_k = r^2 \mathbf{I} = r^2 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$r^2 = \frac{1}{\text{card}(\mathbf{V}_{cumul})-1} \sum_i^{\text{card}(\mathbf{V}_{cumul})} (\mathbf{V}_{cumul_i} - \bar{\mathbf{V}})^2, \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{\text{card}(\mathbf{V}_{cumul})} \sum_i^{\text{card}(\mathbf{V}_{cumul})} \mathbf{V}_{cumul_i}.$$

Impact du choix de \mathbf{Q}_k et de \mathbf{R}_k sur les résultats

Les performances du filtre de Kalman dépendent fortement des matrices de covariance \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k . Compte tenu du peu de données qui sont à disposition comme nous le verrons plus loin (le nombre de périodes de sinistre vaut 16 pour le dispositif CAP Relais, et 11 pour les autres dispositifs CAP), il fallait trouver une méthode permettant d'estimer ces matrices sans opter pour des méthodes de type ALS (voir section 2.5.2).

L'estimation la plus naturelle de la covariance se fait à partir des données. Certes utiliser un ensemble restreint de données peut conduire à une estimation peu fiable de la covariance et avoir un impact négatif sur les résultats du filtre de Kalman. Néanmoins, les performances observées lors du calcul des réserves montrent qu'une telle approche suffit pour la résolution du problème. Comme nous le verrons plus loin, ces mêmes matrices de covariance serviront de levier permettant d'optimiser les performances.

3.3 Montants garantis évolutifs, sans donnée exogène

3.3.1 Equations

Il est naturel que les montants garantis évoluent dans le temps (évolution des besoins du fournisseur, évolution du risque, c'est à dire baisse ou augmentation de la garantie, etc.). Cette évolution rend difficile voire impossible la comparaison de la charge brute de sinistre parmi les différentes périodes de sinistre. Pour pallier ce problème, la matrice \mathbf{F}_k sert de support pour tenir compte de l'évolution des montants garantis dans le temps. Les équations du filtre de Kalman et la modélisation restent les mêmes que celles de la section 3.2.

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k,$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

Dans le cas où les montants garantis évoluent avec le temps, il est possible de traiter le problème de différentes façons. Nous en proposons deux : la première basée sur la modélisation des ratios sinistres sur garanties, et la deuxième basée sur la modélisation des charges de sinistre. Il convient avant tout d'introduire un vecteur relatif aux garanties que nous appelons \mathbf{g} , et dont les éléments g_i sont les montants des garanties en cours à chaque période de sinistre i .

$$\mathbf{g} = (g_p, g_{p-1}, \dots, g_1, g_0)^T.$$

3.3.2 Modélisation des ratios sinistres sur garanties

La méthode la plus intuitive consiste à transformer la variable d'état et les observations. La première, au lieu de représenter les charges de sinistre à l'ultime, désigne désormais le rapport entre les charges de sinistre à l'ultime et le montant des garanties, tous les deux relatifs à la même période de sinistre. Quant aux observations, elles représentent désormais le ratio entre la charge de sinistre et le montant des garanties.

De ce fait, les vecteurs \mathbf{z}_k et \mathbf{x}_k s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{z}_k = \left(\frac{S_{k,0}}{g_k}, \frac{S_{k-1,1}}{g_{k-1}}, \dots, \frac{S_{1,k-1}}{g_1}, \frac{S_{0,k}}{g_0}, 0, \dots, 0 \right)^T,$$

et

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{S_k}{g_k}, \frac{S_{k-1}}{g_{k-1}}, \dots, \frac{S_1}{g_1}, \frac{S_0}{g_0}, 0, \dots, 0 \right)^T.$$

Toutes les autres équations et la méthodologie d'estimation des différentes matrices restent inchangées.

3.3.3 Modélisation des charges de sinistre

Une autre alternative consiste à ne pas modifier la signification des vecteurs \mathbf{z}_k et \mathbf{x}_k par rapport à la section 3.2, mais à adapter la matrice \mathbf{F}_k .

La dimension de l'ensemble des vecteurs reste égale à $p + 1$.

Le vecteur \mathbf{z}_k reste le même que précédemment, c'est-à-dire le vecteur des charges de sinistre observées à l'instant $t = k$.

L'état \mathbf{x}_k représente toujours le vecteur des charges de sinistre à l'ultime.

Les estimations des matrices \mathbf{H}_k et \mathbf{R}_k restent inchangées. En revanche, la matrice de transition \mathbf{F}_k et la matrice de covariance \mathbf{Q}_k évoluent pour tenir compte de l'évolution des garanties parmi les différentes périodes de sinistre.

Estimation de la matrice de transition \mathbf{F}_k

La matrice \mathbf{F}_k reste carrée et creuse (sparse), c'est-à-dire composée majoritairement de 0. Cette matrice conserve la même forme et le même contenu que celle de la section 3.2. En revanche, elle dépend dorénavant du temps car les montants garantis en dépendent également.

Une proposition pour l'écriture de la matrice \mathbf{F}_k est la suivante : seul le premier élément de la matrice, c'est-à-dire la valeur $F_{0,0}$, évolue :

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} F_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, l'écriture $S_k = S_{k-1} + w_{k,0}$ ne peut être pressentie comme étant valable que si les montants garantis aux instants $t = k$ et $t = k - 1$ sont équivalents. En effet, il est naturel de penser qu'un doublement des montants garantis puisse engendrer un doublement de la charge de sinistre à l'ultime, et de ce fait, l'écriture la plus logique est, en faisant abstraction du terme $w_{k,0}$:

$$S_k = \frac{g_k}{g_{k-1}} S_{k-1} \Leftrightarrow F_{0,0} = \frac{g_k}{g_{k-1}}.$$

Cette écriture est également équivalente à :

$$\frac{S_k}{g_k} = \frac{S_{k-1}}{g_{k-1}}.$$

Elle rappelle la modélisation des ratios sinistres sur garanties du paragraphe précédent, ou plus généralement les ratios sinistres sur primes (ou S/P) souvent utilisés dans un contexte de primes qui évoluent dans le temps. Raisonner en termes de ratio, équivalent dans notre cas à intégrer le rapport $\frac{g_k}{g_{k-1}}$ dans la matrice \mathbf{F}_k , permet de comparer les différentes périodes de sinistre.

Du fait de la prise en compte des montants garantis, la matrice \mathbf{F}_k n'est plus constante. Elle varie donc avec le temps. En effet, à l'instant $t = l$, la matrice \mathbf{F}_l s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} \frac{g_l}{g_{l-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Néanmoins, toutes les matrices \mathbf{F}_l ont la même dimension.

$$\forall l \leq p, \dim(\mathbf{F}_l) = [p + 1, p + 1].$$

Estimation de la matrice de covariance \mathbf{Q}_k

En suivant le même raisonnement que celui de la section 3.2, et en remplaçant chaque terme par sa définition,

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k,0} \\ w_{k,1} \\ w_{k,2} \\ \vdots \\ w_{k,k-1} \\ w_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k \\ S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ \vdots \\ S_1 \\ S_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{g_k}{g_{k-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ S_{k-3} \\ \vdots \\ S_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k,0} \\ w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k - \frac{g_k}{g_{k-1}} S_{k-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La sinistralité à l'ultime S_k étant inconnue, nous pouvons la remplacer par l'estimation issue de la méthode de Chain-Ladder. Il est alors possible de calculer tous les éléments du vecteur \mathbf{w}_{cumul}^k , construit comme étant la première ligne de la matrice $\mathbf{W}^k = (\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}, \dots, \mathbf{w}_1)$.

$$\mathbf{w}_{cumul}^k = \left(\hat{S}_k - \frac{g_k}{g_{k-1}} \hat{S}_{k-1}, \hat{S}_{k-1} - \frac{g_{k-1}}{g_{k-2}} \hat{S}_{k-2}, \dots, \hat{S}_1 - \frac{g_1}{g_0} \hat{S}_0 \right).$$

En suivant le même raisonnement que celui de la section 3.2.2, il est possible de rendre la matrice \mathbf{Q}_k indépendante du temps et de calculer le vecteur :

$$\mathbf{w}_{cumul}^p = \left(\hat{S}_p - \frac{g_p}{g_{p-1}} \hat{S}_{p-1}, \hat{S}_{p-1} - \frac{g_{p-1}}{g_{p-2}} \hat{S}_{p-2}, \dots, \hat{S}_1 - \frac{g_1}{g_0} \hat{S}_0 \right).$$

La variance de w_{cumul}^p peut être interprétée comme étant la variance du modèle. Elle peut donc être utilisée pour l'estimation des éléments de la matrice Q_k . Dans l'équation (3-1), seule la première ligne est soumise à une variance, il convient alors d'estimer Q_k comme étant une matrice remplie de 0 à part le premier élément.

Une proposition pour la matrice Q_k est donc la suivante :

$$Q_k = \begin{pmatrix} r_w^{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } r_w^{p^2} = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (w_{cumul_i}^p - \overline{w_{cumul}^p})^2,$$

$$\text{et } \overline{w_{cumul}^p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p w_{cumul_i}^p$$

Il convient de noter que cette forme de la matrice Q_k n'est pertinente que si l'amplitude de variation des montants garantis est peu importante. En effet, pour comprendre le phénomène, prenons un exemple particulier où le vecteur des charges de sinistre à l'ultime est $\mathbf{s} = (9, 10, 90, 100)^T$ et que celui des montants garantis est $\mathbf{g} = (10, 10, 100, 100)^T$. Dans cet exemple, $w_{cumul}^p = (1, -10, 10)$, ce qui a pour conséquence une augmentation de la variance. En effet, le facteur 10 entre le premier et le deuxième élément n'est dû qu'à la variation des montants garantis entre $t = 1$ et $t = 2$ et n'est pas en rapport avec la variance du modèle.

Afin de pallier ce problème, une alternative est de raisonner en termes de variance du rapport $\frac{s}{g}$. En reprenant le même exemple numérique, $w_{cumul}^p = (1, -1, 1)$.

Raisonner en termes de variance du rapport $\frac{s}{g}$ revient à rendre la matrice Q_k dépendante du temps. En effet,

$$w_{cumul}^p = \left(\frac{\hat{S}_p}{g_p} - \frac{\hat{S}_{p-1}}{g_{p-1}}, \frac{\hat{S}_{p-1}}{g_{p-1}} - \frac{\hat{S}_{p-2}}{g_{p-2}}, \dots, \frac{\hat{S}_1}{g_1} - \frac{\hat{S}_0}{g_0} \right).$$

Et par conséquent, la variance de ce vecteur n'aura pas la même unité que celles des termes de l'équation (3-1), c'est-à-dire des euros. Il conviendra alors de multiplier la variance par le carré des montants garantis, en l'occurrence :

$$Q_l = \begin{pmatrix} r_w^{l^2} g_l^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \forall 0 \leq l \leq p,$$

$$\text{avec } r_w^{l^2} = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (w_{cumul_i}^l - \overline{w_{cumul}^l})^2,$$

$$\text{et } \overline{w_{cumul}^l} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l w_{cumul_i}^l.$$

Dans cette section, nous avons montré qu'une estimation de la matrice de covariance Q peut se faire de deux façons : soit en la maintenant constante quelle que soit la période de sinistre, ce qui offre l'avantage d'un modèle de Kalman stable, dans lequel la variance ne dépend pas du temps ; soit en la rendant dépendante du temps, en d'autres termes des montants garantis.

Nous favorisons une approche générique avec un modèle de Kalman stable, dont les paramètres n'évoluent pas avec les périodes de sinistre (en pratique, intervenir sur les paramètres permettra d'optimiser les résultats dans certains cas comme nous le verrons dans le Chapitre 4). De ce fait :

- Quand la variation des montants garantis est faible, nous recommandons de modéliser les charges de sinistre avec une matrice de covariance constante
- En cas de variation importante des montants garantis, nous recommandons d'utiliser une solution « naturelle », consistant à modéliser le ratio sinistres sur garanties.

3.4 Prise en compte de la conjoncture économique

Dans ce paragraphe, il s'agit d'intégrer la conjoncture économique dans le filtre de Kalman. En effet, la conjoncture économique a un impact sur la sinistralité en assurance-crédit, car elle influence directement le nombre de défaillances d'entreprises.

3.4.1 Equations

Le terme relatif à la conjoncture économique est $B_k u_k$. Ce terme vient modifier l'estimation de l'état x_k en tenant compte de données exogènes.

Pour rappel, l'équation d'état du filtre de Kalman s'écrivant :

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k, \quad (3-3)$$

Il convient de choisir une matrice B_k et un vecteur u_k respectant les dimensions suivantes :

$$\forall l \leq p, \dim(B_l) = [p + 1, p], \dim(u_l) = [p, 1].$$

3.4.2 Modélisation du problème

La modélisation reste identique à celle présentée aux sections 3.2 et 3.3. Le vecteur z_k est supposé être le vecteur des charges de sinistre observées à l'instant $t = k$. Quant à l'état x_k , il représente le vecteur des charges de sinistre à l'ultime.

Le seul changement à opérer dans la modélisation concerne la matrice de covariance Q_k . Les autres grandeurs restent équivalentes à celles présentées précédemment.

Matrice de transition F_k

Sachant que $x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k$, il est possible de modifier le contenu de F_k pour tenir compte de l'ajout de données exogènes, u_k .

Néanmoins, il nous a semblé plus pertinent de maintenir la matrice F_k telle qu'elle est définie dans les sections précédentes, et de ne faire intervenir le terme $B_k u_k$ que pour le calcul de la sinistralité à l'ultime S_k en fonction de S_{k-1} . En effet, cela est tout à fait naturel de penser que la conjoncture économique vienne influencer l'estimation de la sinistralité à l'ultime. De ce fait, nous proposons une matrice B_k dont tous les éléments sont égaux à 0 sauf ceux de la première ligne. Ceci limite l'impact du terme $B_k u_k$ à la seule estimation de S_k en fonction de S_{k-1} .

Dans le cas où les montants garantis sont constants, nous maintenons la matrice $F_k = F_l, 0 \leq l \leq p$, équivalente à celle proposée précédemment.

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sachant que :

$$x_k = (S_k, S_{k-1}, \dots, S_1, S_0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$x_{k-1} = (S_{k-1}, S_{k-2}, \dots, S_0, 0, \dots, 0)^T$$

Nous pouvons déduire que $\hat{S}_k = S_{k-1} + (B_k u_k)_0$, où $(B_k u_k)_0$ est le premier élément du vecteur $B_k u_k$. En d'autres termes, la sinistralité à l'ultime pour une période de sinistre k peut être estimée au départ comme étant égale à la sinistralité à l'ultime pour la période de sinistre $k - 1$ à laquelle nous ajoutons un terme lié à la conjoncture économique. Le filtre de Kalman permettra ensuite de mettre à jour ce montant à l'ultime en fonction des observations.

Dans le cas où les montants garantis sont évolutifs, et conformément à la modélisation de la section 3.3,

$$F_{0,0} = \frac{g_k}{g_{k-1}}, \text{ et } \hat{S}_k = \frac{g_k}{g_{k-1}} S_{k-1} + (B_k u_k)_0.$$

Estimation de la matrice de covariance Q_k

Dans ce paragraphe, la matrice F_k est considérée dans sa forme la plus générale, c'est à dire quand les montants garantis sont évolutifs. D'après l'équation (3-3), nous pouvons écrire

$$w_k = x_k - F_k x_{k-1} - B_k u_k.$$

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k,0} \\ w_{k,1} \\ w_{k,2} \\ \vdots \\ w_{k,k-1} \\ w_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k \\ S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ \vdots \\ S_1 \\ S_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{g_k}{g_{k-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{g_k}{g_{k-1}} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ S_{k-3} \\ \vdots \\ S_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,p-1} & b_{0,p} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k,1} \\ u_{k,2} \\ \vdots \\ u_{k,p-1} \\ u_{k,p} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k,0} \\ w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k - \frac{g_k}{g_{k-1}} S_{k-1} - \sum_{n=0}^p b_{0,n} u_{k,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seul le premier élément du vecteur \mathbf{w}_k est non nul, et sa valeur n'est autre que l'écart entre l'estimation de la valeur à l'ultime de S_k et celle de S_{k-1} pondérée par le rapport entre les montants garantis. Le vecteur \mathbf{w}_k varie avec le temps et pour $t = l$, avec $l \leq p$, le premier élément de \mathbf{w}_l est $S_l - S_{l-1} - \sum_{n=0}^p b_{0,n} u_{l,n}$.

La sinistralité à l'ultime S_k étant inconnue, nous pouvons la remplacer par l'estimation issue de la méthode de Chain-Ladder. Il est alors possible de calculer tous les éléments du vecteur \mathbf{w}_{cumul}^k , construit comme étant la première ligne de la matrice $\mathbf{W}^k = (\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}, \dots, \mathbf{w}_1)$.

$$\mathbf{w}_{cumul}^k = \begin{pmatrix} \hat{S}_k - \frac{g_k}{g_{k-1}} \hat{S}_{k-1} - \sum_{n=0}^p b_{0,n} u_{k,n} \\ \hat{S}_{k-1} - \frac{g_{k-1}}{g_{k-2}} \hat{S}_{k-2} - \sum_{n=0}^p b_{0,n} u_{k-1,n} \\ \dots \\ \hat{S}_1 - \frac{g_1}{g_0} \hat{S}_0 - \sum_{n=0}^p b_{0,n} u_{1,n} \end{pmatrix}.$$

En suivant le même raisonnement que celui de la section 3.2.2, nous pouvons calculer la variance $r_w^{p^2}$ comme étant la variance du vecteur \mathbf{w}_{cumul}^p , elle peut bien s'interpréter comme étant la variance du modèle.

Une proposition pour la matrice \mathbf{Q}_k est donc la suivante :

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} r_w^{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

avec $r_w^{p^2} = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (w_{cumul_i}^p - \overline{w_{cumul}^p})^2$,

et $\overline{w_{cumul}^p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p w_{cumul_i}^p$.

3.5 Formule de calcul des réserves

Pour rappel, et afin que la comparaison puisse se faire avec la méthode de Chain-ladder, les réserves se calculent jusqu'à la période de développement $j = i$ pour l'étude d'une période de sinistre i . Il s'agit donc de réserves « partielles » car elles ne couvrent pas les périodes de développement jusqu'à l'infini.

Il existe 2 façons de comptabiliser les réserves en sortie du filtre de Kalman :

- En sommant les estimations des charges de sinistre $\hat{s}_{i,j}$ réalisées par le filtre de Kalman. La formule d'estimation des réserves s'écrit dans ce cas

$$\hat{R} = \sum_{l=1}^i \hat{R}_l = \sum_{l=1}^i \sum_{j=i-(l-1)}^i \hat{s}_{l,j}. \quad (3-4)$$

- En sommant les estimations des charges de sinistre à l'ultime \hat{S}_i , réalisées par le filtre de Kalman, et puis en ôtant de cette somme le cumul des charges de sinistre connues jusqu'à la période de sinistre i , que nous dénotons $s_{l,j}$.

$$\hat{R} = \sum_{l=0}^i \hat{S}_l - \sum_{l=0}^i \sum_{j=0}^{i-l} s_{l,j}. \quad (3-5)$$

Avec :

- \hat{S}_l l'estimation par le filtre de Kalman de la sinistralité à l'ultime pour la période de sinistre $t = l$. Cette estimation se lit dans le vecteur d'état du filtre de Kalman $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{S}_i, \hat{S}_{i-1}, \dots, \hat{S}_l, \dots, \hat{S}_1, \hat{S}_0)$
- Les montants $s_{l,j}, l = 0, \dots, i$ et $j = 0, \dots, i - l$ représentent les montants de charges de sinistre connues jusqu'à la période de sinistre i
- Les estimations $\hat{s}_{l,j}, l = 1, \dots, i$ et $j = i - (l - 1), \dots, i$ représentent les montants de charges de sinistre estimées par le filtre de Kalman

En théorie, dans le cas d'une modélisation parfaite, les équations (3-4) et (3-5) donnent la même estimation des réserves. En réalité, les estimations diffèrent, et les écarts sont d'autant plus importants que l'estimation de la matrice H_k s'écarte de la réalité. Afin de ne pas induire une erreur supplémentaire due à l'estimation de cette dernière, et étant donné que notre construction du filtre de Kalman est réalisée dans le but de calculer la sinistralité à l'ultime (vecteur d'état), nous optons pour l'estimation à l'aide de l'équation (3-5).

Après avoir présenté les adaptations du filtre de Kalman pour le calcul des réserves et la formule permettant de le réaliser, la section suivante synthétise l'algorithme qui sera appliqué dans le Chapitre 4.

3.6 Algorithme du filtre de Kalman pour le calcul des réserves

Pour rappel, le filtre de Kalman consiste à prédire une observation et à corriger le modèle une fois l'observation réalisée, en accordant plus ou moins de confiance au modèle et à l'observation.

Tout d'abord, les différents paramètres du filtre de Kalman sont à estimer, à savoir la matrice de transition F , la matrice d'observation H et les matrices de covariance Q et R .

Ensuite, si le problème comporte $i + 1$ périodes de sinistre, il s'agit d'itérer ($i + 1$) fois en effectuant une prédiction par le filtre de Kalman et puis en comparant cette prédiction avec l'observation effectuée. L'écart entre les deux grandeurs sert à mettre à jour le filtre de Kalman.

Enfin, à l'issue de la dernière itération, les réserves peuvent être calculées grâce au vecteur d'état.

La synthèse de ces différentes étapes pour calculer les réserves jusqu'à la période de sinistre i est donc la suivante :

Initialisation : calcul des paramètres F , H , R et Q

Itération 0 à i :

- *Prédiction par filtre de Kalman*
- *Mise à jour du filtre en tenant compte de l'écart entre l'estimation et l'observation*

Extraction du vecteur d'état

Calcul du montant des réserves

3.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons adapté les équations de Kalman à la problématique de calcul des réserves, tout en définissant le vecteur d'état et les observations.

Le vecteur d'état est inconnu et est relatif à la sinistralité à l'ultime, alors que les observations concernent les charges de sinistre observées à un instant donné k . Cette définition des deux vecteurs s'est accompagnée par le calcul des autres grandeurs caractérisant le filtre de Kalman, à savoir la matrice de transition F_k , la matrice des observations H_k et les deux matrices de covariance Q_k et R_k .

Trois cas d'usage pour le calcul des réserves des dispositifs CAP ont été explicités, et la résolution du problème a été adaptée pour en tenir compte. Dans le premier cas, les montants garantis sont supposés constants, et aucune donnée exogène n'a été introduite dans la modélisation. Dans le second cas, les montants garantis sont supposés évolutifs, ce qui induit du changement dans l'équation d'état du filtre de Kalman. Enfin, nous avons proposé une adaptation du filtre de Kalman pour tenir compte de la conjoncture économique. L'ensemble des méthodes présentées ont été implémentées sous Python.

Le chapitre suivant est consacré à l'application du filtre de Kalman pour le calcul des réserves des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+, en distinguant les trois cas précédemment identifiés

Chapitre 4. Application aux dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+

4.1 Introduction

Le chapitre présent est consacré aux résultats du filtre de Kalman appliqué à la problématique de calcul des réserves pour les dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+.

Après une première application dans le cas de montants garantis constants, cas qui concerne les assureurs-crédit ayant souscrit le dispositif CAP Relais en 2020 et 2021, nous présentons les performances du filtre de Kalman dans le cas des montants garantis évolutifs avant d'effectuer une analyse de sensibilité des résultats aux matrices de covariance et d'en déduire des pistes d'optimisation des résultats. Enfin, nous étudions l'apport de la conjoncture économique pour l'estimation des réserves dans le cadre du dispositif CAP Relais avant de calculer ces dernières jusqu'à la fin du dispositif, et ce quel que soit l'historique des périodes de sinistre.

4.2 CAP Relais avec montants garantis constants

4.2.1 Introduction

Dans le cadre du dispositif CAP Relais, les assureurs se sont engagés à maintenir l'encours global de leurs engagements, pour certaines classes de risque, pendant une partie du dispositif, tel qu'il était en mars 2020. Pour rappel, CAP Relais a été souscrit par cinq assureurs en 2020 et par quatre assureurs en 2021. Seul un seul assureur n'a pas souscrit le traité de réassurance en 2021. De ce fait, en excluant cet assureur de cette étude, nous pouvons affirmer que les montants garantis sont restés constants tout au long de la période. En réalité, il existe une légère évolution des montants garantis dans le temps mais qui reste inférieure à 2% du montant initial. Cette faible évolution ne remet pas en cause l'hypothèse de constance des montants garantis.

Le taux de quote-part pour la réassurance ayant été de 75% en 2020 et de 20% en 2021, et afin de permettre l'exploitation des données, les triangles de charges de sinistre utilisés ci-dessous comprennent des montants à 100%, donc bruts de réassurance. De la sorte, il est possible de comparer des montants de sinistres relatifs à 2020 avec ceux relatifs à 2021.

4.2.2 Périodes de sinistre et cadences de développement

Pour des raisons de confidentialité, et pour éviter que certaines données relatives à un assureur-crédit particulier ne soient déduites en comparaison avec les données des sections suivantes, seules quelques données agrégées sont communiquées. Ceci permet au lecteur d'avoir un ordre de grandeur des enjeux et d'apprécier les performances des méthodes utilisées.

Nous considérons une périodicité mensuelle des sinistres et des développements : les périodes de sinistre vont de 0 à 15 (cela correspond à des périodes mensuelles allant de mars 2020 à juin 2021), et les périodes de développement vont de 0 à 29 (cela correspond donc à une vision à juillet 2022). Depuis le premier trimestre 2022, le montant des paiements de sinistre n'évolue que très légèrement et celui des provisions de sinistre faites par les assureurs-crédit baisse de façon importante. Nous pouvons alors supposer que les charges cumulées de sinistre à fin juillet 2022 représentent à quelques pourcents près le montant à l'ultime de la sinistralité au titre de CAP Relais. Dans la suite de ce paragraphe, le terme « à l'ultime » est supposé équivalent à « au 31 juillet 2022 ».

Comparaison des périodes de sinistre

Le Tableau 1 représente la charge de sinistre à l'ultime pour chacune des périodes de sinistre.

Nous observons que toutes les périodes contribuent à la sinistralité totale sans que certaines périodes ne se démarquent, à l'exception de la première et de la dernière. En effet, concernant la première période, elle concerne le mois de mars 2020, et le montant de la sinistralité à l'ultime est le plus faible parmi ceux relatifs aux autres périodes. Ce constat n'est pas étonnant car le dispositif CAP a démarré le 15 mars 2020, ce qui veut dire que la première période est la plus courte, pouvant expliquer cette sinistralité plus faible comparée aux autres périodes.

En revanche, la dernière période (15) est celle dont la sinistralité est la plus élevée. Elle concerne le mois de juin 2021. Cette période coïncide avec la hausse du nombre de défaillances comme nous le verrons plus loin, ce qui pourrait expliquer cette hausse de la sinistralité.

Période de sinistre	Charge de sinistre à l'ultime (en €)	Charge de sinistre à l'ultime (en %)
0	2 888 980	3,7%
1	3 131 697	4,0%
2	3 883 160	5,0%
3	5 666 603	7,3%
4	5 312 481	6,8%
5	3 827 444	4,9%
6	4 959 382	6,4%
7	5 214 722	6,7%
8	5 216 186	6,7%
9	4 766 848	6,1%
10	4 034 922	5,2%
11	4 557 311	5,9%
12	5 879 314	7,6%
13	5 292 534	6,8%
14	5 428 621	7,0%
15	7 514 684	9,7%
TOTAL	77 574 889	100%

Tableau 1. Evolution des charges de sinistre à l'ultime, en euros et en pourcents, sur la durée du dispositif CAP Relais

La Figure 7 représente la cadence des charges de sinistre par rapport à la charge à l'ultime pour chaque période de sinistre. Au global, à quelques exceptions près, toutes les périodes de sinistre ont des cadences similaires, sous forme de « cloche », avec un maximum autour des périodes de développement 4 à 5. Ce constat est conforme aux attentes : en effet, dans la plupart des cas, les délais de paiement accordés en assurance-crédit vont de 60 à 240 jours, correspondant aux périodes 2 à 7, avec une moyenne autour de 120 jours, c'est-à-dire la période 4. Il n'est donc pas étonnant d'observer cette forme de courbe. En dehors des périodes 2 à 7, la sinistralité mesurée reste relativement faible à l'exception de quelques périodes de sinistre.

Tout d'abord la période 8 (correspondant en réalité au mois de novembre 2020) est caractérisée par une sinistralité mesurée pour la période de développement 0 dépassant 20% de la sinistralité à l'ultime. En d'autres termes, 20% des sinistres (en charge) ont été déclarés le mois de l'émission des factures, alors que la moyenne des autres périodes de sinistre est inférieure à 1% du montant à l'ultime. En novembre 2020, la France entrait dans un deuxième confinement et c'est vraisemblablement ce qui peut expliquer cette différence de comportement par rapport aux autres périodes de sinistre.

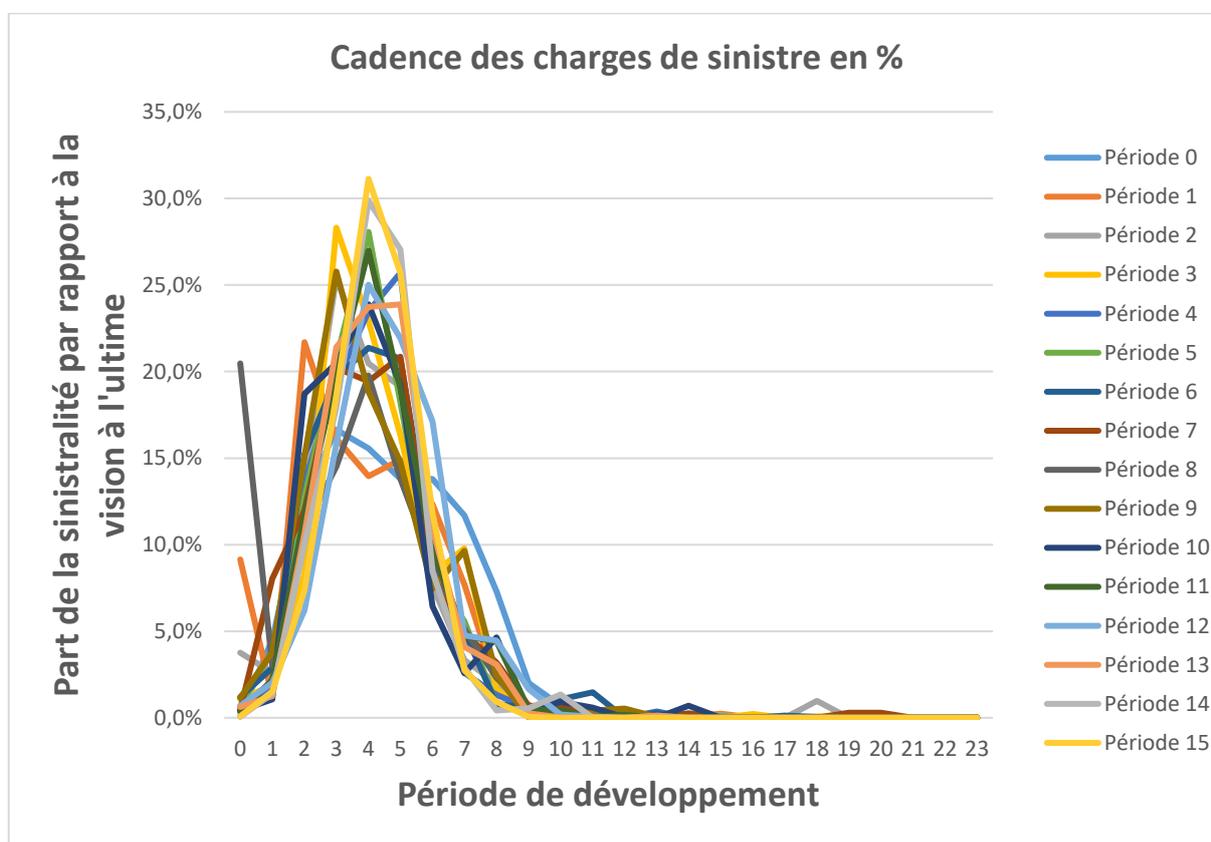


Figure 7. Cadence des charges de sinistre par période de sinistre : l'axe des abscisses représente la période de développement, et celui des ordonnées représente la part en % de la sinistralité à l'ultime

Les périodes 2 et 1 sont caractérisées également par un taux de sinistre au premier mois de développement supérieur à la moyenne (9% et 4% respectivement). Cela concerne les mois de mai et d'avril 2020, et donc durant la phase du premier confinement qui a pris fin progressivement à partir de début juin 2020. Par ailleurs, comme le démontre le Tableau 1, ces 2 périodes de sinistre sont caractérisées par une sinistralité à l'ultime parmi les plus faibles.

Une autre période de sinistre dont le développement est atypique est la période 0, c'est-à-dire celle relative à mars 2020 et au début des dispositifs. Cette période se caractérise par un développement plus long que celui des autres périodes de sinistre. En effet, les taux observés pour les périodes de développement 7, 8 et 9 sont plus élevés que ceux relevés pour les autres périodes de sinistre.

En résumé, la cadence des charges de sinistre semble avoir une forme plutôt homogène pour toutes les périodes de sinistre à l'exception de celles relatives au premier confinement (de mars à mai 2020) et au deuxième confinement (novembre 2020). La cadence observée pour le troisième confinement (avril 2021, période 13) semble à première vue moins différente que celle de la majorité des périodes de sinistre. En réalité, comme nous le verrons dans la section 4.2.4, des différences existent bel et bien entre les cadences des périodes antérieures à la période 12 et celles qui lui sont postérieures.

4.2.3 Vérification des hypothèses de Chain-ladder

L'utilisation d'une méthode de type Chain-Ladder nécessite de vérifier en premier que les périodes de sinistre sont indépendantes. Cette hypothèse s'écrit sous la forme :

$$\forall i \neq k, (C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,J}) \text{ et } (C_{k,0}, C_{k,1}, \dots, C_{k,J}) \text{ sont indépendants}$$

Dans la pratique, cette hypothèse est souvent vérifiée sauf par exemple dans le cas où un changement de politique de gestion des sinistres intervient, ou bien dans le cas où l'inflation peut rendre les exercices dépendants. Dans notre étude, cette hypothèse d'indépendance est validée conformément à la méthode présentée dans le mémoire d'actuariat de Guillaumin en 2008 [18], avec une valeur p très inférieure à 5%.

L'hypothèse de linéarité des développements a pu être contrôlée de façon visuelle. Pour rappel, il s'agit de tester si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J - 1, E[C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j}.$$

La Figure 8 montre que cette hypothèse est valide à partir du passage de la période de développement 3 à la période de développement 4, et que pour les périodes antérieures, la relation linéaire n'est pas vérifiée. Ceci implique que pour les premières périodes de développement, les méthodes de type Chain-Ladder ne sont pas pertinentes. Néanmoins, la sinistralité relative à ces périodes reste relativement faible comparée à celle des autres périodes. De plus, étant donné que la méthode Chain-Ladder est largement utilisée au sein de l'assurance-crédit, et qu'elle sert de benchmark avec le filtre de Kalman, nous décidons de l'appliquer pour le calcul des réserves au titre du dispositif CAP Relais.

4.2.4 Résultats

Le calcul des réserves est effectué d'une part par la méthode de Chain-Ladder et d'autre part par le filtre de Kalman. Pour rappel, dans le premier cas, le calcul se fait en supprimant les valeurs extrêmes (valeurs maximale et minimale des charges de sinistre) par période de développement. De cette façon, l'impact des observations aberrantes est minimisé pour le calcul des ratios de développement.

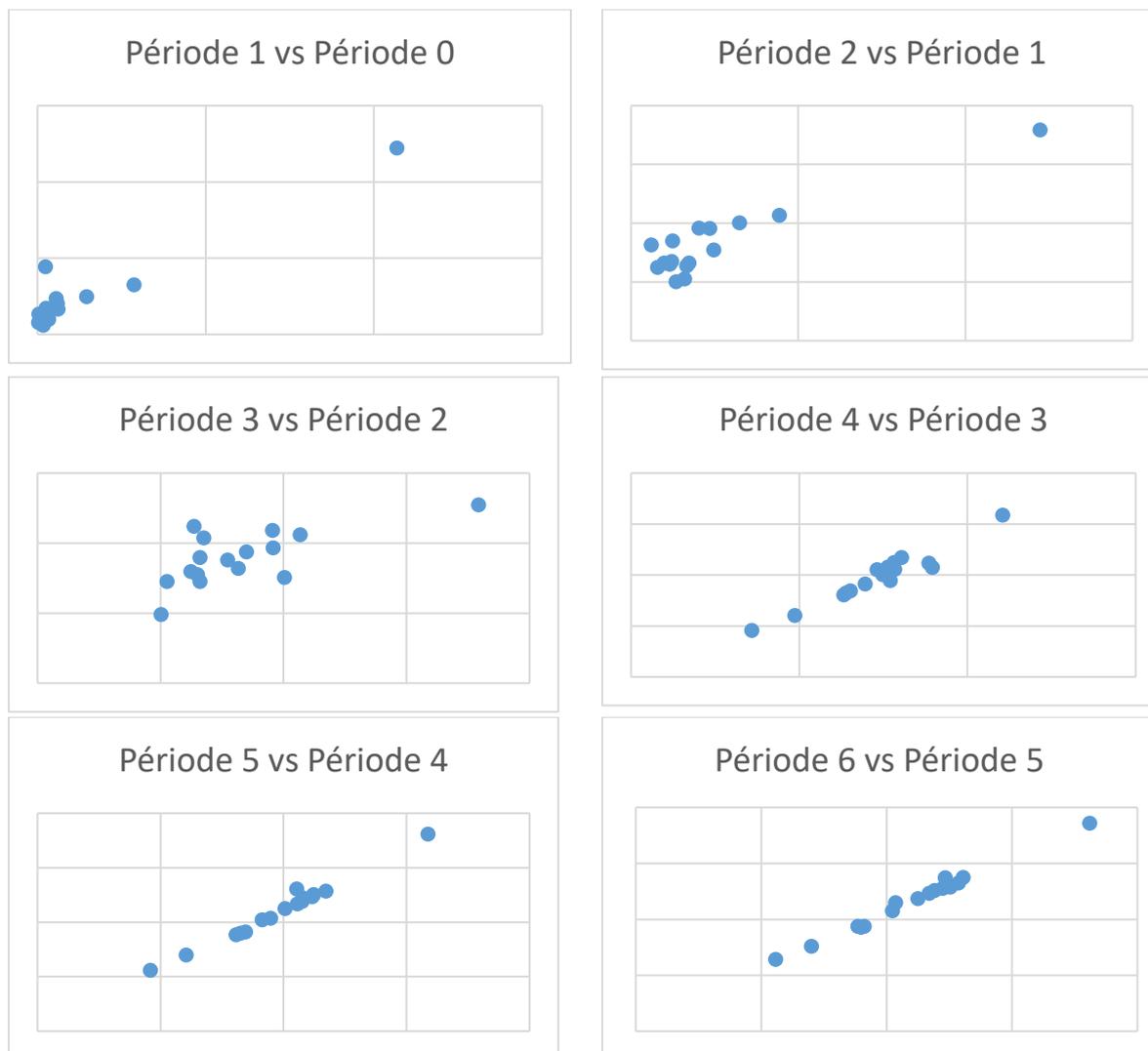


Figure 8. Linéarité des facteurs de développement pour passer d'une période j à une période $j + 1$.
Les charges de sinistre relatives à la première période sont en abscisse et celles relatives à la deuxième sont en ordonnée.

Le Tableau 2 compare les résultats des deux méthodes et recense les informations suivantes :

- Période de sinistre : celle-ci va de la période 5 à la période 15. Quant aux périodes inférieures à 5, le calcul des réserves n'est pas présenté, car il est nécessaire d'avoir un historique minimal, aussi bien pour le calcul des ratios de développement que pour la modélisation par filtre de Kalman
- Montant des réserves (en euros) : il s'agit du moment des réserves jusqu'à la période de sinistre étudiée. Par exemple, pour une période de sinistre donnée k , le montant des réserves est calculé à partir des données réelles selon la formule $\sum_{i=1}^k \sum_{j=k-(i-1)}^k s_{i,j}$. Ces montants de réserves sont bien partiels car le nombre de périodes de développement est fini. Ceci se justifie d'un côté par l'absence de données postérieures à la période de développement en question (il s'agit bien d'une absence provoquée, conformément à la méthode présentée dans la section 2.6), et de l'autre par le fait que nous ne souhaitons pas induire un biais dans la modélisation d'une queue de distribution.

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par CL	Erreur d'estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	13 400 133	-8 118 654	-6 433 945	0,79
6	16 082 686	-2 834 962	613 914	-0,21
7	18 425 200	-3 163 736	1 697 605	-0,54
8	18 368 042	98 937 691	8 961 353	0,09
9	18 350 083	19 113 970	11 905 656	0,62
10	17 753 242	1 780 948	-155 039	-0,09
11	18 314 769	-5 678 211	-1 327 686	0,23
12	19 232 117	-5 470 916	-1 182 502	0,22
13	20 681 261	-8 367 029	-4 295 553	0,51
14	22 366 196	-13 312 714	-6 805 621	0,51
15	25 460 747	-15 858 608	-10 572 207	0,67

Tableau 2. Comparaison des erreurs d'estimation des réserves par les méthodes de Chain-Ladder et du filtre de Kalman sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis constants

- Erreur d'estimation par la méthode de Chain-Ladder (CL) : cette erreur n'est que la différence entre le montant des réserves estimé par la méthode de Chain-Ladder et le montant des réserves. Une erreur d'estimation négative signifie que la méthode de Chain-Ladder a sous-estimé le calcul des réserves. Une erreur positive signifie que le montant est surestimé. Plus la valeur est proche de 0, plus l'estimation est supposée précise. Dans les faits, il est préférable d'avoir une estimation prudente des réserves, et donc d'avoir une erreur positive tout en étant proche de 0.
- Erreur d'estimation par le filtre de Kalman : il s'agit de la même description que ci-dessus, en remplaçant la méthode de Chain-Ladder par le filtre de Kalman
- Ratio Kalman/CL: il s'agit du ratio entre l'erreur estimée par le filtre de Kalman et celle estimée par la méthode de Chain-Ladder. Un ratio positif inférieur à 1 implique une meilleure performance du filtre de Kalman. Quand le ratio est négatif, l'appréciation est laissée à la liberté de l'actuaire, qui peut soit préférer une erreur absolue la plus faible possible, soit au contraire privilégier une estimation plus prudente.

Plusieurs constats peuvent découler de ces résultats :

Tout d'abord, le calcul des réserves est plus précis par le filtre de Kalman que par la méthode de Chain-Ladder. Ce constat est valable pour toutes les périodes de sinistre étudiées : le ratio entre l'erreur d'estimation par le filtre de Kalman et celle par la méthode de Chain-Ladder est toujours inférieur à 1. De plus, quand ce ratio est négatif, le filtre de Kalman est celui qui est le plus prudent, tout en ayant une erreur plus faible en valeur absolue. La seule exception est la période 10 pour laquelle la méthode de Chain-Ladder surestime le montant des réserves alors que le filtre de Kalman les sous-estime, en revanche avec une erreur beaucoup plus faible (155 k€ contre 1 781 k€).

Un autre constat concerne la période 8 où le fait que la première observation soit plus élevée que la normale (pour rappel, elle représente 20% de la charge de sinistre à l'ultime, contre 1% en moyenne) rend peu fiable

l'estimation par Chain-Ladder. Le filtre de Kalman est moins sensible à cette valeur aberrante, l'étape de mise à jour se faisant à partir d'un compromis entre cette même observation et le modèle de Kalman. De plus, il suffit de deux périodes (périodes 8 et 9) pour que le filtre de Kalman retrouve un niveau d'erreur relativement faible. Il semble donc mieux armé face à des données aberrantes.

L'exploration de l'amplitude des erreurs d'estimation par le filtre de Kalman par période de sinistre montre qu'en dehors des périodes 5, 8, 9, 13, 14 et 15, l'estimation par filtre de Kalman est précise et est très proche du montant des réserves. L'erreur d'estimation pour la période 5 est importante vraisemblablement à cause du nombre limité d'échantillons (seuls 6 échantillons pour les périodes 0 à 5 sont disponibles). Les erreurs des périodes 8 et 9 s'expliquent par le montant aberrant de la charge de sinistre observée lors de la première période de développement de la période de sinistre 8. Quant aux erreurs d'estimation des périodes 12 à 15, elles s'expliquent par un double phénomène. Le premier phénomène est une cadence différente entre ces périodes et celles précédentes (0 à 11) comme le démontre la Figure 9 : jusqu'à la période 11, la forme de la cloche est décalée vers la gauche en comparaison avec les cadences de la période 12. Les cadences des périodes suivantes suivent une forme de cloche plus fine notamment pour les périodes 14 et 15. Cette variation des cadences exerce une influence sur les estimations par filtre de Kalman car le modèle est construit à partir des périodes précédentes, donc avec des cadences différentes.

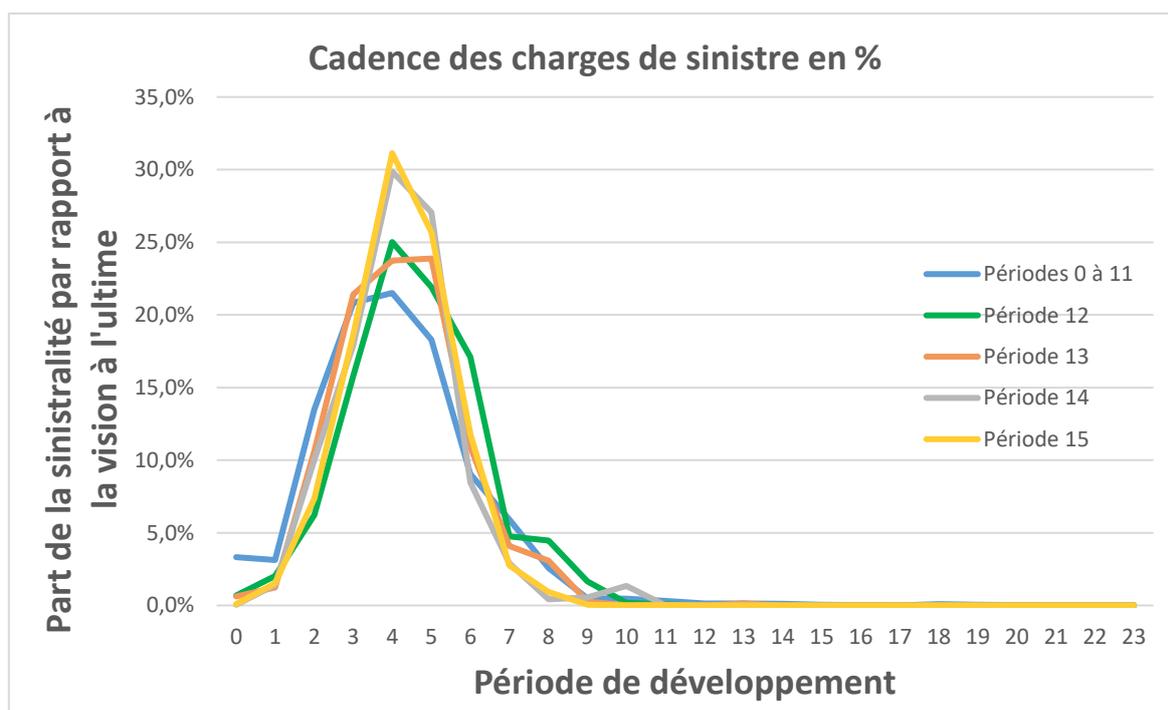


Figure 9. Cadence des charges de sinistre en % pour les périodes de sinistre 12, 13, 14 et 15 en comparaison avec les périodes antérieures

Quant au deuxième phénomène, il est lié à la présence de valeurs aberrantes pour les périodes de sinistre 14 et 15 et pour la période de développement 0. En effet, si l'on fait abstraction de la période de sinistre 8, une charge de sinistre moyenne de 60,4 k€ est observée pour la période de développement 0. Celle de la période de sinistre 14 est égale à 2,5 k€ et celle de la période 15 est égale à 7,3 k€. Ces valeurs sont donc nettement en deçà de celles attendues et peuvent être jugées comme responsables de l'augmentation de l'erreur d'estimation des réserves par le filtre de Kalman.

4.3 CAP Relais avec montants garantis évolutifs

4.3.1 Introduction

Dans ce cas, les données relatives au dispositif CAP Relais sont prises en compte sur toute la période du dispositif, à savoir entre mars 2020 et juin 2021, et en tenant compte de tous les assureurs, c'est-à-dire cinq en 2020 et quatre en 2021. Globalement, en 2020, les encours sont restés stables autour de 270 Milliards d'euros. À la suite du retrait d'un des assureurs du dispositif, ces encours sont tombés à 237 Milliards d'euros environ. Les encours n'évoluant que peu (évolution de -13% uniquement au moment du passage de la période 9 à la période 10), nous avons jugé pertinent de modéliser le problème conformément à la section 3.3.2, avec une matrice de covariance Q constante (se référer à la page 68).

Les triangles des charges de sinistre utilisés comprennent des montants à 100%, donc bruts de réassurance afin de permettre la comparaison des données relatives aux exercices 2020 et 2021.

4.3.2 Données

Pour rappel, les périodes de sinistre vont de 0 à 15 (cela correspond à des périodes mensuelles allant de mars 2020 à juin 2021), et les périodes de développement vont de 0 à 29 (cela correspond donc à une vision à la date du 31 juillet 2022), ce qui est censé représenter la vision à l'ultime, conformément à notre hypothèse pour CAP Relais avec montants garantis constants.

Les charges de sinistre à l'ultime par période de sinistre ne seront pas présentées pour éviter de permettre au lecteur d'en déduire la sinistralité d'un assureur-crédit particulier. Néanmoins, les constats restent identiques à ceux observés dans la section 4.2, y compris ceux en rapport avec les cadences de charges de sinistre et le respect des hypothèses de Chain-Ladder.

4.3.3 Résultats

Le calcul des réserves est effectué selon la même approche que celle décrite dans la section 4.2.4. Le Tableau 3 compare les résultats de calcul des réserves par les deux méthodes citées ci-dessus, et comporte les mêmes champs que ceux du Tableau 2.

Nous constatons que le calcul des réserves est plus précis par le filtre de Kalman que par la méthode de Chain-Ladder. Ce constat est valable pour toutes les périodes de sinistre étudiées à l'exception de la période 6 : le ratio entre l'erreur d'estimation par le filtre de Kalman et celle par la méthode de Chain-Ladder est toujours inférieur à 1. De plus, quand ce ratio est négatif, le filtre de Kalman est celui qui est le plus prudent, tout en ayant une erreur plus faible en valeur absolue. Quant à la période 6, l'erreur en valeur absolue du filtre de Kalman est de 43% supérieure à celle obtenue par la méthode de Chain-Ladder (1 M€ contre 1,5 M€). En revanche, le filtre de Kalman est celui qui est le plus prudent (il surestime le montant des réserves) contrairement au modèle de Chain-Ladder qui les sous-estime.

Le même constat que celui émis en section 4.2.4 concernant les périodes 5, 13, 14 et 8 reste valable : pour cette dernière période, la première observation est plus élevée que la normale ce qui rend non fiable l'estimation par Chain-Ladder. Le filtre de Kalman est moins sensible à cette valeur aberrante, et il suffit de

deux périodes dans l'exemple ci-dessous (périodes 8 et 9) pour qu'il retrouve un niveau d'erreur relativement faible. Le filtre de Kalman est donc mieux armé face à des données aberrantes.

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par CL	Erreur d'estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	17 409 047	-9 470 675	-6 172 303	0,65
6	21 010 275	-1 030 011	1 477 466	-1,43
7	23 616 182	-1 607 706	1 481 163	-0,92
8	22 494 502	141 609 608	13 368 483	0,09
9	21 947 423	26 887 981	18 309 757	0,68
10	20 412 009	4 745 272	2 691 493	0,57
11	19 947 317	-3 935 189	413 020	-0,10
12	20 115 298	-3 785 669	-189 708	0,05
13	21 137 783	-7 142 500	-3 928 097	0,55
14	22 623 332	-12 869 002	-7 004 784	0,54
15	25 494 336	-15 381 936	-10 965 995	0,71

Tableau 3. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis évolutifs

4.4 CAP et CAP+

4.4.1 Introduction

Les dispositifs CAP et CAP+ ont duré de mars 2020 à mars 2022. L'arrêt de la souscription à ces dispositifs ayant eu lieu le 31 décembre 2021, chaque assuré a pu émettre des factures pendant les 3 mois de garantie, donc jusqu'au 30 mars 2022. Ces deux dispositifs ont légèrement évolué pendant les 2 années : Concernant CAP+, le taux de quote-part est resté le même, seule la prime d'assurance a baissé. Quant à CAP, en plus de la baisse de la prime d'assurance, la garantie maximale allouée est passée de 100% de la garantie primaire à 200% au premier janvier 2021. Ces évolutions ont pu non seulement contribuer à faire augmenter les encours garantis, mais aussi avoir un impact sur la souscription à ce dispositif.

Nous sommes donc face à une évolution dans les conditions de souscription des dispositifs CAP et CAP+, et les encours garantis ont logiquement évolué. La problématique est donc celle d'un calcul des réserves avec montants garantis évolutifs. C'est la modélisation du ratio sinistres sur montants garantis qui est utilisée, conformément à nos recommandations dans la section 3.3.2.

4.4.2 Périodes de sinistre et cadences de développement

Initialement, les périodes de sinistre vont de 0 à 25 (cela couvre la période de mars 2020 à mars 2022), et les périodes de développement de 0 à 31 (cela couvre la période de mars 2020 à septembre 2022). Les triangles des charges de sinistre obtenus sont en revanche très creux : peu de sinistres ont effectivement été déclarés au titre de ces deux dispositifs. Nous avons jugé plus pertinent de sous-échantillonner les données et de regrouper deux périodes successives pour n'en former qu'une seule, à l'exception de la première période qui en réalité regroupe les sinistres du 15 mars au 31 mai 2020. De cette façon, l'aspect « creux » des triangles

est moins important, même si plusieurs intersections de périodes de sinistre et de développement restent sans sinistralité déclarée. Contrairement au dispositif CAP Relais où la sinistralité à fin juillet 2022 pouvait être considérée comme proche de la sinistralité à l'ultime pour l'ensemble des périodes de sinistre, ce n'est plus le cas pour les dispositifs CAP et CAP+. En effet, des garanties en risque étaient activés fin mars 2022, et une période de 6 mois n'est en général pas suffisante pour que l'ensemble des sinistres soient déclarés. Néanmoins, en se basant sur les observations des premières périodes de sinistres, la sinistralité observée pendant les 6 premiers mois de développement dépasse 95% de la sinistralité à l'ultime. Nous pouvons donc supposer pour les besoins de l'étude, c'est-à-dire l'analyse des performances du filtre de Kalman, que la sinistralité cumulée au 30 septembre 2022 représente la sinistralité à l'ultime au titre des dispositifs CAP et CAP+. Dans la suite de cette section, le terme « à l'ultime » est supposé équivalent à « au 30 septembre 2022 ».

Comparaison des périodes de sinistre

Le Tableau 4 représente la vision à l'ultime des charges de sinistre pour chacune des périodes de sinistre. Ce tableau montre que, contrairement à CAP Relais, les périodes de sinistre sont toutes différentes en termes de charge de sinistre à l'ultime. En ce qui concerne le dispositif CAP, la période de sinistre 7 (donc correspondant à juin et juillet 2021) est la plus sinistrée : la charge de sinistre pour 1 million d'euros de garanties est de 1 497 euros. Cette période intervient juste à la sortie du troisième confinement en France, la sinistralité qui lui est attribuée peut être expliquée par la reprise économique due à la période estivale. Quant au dispositif CAP+, il est globalement plus sinistré que CAP, et la période 1 (juin et juillet 2020) est la plus sinistrée si l'on considère le ratio charge de sinistre à l'ultime sur 1 M€ de garanties.

Période de sinistre	Dispositif CAP		Dispositif CAP+	
	Charge de sinistre à l'ultime En €	% 1M€ de garanties	Charge de sinistre à l'ultime En €	% 1M€ de garanties
0	9 399	134	25 165	658
1	18 014	128	875 663	11 447
2	144 608	336	440 578	2 045
3	43 419	89	392 030	1 324
4	118 055	203	624 078	1 711
5	432 216	616	690 480	1 665
6	395 282	438	959 357	1 918
7	1 493 403	1 497	1 263 954	2 425
8	274 891	266	1 382 075	2 695
9	730 603	750	1 723 531	3 715
10	452 370	452	868 459	1 867
11	0	0	246 447	798
Global	4 112 259	514	9 491 819	2 272

Tableau 4. Evolution de la sinistralité à l'ultime, en euros et rapportée à 1 M€ de garanties, au titre des dispositifs CAP et CAP+

Cadences de développement

La Figure 10 représente la cadence des charges de sinistre pour le dispositif CAP par rapport à la vision à l'ultime pour chaque période de sinistre. Cette figure montre qu'aucune régularité des cadences ne semble

exister. Ce constat n'est pas étonnant car le dispositif CAP fonctionne sous forme d'une réassurance XS, et qu'en amont, la garantie primaire intervient pour la prise en charge des sinistres. Ce principe de top-up cover rend difficile l'anticipation des cadences de charge de sinistre pour le dispositif CAP.

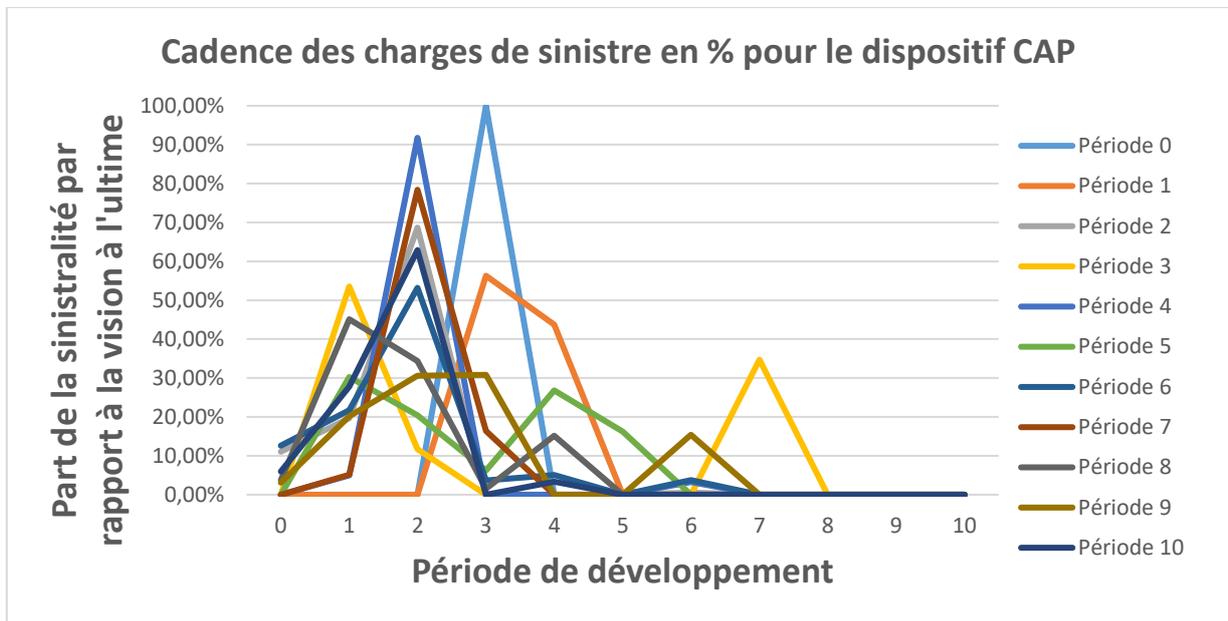


Figure 10. Cadence des charges de sinistre pour le dispositif CAP : l'axe des abscisses représente la période de développement, et celui des ordonnées représente la part en % de la sinistralité à l'ultime

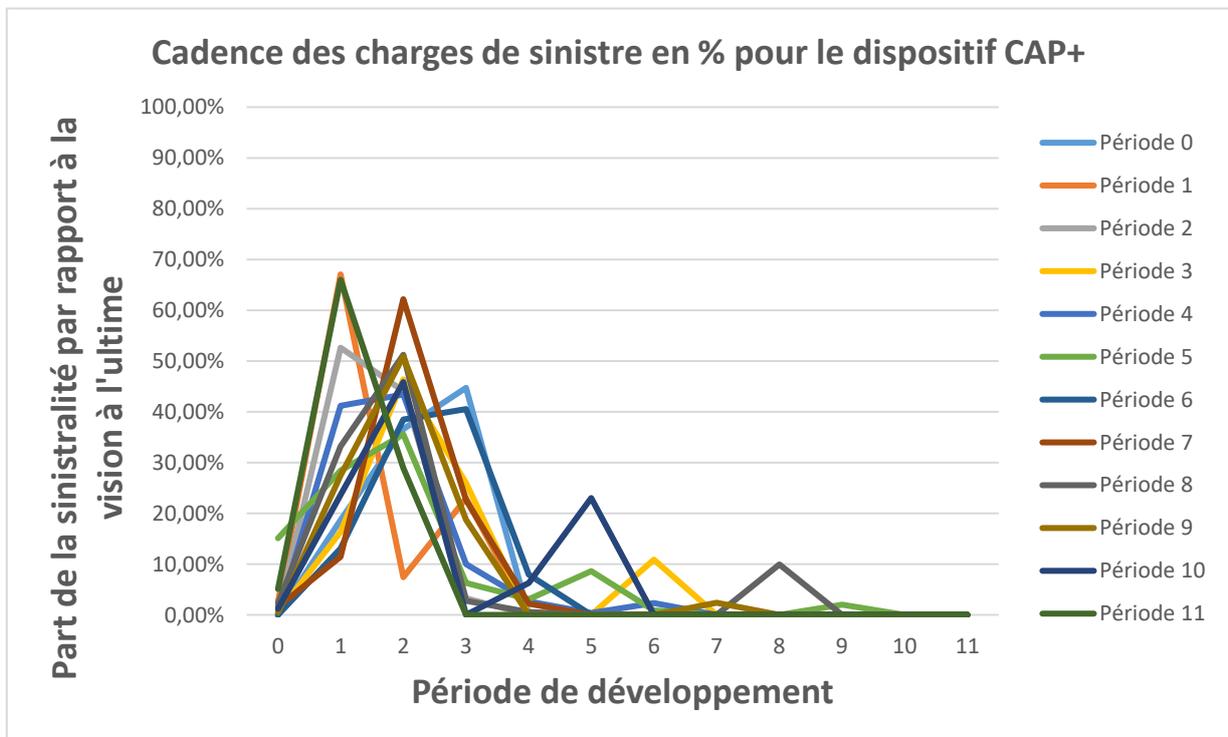


Figure 11. Cadence des charges de sinistre pour le dispositif CAP+ : l'axe des abscisses représente la période de développement, et celui des ordonnées représente la part en % de la sinistralité à l'ultime

Quant à CAP+, et d'après la Figure 11, une forme de cloche des cadences semble se dessiner, notamment entre les périodes 0 et 4. Le dispositif CAP+ fonctionnant selon le principe d'une assurance en quote-part, cette forme de cloche n'est pas étonnante. Le fait que les cadences soient moins régulières que pour le dispositif CAP Relais provient du fait que le dernier fonctionne sur le portefeuille entier en assurance-crédit, alors que CAP+ ne concerne que les contrats que l'assureur souhaite résilier et dont les acheteurs acceptent de souscrire la garantie. Il existe donc un impact plus important de la souscription que pour le dispositif CAP Relais.

4.4.3 Résultats

Les tableaux ci-dessous comparent les résultats de calcul des réserves par la méthode de Chain-Ladder à ceux par le filtre de Kalman.

Tout d'abord, concernant le dispositif CAP, la méthode de Chain-Ladder n'est pas pertinente car aucune régularité de cadence ne semble exister. Néanmoins, cette méthode est appliquée pour comparaison avec le filtre de Kalman. Ce dernier utilise par ailleurs le résultat du calcul de la sinistralité à l'ultime par la méthode de Chain-Ladder. Même si au global le filtre de Kalman semble induire moins d'erreurs que la méthode de Chain-Ladder, à part pour la période 5 de sinistre (Tableau 5), les résultats sont comparables. Les erreurs d'estimation sont importantes en comparaison au montant des réserves, à part pour la période 9. Cela confirme que le calcul des réserves pour le dispositif CAP ne peut se faire par aucune de ces deux méthodes.

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par CL	Erreur d'estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	540 558	-480 217	-496 886	1,03
6	651 441	270 691	-228 968	0,85
7	1 985 697	-1 705 253	-1 673 129	0,98
8	1 934 639	-1 656 158	-1 471 614	0,89
9	1 217 389	208 847	-193 988	-0,93
10	1 047 222	1 076 114	870 628	0,81

Tableau 5. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman pour le dispositif CAP

Afin de calculer les réserves pour le dispositif CAP, certaines approches peuvent être pertinentes. Nous en proposons deux sans les mettre en œuvre dans cette étude. Tout d'abord, il serait utile d'analyser plus finement les sinistres en fonction de leur sévérité et de décomposer le triangle des charges de sinistre en plusieurs triangles homogènes, où les cadences pourraient être régulières. Néanmoins, cela induira des triangles plus creux et rendra compliquées les estimations des réserves. Une autre méthode nécessite une plus fine connaissance des sinistres CAP permettant de mettre en place un provisionnement individuel à partir des caractéristiques détaillées des assurés et des acheteurs, avant application des garanties top-up cover. Nous pourrions alors estimer de façon plus juste le montant des réserves pour le dispositif CAP. Cette dernière méthode nécessite en revanche une collecte des données plus complète que celles dont nous disposons.

Quant au dispositif CAP+, le fait qu'une certaine régularité dans les cadences semble se dessiner rend possible l'utilisation de la méthode de Chain-Ladder. D'après le Tableau 6, le filtre de Kalman améliore nettement les

résultats de la méthode de Chain-Ladder. Quelle que soit la période de sinistre, l'erreur d'estimation par le filtre de Kalman est inférieure en valeur absolue à celle obtenue par la méthode de Chain-Ladder.

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par CL	Erreur d'estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	1 020 347	3 762 752	-481 076	-0,13
6	1 474 326	-1 116 590	-970 241	0,87
7	2 284 841	-1 521 544	-349 986	0,23
8	3 062 303	-1 962 248	-1 816 456	0,93
9	3 090 475	-2 025 865	-1 479 727	0,73
10	2 330 339	-969 142	-211 645	0,22
11	1 409 554	-224 881	77 106	-0,34

Tableau 6. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman pour le dispositif CAP+

4.5 Analyse de sensibilité et optimisation des résultats du filtre de Kalman

Ce paragraphe tente d'apporter quelques pistes pour améliorer les résultats du filtre de Kalman pour certaines périodes de sinistre. En effet, nous avons observé dans le Tableau 2 et le Tableau 3 que certaines périodes de sinistre sont caractérisées par une erreur d'estimation par le filtre de Kalman supérieure à celle des autres périodes et nous avons interprété cette augmentation de l'erreur comme étant due soit à un problème de qualité de données soit à un changement des cadences de sinistre.

4.5.1 Analyse de sensibilité aux matrices de covariance

Avant de proposer des pistes d'optimisation des résultats du filtre de Kalman, nous présentons une analyse de sensibilité du gain de Kalman en fonction de la matrice de covariance des observations. Pour être plus précis, nous ciblons le terme $\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k = \mathbf{t}$ intervenant lors de l'estimation a posteriori de l'état \mathbf{x}_k , conformément à l'équation (2-4) et nous étudions l'évolution du terme \mathbf{t} de cette équation en fonction de différentes valeurs prises par la matrice de covariance des observations.

Nous étudions l'évolution de la matrice $\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k$ en fonction du coefficient α qui multiplie la matrice de covariance des observations \mathbf{R}_k . En remplaçant cette dernière par $\alpha \mathbf{R}_k$, nous calculons la valeur maximale parmi tous les éléments de la matrice $\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k$. De cette façon, il est possible de tracer l'évolution du gain maximal de Kalman en fonction du facteur α . Ce facteur multiplicatif va de 1/1000000 à 1000000 par pas multiplicatif de 10. Si le facteur est inférieur à 1, les valeurs des éléments de la matrice de covariance deviennent moins élevées et donc la confiance accordée aux observations sera plus importante comparée à celle accordée au modèle. La mise à jour de l'état \mathbf{x}_k sera donc plus impactée par les observations que par le modèle. Un facteur supérieur à 1 est en revanche synonyme d'une plus grande variance des observations, et donc d'une moins grande confiance. Les observations auront alors un impact plus faible que le modèle pour la mise à jour de l'état \mathbf{x}_k .

La Figure 12 présente l'évolution de la valeur maximale du gain de Kalman en fonction du facteur α . Les valeurs ont été obtenues en se basant sur les données réelles du dispositif CAP Relais avec montants garantis constants, et sur 11 périodes de sinistre (de la période 5 à la période 15).

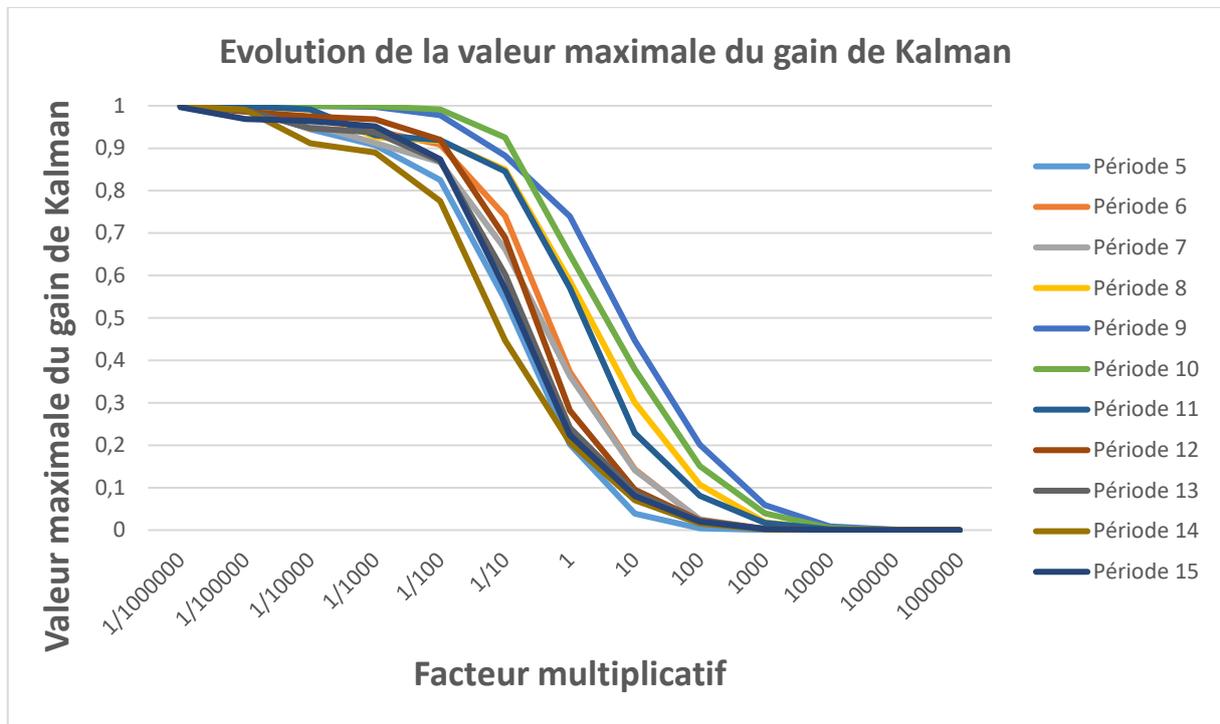


Figure 12. Evolution de la valeur maximale du gain de Kalman en fonction du facteur multiplicatif de la matrice de covariance des observations

Cette forme de l'évolution est conforme aux attentes : les facteurs inférieurs à 1/1000 induisent une prise en compte de l'observation quasiment en exclusivité pour la mise à jour de l'état, alors que les facteurs supérieurs à 1000 favorisent l'utilisation quasiment exclusive du modèle. Concernant les valeurs intermédiaires, elles varient selon les périodes de sinistre, même si la forme de l'évolution reste similaire. Ces écarts entre les différentes périodes de sinistre s'expliquent par les différents termes entrant en compte dans le calcul du terme $K_k H_k$: il s'agit notamment de la matrice des observations H_k et des matrices de covariance R_k et Q_k dont les estimations dépendent des périodes de sinistre.

4.5.2 Pistes d'optimisation des résultats

L'analyse de sensibilité ci-dessus va nous servir d'outil pour optimiser les résultats du filtre de Kalman. Si l'augmentation de l'erreur d'estimation des réserves est due à une valeur aberrante, il est alors possible d'utiliser un facteur multiplicatif supérieur à 1 pour la matrice de covariance des observations de telle sorte que le poids du modèle soit plus influençant. En revanche, si cette erreur s'explique par un changement de modèle, le facteur multiplicatif sera inférieur à 1 et permettra d'accorder plus de poids aux observations. Rappelons que dans notre méthodologie d'utilisation du filtre de Kalman, les différentes grandeurs en jeu étaient calculées indépendamment des périodes de sinistre.

La première optimisation concerne la période de sinistre 8. Le Tableau 2 a montré que l'erreur d'estimation par filtre de Kalman est importante pour cette période, et cette erreur est due à la charge de sinistre très

supérieure à la normale pour la période de développement 0. Il est tout à fait possible de détecter au moment de l'observation une charge de sinistre aberrante et agir dessus avant que l'estimation des réserves qui en découle ne s'éloigne de la réalité. Par ailleurs, l'estimation des réserves par la méthode de Chain-Ladder confirme l'impact de cette valeur aberrante. La solution à mettre en place est d'opter, au moment où cette observation est rencontrée, pour une pondération plus forte du modèle et moins forte de l'observation. Une grandeur sur laquelle intervenir pour effectuer cette opération est la matrice de covariance des observations. Prendre en compte une covariance des observations plus forte revient à accorder moins de poids à l'observation qu'au modèle pour la période 8. Le facteur multiplicatif que nous choisissons est 100, ce qui permet d'attribuer un poids de 10% à l'observation et 90% au modèle. Même si l'observation est aberrante, elle fait partie d'un vecteur des observations \mathbf{z}_8 dont seul le premier élément est aberrant, les autres éléments sont relatifs à des périodes de sinistre antérieures à la période 8. Pour cela, il n'est pas pertinent de pénaliser plus fortement les observations. Nous proposons également de compenser l'effet de la pénalisation pour la période 9 en accordant un poids plus fort à l'observation \mathbf{z}_9 qu'au modèle, car nous pensons que cette double-opération permet de s'affranchir de l'observation aberrante tout en permettant au filtre de Kalman lors de la période suivante d'adapter le modèle pour se rapprocher au plus près de la réalité. Le Tableau 7 montre que l'effet sur l'erreur est très important : l'erreur d'estimation pour la période 8 est divisée par 21, alors que celle pour la période 9 est divisée par 200 000 ! Ces nouveaux résultats ont été obtenus avec une matrice de covariance des observations identique pour toutes les itérations à celle initialement calculée sauf lors de l'itération correspondant à la réception de l'observation aberrante et de l'itération qui la suit.

Covariance des observations	Itération	Erreur d'estimation par Kalman
\mathbf{R}	8	8 961 353
\mathbf{R}	9	11 905 656
$\mathbf{R} \times 100$	8	424 804
$\mathbf{R} / 100$	9	-59

Tableau 7. Impact d'une covariance plus forte des observations dans le cas d'observations aberrantes

L'algorithme de Kalman dans ce cas est le suivant :

Initialisation : calcul des paramètres \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{R}_{init} et \mathbf{Q}

Itération sur les périodes de sinistre 0 à i :

- Si itération = 8, $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R}_{init} \times 100$, sinon, si période = 9, $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R}_{init} / 100$, sinon $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R}_{init}$
- Prédiction par filtre de Kalman
- Mise à jour de l'état par prise en compte de l'observation

Une erreur d'estimation importante est également observée pour les périodes 13, 14 et 15. L'explication de ce phénomène est qu'il ne s'agit pas seulement d'une donnée aberrante comme pour la période 8, mais plutôt d'un double phénomène lié d'une part à un changement de cadences des charges de sinistre à partir de la période 12 et d'autre part à des valeurs aberrantes pour les périodes 14 et 15. Le phénomène de

changement de cadence est très difficile à anticiper et à détecter à partir des observations faites lors des premières périodes de développement. En revanche, il est possible de s'appuyer sur le changement dans l'ordre de grandeur de l'estimation des réserves par le filtre de Kalman pour soupçonner un changement de cadences. Les montants des estimations des réserves par le filtre de Kalman peuvent être obtenus à partir du Tableau 2 et du Tableau 7 en additionnant le montant des réserves à l'erreur d'estimation par filtre de Kalman. Le Tableau 8 montre qu'à partir de la période 7, le montant estimé pour les réserves baisse de façon relativement homogène avant de connaître un rebond à la période 12 (passage de 16,9 M€ à 18M€). Ce changement n'est pas attendu car aucune modification contractuelle ou de gestion de sinistre n'a lieu à ce moment dans la vie du dispositif CAP Relais. Il s'agirait vraisemblablement de l'effet d'une modification dans les cadences des charges de sinistre, induisant une inadéquation entre le modèle de Kalman (reflété par la matrice H) et la réalité.

Période de sinistre	Montant des réserves
5	6 966 188
6	16 696 600
7	20 122 805
8	18 792 846
9	18 127 778
10	17 598 203
11	16 987 083
12	18 049 615
13	16 385 708
14	15 560 575
15	14 888 540

Tableau 8. Montant des réserves estimé par filtre de Kalman

Afin de pallier ce problème, il est possible d'accorder un poids plus important à l'observation de la période 12 qu'au modèle de Kalman de telle sorte que ce dernier puisse se rapprocher de la réalité. Le facteur que nous choisissons est 1/10, permettant de donner un poids de 70% à l'observation et de 30% au modèle. Nous pensons que la pondération dans le cas d'un changement de cadence doit être moins forte que celle dans le cas de valeurs aberrantes. Elle n'a pour effet que l'accélération de la convergence du modèle de Kalman vers la réalité. De la même façon que précédemment, nous compensons cette modification en accordant un poids plus important au modèle qu'à l'observation pour la période 13. Quant aux périodes 14 et 15, et étant donné que les observations sont aberrantes dans les deux cas, nous optons pour un facteur multiplicatif de 100 conformément à notre choix pour la période 8. En combinant les différentes mesures ci-dessus pour l'estimation des réserves, la baisse des erreurs d'estimation par le filtre de Kalman est très importante comme le démontre le Tableau 9.

L'algorithme de Kalman dans ce cas est le suivant :

Initialisation : calcul des paramètres F , H , R_{init} et Q

Itération sur les périodes de sinistre 0 à i :

- Si itération = 12, $R \leftarrow R_{init} / 10$, sinon, si période = 13, $R \leftarrow R_{init} \times 10$, sinon, si période = 14 ou 15, $R \leftarrow R_{init} \times 100$, sinon, $R \leftarrow R_{init}$
- Prédiction par filtre de Kalman
- Mise à jour de l'état par prise en compte de l'observation

Covariance des observations	Période de sinistre	Erreur d'estimation par Kalman
<i>R</i>	12	-1 182 502
<i>R</i>	13	-4 295 553
<i>R</i>	14	-6 805 621
<i>R</i>	15	-10 572 207
<i>R / 10</i>	12	507 347
<i>R x 10</i>	13	120 088
<i>R x 100</i>	14	-4 527
<i>R x 100</i>	15	-3 697 225

Tableau 9. Impact d'un changement de covariance des observations dans le cas d'un changement dans les cadences de développement suivi de valeurs aberrantes

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par CL	Erreur d'estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	13 400 133	-8 118 654	-6 433 945	0,79
6	16 082 686	-2 834 962	613 914	-0,22
7	18 425 200	-3 163 736	1 697 605	-0,54
8	18 368 042	98 937 691	424 804	0,00
9	18 350 083	19 113 970	-59	0,00
10	17 753 242	1 780 948	-155 039	-0,09
11	18 314 769	-5 678 211	-1 327 686	0,23
12	19 232 117	-5 470 916	507 347	0,09
13	20 681 261	-8 367 029	120 088	0,01
14	22 366 196	-13 312 714	-4 527	0,00
15	25 460 747	-15 858 608	-3 697 225	0,23

Tableau 10. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman « optimisé » sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis constants

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par CL	Erreur d'estimation par Kalman	Ratio Kalman/CL
5	17 409 047	-9 470 675	-6 172 303	0,65
6	21 010 275	-1 030 011	1 477 466	-1,43
7	23 616 182	-1 607 706	1 481 163	-0,92
8	22 494 502	141 609 608	4 063 820	0,03
9	21 947 423	26 887 981	1 642 714	0,06
10	20 412 009	4 745 272	2 691 493	0,57
11	19 947 317	-3 935 189	413 020	-0,10
12	20 115 298	-3 785 669	517 391	-0,14
13	21 137 783	-7 142 500	277 840	-0,04
14	22 623 332	-12 869 002	46 184	0,00
15	25 494 336	-15 381 936	-3 620 609	0,24

Tableau 11. Comparaison de la méthode de Chain-Ladder et du filtre de Kalman « optimisé » sur le portefeuille CAP Relais avec montants garantis évolutifs

Grâce au compromis entre la confiance accordée au modèle et celle accordée aux observations, il est possible d'agir sur les performances du filtre de Kalman. Quand il s'agit de données aberrantes, nous préconisons un

facteur plus pénalisant que celui à utiliser quand il s'agit de changement de cadence. Ce procédé rend certains paramètres du filtre de Kalman, dans notre exemple la matrice de covariance des observations, dépendants du temps.

Par la suite, et pour le dispositif CAP Relais, nous décidons de corriger l'estimation par le filtre de Kalman pour les périodes 8 et 9 et 12 à 15. Ces corrections sont appliquées aux deux cas : CAP relais avec montants garantis constants et CAP Relais avec montants évolutifs. Le Tableau 10 présente les résultats d'estimation des réserves par filtre de Kalman « optimisé » et remplace le Tableau 2. Quant au Tableau 11, il remplace le Tableau 3, donc dans le cas des montants garantis évolutifs.

4.6 Prise en compte de la conjoncture économique

4.6.1 Introduction

Dans ce paragraphe, des données relatives à la conjoncture économique sont prises en compte. Le filtre de Kalman est appliqué aux données du dispositif CAP Relais avec montants garantis constants. Après un rappel des différentes données exogènes explorées en rapport avec la conjoncture économique, une analyse de la sinistralité à l'ultime de CAP Relais en fonction de ces données est présentée. Une modélisation linéaire de la dérivée de cette sinistralité en fonction de celles des données exogènes les plus pertinentes peut être envisagée. Les résultats de l'application du filtre de Kalman pour le calcul des réserves, en tenant compte de la conjoncture économique, sont ensuite présentés.

Les données relatives à la sinistralité CAP Relais et aux indicateurs de conjoncture économique ont été normalisées de telle sorte que les ordres de grandeur soient proches, ce qui facilite les représentations graphiques et les interprétations. Notamment, la valeur normalisée de la sinistralité CAP Relais à l'ultime pour la période de sinistre 0 est autour de 60. Rappelons que cette période correspond à 16 jours calendaires (du 15 mars au 31 mars 2020), et de ce fait, c'est la période la plus courte parmi toutes les autres, ces dernières durant un mois complet. Nous pouvons supposer dans ce chapitre que la sinistralité de la période 0 est égale au double de celle observée dans le cadre du dispositif CAP Relais. Sa valeur serait donc autour de $2 \times 60 = 120$ (valeur normalisée).

4.6.2 Evolution de la sinistralité en fonction de la conjoncture économique

Pour rappel, les données relatives à la conjoncture économique que nous avons explorées sont les suivantes. Pour une présentation plus détaillée, se référer à la section 1.4.2.

- Indice mensuel du chiffre d'affaires (ICA) dans les services
- Indice mensuel du chiffre d'affaires (ICA) dans le commerce
- Cumul des défaillances sur 12 mois
- Nombre mensuel de défaillances (données non corrigées)
- Consommation mensuelle des ménages en biens
- Indice mensuel de la production industrielle en industrie manufacturière

L'ICA étant jugé comme un indicateur de la production, nous aurions pu nous attendre à une certaine corrélation entre la sinistralité à l'ultime de CAP Relais et les valeurs de l'ICA. La Figure 13 présente l'évolution par période de sinistre de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais, et des indices de chiffre d'affaires ICA dans les services et les commerces. Elle montre que cette corrélation n'est pas évidente, malgré une relative ressemblance entre la courbe de la sinistralité et celle de l'ICA dans le commerce pour les périodes 0 à 4 et ensuite à partir de la période 11. Concrètement, une ressemblance semble exister de mars à juillet 2020, et ensuite entre février et juin 2021. En dehors de ces deux périodes, la sinistralité CAP Relais ne semble pas s'expliquer par l'ICA.

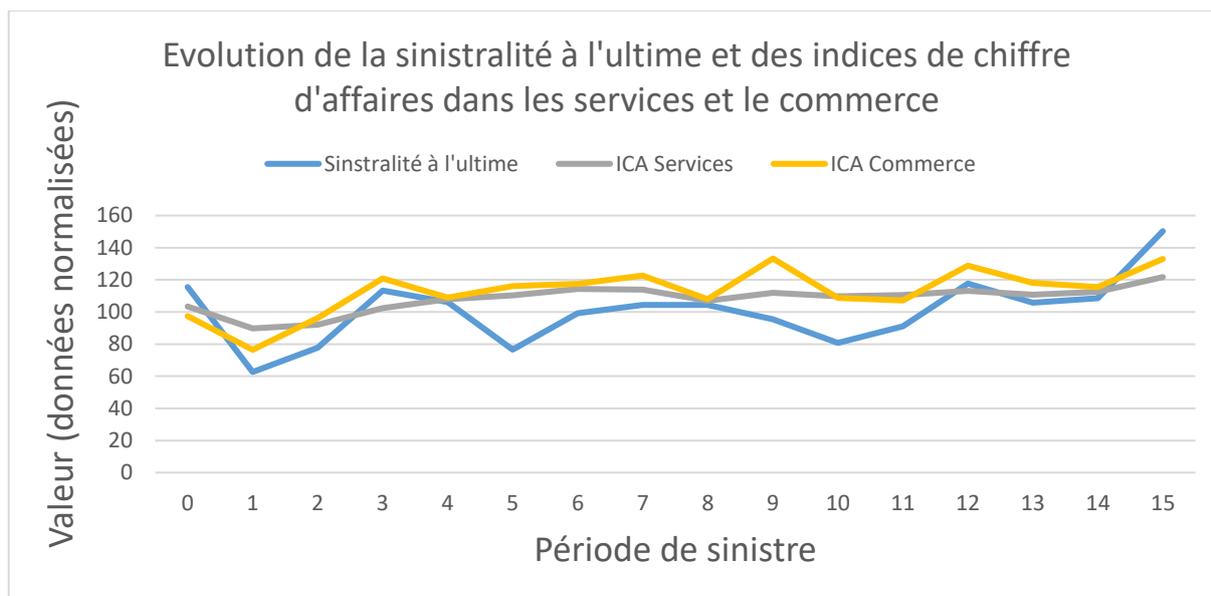


Figure 13. Evolution de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais et des indices de chiffre d'affaires dans les services et le commerce

Ensuite, nous avons étudié si la sinistralité est corrélée à la consommation des ménages en supposant qu'une plus forte consommation des ménages est synonyme d'une plus grande production, et en l'occurrence d'une éventuelle plus grande sinistralité. La Figure 14 ne montre aucune corrélation entre les deux grandeurs. De plus, cette figure montre que le cumul annuel des défaillances d'entreprises, qui est parmi les indicateurs les plus utilisés quand les défaillances sont étudiées s'est avéré non pertinent pour expliquer la sinistralité. Ce résultat n'est pas étonnant car les périodes de sinistralité étudiées sont mensuelles et non pas annuelles. Des données relatives aux défaillances mensuelles pourraient donc être pertinentes.

C'est ce que démontre la Figure 15. En effet, une certaine corrélation semble exister entre le nombre de défaillances mensuelles et la sinistralité à l'ultime pour les périodes 0 à 6 et à partir de la période 11, c'est-à-dire entre mars et septembre 2020 et ensuite à partir de février 2021. Ce qui est intéressant dans cette figure est que la production manufacturière apporte une explication complémentaire à la sinistralité. Nous pouvons supposer qu'une augmentation de la sinistralité s'explique soit par une augmentation de la production, soit par une augmentation des défaillances, et que la sinistralité baisse en cas de baisse de la production (donc de l'émission de factures) ou de défaillances d'entreprises. Cette hypothèse se vérifie pour toutes les périodes de 0 à 15 à l'exception de la période 11.

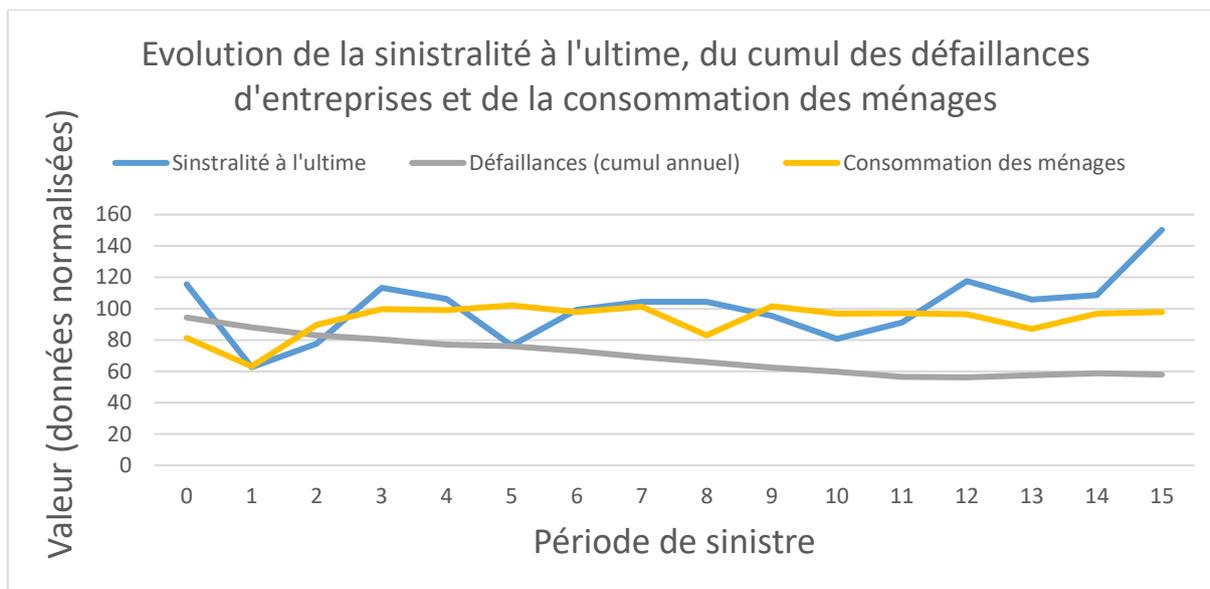


Figure 14. Evolution de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais, du cumul des défaillances d'entreprises et de la consommation des ménages

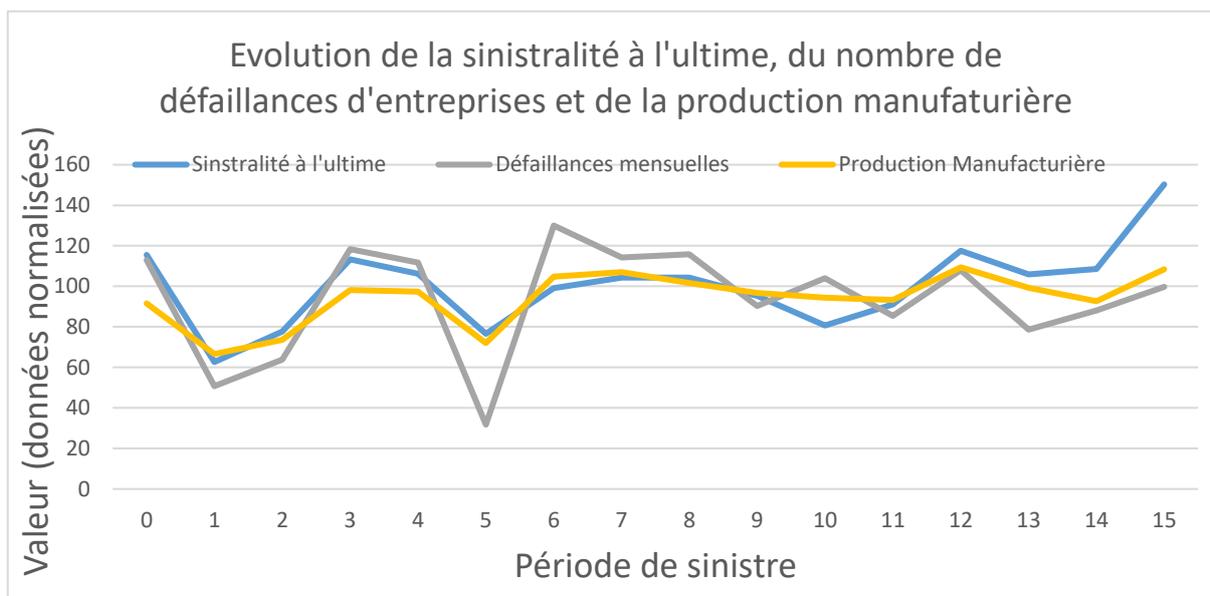


Figure 15. Evolution de la sinistralité à l'ultime du dispositif CAP Relais, des défaillances mensuelles d'entreprises et de la production manufacturière

En effet, entre les périodes 0 et 1, le nombre de défaillances et la production manufacturière baissent, et cela s'accompagne par une baisse de la sinistralité CAP Relais. Entre les périodes 1 à 3, l'augmentation de la sinistralité s'explique par l'augmentation des défaillances et de la production. Entre les périodes 3 à 5, la baisse de la sinistralité s'explique par la baisse conjointe des défaillances et de la production. En passant de la période 5 à 6, les 2 indicateurs de la conjoncture économique augmentent, ce qui explique l'augmentation de la sinistralité. Quant au passage de la période 6 à 7, l'augmentation de la sinistralité peut s'expliquer par une augmentation de la production, alors que le nombre de défaillances est en baisse. Cette dernière baisse serait due au fort rattrapage des défaillances en septembre après une baisse logique annuelle en août. De la

période 7 à la période 8, la sinistralité augmente légèrement comme le nombre de défaillances, alors que la production manufacturière baisse. Entre les périodes 8 et 9, la sinistralité baisse en même temps que les 2 indicateurs de la conjoncture économique. De la période 9 à la période 10, la sinistralité et la production baissent, alors que le nombre de défaillances augmente. Ensuite, la sinistralité augmente en passant à la période 11 alors que les 2 indicateurs de la conjoncture économique baissent. Enfin, à partir de la période 11, la sinistralité CAP Relais suit la même évolution que le nombre de défaillances et la production, à l'exception du passage entre la période 13 et la période 14 où la sinistralité augmente alors que la production manufacturière est en baisse.

Une relation monotone semble donc exister entre la dérivée de la sinistralité à l'ultime pour le dispositif CAP Relais et celles du nombre de défaillances mensuelles et de la production manufacturière. Compte-tenu du nombre restreint de données, nous allons opter pour une modélisation linéaire même si un tel modèle ne suffit pas à expliquer les évolutions. La Figure 16 montre qu'une telle relation n'est pas totalement aberrante malgré quelques points qui semblent s'écarter d'un modèle linéaire.

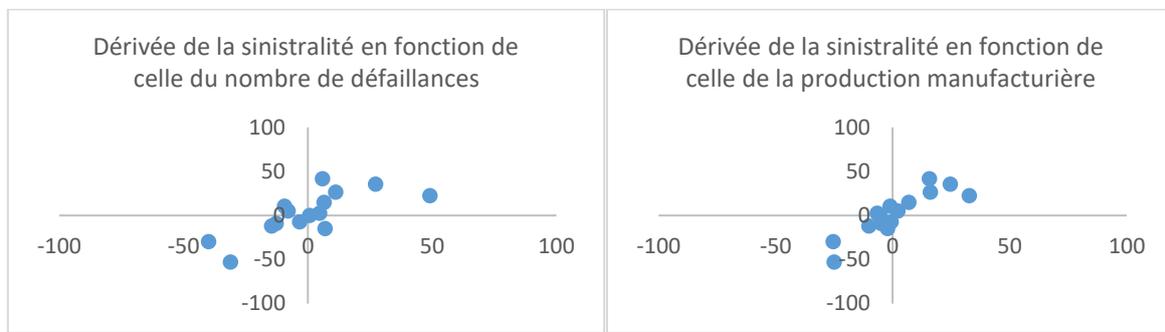


Figure 16. Evolution de la dérivée de la sinistralité CAP Relais en fonction de celle de la production manufacturière et du nombre de défaillances

Trois modèles sont proposés : le premier consiste à expliquer la dérivée de la sinistralité en fonction de celle des défaillances, le deuxième remplace l'indicateur sur les défaillances du premier modèle par un autre sur la production manufacturière. Quant au troisième modèle, il consiste à expliquer la dérivée de la sinistralité de façon conjointe à partir de celles des défaillances et de la production manufacturière.

4.6.3 Modélisation de la sinistralité en fonction de la conjoncture économique

La prise en compte de la conjoncture économique se faisant par le terme $B_k u_k$, et avant de décrire les trois modèles listés ci-dessus, procédons à la description du vecteur u_k .

Ce dernier comprend une variable ou deux selon que la prise en compte de la conjoncture économique se fait à l'aide de nombre de défaillances, de la production manufacturière ou des deux variables. Définissons l'élément $u_{k,0}$ comme étant le nombre de défaillances à l'instant k , et $u_{k,1}$ comme étant la production manufacturière au même instant k .

Modèle « DEF » : explication de l'évolution de la sinistralité par celle du nombre de défaillances

Dans ce cas, le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$S_k - S_{k-1} = b_{11}(u_{k,0} - u_{k-1,0}) + b_{10},$$

Cette écriture permet de retrouver une forme familière au filtre de Kalman :

$$S_k = S_{k-1} + (b_{11} \quad -b_{11} \quad b_{10}) \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k-1,0} \\ 1 \end{pmatrix},$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{11} & b_{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k-1,0} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Modèle « PROD » : explication de l'évolution de la sinistralité par celle de la production manufacturière

Dans ce cas, le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$S_k - S_{k-1} = b_{22}(u_{k,1} - u_{k-1,1}) + b_{20},$$

Cette écriture permet de retrouver une forme familière au filtre de Kalman :

$$S_k = S_{k-1} + (b_{22} \quad -b_{22} \quad b_{20}) \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ u_{k-1,1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{22} & b_{20} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ u_{k-1,1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Modèle « DEF_PROD » : explication de l'évolution de la sinistralité par celles du nombre de défaillances et de la production manufacturière

Dans ce cas, le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$S_k - S_{k-1} = b_{31}(u_{k,0} - u_{k-1,0}) + b_{32}(u_{k,1} - u_{k-1,1}) + b_{30},$$

$$S_k = S_{k-1} + (b_{31} \quad -b_{31} \quad b_{32} \quad -b_{32} \quad b_{30}) \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k-1,0} \\ u_{k,1} \\ u_{k-1,1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} b_{31} & -b_{31} & b_{32} & -b_{32} & b_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k,0} \\ u_{k-1,0} \\ u_{k,1} \\ u_{k-1,1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estimation des paramètres

Afin d'estimer les paramètres pour les trois modèles ci-dessus, il est nécessaire de disposer de l'équation permettant de calculer la sinistralité à l'ultime CAP Relais en fonction des observations relatives à la conjoncture économique. Cette relation peut être en principe étudiée et déduite par un assureur-crédit qui dispose d'un historique suffisant de la sinistralité de son portefeuille. Le dispositif CAP relais étant un mécanisme de quote-part sur le portefeuille global d'assurance-crédit, nous pouvons supposer que la régression linéaire estimée à partir de l'historique de sinistralité antérieure à CAP Relais ne se trouve pas modifiée par ce dernier dispositif. Cette hypothèse reste néanmoins forte d'autant plus que les assureurs-crédit se sont engagés à maintenir les engagements constants pendant une partie du dispositif, ce qui a pour conséquence une modification du comportement de l'assureur et donc de la sinistralité par rapport à la période avant CAP Relais.

De notre côté, nous ne disposons pas de cette régression linéaire ni d'un historique de sinistralité. Néanmoins, nous connaissons la sinistralité à l'ultime au titre du dispositif CAP Relais pour chaque période de sinistre. Nous pouvons ainsi estimer la régression linéaire et supposer que cette estimation décrit la relation qui lie la sinistralité aux indicateurs de conjoncture économique, telle qu'un assureur-crédit aurait pu la déduire à partir de l'historique de sinistralité sur son portefeuille. En d'autres termes, nous supposons que la relation décrivant l'évolution des différentes grandeurs pendant le dispositif CAP Relais est restée identique à celle qui aurait été estimée par un assureur-crédit avant la mise en place du dispositif.

Il peut être envisagé d'estimer les paramètres b_{11} , b_{22} , b_{31} , b_{32} , b_{10} , b_{20} et b_{30} en prenant en compte l'historique entier de CAP Relais, c'est-à-dire de la période 0 à la période 15 et d'estimer une seule relation linéaire. Nous aurions pu mettre en place une approche moins globale en estimant une relation linéaire par morceaux, car au lieu de calculer la régression sur une longue période, il est plus pertinent de prendre une période courte et de calculer une régression glissante. Cette approche permet d'un côté d'approcher une modélisation non linéaire, et de l'autre de s'adapter à un éventuel changement dans la modélisation de l'évolution de la sinistralité par rapport à celle des indicateurs de la conjoncture économique. En revanche, cette méthode est moins réaliste que la précédente car l'assureur-crédit ne dispose pas de la sinistralité à l'ultime pour les quelques mois précédents la période de sinistre étudiée, l'ultime n'étant atteint qu'au bout de plusieurs mois. Pour cela, nous maintenons une modélisation globale en se basant sur l'historique complet de CAP Relais.

4.6.4 Application au portefeuille CAP Relais avec montants garantis constants

Ce paragraphe présente les résultats d'application des méthodes précédentes au dispositif CAP Relais avec montants garantis constants. Les résultats se présentent sous forme de deux tableaux. Le premier compare par période de sinistre l'ancienne erreur d'estimation par le filtre de Kalman (donc sans prise en compte de la conjoncture économique, se référer à la section 4.2.4) avec la nouvelle erreur estimée selon les modèles « DEF », « PROD » et « DEF_PROD » présentés dans le paragraphe 4.6.3. Dans ce tableau sont surlignées en gris les configurations présentant l'erreur minimale par période de sinistre. Un écart quadratique moyen (RMSE) est également calculé. Quant au deuxième tableau, il est similaire à celui présenté dans la section 4.2.4 et consiste à visualiser par période de sinistre : le montant des réserves, l'erreur d'estimation par Chain-Ladder, l'erreur d'estimation par le filtre de Kalman selon le modèle ayant la RMSE la plus faible, et le ratio de l'erreur de Kalman sur l'erreur estimée par Chain-Ladder.

Le Tableau 12 compare les erreurs d'estimation des réserves selon les quatre méthodes suivantes :

- La première est l'erreur d'estimation par le filtre de Kalman sans tenir compte de la conjoncture économique. Il s'agit des mêmes résultats que ceux présentés dans le Tableau 10.
- La deuxième méthode est DEF. Elle tient compte de la conjoncture économique en expliquant l'évolution de la sinistralité par celle du nombre de défaillances.
- La troisième méthode est PROD. Elle tient compte de la conjoncture économique en expliquant l'évolution de la sinistralité par celle de la production manufacturière
- Quant à la quatrième méthode, il s'agit de DEF_PROD, c'est-à-dire qu'elle tient compte de la conjoncture économique en expliquant l'évolution de la sinistralité conjointement par celles du nombre de défaillances et de la production manufacturière.

Période de sinistre	Erreur d'estimation par filtre de Kalman			
	Sans conjoncture	DEF	PROD	DEF_PROD
5	-6 433 945	- 5 911 019	- 5 938 439	- 5 723 535
6	613 914	725 669	592 793	670 301
7	1 697 605	2 546 370	2 811 732	2 788 831
8	424 804	3 942 344	4 120 846	3 817 789
9	-59	26 875	-33 881	-72 366
10	-155 039	- 191 727	- 268 731	- 298 521
11	-1 327 686	- 1 247 336	- 1 969 760	- 2 304 586
12	507 347	291 022	690 581	953 248
13	120 088	-821 037	-195 796	217 994
14	-4 527	-1 052 193	-183 275	-284 086
15	-3 697 225	-3 286 155	-5 817 028	-3 027 232
RMSE	2 346 428	2 553 978	2 997 630	2 543 579

Tableau 12. Comparaison des erreurs d'estimation des réserves selon 4 méthodes de Kalman, avec et sans prise en compte de la conjoncture économique. Modélisation sur l'ensemble de l'historique

Les remarques suivantes peuvent en découler :

Tout d’abord, la prise en compte de la conjoncture économique n’améliore pas les résultats d’estimation des réserves en termes de RMSE. Le filtre de Kalman le plus performant est celui qui ne tient pas compte de la conjoncture économique. Parmi les modèles avec prise en compte de cette dernière, le modèle ayant la RMSE la plus faible est le modèle DEF_PROD, c’est-à-dire celui qui modélise l’évolution de la sinistralité conjointement par celles du nombre de défaillances et de la production manufacturière.

Ensuite, la prise en compte de la conjoncture économique améliore l’estimation des réserves pour quelques périodes de sinistre. Parmi les 11 périodes étudiées, seules cinq périodes présentent une meilleure estimation des réserves par la prise en compte de la conjoncture économique. Il s’agit des périodes 5, 6, 11, 12 et 15. L’estimation des réserves pour les six périodes restantes est plus précise par le modèle sans conjoncture économique.

Enfin, une modélisation linéaire sur l’ensemble de l’historique détériore les résultats, vraisemblablement à cause d’une modélisation peu précise. Le fait que cette dernière soit effectuée au global ne permet de prendre en compte ni le caractère local de la relation liant la sinistralité à la conjoncture économique, ni les évolutions de cette relation au fil du temps. De ce fait, l’estimation de la sinistralité à l’ultime se trouve dégradée.

Malgré cette dégradation, le filtre de Kalman reste plus précis que la méthode de Chain-Ladder. Le Tableau 13 compare les erreurs d’estimation des réserves par la méthode de Chain-Ladder (se référer au Tableau 10) à l’erreur maximale d’estimation par filtre de Kalman (en d’autres termes, il s’agit de l’erreur maximale absolue pour chacune des périodes de sinistre dans le Tableau 12). Dans le pire des cas, le calcul des réserves est plus précis par le filtre de Kalman que par la méthode de Chain-Ladder : il génère l’erreur d’estimation absolue la plus faible.

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d’estimation par CL	Erreur maximale d’estimation par Kalman
5	13 400 133	-8 118 654	-6 433 945
6	16 082 686	-2 834 962	725 669
7	18 425 200	-3 163 736	2 811 732
8	18 368 042	98 937 691	4 120 846
9	18 350 083	19 113 970	-72 366
10	17 753 242	1 780 948	- 298 521
11	18 314 769	-5 678 211	- 2 304 586
12	19 232 117	-5 470 916	953 248
13	20 681 261	-8 367 029	-821 037
14	22 366 196	-13 312 714	-1 052 193
15	25 460 747	-15 858 608	-5 817 028

Tableau 13. Comparaison de l’erreur d’estimation des réserves par la méthode de Chain-Ladder avec la pire erreur obtenue par filtre de Kalman pour le dispositif CAP Relais avec montants garantis constants

4.7 Calcul des réserves sur l'ensemble du dispositif CAP Relais

4.7.1 Périmètre de calcul des réserves

Jusqu'à présent, les réserves étaient calculées jusqu'à chaque période de sinistre, conformément à l'équation décrite dans la section 3.5 et à la méthodologie présentée dans la section 2.6. Dans ce paragraphe, nous envisageons d'utiliser le filtre de Kalman pour estimer les réserves du dispositif CAP Relais jusqu'à la période 15, et ce quelle que soit la période de sinistre étudiée. La Figure 17 schématise le fonctionnement souhaité. Pour une période de sinistre donnée, le triangle des charges de sinistre est représenté par les cases en vert. Les réserves se calculant jusqu'à la fin du dispositif CAP Relais, les différentes périodes de sinistre et de développement à prendre en compte dans le calcul des réserves sont représentées en orange. L'objectif est de ne pas se limiter à la période maximale observée de développement, mais de tenir compte de tous les développements à venir, jusqu'à l'infini.

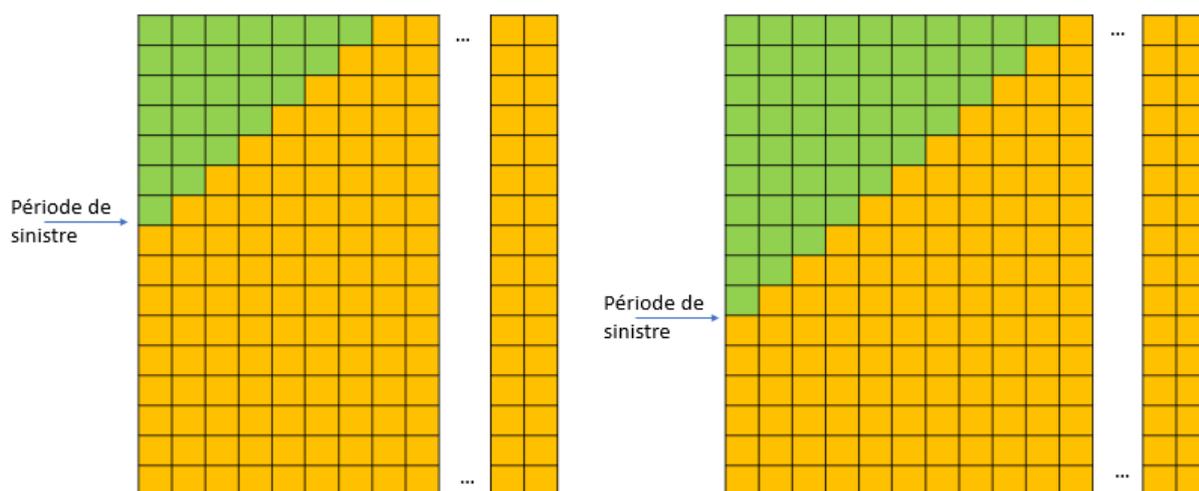


Figure 17. Triangle de sinistres avec deux exemples de période de sinistre : le montant des réserves se calcule jusqu'à la fin du dispositif CAP Relais. Les observations sont surlignées en vert ; la sinistralité à prédire est surlignée en orange

4.7.2 Formule de calcul des réserves

Prendre en compte les périodes de développement jusqu'à l'infini revient à modéliser une queue de distribution, ce qui ne fait pas l'objet de nos travaux. En revanche, un assureur-crédit dispose, en se basant sur l'historique de la sinistralité, de la distribution et peut donc extrapoler ses développements jusqu'à l'infini. En pratique en assurance-crédit, au-delà de 10 périodes de développement, l'impact sur la sinistralité est très faible et l'infini peut être considéré comme étant atteint à partir de la période 10. Ne disposant pas d'un tel historique de sinistralité en dehors de CAP Relais, et ne disposant pas non plus du portefeuille CAP Relais (qui aurait pu nous renseigner sur les délais contractuels de paiement pour anticiper une distribution hypothétique du développement de la sinistralité), nous n'avons pas d'autres choix que de nous orienter vers les cadences de développement de la Figure 7 afin d'estimer la queue du développement. Dans les faits, cette courbe de cadencement n'est pas connue au début du dispositif CAP Relais, mais l'assureur-crédit peut

s'appuyer sur la sinistralité historique et en déduire un cadencement similaire. Cela suppose bien évidemment que les cadences de développement ne sont pas modifiées par la mise en place du dispositif CAP Relais.

Nous estimons que jusqu'à la période 5 de développement, la sinistralité déclarée équivaut à 80% de la sinistralité à l'ultime. Le Tableau 14 détaille les coefficients d'extrapolation pour chaque période de développement. Nous observons que 99% de la sinistralité à l'ultime sont déclarées en moyenne jusqu'à la période 9 de développement, donc 9 mois après l'émission de la facture par l'assuré. Les réserves jusqu'à la fin du dispositif se calculent donc de la façon suivante, pour une période de sinistre i :

$$R_i = \frac{1}{CoefExtrap_i} \left(\sum_{l=1}^{15} \hat{S}_l - \sum_{l=0}^i \sum_{j=0}^{i-l} s_{l,j} \right).$$

Il s'agit de comptabiliser les réserves jusqu'à la période de développement i et d'extrapoler le résultat jusqu'à l'infini. Les différents termes entrant en jeu sont :

- S_l les éléments du vecteur d'état du filtre de Kalman à l'itération 15 (car nous disposons de 16 périodes de sinistre pour le dispositif CAP Relais),

$$\hat{x}_{15} = (\hat{S}_{15}, \hat{S}_{14}, \dots, \hat{S}_1, \hat{S}_0).$$
- Les montants $s_{l,j}$, $l = 0, \dots, i$ et $j = 0, \dots, i - l$ représentent les montants de charges de sinistre connus jusqu'à la période i
- $CoefExtrap_i$ est le coefficient d'extrapolation à l'ultime pour la période i de sinistre

Période de développement	Coefficient d'extrapolation à l'ultime
5	80,7%
6	90,6%
7	95,9%
8	98,4%
9	98,9%
10	99,3%
11	99,5%
12	99,6%
13	99,8%
14	99,9%
15	99,9%

Tableau 14. Coefficients d'extrapolation à l'ultime par période de développement

4.7.3 Résultats

Cette section présente l'erreur d'estimation des réserves par le filtre de Kalman. Quatre versions de ce dernier seront exploitées : la première est celle ne prenant pas en compte la conjoncture économique contrairement aux trois autres : DEF, PROD et DEF_PROD impliquant respectivement le nombre de défaillances, la production manufacturière et ces deux indicateurs dans la modélisation linéaire de la dérivée de la sinistralité.

Pour une période de sinistre, les données relatives à la conjoncture économique ne sont connues que jusqu'à un à deux mois avant cette période, et seules des projections pour les périodes à venir peuvent être proposées, par exemple par la Banque de France. Ces projections permettent de déduire les valeurs futures pour les variables liées à la conjoncture économique. Dans notre étude, nous n'utilisons pas les valeurs projetées des indicateurs afin de ne pas induire de biais supplémentaire lié aux hypothèses sous-jacentes à ces projections. Nous optons pour les valeurs réelles pour chacun des indicateurs de la conjoncture économique, ce qui rend l'interprétation des résultats dépendante uniquement du filtre de Kalman.

Le Tableau 15 présente les résultats en termes d'erreur d'estimation des réserves. S'agissant des performances, ces résultats passent d'une erreur d'estimation importante pour la période de sinistre 5 à des erreurs faibles pour les périodes 6 et 7, avant de connaître un rebond de l'erreur pour les périodes 8 à 11. Enfin, à partir de la période 12, l'erreur d'estimation redevient faible. Notre interprétation de ces résultats se basera principalement sur l'explication de la principale source d'erreur, à savoir l'inadéquation entre le modèle de Kalman et le futur à prédire.

Période de sinistre	Montant des réserves	Erreur d'estimation par filtre de Kalman			
		Sans conjoncture	DEF	PROD	DEF_PROD
5	71 254 960	-37 380 411	-22 150 714	-24 110 303	-24 662 977
6	67 058 760	-6 312 822	2 581 263	873 647	267 401
7	62 609 453	-3 397 681	4 032 928	2 637 542	1 358 399
8	56 653 971	-6 225 832	7 525 384	6 364 359	4 710 913
9	51 688 457	-22 807 275	-19 505 304	-20 837 593	-21 667 093
10	46 919 255	-20 977 973	-31 730 899	-29 793 136	-28 615 671
11	42 769 842	-9 340 526	-24 577 043	-23 301 440	-22 714 958
12	37 738 008	-3 512 693	-3 178 681	-1 933 208	-1 275 308
13	33 814 581	-3 423 354	-4 128 735	-3 700 622	-3 405 362
14	30 014 229	-2 682 820	-2 723 038	-1 931 602	-2 102 051
15	25 571 620	-3 821 868	-3 397 028	-5 927 902	-3 138 105

Tableau 15. Erreur d'estimation des réserves, jusqu'à la fin du dispositif CAP Relais, par filtre de Kalman, sans et avec prise en compte de la conjoncture économique

Tout d'abord, la période 5 est caractérisée par une erreur importante. Ceci est d'autant plus attendu que le filtre de Kalman n'a pas encore eu le temps de s'adapter aux données. Après la réception de l'observation z_5 , une étape de mise à jour du filtre de Kalman est réalisée, et c'est cette nouvelle version du filtre qui s'applique à la période 6.

Pour les périodes de sinistre 6 et 7, l'erreur baisse drastiquement et ceci peut s'expliquer par une adéquation entre le modèle de Kalman et le modèle futur « moyen ». En comparant d'un côté l'erreur obtenue par le filtre de Kalman sans conjoncture économique, et de l'autre les erreurs quand la conjoncture économique est prise en compte, nous pouvons déduire que la conjoncture économique améliore fortement les estimations pour la période 6 et à un degré moindre pour la période 7.

L'erreur d'estimation pour la période 8 augmente par rapport à celle de la période 7 avant d'exploser pour les périodes 9, 10 et 11. Pour rappel, la nouvelle observation z_8 a peu contribué à la mise à jour du modèle, nous avons accordé plus de confiance dans le modèle que dans l'observation. Nous avons ensuite inversé les

poids pour la période 9, ce qui a pour effet manifeste de faire dériver les estimations des réserves futures. L'hypothèse que nous émettons est que le filtre de Kalman à l'issue de la période 9 de sinistre n'est pas représentatif du modèle futur. Cela se confirme en observant les erreurs pour les périodes 10 et 11, d'autant plus que les performances du filtre de Kalman pour ces périodes restent excellentes quand les réserves sont calculées jusqu'à la période de sinistre (Tableau 12). De plus, la conjoncture économique semble détériorer les résultats pour les périodes 10 et 11 par rapport à un modèle sans conjoncture économique. Par ailleurs, il s'agit des 2 périodes pour lesquelles le lien entre la sinistralité et les indicateurs de la conjoncture économique est le moins marqué, comme le montre la Figure 15.

Afin de valider l'hypothèse selon laquelle le modèle de Kalman à l'issue de la période 9 n'est pas représentatif du modèle futur, nous avons étudié la part de la sinistralité à l'ultime entre les périodes de développement 2 et 7, pour chaque période de sinistre i en comparant les périodes allant de 0 à i aux périodes $i + 1$ à 15. Le choix des périodes de développement se justifie par la forme de la courbe des cadences comme nous le montrons dans la Figure 7. Nous calculons les 2 grandeurs suivantes :

- Part de la sinistralité jusqu'à la période i : $(\sum_{l=0}^i \sum_{j=2}^7 S_{l,j}) / (\sum_{l=0}^i \sum_{j=0}^{29} S_{l,j})$
- Part de la sinistralité future à la période i : $(\sum_{l=i+1}^{15} \sum_{j=2}^7 S_{l,j}) / (\sum_{l=i+1}^{15} \sum_{j=0}^{29} S_{l,j})$

Si ces deux grandeurs sont proches, nous pouvons émettre l'hypothèse que le modèle futur équivaut au modèle actuel. Dans le cas contraire, les modèles ne correspondent pas et projeter le futur à partir d'un modèle inadéquat engendre une erreur importante lors de l'estimation des réserves.

Le Tableau 16 montre qu'à partir de la période 8, le modèle construit jusqu'à une période de sinistre donnée i n'est pas cohérent avec le modèle futur, c'est-à-dire celui à partir de la période $i + 1$. Ceci explique donc les raisons pour lesquelles les erreurs d'estimation par filtre de Kalman sont très importantes pour les périodes de sinistre 8 à 11. Le fait que les erreurs baissent à partir de la période 12 se justifie par la confiance que nous avons accordée dans l'observation par rapport au modèle (voir la section 4.5.2), ce qui a permis à ce dernier de mieux correspondre au modèle réel. Ceci a comme conséquence une erreur d'estimation des réserves plus faible.

Période de sinistre	Part de la sinistralité à l'ultime jusqu'à la période de sinistre	Part de la sinistralité à l'ultime pour les périodes de sinistre futures
5	91%	91%
6	91%	91%
7	91%	91%
8	88%	94%
9	89%	94%
10	89%	94%
11	89%	95%
12	89%	96%
13	90%	97%
14	90%	97%

Tableau 16. Part de la sinistralité à l'ultime entre les périodes de développement 2 et 7, d'un côté jusqu'à la période de sinistre et de l'autre pour les périodes futures

4.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le filtre de Kalman pour le calcul des réserves au titre des dispositifs CAP Relais, CAP et CAP+.

Nous avons démontré que le calcul des réserves est plus précis avec le filtre de Kalman qu'avec la méthode de Chain-Ladder. Une erreur d'estimation élevée peut s'expliquer, soit par des observations aberrantes, soit par une inadéquation entre le modèle et les cadences réelles de développement. Grâce au compromis entre la confiance accordée dans le modèle et celle accordée dans les observations, il est tout à fait possible d'améliorer de façon significative les performances du filtre de Kalman. Ces constats sont valables pour le dispositif CAP Relais, que les montants garantis soient constants ou évolutifs.

Concernant le dispositif CAP, ni le filtre de Kalman ni la méthode de Chain-Ladder ne semblent pertinents pour calculer les réserves. Ceci est dû à un mouvement erratique des cadences de développement des sinistres, qui empêche toute modélisation fiable.

En revanche, grâce à une certaine régularité dans les cadences de développement au titre du dispositif CAP+, le filtre de Kalman améliore de façon importante les résultats de la méthode de Chain-Ladder.

Ensuite, nous avons modélisé l'évolution de la sinistralité au titre de CAP Relais en fonction de celles d'indicateurs relatifs à la conjoncture économique. Le modèle a été intégré au filtre de Kalman et a permis d'estimer la sinistralité à l'ultime pour une période de sinistre donnée en fonction de celle de la période précédente. Nous avons montré que, pour ce cas d'usage, la prise en compte de la conjoncture économique n'améliore pas les résultats d'estimation des réserves en termes de RMSE, même si les erreurs d'estimation pour certaines périodes de sinistre se trouvent réduites.

Enfin, nous avons calculé les réserves pour l'ensemble du dispositif CAP Relais à partir d'une période de sinistre donnée. Une estimation précise des réserves jusqu'à une période de sinistre donnée n'est pas synonyme d'une estimation précise des réserves futures : cela dépend de façon importante de l'écart qui peut exister entre le modèle de Kalman jusqu'à la période de sinistre en question et le modèle futur.

Conclusion générale

Les travaux présentés dans le cadre de ce mémoire avaient pour objectif de répondre à la question : *Le filtre de Kalman est-il pertinent pour le calcul des provisions de sinistre ?* Avant d'y répondre, nous rappelons le contexte et les principales conclusions que nous avons pu tirer tout au long de ce travail.

Tout d'abord, nos travaux concernent plus spécifiquement l'assurance-crédit qui joue un rôle économique essentiel, en couvrant les entreprises contre le risque de défaillance des clients auxquels elles accordent des délais de paiement. Les méthodes de calcul des provisions sont les mêmes que celles pour l'assurance non-vie. Nous y trouvons en particulier les méthodes de Chain-Ladder et de Bornhuetter-Ferguson, agrégées et basées sur les triangles de développement. Compte-tenu du peu de données dont nous disposons, il n'a été ni pertinent ni envisageable de travailler sur des méthodes de provisionnement individuel. Nous nous sommes orientés vers les modèles Espace-Etat, et en particulier vers le filtre de Kalman, en définissant l'état comme étant la sinistralité à l'ultime et les observations comme étant la sinistralité déclarée pour une période de sinistre et une période de développement données. Nous avons proposé une adaptation du filtre de Kalman à la problématique de calcul des réserves, et mis en place des méthodes d'estimation des différents paramètres caractérisant le filtre de Kalman, tout en recommandant que les paramètres soient indépendants de la période de sinistre. Nous avons mis en œuvre nos solutions dans trois cas distincts : dans le premier cas, les montants garantis sont supposés constants, et aucune donnée exogène n'est introduite dans la modélisation. Dans le second cas, les montants garantis sont supposés évolutifs, ce qui induit du changement dans l'équation d'état du filtre de Kalman. Enfin, dans le dernier cas, nous avons proposé une adaptation du filtre de Kalman pour tenir compte de la conjoncture économique. Ces cas sont représentatifs de cas d'usage réels concernant trois dispositifs de l'assurance-crédit ayant vu le jour à la suite de l'épidémie de la COVID19. Il s'agit de CAP Relais, CAP et CAP+.

Les performances du filtre de Kalman ont été comparées à celles de la méthode de Chain-Ladder en procédant à du backtesting. Il en ressort que le calcul des réserves est plus précis avec le filtre de Kalman qu'avec la méthode de Chain-Ladder, avec des erreurs parfois cent fois inférieures, comme le démontre le Chapitre 4, et en particulier les Tableau 10 et Tableau 11. Une erreur d'estimation élevée pour le filtre de Kalman s'explique, soit par des observations aberrantes, soit par une inadéquation entre le modèle et les cadences réelles de développement. Grâce à un compromis entre la confiance accordée dans le modèle et celle accordée dans les observations, il est tout à fait possible d'améliorer de façon significative les performances du filtre de Kalman. Ces constats sont valables pour le dispositif CAP Relais, que les montants garantis soient constants ou évolutifs. Concernant le dispositif CAP, ni le filtre de Kalman ni la méthode de Chain-Ladder ne semblent pertinents pour calculer les réserves. Ceci est dû à un mouvement erratique des cadences de développement des sinistres, qui empêche toute modélisation fiable. En revanche, grâce à une certaine régularité dans les cadences de développement au titre du dispositif CAP+, le filtre de Kalman améliore de façon importante les résultats de la méthode de Chain-Ladder. Pour rappel, ces deux dispositifs sont très particuliers et concernent plus spécifiquement des garanties accordées à des assurés ayant des besoins pour des acheteurs en particulier et dans le contexte économique de la COVID19.

Ensuite, nous avons modélisé l'évolution de la sinistralité au titre de CAP Relais en fonction de celle d'indicateurs relatifs à la conjoncture économique. Le modèle a été intégré au filtre de Kalman et a permis d'estimer la sinistralité à l'ultime pour une période de sinistre donnée en fonction de celle relative à la période précédente. Nous avons montré que la prise en compte de la conjoncture économique n'améliore pas les résultats d'estimation des réserves en termes de RMSE. Ceci est dû au fait qu'il est très difficile de trouver une relation linéaire entre la sinistralité CAP Relais et les indicateurs de la conjoncture économique, qui puisse être valable quelle que soit la période de sinistre.

Enfin, nous avons calculé les réserves pour l'ensemble du dispositif CAP Relais à partir d'une période de sinistre donnée. Une estimation précise des réserves jusqu'à cette période de sinistre n'est pas synonyme d'une estimation précise des réserves futures : cela dépend de façon importante de l'écart qui peut exister entre le modèle de Kalman jusqu'à la période de sinistre en question et le modèle futur.

Le filtre de Kalman est-il pertinent pour le calcul des provisions de sinistre ?

Au vu des résultats présentés et de la précision du filtre de Kalman par rapport à celle de la méthode de Chain-Ladder, la réponse est clairement oui. Même si les cas d'usage présentés concernent l'assurance-crédit, le filtre de Kalman peut être appliqué à d'autres branches de l'assurance non-vie. Cette méthode est peu complexe et les performances peuvent être anticipées. En revanche, quelques points d'attention sont à considérer.

Tout d'abord, le filtre de Kalman reste linéaire et il n'est optimal que si les bruits du processus et des observations suivent une loi normale et qu'ils sont mutuellement indépendants. Dans le cas d'un modèle non linéaire, le filtre de Kalman étendu peut être une alternative, mais sans garantie de convergence. Dans le cas non gaussien, c'est le filtre particulaire, plus communément connu sous le terme « méthodes de Monte-Carlo séquentielles » qui peut être utilisé. Nous restons donc sur des modèles Espace-Etat où l'état peut être la sinistralité à l'ultime qu'il convient d'estimer. Nous n'avons testé aucune des deux alternatives, même si nous pensons qu'elles peuvent être pertinentes pour le provisionnement dans le cas non linéaire ou non gaussien.

Ensuite, l'initialisation du filtre de Kalman est une étape primordiale. Nous recommandons de se baser sur les observations pour estimer les différentes grandeurs sauf si des données historiques ou des connaissances a priori permettent d'estimer les matrices de covariance des observations et des bruits. Quant à la matrice de transition, elle dépend du modèle d'état choisi. La matrice des observations dépend des cadences de développement. Nous avons opté dans les deux cas pour des matrices diagonales, ce qui a pour conséquence de simplifier le problème et de permettre une solution mathématique. Nous aurions pu par exemple opter pour une matrice non diagonale, ce qui nous aurait contraints à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes et sans garantie de convergence. Notre choix s'est également porté sur des paramètres indépendants de la période de sinistre dans le cadre de la version générique du filtre de Kalman. Ce choix permet une meilleure stabilité du modèle de Kalman et rend plus facile l'interprétation des ordres de grandeur des erreurs d'estimation.

Les erreurs d'estimation importantes par filtre de Kalman sont dues soit à des valeurs aberrantes, soit à une inadéquation entre le modèle de Kalman et la réalité. Notre recommandation est de rendre la matrice de

covariance des observations dépendante de la période de sinistre uniquement pour traiter ces cas précis. Il est donc nécessaire de pouvoir qualifier si les observations sont aberrantes, et dans ce cas, opter pour une pondération plus forte pour le modèle que pour l'observation. Cette qualification n'est en général pas difficile surtout si l'actuaire connaît les ordres de grandeur des observations. En revanche, l'inadéquation entre le modèle de Kalman et la réalité est plus compliquée à anticiper. Il peut être possible de déduire cette inadéquation en observant l'évolution de l'estimation du montant des réserves (comme nous l'avons fait dans cette étude), ou bien en utilisant des connaissances a priori sur un changement de modèle, dû par exemple à un changement dans le processus de gestion des sinistres. Grâce à ce travail de qualification du modèle ou de la donnée, il est possible de modifier la matrice de covariance des observations ce qui peut avoir pour conséquence une baisse significative de l'erreur.

Ensuite, grâce au filtre de Kalman, l'introduction de données externes relatives à la conjoncture économique se fait aisément. Il suffit d'intégrer l'effet de la conjoncture économique dans l'estimation de l'état, ce qui revient à modifier l'équation d'état. Cela suppose en revanche que la relation liant la sinistralité à la conjoncture économique est connue ou qu'elle peut être estimée par l'assureur en se basant sur l'historique passé. Dans notre cas, étant donné que la prise en compte de la conjoncture économique n'améliore pas le calcul des réserves, nous aurions pu utiliser une maille plus fine des indicateurs : par exemple, tous les secteurs d'activité n'ayant pas été touchés de la même façon par la crise de la COVID19, il aurait été plus pertinent d'effectuer une modélisation et d'y intégrer les indicateurs de la conjoncture économique par secteur d'activité et non pas au global. Une autre possibilité aurait été de rechercher d'autres indicateurs économiques, comme ceux relatifs aux délais de paiement par exemple.

Enfin, nous proposons une méthode permettant de calculer les réserves, s'adaptant aussi bien aux problématiques avec montants garantis constants qu'à celles avec montants garantis évolutifs. Cette méthode peut intégrer des indicateurs de la conjoncture économique. Ses performances dépassent significativement celles de la méthode de Chain-Ladder. Tout en restant simple et facilement auditable, le filtre de Kalman a d'importants atouts pour pouvoir se démocratiser au sein du monde actuariel français.

Références bibliographiques

- [1] https://www.allianz.com/content/dam/onemarketing/azcom/Allianz_com/investor-relations/en/results-reports/sfcr/2021/Euler-Hermes-SA-SFCR-2020.pdf (rapport SFCR Euler-Hermes en 2020), page consultée le 12/11/2022
- [2] Alpuim, T., Ribeiro, I. (2003) A State Space Model for Run-Off Triangles. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 19, 105-120
- [3] <https://www.assurance-credit-entreprise.fr/compagnies/> (compagnies d'assurance-crédit et leurs résultats financiers), page consultée le 27/11/2021
- [4] AYADI S. (2018) Calcul de provisions pour le produit Single Risk – risque politique et commercial. Mémoire en actuariat, ENSAE Paristech
- [5] <https://www.banque-france.fr/statistiques/chiffres-cles-france-et-etranger/defaillances-dentreprises/suivi-mensuel-des-defaillances> (nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement, données non corrigées), page consultée le 11/11/2022
- [6] Benjamin, S., Eagles, L.M. (1986) Reserves in Lloyd's and the London Market *Journal of the Institute of Actuaries* (1886-1994), vol. 113, no. 2, 197–256
- [7] Bornhuetter, R.L., Ferguson, R.E. (1972) The actuary and IBNR, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, Vol. LIX, 181-195
- [8] Charpentier, A., Denuit, M. (2005) *Mathématiques de l'assurance non-vie, Tome 2 : Tarification et provisionnement*, Economica
- [9] Chukhrova, N., Johannssen, A. (2017) State Space Models and the Kalman-Filter in Stochastic Claims Reserving: Forecasting, Filtering and Smoothing. *Risks* 5(2), 1-23
- [10] Chukhrova, N., Johannssen, A. (2021) Stochastic Claims Reserving Methods with State Space Representations: A Review. *Risks* 9(11), 198
- [11] <https://www.coface.com/fr/content/download/208969/3552667/file/COFACE+-Rapport+SFCR+2021+FR+VDEF.pdf> (rapport SFCR de COFACE en 2021), page consultée le 12/11/2022
- [12] De Jong, P. Zehnwirth, B. (1983) Claims Reserving, State-Space Models and the Kalman Filter. *Journal of the Institute of Actuaries* 110: 157–181
- [13] De Vylder. F. (1978) Estimation of IBNR claims by least squares, *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 78, 249-254
- [14] [RRRR] England, P. D., Verrall, R.J. (2002) Stochastic claims reserving in general insurance. Présenté à Institute of Actuaries, 28 janvier 2002
- [15] https://entreprises.banque-france.fr/sites/default/files/822294_fiche-224.pdf (sociétés d'assurance-crédit), page consultée le 12/11/2022
- [16] https://entreprises.banque-france.fr/sites/default/files/822294_fiche-604.pdf (présentation générale de l'assurance-crédit), page consultée le 12/11/2022
- [17] <https://www.eulerhermes.fr/blog/role-assureurs-credit-mesures-soutien-entreprises.html> (rôle du crédit interentreprises dans l'économie), page consultée le 20/11/2021
- [18] Guillaumin C. (2008) Détermination d'une méthode de provisionnement pour les créances douteuses. Mémoire en actuariat, Université Paris Dauphine
- [19] <https://www.icisa.org/documents/icisa-tci-insured-exposure-2006-2020/>, (total des sommes assurées dans le monde en assurance-crédit), page consultée le 17 juin 2021

- [20] <https://www.icisa.org/documents/icisa-tci-2006-2020/>, (ratios S/P en assurance-crédit), page consultée le 17 juin 2021
- [21] <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/definition/c2043> (Explication de l'indice Insee de chiffre d'affaires), page consultée le 03/11/2022
- [22] <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/source/indicateur/p1634/description> (Indice de chiffre d'affaires dans le commerce), page consultée le 11/11/2022
- [23] <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/source/indicateur/p1637/description> (Indice de chiffre d'affaires dans les services), page consultée le 11/11/2022
- [24] <https://www.insee.fr/fr/statistiques/serie/001656092> (Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement, données corrigées), page consultée le 11/11/2022
- [25] <https://www.insee.fr/fr/statistiques/serie/010537945> (Indice brut de la production industrielle), page consultée le 11/11/2020
- [26] <https://www.insee.fr/fr/statistiques/5413924> (la consommation des ménages en biens), page consultée le 11/11/2022
- [27] Kalman, R. E. (1960) A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering Vol. 82, 35-45
- [28] Kalman, R. E., Bucy R. S. (1961) New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering Vol. 83, 95-107
- [29] Larsen, C. (2007) An individual claims reserving model. ASTIN Bulletin, 37(1), 113–132
- [30] Lopez, O., Milhaud, X., Thérond, P. (2016) Tree-based censored regression with applications in insurance. Electronic journal of statistics, 10(2), 2685–2716
- [31] Mack, T. (1993) Distribution-free calculation of the standard error in the chain-ladder reserving method. ASTIN Bulletin, 23(2), 213–225
- [32] Pigeon, M., Antonio, K., Denuit, M. (2013) Individual loss reserving with the multivariate skew normal framework. ASTIN Bulletin, 43, 399–428
- [33] <https://publications.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/wp824.pdf> (L'impact de la crise sanitaire sur la situation financière des entreprises en 2020), page consultée le 20/11/2021
- [34] Rajamani, M. (2007). Data-based Techniques to Improve State Estimation in Model Predictive Control. Thèse de doctorat, Université de Wisconsin–Madison
- [35] Renshaw, E. Verall, R.J. (1998) A stochastic model underlying the chain-ladder technique. British Actuarial Journal, 4(4), 903-923
- [36] http://www.senat.fr/cra/s20211117/s20211117_2.html (Projet de loi de finance rectificative pour 2021), page consultée le 27/11/2021
- [37] Verrall, R.J. (1994) A Method for Modelling Varying Run-Off Evolutions in Claims Reserving. ASTIN Bulletin, 24, 325-332
- [38] Wright, T.S. (1990) A Stochastic Method for Claims Reserving in General Insurance. Journal of the Institute of Actuaries, 117, 677–731
- [39] Wüthrich, M.V. (2018) Machine learning in individual claims reserving. Scandinavian Actuarial Journal, 2018(6), 465–480
- [40] Wüthrich, M.V (2018) Neural networks applied to chain–ladder reserving. European Actuarial Journal, 8(2), 407–436