

Remerciements

Je remercie mon responsable de mémoire M. Desmettre pour ses conseils et son temps, ainsi que mes camarades de promotion du CNAM pour leurs soutiens et entraides.

Mes remerciements vont aussi à ma famille, en particulier à ma femme et à mon père, ainsi qu'à mes amis, pour leur aide et soutien durant la formation et la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

Remerciements.....	ii
1 Introduction.....	1
2 Le risque de contrepartie sur les dérivés pour les assureurs	4
2.1 Inscription du risque de contrepartie dans le paysage des risques assurantiels	4
2.2 Enjeux et problématiques pour les assureurs	6
2.3 Définitions du risque de contrepartie sur un produit dérivé	7
2.3.1 Définition financière	7
2.3.2 Définition comptable.....	8
2.3.3 Définition réglementaire	9
2.3.4 Définition mathématique	10
2.4 Stratégie opérationnelle.....	13
2.4.1 Progiciel ou développement interne.....	13
2.4.2 Premiers constats	14
3 Univers multi-curve	17
3.1 Eléments quantitatifs et courbe des taux.....	17
3.1.1 Obligation Zéro-coupon.....	17
3.1.2 Obligation couponnée	17
3.1.3 Taux Forward	18
3.1.4 Swap	19
3.1.5 Courbe des taux.....	20
3.2 Approche qualitative de la compréhension du multi-curve.....	21
3.2.1 Constat historique de l'apparition des bases inter-tenors.....	21
3.2.2 Collatéralisation.....	23
3.2.3 Mise en place de la réglementation EMIR.....	23
3.3 Approche quantitative de la compréhension du multi-curve	24
3.3.1 Approche mono-curve (avant crise).....	24
3.3.2 Approche Multi-curve (après crise).....	25
3.4 Reconstruction des courbes en univers Multi-curve.....	28
3.4.1 Multi-curve Mono-devises	28
3.4.2 Multi-curve en multi-devises	34
4 Modélisation du risque de contrepartie.....	40
4.1 Méthodes des add-ons	40
4.1.1 Dérivés de taux	41
4.1.2 Dérivés de change	43

4.2	Méthode de duplication via des options.....	43
4.2.1	Swap de taux mono-devise.....	44
4.2.2	Swap de devise	49
4.2.3	Forward/Future et Options	51
4.3	Méthode de Monte Carlo	52
4.3.1	Principe général.....	52
4.3.2	Structure de l'algorithme	53
4.3.3	Diffusion et calibration des facteurs de risque.....	54
4.4	Modélisation des appels de marge.....	63
4.5	SCR contrepartie.....	63
5	Comparaison des méthodes sur différents dérivés.....	66
5.1	Forward de taux et de change	66
5.1.1	Forward de taux.....	66
5.1.2	Forward de change.....	68
5.2	CVA des swaps de taux.....	70
5.3	CVA des swaps de change	78
5.4	Optimisation du SCR marché via le SCR contrepartie	80
6	Conclusion	82
7	Bibliographie.....	84
8	Annexes	85
7.1	Annexe 1 : Méthode standard CVA sous Bâle III	85
7.2	Annexe 2 : Méthode avancée CVA sous Bâle III - Article 383 du CRR	87
7.3	Annexe 3 : Risque de contrepartie sur les dérivés sous Solvabilité II.....	88
7.4	Annexe 4 : Stripping des probabilités de défaut à partir des prix CDS.....	92
7.5	Annexe 5 : Supervisory factor Bâle III.....	93
7.6	Annexe 6 : Corrélation SII et corrélation historiques	94
7.7	Annexe 7 : Prix cap ATM au 31/12/2020.....	95
7.8	Annexe 8 : Fonctions des paramètres A et B du modèle Cox-Ingersoll-Ross et génération du cube des probabilités de défaut via ce modèle	96
7.9	Annexe 9 : Cube des Mark-to-Futur calculés pour le cross currency swap.....	97
7.10	Annexe 10 : Calibration des chocs sur les spreads CDS dans le cadre du calcul de la VaR stressée.	98

Table des figures

Figure 1 : Bilan AXA au 31/12/2019 (Source AXA).....	4
Figure 2 : Expositions illustratives pour un swap de taux	12
Figure 3 : Tableau comparatif entre un développement interne et un progiciel pour le suivi de la CVA d'un portefeuille	14
Figure 4 : Impact du collatéral sur le profil des différentes expositions (EE, EPE, EEE, et CESF)	15
Figure 5 : Schéma des flux d'intérêts (noir) et de nominaux (rouge) d'un swap	19
Figure 6 : Courbe Euribor6M au 31/12/2020 (Source : Bloomberg).....	20
Figure 7 : Historique du fixing de l'Euribor 6M (en noir), de l'€STR (vert), et du spread entre ces deux fixings (rouge). (Source : Bloomberg)	21
Figure 8 : Spread ou base entre le taux swap contre Euribor 6M et le taux swap contre Euribor 3M. Maturité du swap 5 ans (bleu) et 10 ans (rouge). (Source : Bloomberg)	22
Figure 9 : Stripping des courbes €STR et Euribor 6M	29
Figure 10 : Résultat du stripping de la courbe €STR et Euribor 6M pour deux swaps de durée 20 ans	30
Figure 11 : Interpolation linéaire des ZC intermédiaires.....	33
Figure 12 : Courbes zéro-coupon Euribor 3M et Euribor 6M reconstruites à partir de la courbe Euribor 6M33	
Figure 13 : Résultats du stripping de la courbe swap pour l'Euribor 3M et l'Euribor 6M	34
Figure 14 : Courbes zéro-coupon Euribor 3M et Euribor 6M reconstruites à partir de la courbe €STR	34
Figure 15 : Résultats du stripping pour les courbes Euribor 3M et Euribor 6M à partir de €STR	34
Figure 16 : Relation de non-arbitrage sur le change	36
Figure 17 : Courbe ZC du GBP Libor 3M reconstruites de trois manières différentes	38
Figure 18 : Résultats du stripping du GBP LIBOR 3M à partir de trois courbes différentes	39
Figure 19 : Anciens facteurs de conversion Bâle II et Bâle III pour la CEM. (Source : Réglementation Bâle III)	41
Figure 20 : Multiplier en fonction de la valeur de dérivé nette du collatéral pour un add-on de 40	42
Figure 21 : Swap sous-jacent au moment du défaut.....	44
Figure 22 : Courbe de CDS pour plusieurs contreparties (gauche) et courbe des probabilités de défaut déduites pour ces mêmes contreparties (droite).....	49
Figure 23 : Flux d'un swap de devise (CCS) payeur TV	49
Figure 24 : Corrélations réglementaires Solvabilité II (Source : Règlement Délégué Solvabilité II)	54
Figure 25 : Résultats de la calibration pour les paramètres $b=15$ et $\sigma=0.015$	56
Figure 26 : Taux courts simulés avec $b=15$ et $\sigma=0.015$ pour 10 trajectoires différentes.....	57
Figure 27 : Résultats pour les paramètres $b=0.15$ et $\sigma=0.015$	58
Figure 28 : Résultats pour les paramètres $b=0.55$ et $\sigma=0.015$	59
Figure 29 : Trajectoires des taux courts simulés pour l'Euribor 6M avec $b=0.9$ et $\sigma=0.015$	59
Figure 30 : Trajectoires des cours de change EURJPY simulés	61
Figure 31 : Tableau des résultats de la calibration du modèle CIR pour les CDS	62
Figure 32 : Courbes des probabilités de défaut cumulé : bleue celle du modèle, et orange celle du marché	62
Figure 33 : CDS simulés par le modèle CIR	63
Figure 34 : Expected Exposure (EE) d'un contrat forward par la méthode des options	67
Figure 35 : EE, EPE et ENE d'un Forward de taux en méthode de Monte Carlo	68
Figure 36 : Expected Exposure d'un Forward de change (gauche : méthode des options, droite : Monte Carlo)	70
Figure 37 : Expected Exposure du swap IRS1 (gauche), Probabilité de défaut (Droite) et Profil de la CVA (en bas à gauche) avec la méthode des options	72
Figure 38 : EPE, ENE, EE du swap IRS 1 via la méthode de Monte Carlo.....	73
Figure 39 : Distribution de la CVA en Monte Carlo pour le swap IRS 1	73

Figure 40 : Expected Expoure du swap IRS2 (gauche), Probabilité de défaut (Droite) et Profil de la CVA (en bas) avec la méthode des options	74
Figure 41 : EPE, ENE, EE du swap IRS2 via la méthode de Monte Carlo.....	75
Figure 42 : Profil de la VaR à 95% et à 99% de l'EE du swap IRS2	75
Figure 43 : EPE, ENE, et EE d'un swap de taux en dehors de la monnaie (gauche) et dans la monnaie (droite). Profils obtenus en Monte Carlo.....	76
Figure 44 : Distribution et influence du collatéral sur la CVA du swap IRS2	76
Figure 45 : Distribution de la CVA du swap IRS 2 avec et sans appels de marge	77
Figure 46 : VaR95 et VaR99 des expositions futures (EE) du swap IRS 2 avec et sans appels de marge	77
Figure 47 : Expected Exposure taux, change et total du swap de devise.....	79
Figure 48 : Distribution de la CVA et profil d'exposition (EPE, ENE et EE) du CCS en Monte Carlo	80

1 Introduction

L'essor du marché des dérivés¹ s'est déroulé principalement entre les années 2002 et 2008 avec un volume en notionnel qui est passé de 118 trillions à 792 trillions d'euros, soit 572% d'augmentation en 6 ans. Depuis 2008, le marché des dérivés s'est stabilisé² aux alentours d'un volume moyen de 700 trillions d'euros de notionnel. A titre comparatif, selon la SIFMA³, le volume total en 2021 du marché obligataire était de 140 trillions d'euros de notionnel et la capitalisation globale du marché action 144 trillions d'euros.

Le développement du marché des dérivés s'explique principalement par le besoin des institutionnels de couvrir leurs risques de marché (change, taux, actions, matière première, inflation) plus qu'à des fins spéculatives. Ainsi, les banques, les compagnies d'assurances et autres acteurs financiers peuvent insensibiliser une partie ou l'intégralité de leur bilan aux fluctuations d'un sous-jacent donné.

Cependant, en utilisant des dérivés, les institutionnels voient émerger un nouveau risque tout aussi volatil que le risque de marché : le risque de défaut de la contrepartie sur ces produits. **Ce risque est matérialisé par un ajustement de la valeur du dérivé au titre du risque de contrepartie appelé « Credit Value Adjustment » ou « CVA ». C'est cette grandeur qui sera étudiée dans ce mémoire.**

Le secteur financier n'échappe pas au constat fait par l'historien grec Thucydide⁴ puisque les crises se répètent depuis celle des Tulipes en 1636. A la suite de chaque crise financière, les pratiques de place ont évolué grâce à une prise de conscience des acteurs financiers mais aussi des politiques. Suite à la crise de 1929, le gouvernement américain met en place les premiers piliers de la réglementation du système bancaire avec le « *Banking Act* ». Plus récemment, la crise des subprimes entraînant la faillite de grandes banques comme Lehmann Brothers et le sauvetage du premier assureur mondial de l'époque AIG a amené les membres du G20 à réagir. Ainsi, le comité de Bâle a revu sa position, et dans une note⁵ publiée en 2011, il estime qu'environ deux tiers des pertes subies par les acteurs financiers au titre du risque de crédit étaient en fait des pertes liées à la CVA. L'EIOPA a aussi ajusté ses exigences en ajoutant la prise en compte du risque de contrepartie sur les dérivés dans le calcul du SCR. L'assureur doit donc être capable de suivre et de quantifier la CVA en appliquant les nouveaux standards de place en matière de valorisation érigés suite à la crise de 2007.

En conséquence, la réglementation financière a évolué de Bâle II à Bâle III pour les banques (acté en 2010 pour une application en 2019) et a été ajusté pour les assureurs et réassureurs lors du passage de Solvabilité I à Solvabilité II (2009 pour une application en 2016). Ces deux réglementations viennent renforcer le suivi des risques de liquidité et de crédit. Ainsi, la réglementation Bâle III pour les banques vient :

- Renforcer la liquidité des actifs des banques à court terme et moyen terme (LCR et NSFR) ;
- Durcir les pondérations des actifs dans le cadre du calcul du *risk weighted assets* (RWA) pour les besoins en fonds propre et ainsi favoriser les banques à aller sur des produits plus liquides et moins complexes, et donc décourager les produits exotiques et la titrisation non ou mal notée ;

Par ailleurs, Solvabilité II pour les compagnies d'assurances affine le calcul des besoins en fonds propres et du suivi des risques au travers de :

- La mise en place par l'EIOPA de deux ratios de solvabilité : MCR et SCR ;

¹ Un dérivé est un instrument financier s'échangeant sur des marchés organisés et de gré à gré dont la valeur fluctue en fonction d'un ou de plusieurs sous-jacents (actions, change, inflation, matière première, taux).

² En juin 2021 selon la BIS (Bank For International Settlements), le volume total des dérivés traités était de 720 trillions d'euros pour une valorisation brute de 14.9 trillions d'euros. Le marché des dérivés est en hausse de 5% par rapport au notionnel de 2020.

³ Securities Industry and Financial Markets Association

⁴ Au V^{ème} siècle avant J.C., constatait avec effroi que « l'histoire n'était qu'un perpétuel recommencement ».

⁵ <https://www.bis.org/press/p110601.htm>

- La valorisation des actifs et des engagements en valeur de marché de l'assureur. Cette valorisation s'appuie sur des scénarios économiques et des hypothèses de calculs ;
- La mise en place de l'ORSA afin de piloter en interne les risques propres de l'assureur.

Outre la réglementation qui s'est durcie en matière de gestion des risques pour les acteurs financiers, les pratiques ont elles aussi évoluées, notamment sur la méthodologie de valorisation des produits financiers et l'appréhension des risques de crédit et de liquidité (deux notions intimement liées par ailleurs). Ces risques étaient jusque-là sous-estimés et ont conduit les institutions financières à plusieurs changements majeurs dans leurs pratiques dont deux qui seront abordés dans ce mémoire :

- **La construction d'un environnement multi-curve** est détaillée afin de valoriser les dérivés. Jusqu'en 2007-2008, la majorité des banques et assureurs utilisaient une courbe unique pour calculer les forwards et les facteurs d'actualisation car les bases entre les tenors étaient jusqu'alors négligeables et négligées. Cet environnement de calcul était appelé environnement « mono-curve ». Lors de la crise des subprimes, les bases inter-tenors et inter-devises, jusqu'alors négligeables, sont devenues prépondérantes faussant ainsi les valorisations faites en mono-curve. Ainsi, cette crise a mis en avant des tenors plus ou moins liquides au sein d'une même devise ainsi que des devises plus ou moins liquides entre elles. Aujourd'hui, la majorité des acteurs financiers utilisent ou sont en train d'implémenter un environnement multi-curve pour valoriser leurs produits dérivés. Pour calculer la CVA, la première étape est donc de construire un univers multi-curve pour valoriser les dérivés le plus justement possible.
- **Le suivi du risque de contrepartie sur les dérivés** ne faisait pas l'objet d'une exigence en capital jusqu'en 2007. Contrairement au risque de contrepartie usuel sur des titres, la CVA est beaucoup plus volatile et doit donc être piloté quotidiennement. Ce risque n'est pas réservé aux banques même si ce sont ces dernières qui traitent la majorité des dérivés sur le marché. A titre d'exemple, AXA qui est l'un des principaux assureurs mondiaux avait 367 Mds d'euros de notionnel en dérivés sur un actif de 780 Mds d'euros en 2019.

La problématique du suivi du risque de contrepartie pour un assureur se pose à partir du moment où il couvre son bilan à l'aide de dérivés pour se prémunir des risques de marchés. Le mémoire apportera à l'actuaire les réponses aux questions suivantes : **Quelle méthode est la plus adaptée pour calculer le risque de contrepartie en fonction des dérivés détenus ? Quelles hypothèses sont faites ? Quelles sont les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes proposées ? Quels gains pour l'assureur ?** Pour répondre à ces questions, ce mémoire est divisé en quatre parties :

- La première partie dans laquelle est présentée le risque de contrepartie d'un point de vue théorique, financier et pratique. L'exemple d'AXA sera pris pour en quantifier les enjeux.
- La seconde partie détaillera la construction théorique d'un univers multi-curve ainsi que les résultats obtenus après reconstruction de cet univers. Cet univers doit être reconstruit afin de pouvoir disposer de données de marché les plus justes possibles pour calculer les pertes futures potentielles et donc la CVA. Cela permet aussi de mettre en application les derniers standards en termes de valorisation de dérivés.
- La troisième partie présente trois grandes méthodes de calcul de la CVA en allant de la méthode la plus simple à la plus compliquée : méthode standard ou des add-ons, méthode à l'aide d'option et enfin méthode de Monte Carlo. Dans cette partie est aussi effectuée la calibration des modèles de diffusions des facteurs de risque pour la méthode de Monte Carlo.
- La quatrième partie capitalise sur l'univers multi-curve construit et compare les CVA obtenues selon les différentes méthodes ainsi que la sensibilité des paramètres sur les résultats. Les résultats mettent

en balance le gain potentiel réalisé sur le coût en capital des dérivés avec une méthode plus fine et la complexité associée. Cela souligne notamment l'optimisation qui pourrait être faite en ayant un modèle interne pour suivre ce risque plutôt que d'avoir recours à l'approche standard.

2 Le risque de contrepartie sur les dérivés pour les assureurs

Avant de se lancer dans les calculs, plusieurs notions autour du risque de contrepartie et des dérivés doivent être détaillés afin de comprendre où se situe ce risque dans une compagnie d'assurance. Pour cela, nous verrons :

- L'utilisation de produits dérivés de l'assureur afin de couvrir son bilan contre les risques financiers (taux, change, actions et crédits) ;
- La définition du risque de contrepartie d'un produit dérivé ;
- L'aspect réglementaire auquel est soumis ce risque ;
- La stratégie opérationnelle à adopter afin de quantifier et suivre ce risque.

Le rapport annuel d'AXA publié en 2020 est utilisé afin d'illustrer les différentes notions ci-dessus.

2.1 Inscription du risque de contrepartie dans le paysage des risques assurantiels

Le bilan d'une entreprise est souvent présenté comme une photographie de l'entreprise à un instant donné et son compte de résultat comme le film (et donc la somme de photographie) entre deux bilans. La structure du bilan des compagnies d'assurances est très singulière puisqu'elle reflète une inversion du cycle de production propre à leur activité. En effet, l'assureur va percevoir a priori des primes pour couvrir un risque dont il connaîtra le coût définitif uniquement a posteriori. Les primes perçues sont tarifées pour faire face à un niveau probable de sinistralité mais le coût pour l'assureur est en théorie illimité. Du fait de cette particularité lié à son activité, l'assureur aura une structure de bilan qui lui est propre. Ainsi, au passif, la part des provisions techniques sera prépondérante car elle représente les engagements pris par l'assureur vis-à-vis de ses assurés. De même, à l'actif, la part des investissements fait par l'assureur à partir des primes perçues sera largement majoritaire. Dans le tableau ci-dessous, est présenté le bilan agrégé d'AXA au 31/12/2019 :

(En millions d'euros)

ACTIFS			PASSIFS		
Actifs incorporelles	40 852	5%	Capitaux propres	74 627	10%
Placements des entreprises d'assurance	590 726	76%	Dettes de financement	13 101	2%
Part des réassureurs dans des passifs liés à des contrats d'assurance et d'investissement	22 970	3%	Provisions techniques	539 630	69%
Placements des entreprises du secteur bancaire et autres activités	22 389	3%	Provisions pour risques et charges	9 742	1%
Impôts différés actifs	651	0%	Passifs relatifs aux entreprises du secteur bancaire	14 649	2%
Créances	40 439	5%	Impôts différés passifs	5 843	1%
Trésorerie	21 948	3%	Autres dettes	88 929	11%
Autres actifs	40 903	5%	Autres passifs	34 357	4%
TOTAL DE L'ACTIF	780 878	100%	TOTAL DU PASSIF	780 878	100%

Figure 1 : Bilan AXA au 31/12/2019 (Source AXA)

Ces chiffres illustrent bien la proportion très majoritaire des engagements de l'assureur matérialisés par ses provisions techniques pour 69% de son bilan, soit 540 milliards d'euros. Les fonds propres et les dettes

viennent en seconde position loin derrière avec respectivement 10% et 13%⁶. Les autres postes au passif sont bien inférieurs et ne représentent que 8%. A l'actif, les placements sont très majoritaires avec 76% de l'actif, soit 591 milliards d'euros. Les actifs restants sont répartis équitablement entre les différents postes. Cette répartition inégalitaire à l'actif et au passif fait émerger deux familles de risques principales pour l'assureur :

- **Un risque au passif** sur les provisions techniques. Cette famille de risque est appelée « *risques liés à l'exploitation d'assurance* » ou « *risques techniques* » comprend notamment :
 - Un risque de sous-tarification car les primes sont fixées avant de connaître le coût du sinistre (inversion du cycle de production). Il se peut que les prévisions faites pour estimer les primes (fréquence, coût, durée du sinistre, et frais généraux), même les plus pessimistes, soient éloignées de la réalité. Un assureur peut-être en faillite alors qu'il n'a aucun problème de trésorerie. En effet, les nouvelles primes paieront les anciens sinistres pour lesquels les primes ont été sous-tarifées étant donné qu'il y a un décalage dans le temps qui peut être assez important entre le paiement de la prime et le dédommagement de l'assureur suite au sinistre. Pour limiter ce risque, l'assureur doit calculer la prime pure à laquelle il ajoute différents chargements (gestion, commercial, objectif de rentabilité de l'entreprise) qui lui permettent en principe d'éviter cette situation.
 - Un risque de sous-provisionnement au niveau des provisions faites par l'assureur pour faire face à ses engagements pris. Chez AXA, ces provisions représentent environ 70% du passif. Ces engagements ne sont pas connus à l'avance et il est donc difficile pour l'assureur de les évaluer précisément. Plusieurs méthodes existent pour provisionner, la plus connue d'entre elle est celle de Chain Ladder qui se base sur les sinistres passés qu'a connu l'assureur dans sa branche pour prédire le montant total des sinistres et donc en déduire le montant à placer en provisions.
- **Un risque à l'actif** lié à ses placements financiers. Ce risque matérialise les primes qui sont placées sur les marchés afin de rémunérer l'assureur et l'assuré. Ainsi, l'assureur s'expose à un risque de marché (taux, change, actions, crédits) mais aussi à :
 - Un risque de crédit sur les produits investis par l'assureur ;
 - Un risque de liquidité car l'assureur doit être capable de faire face à ses engagements pris rapidement et donc vendre ses actifs pour honorer ses passifs. Mais lorsque l'assureur cèdera une partie de ses actifs il devra le faire à un bon prix pour ne pas perdre d'argent et rapidement d'où un risque de liquidité.

Afin d'aller chercher du rendement à l'actif pour le redistribuer à ses assurés tout en limitant le risque pris, AXA diversifie ses placements sur différents types de produits : obligations⁷, actions (Europe et Monde), change et matières premières principalement. Ces investissements font naître une diversité de risque inhérent à chaque type de produit. Pour certain risque comme le risque de taux (créé par les produits de taux), l'assureur possède deux stratégies possibles pour se couvrir :

- Faire correspondre son actif et son passif pour avoir une même durée et une même sensibilité, voir une même convexité
- Utiliser des dérivés de taux (forwards et swaps)

Pour d'autres produits (actions, change, et matières premières), l'assureur n'aura pas le choix que d'utiliser des dérivés pour se couvrir. La stratégie suivie par AXA est la seconde puisque à son hors-bilan il y a des dérivés de couverture. **Ces ouvertures font naître un risque de défaut sur les dérivés achetés. C'est ce risque, qui a la particularité d'être très volatil, qui est étudié dans ce mémoire.** Le risque de contrepartie

⁶ 11% d'autres dettes et 2% de dettes de financement.

⁷ Etats, investment grades et high yields

sur les dérivés se trouve pour couvrir les placements à taux fixe, en devise, en action ou encore en matière première à l'actif mais aussi ses émissions au passif qui peuvent être à taux fixe ou en devise.

Selon la stratégie de couverture et les prévisions de marché faites par l'assureur, il peut couvrir entièrement ou partiellement son bilan à l'aide de dérivés. A noter que l'usage de dérivés afin de couvrir ses positions n'a pas vocation à réaliser des plus ou moins-values pour l'assureur mais seulement à le neutraliser ses risques. Les dérivés sont ainsi comptabilisés bilan à leur Juste Valeur mais leur notionnel est inscrit au hors-bilan. L'utilisation des dérivés est quasi-systématique pour les grands assureurs comme AXA mais cette pratique reste marginale pour les plus petits organismes assurantiels qui utiliseront moins de dérivés car leur risque de taux sera plus limité. En effet, ces entreprises transfèrent leurs placements à des sociétés de gestions qui gèrent ce risque directement. **Ce mémoire se place dans le cadre d'un assureur comme AXA qui a recours à des produits dérivés afin de compléter sa gestion actif/passif et de piloter ses risques de marché.**

Aux deux familles de risques précédentes viennent s'ajouter :

- Le risque opérationnel qui peut se manifester par une erreur humaine, un manque de formation des salariés, mais aussi une panne informatique qui viendrait impacter l'activité de l'assureur et sa réputation.
- Le risque réglementaire qui se matérialise par un changement de la réglementation ou une erreur d'interprétation. Cela peut par exemple impacter négativement l'assureur sur des produits dans lesquels il aurait investi à moyen ou long terme et qui demanderaient subitement davantage de fonds propres qu'auparavant. Cela peut aussi se manifester au niveau de la solvabilité de l'assureur et de son modèle interne qui peut ne pas être validé.
- Le risque de jurisprudence sur un sinistre à couvrir par l'assurance qui n'avait pas été prévu au moment du calcul de la prime et qui vient donc impacter négativement la rentabilité du produit d'assurance vendu.
- Le risque de cyber attaque qui viendrait compromettre les données confidentielles des assurés. Ce nouveau risque est très changeant et donc difficile à gérer pour les grands assureurs qui vont renforcer leurs sécurités par des mesures concrètes (clés USB interdites, impossible de consulter sa messagerie personnelle, sites interdits, e-learning pour former les salariés).

2.2 Enjeux et problématiques pour les assureurs

Le risque de contrepartie issu des dérivés est théoriquement inférieur au risque premier couvert mais doit faire l'objet d'un suivi et d'un ajustement régulier. La CVA est très volatile car elle est directement liée au niveau des CDS sur le marché. Cette volatilité est une des raisons pour laquelle il est nécessaire de piloter la CVA quotidiennement.

Pour illustrer les enjeux de ce risque pour le monde de l'assurance, AXA, 7^{ème} assureur mondial en 2020 selon Forbes a été pris pour exemple. Au 31 décembre 2019, AXA, dont l'actif s'élevait à 781 Mds d'euros, publiait dans son rapport annuel un montant notionnel des produits dérivés utilisés dans la couverture du risque de taux à 206,1 milliards d'euros (contre 200,3 milliards d'euros en 2018). Ces couvertures sont réalisées à l'aide de swaps de taux (62.8% du montant notionnel total des dérivés de taux), des options de taux (18%) et des futures et forwards (10%). De la même manière, sur la partie change, AXA couvre son risque de change à hauteur de 157,6 milliards d'euros (contre 166,9 milliards d'euros au 31 décembre 2018) à l'aide de futures et forwards de change (55%), d'options de change (26%) et des swaps de devises (18%).

Dans l'exemple d'AXA, les deux principaux risques de marché (change et taux) sont couverts à l'aide de 363,7 Mds d'euros de dérivés pour un actif de 781 Mds d'euros. Le risque de contrepartie sur ces dérivés doit

donc être quantifié, suivi, et couvert le cas échéant. Dans son rapport annuel, AXA ne mentionne pas le montant qui émerge de ce risque mais on remarque l'utilisation de CDS au hors-bilan pour 140 millions d'euros. Les CDS permettent de se couvrir contre ce risque à la fois sur la partie des dérivés et sur la partie non dérivés.

L'émergence du risque de contrepartie sur les dérivés conduit à trois enjeux majeurs pour l'assureur :

- L'estimation de son risque de contrepartie qui nécessite des outils adaptés aux produits dérivés,
- Le suivi de son risque et sa couverture car le risque de contrepartie des dérivés est très volatil,
- L'optimisation de son $SCR_{défaut}$ en fonction de l'approche retenue (formule standard ou modèle interne). Selon l'article 105 de la norme Solvabilité II, « le module « risque de contrepartie » couvre [...] les instruments dérivés ».

Pour répondre à ces enjeux, l'assureur doit être capable d'estimer son exposition au moment du défaut pour calculer son risque de contrepartie. Cette estimation de l'exposition passe par un choix de la méthodologie de calcul en fonction de ses produits et de ses objectifs d'optimisation. Ce choix se fonde sur la complexité des produits dérivés détenus par l'assureur comme cela est présenté dans la partie 4 du mémoire.

2.3 Définitions du risque de contrepartie sur un produit dérivé

2.3.1 Définition financière

Le risque de défaut est défini comme le risque que les engagements pris par la contrepartie ne soient pas respectés. Le défaut d'une entité n'est pas nécessairement une faillite de la contrepartie, mais cela peut être un retard de paiement, ou une condition du contrat (ou « covenants ») non respectée.

Lorsque le risque de défaut concerne un produit dérivé, alors il s'agit du risque de contrepartie, sinon il s'agit du risque de crédit. A titre d'exemple, le risque de crédit porte sur le prêteur quand un prêt immobilier est accordé à une contrepartie, l'échange de bien matériels avec un paiement futur, ou encore une facilité de caisse. A l'inverse, le risque de contrepartie fait référence au risque de défaut mais sur un produit dérivé (par exemple un swap) qui est généralement commercialisé par une banque d'investissement et à destination d'un autre institutionnel.

La différence entre ces deux notions est finalement le produit sur lequel le risque de défaut s'applique. Dans le premier cas, le montant de perte en cas de défaut est relativement stable puisqu'il correspond à la valeur du produit, soit son capital restant dû. Cette valeur est indépendante des mouvements observés sur les marchés financiers. Dans le second cas, le montant de perte en cas de défaut fluctue à chaque instant car il correspond à la valeur de marché du dérivé au moment du défaut. Le risque de contrepartie est donc par nature plus volatil que le risque de crédit.

A noter qu'il faut faire la distinction entre le risque de marché et le risque de contrepartie sur un dérivé. Le premier correspond à la hausse ou à la baisse du prix du dérivé et le second au risque de défaut de la contrepartie : la CVA.

La CVA est définie comme le prix aujourd'hui d'un risque de défaut de la contrepartie sur le produit dérivé traité. Ce qui s'écrit :

$$CVA = \text{Prix}_{\text{univers sans risque}} - \text{Prix}_{\text{univers avec risque de crédit}}$$

Cet ajustement de prix du dérivé est en réalité compliqué à estimer puisqu'il dépend du moment du défaut et du niveau du marché à ce moment. Pour cela, il faut calculer le profil des pertes futures espérées

qui est pondéré par la probabilité de défaut à chaque instant futur. Autrement dit, la CVA est l'intégrale du profil de perte pondéré par la probabilité de défaut (une formulation mathématique est donnée en 2.3.4).

La CVA est soit calculée :

- de manière unilatérale c'est-à-dire en prenant en compte uniquement le risque de défaut de la contrepartie, ce qui est majoritairement le cas. Dans ce cas, la CVA est strictement positive et on parle alors de CVA unilatérale ou de CVA actif.
- de manière bilatérale, c'est-à-dire en tenant également en compte son propre risque de crédit. La CVA peut alors être positive ou négative en fonction des mouvements de marché et des spreads de crédits de chacune des contreparties. La partie de la CVA bilatérale calculée en prenant son propre spread de crédit correspond à la DVA (Debt Value Adjustment). La DVA est donc la CVA unilatérale vue de la contrepartie sur son détenteur.

Nota : Lorsque le terme de CVA est utilisé dans ce mémoire, il fait référence à la CVA unilatérale (sauf mention contraire) pour éviter toute confusion. Cette pratique correspond à la convention majoritaire parmi les acteurs du marché.

La CVA peut être à l'origine d'une forte volatilité dans le Profit and Loss (P&L) du portefeuille de dérivé. Cette volatilité n'est pas recherchée par les entreprises qui souhaitent la réduire au maximum en se couvrant.

En plus de la CVA et de la DVA, plusieurs « ajustements » ont vu le jour suite à la crise financière de 2007 afin de prendre en compte les effets de crédit, liquidité, et financement. Ces ajustements sont regroupés sous l'acronyme xVA (*x Value Adjustment*). Les principaux ajustements calculés sont ceux au titre du :

- Risque de défaut (CVA/DVA : *Credit/Debit Value Adjustment*),
- Risque de liquidité (LVA : *Liquidity Value Adjustment*),
- Risque de financement (FVA : *Funding Value Adjustment*).

Les deux derniers ajustements sont difficiles à différencier et pour éviter un risque de double comptage, les institutions financières ne suivent en générale que la FVA. La FVA correspond au coût du financement de la banque qui est directement lié à la liquidité du marché et à la qualité de crédit de l'emprunteur. La FVA est donc calculée afin de quantifier ce coût qui n'est pas présent dans le calcul de la CVA. Si on souhaite prendre en compte ces deux risques, alors le prix doit être ajusté de la CVA et de la FVA. De la même manière, si d'autres ajustements doivent être pris en compte alors ils doivent être retranchés.

Ce mémoire n'a pas pour objectif de présenter la FVA et la LVA en détail mais le lecteur pourra se référer à cet ouvrage pour plus de détail : *XVA Desks - A New Era for Risk Management Understanding, Building and Managing Counterparty, Funding and Capital Risk*.

2.3.2 Définition comptable

Le risque de contrepartie ou Credit Value Adjustment (CVA) défini dans la norme IFRS 13 vise à mesurer le risque de défaut de la contrepartie à sa *Juste Valeur* ou *Fair Value*. Comme mentionné ci-dessus, la CVA est le montant que l'assureur perdrait si la contrepartie faisait défaut. Pour un dérivé valorisé en *Juste Valeur*, cela veut dire que ce montant peut être positif comme négatif. Autrement dit, la CVA peut-être un passif comme un actif. Si par exemple, la contrepartie fait défaut instantanément, alors la perte pour l'assureur sera égale à la valeur du dérivé (le taux de recouvrement est supposé nul dans cet exemple). Ce qui veut dire que si le prix du dérivé était positif, alors l'assureur enregistrerait une perte à son passif. En revanche, si le prix du dérivé est négatif alors l'assureur aurait « gagné » à voir cette contrepartie faire défaut.

Un dérivé est un contrat signé par deux contreparties, ainsi le risque de défaut vu par la contrepartie correspond à la Debt Value Adjustment (DVA) comme défini précédemment. La CVA peut être calculée de deux manières :

- *Unilatérale*, c'est-à-dire calculée en ne prenant en compte que le risque de défaut de la contrepartie.
- *Bilatérale*, c'est-à-dire calculée en prenant en compte son propre risque de défaut, autrement dit la DVA qui correspond à la CVA unilatérale que calcule la contrepartie.

Dans le cadre de la norme IFRS 13, la CVA calculée doit être faite de manière bilatérale pour être cohérent avec l'approche en *Fair Value* dictée par la norme. Cela veut donc dire qu'il y a un effet de netting si la CVA est calculée par des méthodes de Monte Carlo. En effet, l'assureur doit revaloriser ses dérivés selon le scénario de marché diffusé ce qui peut faire apparaître des CVA bilatérales négatives. Ainsi, lorsque la CVA est moyennée par tous les scénarios diffusés, elle sera translatée vers le bas par rapport à une CVA calculée par une méthode plus grossière typiquement une méthode de type add-on ou forfaitaire.

2.3.3 Définition réglementaire

Pour les banques, la CVA dans le cadre de Bâle III correspond à un montant de fonds propres à rajouter au titre du risque de contrepartie sur les dérivés. Ce montant est une Value at Risk (VaR) avec un seuil donné (typiquement 99%) et un horizon donné (1 an pour la formule standard et 10 jours par l'approche modèle interne). Cette VaR, notée CVA-VaR vient ajouter un coussin de fonds propres supplémentaire pour faire face au risque de contrepartie et améliorer la solvabilité des banques. La formule standard pour le montant de CVA est donnée à titre informatif en Annexe 1.

Pour les assureurs, le terme de CVA n'est pas cité explicitement dans la réglementation Solvabilité II contrairement à Bâle III. Cependant, l'assureur est tenu de calculer dans le SCR défaut « **les pertes possibles que pourrait entraîner le défaut inattendu, ou la détérioration de la qualité de crédit, des contreparties et débiteurs de l'entreprise d'assurance ou de réassurance durant les douze mois à venir. Le module « risque de contrepartie » couvre les contrats d'atténuation des risques, tels que les accords de réassurance, les titrisations et les instruments dérivés, et les paiements à recevoir des intermédiaires ainsi que tout autre risque de crédit ne relevant pas du sous-module « risque lié à la marge ». Il prend en compte, de manière appropriée, les garanties ou autres sûretés détenues par l'entreprise d'assurance ou de réassurance ou pour son compte, et les risques qui y sont liés. Pour chaque contrepartie, le module « risque de contrepartie » tient compte de l'exposition globale au risque de contrepartie encourue par l'entreprise d'assurance ou de réassurance concernée à l'égard de cette contrepartie, indépendamment de la forme juridique de ses obligations contractuelles envers cette entreprise. »**

Autrement dit, l'article 105 du Règlement Délégué ci-dessus indique que la CVA :

- fait partie du SCR défaut,
- est calculée avec un horizon de 1 an en tenant compte du ou des collatéraux,
- est calculée par contrepartie, c'est-à-dire qu'elle peut être nettiée par d'autres dérivés avec la même contrepartie mais une CVA en sens inverse.

Il n'y a malheureusement pas de formule standard aussi détaillée que celle présente dans la note technique de la réglementation Bâle III (cf. annexe 1). Cela reste donc à la main de l'assureur de déterminer comment il souhaite estimer son risque de défaut sur ces dérivés. Pour cela, les assureurs peuvent s'inspirer des méthodes utilisées par les banques et qui sont présentées en détail dans la partie III.

Dans le cadre de ce mémoire, la CVA sous Solvabilité II a été estimée par analogie avec les formules réglementaires de Bâle III pour le calcul des fonds propres au titres du risque de contrepartie. Ce

raisonnement se base sur les articles 200 et 201 (Annexe 3) du Règlement Délégué Solvabilité II. Aucun défaut joint (V_{inter}) n'est supposé mais uniquement un défaut unique matérialisé par le calcul de V_{intra} .

Sous Bâle III, le montant de fonds propres réglementaire est estimé en approche avancée avec la formule suivante : $3 * \sqrt{CVA + CVA_{stressé}}$. De même, sous Solvabilité II, le montant de fonds propres au titre du risque de contrepartie sur les dérivés est donné par $SCR_{defaut} = 3\sigma = 3\sqrt{V}$. Ainsi, par analogie la CVA sous Solvabilité II est approchée par la formule suivante : $V \approx CVA + CVA_{stressé}$. **Cette analogie permet de calculer une CVA Solvabilité II indicative puisque la réglementation assurantienne ne fournit de formule explicite.** Sous Bâle III, la CVA est calculée avec un quantile 99% et sous solvabilité II avec un quantile 99.5%. Afin de pouvoir comparer les CVA, tout est passé en quantile 99%. La CVA solvabilité II est donc multiplié par 0.903⁸. La formulation exacte de V est donnée en Annexe 3 également. Les notations prises sont les mêmes que celles du Règlement Délégué Solvabilité II.

2.3.4 Définition mathématique

Comme précisé dans la définition financière, la CVA correspond à l'ajustement de prix à déterminer afin de passer d'un prix en univers risque « neutre » à un prix en univers « réel ». Il faut pour cela définir ce qui est entendu par univers « réel ». Il se définit de manière à prendre en compte uniquement le risque de défaut de la contrepartie puisque l'écart de prix du dérivé entre l'univers réel et l'univers neutre est égale à la CVA. Malheureusement ; le prix du dérivé en univers réel n'est pas coté sur les marchés, il faut donc calculer la CVA autrement que par déduction.

La CVA bilatérale peut alors être définie pour un dérivé entre un assureur A et une banque B comme :

$$CVA_t = E[Pertes_t(A, B) + Pertes_t(B, A)] \quad (1)$$

Avec $E[Pertes_t(A, B)]$ l'espérance des pertes sur le dérivé au titre du risque de contrepartie de B vue par A à l'instant t . Le premier terme peut être sorti de l'espérance par linéarité de l'opérateur. Il correspond à ce qui a été définie plus haut comme la $CVA_{unilatérale}$ vue par A , notée $UCVA$. De même, le second terme correspond à la DVA vue par A à l'instant t , autrement dit la $CVA_{unilatérale}$ vue par B à l'instant t calculée pour la contrepartie A .

Soit :

$$CVA_t = UCVA_t(A, B) + UCVA_t(B, A) = UCVA_t(A, B) + DVA_t(A, B) \quad (2)$$

La décomposition de la CVA bilatérale en deux termes correspond pour le premier terme à une perte potentielle pour A matérialisée par une exposition positive ; et pour le second terme un gain potentiel pour A (et donc matérialisée par une exposition négative). Ainsi, il est d'usage de définir l'exposition positive espérée (EPE pour Expected Positive Exposure) et l'exposition négative espérée (ENE pour Expected Negative Exposure) lorsque la CVA est calculée. La somme des deux expositions correspond l'Expected Exposure (EE). L'EE en $t = t_0$ est égale au Mark-to-market (Mtm), et pour $t > t_0$ est égale au Mark-to-Futur (MtF).

Les formules théoriques pour calculer le profil de l'EPE et de l'ENE sont données ci-dessous :

$$EPE_t = \int_{-\infty}^{+\infty} Prix^+ * f_t(Prix) * dPrix \quad (3)$$

⁸ Cette valeur correspond au ratio entre l'intégrale de la fonction de distribution cumulée d'une loi normale standard inverse à 99% et 99.5%, soit 2.3263 et 2.5758.

$$ENE_t = \int_{-\infty}^{+\infty} Prix^- * f_t(Prix) * dPrix \quad (4)$$

$$Mtm_t = EPE_t + ENE_t = EE_t \quad (5)$$

Avec $Prix$ le prix du dérivé, soit $Prix = Prix^+ + Prix^-$, $Prix^+ = \max(Prix; 0)$, $Prix^- = \min(Prix; 0)$, et f_t la distribution de $Prix$ à l'instant t . Il est important de noter ici que l' EPE_t et l' ENE_t sont des profils qui varient au cours du temps. Par exemple, à l'instant $t = 0$, si le prix du dérivé est positif, alors son EPE est égale au prix du dérivé et son ENE est nulle.

Pour passer du profil de l'EPE, de l'ENE et de l'EE à une valeur moyenne sur la durée de vie restante du dérivé, il faut intégrer t entre 0 et T et diviser par la durée de l'intervalle. La formule est donnée ci-dessous pour l'EPE uniquement :

$$EPE = \frac{1}{T} \int_0^T EPE_t * dt \quad (6)$$

L'EPE sans indice est une valeur moyenne et correspond à l'intégrale des EPE de chaque instant futur du dérivé. Autrement dit, l'EPE correspond à la moyenne des expositions positives ou nulles. La CVA réglementaire prend en compte uniquement les EPE dans son calcul ce qui permet d'obtenir un montant des fonds propres au titre du risque de contrepartie prudent. La CVA réglementaire est donc plus importante que la CVA financière qui prend en compte l'ENE.

La CVA est directement rattachée à des notions de prix et de défaut. Ainsi, elle va dépendre de trois grandeurs :

- L'exposition au moment du défaut. Le montant de cette exposition future correspond au Mark-to-Futur (MtF) du dérivé.
- La probabilité de défaut à la date t de la contrepartie.
- Le pourcentage de l'exposition qui est récupéré lorsqu'il y a un défaut. Ce pourcentage est appelé taux de recouvrement ou recovery rate (RR). Il est défini comme $1-LGD$ (Loss Given Default). C'est la version anglaise qui prime dans la pratique et qui sera utilisée dans le mémoire.

Dans le cadre d'un dérivé de maturité T signé entre A et B , la CVA unilatérale vu par A de la contrepartie B à l'instant t s'écrit alors :

$$UCVA_t(A, B) = \int_t^T (1 - RR_{B,s}) * EPE_s * P_{survie A,B} * P_{défaut B} * DF(t, s) * ds \quad (7)$$

Avec $1 - RR_{B,s} = LGD_{B,s}$ la LGD de la contrepartie B à l'instant s , $DF(t, s)$ le discount factor ou facteur d'actualisation en univers risque neutre de maturité s vu de t , EPE_s l'expected positive exposure à l'instant s , $P_{survie A,B}$ la probabilité de survie de A et B jusqu'à $t < s$, et $P_{défaut B}$ la probabilité de défaut de B en $t = s$.

Par symétrie, la DVA de B calculée par A en t s'écrit :

$$DVA_t(A, B) = UCVA(B, A) = \int_t^T (1 - RR_{A,s}) * ENE_s * P_{survie\ B,A} * P_{défaut\ A} * DF(t, s) * ds \quad (8)$$

A titre illustratif, les différents types d'expositions introduites (EE, EPE, et ENE) sont tracées pour un swap de taux sur le graphique ci-dessous.

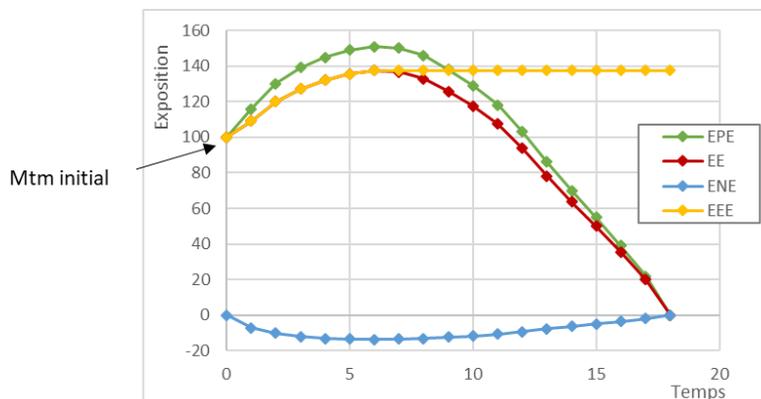


Figure 2 : Expositions illustratives pour un swap de taux

Sur ce graphique, l'exposition attendue (EE) démarre au prix du dérivé (Mtm) et correspond à la somme de l'EPE et de l'ENE. Le profil de l'EE est croissant au début, puis décroissant jusqu'à atteindre une exposition nulle à la date de maturité. Ce profil correspond à celui d'un swap dans la monnaie puisque son EE est positive initialement et au cours du temps. En complément des trois expositions usuelles, on a tracé l'EEE (Effective Expected Exposure) qui se définit par une récurrence strictement croissante et positive. Ainsi, on a $EEE(t) = \text{Max}(EE(t - 1); EE(t))$.

L'Effective EPE (EEPE) ou Potential Future Exposure est une VaR à 1 an avec un seuil défini (généralement à 99,5%). Au-delà de ce seuil, on peut aussi calculer la CESF (Credit Expected Short Fall) qui correspond à moyenne des pertes potentielles à 1 an au-delà du quantile 99.5.

Synthèse

- Les grandeurs de la figure 2 peuvent être classées comme suit :

$$ENE \leq EE \leq EPE$$

- Les profils tracés peuvent s'intégrer pour calculer une grandeur moyenne par exemple pour l'EPE cela donnerait :

$$EPE = \frac{1}{T} * \int_0^T EPE_t * dt \quad (9)$$

- L'Effective Expected Exposure se définit comme :

$$EEE = \text{max}(EE_{t-1}; EPE_t) \quad (10)$$

- $EPE \geq ENE$ implique une CVA positive
- La CVA bilatérale de A sur B s'écrit comme la somme des CVA unilatérales (UCVA) :

$$CVA_t(A, B) = CVA_{bilatérale} = UCVA_t(A, B) + UCVA_t(B, A) = UCVA_t(A, B) + DVA_t(A, B) \quad (11)$$

$$UCVA_t(A, B) = \int_t^T (1 - RR_{B,s}) * EPE_s * P_{survie A,B} * P_{défaut B} * DF(t, s) * ds \quad (12)$$

- En complément des grandeurs usuelles, on peut aussi calculer deux autres grandeurs de mesure du risque à partir des profils :
 - L'Effective Expected Positive Exposure (EEPE) définit comme une VaR à un an avec un seuil à 99.5% ($X = 99.5\%$) :

$$EEPE_X = \frac{1}{T} * \int_0^T \int_{-\infty}^X f_t(Prix) * dt * dPrix \quad (13)$$

- Credit Expected Shortfall (CESF) qui est la moyenne des pertes au-delà du seuil de 99.5% :

$$CESF_X = \frac{1}{T} * \int_0^T \int_X^{+\infty} f_t(Prix) * dt * dPrix \quad (14)$$

2.4 Stratégie opérationnelle

2.4.1 Progiciel ou développement interne

Afin de calculer la CVA sur un portefeuille, l'assureur a le choix entre deux alternatives :

- Le développement d'un outil interne,
- L'achat d'un progiciel développé par un éditeur externe.

Le choix entre ces deux solutions est un point de discordance et dépend surtout des moyens que l'entreprise est prête à mettre pour traiter ce sujet. Dans la figure 3 ci-après, les principaux avantages et inconvénients des deux approches sont présentés.

Un modèle interne a l'avantage d'être optimal pour l'assureur, plus souple, moins coûteux, plus transparent, et plus intéressant pour les équipes. Mais, il a les inconvénients de présenter plus de complexité pour la hiérarchie et un risque opérationnel important si les experts s'en vont dans une autre entreprise ainsi qu'une problématique de validation par le régulateur. A l'inverse, le recours à un progiciel est généralement plus coûteux avec une équipe MOA à plein temps et un risque opérationnel sur le paramétrage mais il présente l'intérêt de soulager la charge de travail des équipes, d'être prêt à l'emploi sur une très grande majorité des produits détenus dès le premier jour et aussi d'être utilisé par d'autres acteurs financiers.

A noter que la méthodologie précise de calcul n'est jamais donnée par l'éditeur à son client (assureurs ou banques) et les évolutions sont généralement longues et coûteuses. Cela contraint le client à prendre des externes pour suivre ces projets de transformation ce qui présente un coût additionnel.

De nombreuses grandes banques d'investissement ont opté pour la création d'équipes en charge du risque de contrepartie sur les dérivés traités en salle de marché. Le calcul de la xVA est un sujet complexe qui nécessite le plus souvent une puissance de calcul importante et le recours à des développements internes spécifiques.

	Avantages	Inconvénients
Développement interne (solution interne)	- Le montant calculé est optimisé puisque les calculs sont ajustés aux produits du portefeuille	- Craintes des responsables de développer des calculs très compliqués qui seront difficiles à expliquer pour des personnes non expertes
	- Souplesse du modèle qui peut prendre en compte le payoff de produits exotiques là où les progiciels s'arrêtent aux produits vanilles	- Temps de développement (coût humain) important
	- Coût de développement faible avec aucune licence à payer et un entretien réalisé par des personnes expertes du sujet, d'où un risque d'erreur humaine très faible	- Lorsqu'il y a un problème, il doit être résolu en interne sans la possibilité de transférer cette charge de travail
	- Transparence accrue sur les montants calculés avec une possibilité d'avoir le détail complet des calculs étape par étape	- Perte des experts (démission ou retraite) du sujet qui peut entraîner des dysfonctionnements importants
	- Sujet intéressant à mettre en place pour les équipes qui sont sollicitées pour réfléchir et pas seulement appuyer sur des boutons	- Validation par le régulateur du modèle interne
Progiciel (solution externe)	- Le logiciel est prêt à l'emploi	- Paramétrage lourd et pas forcément maîtrisé par les équipes de maîtrise d'ouvrage (MOA)
	- Les calculs ont été vérifiés par l'éditeur	- Migration à l'initialisation qui peut être longue et compliquée. Cela dépendra de l'équipe MOA et de leur niveau de compétences sur le sujet
	- La charge de travail pour les internes est moindre	- Coût financier récurrent et élevé (licences, MOA, consultants)
	- Le risque opérationnel (experts) est transféré à l'éditeur	- Très peu de souplesse dans les progiciels s'il y a un besoin d'évolution technique
		- Les formules et le détail des calculs ne sont pas accessibles et sont à la main de l'éditeur seul

Figure 3 : Tableau comparatif entre un développement interne et un progiciel pour le suivi de la CVA d'un portefeuille

Ce mémoire se place dans le premier cas de figure, à savoir le développement d'un modèle interne par l'entreprise. Ce développement a été réalisé en VBA pour un total de 3 000 lignes de codes au total (extraits en Annexe 8 et 9) répartis en 1 700 pour le multi-curve et 1 300 pour la CVA. Le choix d'utiliser VBA est motivé par son utilisation très répandue par les assureurs et banques. Cela permet notamment de limiter le risque opérationnel d'utiliser un langage spécifique. En revanche, VBA possède une puissance de calcul limitée pour pouvoir faire des calculs conséquents, il faut alors en avoir une maîtrise très avancée. De plus, contrairement à des logiciels type SAS, Python ou R, il n'existe pas de bibliothèques de calculs toutes faites. Par exemple, des fonctions basiques comme l'interpolation linéaire de points n'existe pas dans VBA. Cela peut être considéré comme un inconvénient ou un avantage. En effet, même si cela demande plus d'investissement, le développement intégral de bibliothèques de calcul permet d'avoir une maîtrise totale et une piste d'audits des calculs faits. L'exemple le plus frappant est l'absence de fonction d'interpolation linéaire ou bilinéaire (pour les matrices) dans Excel ou VBA. Ces fonctions ont donc été recodées.

2.4.2 Premiers constats

A partir des définitions faites, plusieurs constats peuvent être dressés. Premièrement, les dérivés utilisés par les assureurs et réassureurs pour se couvrir peuvent être plus ou moins complexes. Cela peut être des dérivés mono-devise (swap de taux, forward, ...) ou multi-devise (swap de change). Pour calculer l'exposition au moment du défaut et donc la CVA de ces dérivés, l'assureur doit au préalable utiliser les standards de place en matière de valorisation. Autrement dit, il doit se placer en univers multi-curve afin de prendre en compte les bases inter-tenor au sein d'une même devise ou des bases inter-devise lorsque plusieurs devises sont en jeu. Cet univers multi-curve est explicité en détail dans la partie 3 de ce mémoire.

Deuxièmement, le risque de contrepartie sur les dérivés (CVA) dépend de nombreux facteurs mais celui qui influe le plus est la présence ou non d'un collatéral. Le collatéral sert de garantie pour le détenteur contre le risque de défaut de la contrepartie. La présence d'un collatéral vient baisser l'exposition future (Mark-to futur) et donc baisser la CVA. En revanche, si aucun collatéral n'est posté en face du dérivé alors l'assureur risque de perdre davantage en cas de défaut. Ainsi, lorsque le risque de contrepartie est valorisé, il faut distinguer dans la méthode de calcul la présence ou non de collatéral. Graphiquement, la présence d'un collatéral vient traduire vers le bas le profil d'exposition (EPE). En reprenant l'exemple illustratif d'un swap de taux pris plus haut, les expositions sont tracées ci-après avec et sans collatéral.

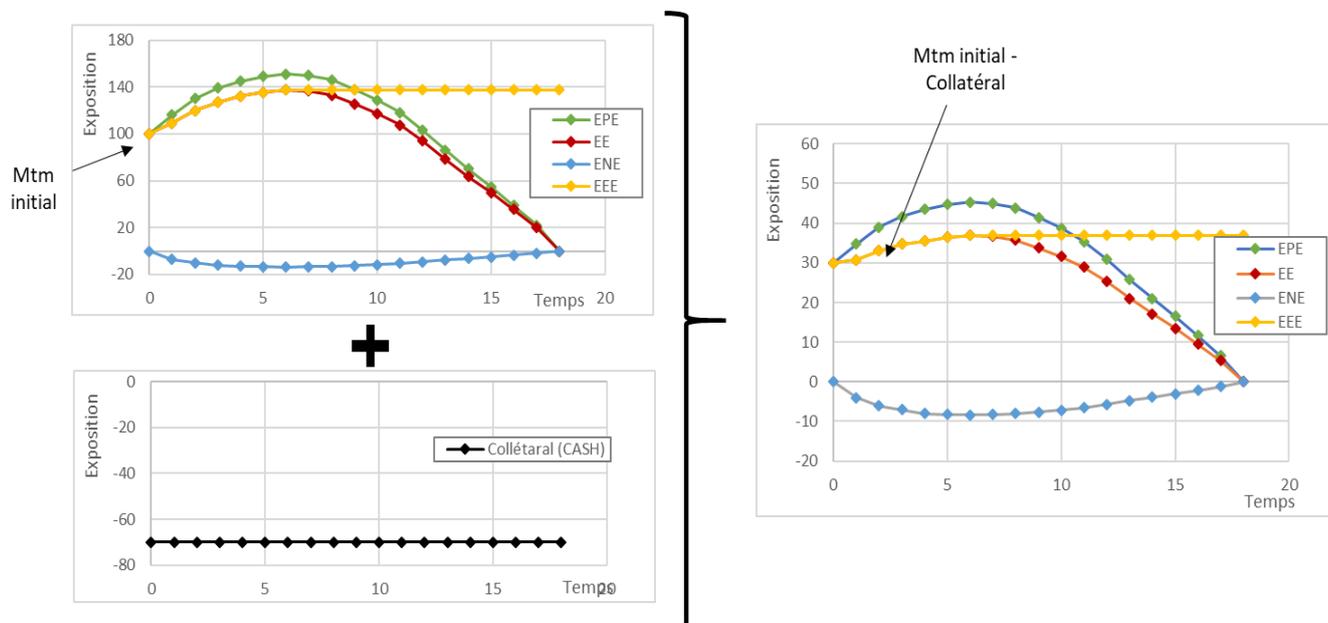


Figure 4 : Impact du collatéral sur le profil des différentes expositions (EE, EPE, EEE, et CESF)

Enfin, la partie la plus délicate à calculer dans la CVA est l'Exposition Au moment du Défaut (EAD). Pour cela, il existe principalement trois méthodes :

- **La méthode des « add-ons » ou « Current Exposure Method »** qui consiste à prendre le Mtm et à y ajouter un « add-on ». Cet add-on fait office de VaR en plus du Mtm. L'add-on est donné au cas par cas dans la réglementation Bâle III.
- **La méthode dite des options** qui consiste à supposer qu'un défaut de la contrepartie sur un dérivé occasionne une perte si son prix au moment du défaut est positif. Il convient alors de ne valoriser que la partie positive du contrat au moment du défaut. Il s'agit là exactement du payoff d'une option dont la date d'exercice est la date de défaut de la contrepartie. Il est alors nécessaire de valoriser l'option sous-jacente au dérivé. Par exemple, pour un swap l'option sous-jacente est la swaption, pour un forward : un call, et pour une option : l'option elle-même.
- **La méthode de Monte Carlo** qui consiste à diffuser les facteurs de risques (Credit Default Swap, les taux, les cours de change) et calculer les prix de marché futurs du dérivé. Le risque de contrepartie est la somme des expositions futures pondérées par les probabilités de défaut du pas de temps

futur. Ces expositions futures correspondent aux Marks-to-Futurs (MtF) du dérivé dans les conditions de marchés simulées.

A partir de ces premiers constats, les enjeux pour suivre le risque de contrepartie des dérivés sont de :

- Valoriser précisément les dérivés présents dans son portefeuille en construisant au préalable un univers multi-curve pour appliquer les derniers standards de place.
- Choisir la bonne méthode du calcul des EAD en fonction de la complexité du produit dérivé et des avantages et inconvénients de chaque méthode (décrits dans la partie 4).

Ainsi, la première étape pour calculer la CVA est de construire un univers multi-curve. Cette construction est détaillée dans la partie suivante.

3 Univers multi-curve

Cette partie a pour but d'expliquer la méthodologie suivie pour reconstruire les courbes de taux en approche multi-curve. Cette approche est une pratique de place « récente » et qui s'est imposée comme un standard suite à la crise financière de 2007.

Tout d'abord, plusieurs rappels quantitatifs et qualitatifs sur les dérivés et la courbe de taux sont faits. Puis, deux approches (qualitatives et quantitatives) sont présentées afin de démontrer l'importance du multi-curve dans les conditions de marché actuelles. Enfin, les résultats de la reconstruction sont présentés pour différentes courbes.

3.1 Éléments quantitatifs et courbe des taux

3.1.1 Obligation Zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon est un titre pour lequel il n'y a qu'un échange de nominal à la date de maturité. Cette obligation ne donne lieu à aucun coupon (d'où son nom) et sa durée correspond à sa durée de vie restante. Sa valeur actuarielle, notée ZC , est donnée par :

$$ZC = \frac{N}{(1+r)^T} \quad (15)$$

Avec r le taux (actuariel) zéro-coupon, c'est-à-dire le taux permettant d'avoir un nominal N dans T années. Ainsi, la valeur aujourd'hui d'une obligation zéro-coupon de maturité T et de nominal 1 correspond au facteur d'actualisation ou discount factor en anglais. C'est ce dernier terme qui est retenu dans la littérature et dans ce mémoire, il sera noté DF .

Remarque :

Ce taux est calculé de manière actuarielle. Il aurait pu être calculé en continu ou en proportionnel auquel cas le prix aurait été :

$$ZC_{continu} = N * \exp(-rT)$$

$$ZC_{prop} = \frac{N}{(1+r)^T}$$

3.1.2 Obligation couponnée

Par opposition aux obligations zéro-coupon, il existe des obligations qui versent des coupons à une fréquence donnée en plus du nominal à la date de maturité. Le prix d'une telle obligation est donné par :

$$Prix\ Obligation = \sum_i E[Flux\ futurs_i] = \sum_i coupon_i * DF_i + N * DF_n \quad (16)$$

Ainsi, une obligation qui verse des coupons (fixes, variables ou révisables) se décompose en une somme d'obligations zéro-coupons. L'obligation peut être amortissable (linéaire, $k+i$ constant, ou encore structuré) ou non (in fine).

Le coupon se calcule comme suit :

$$Coupon = \text{taux} * dt * Nominal$$

Le nominal est le nominal en début de période, dt correspond à la fraction d'année entre la date de début et la date de fin de la période. Cette fraction d'année dépend d'une convention appelée « accrual basis ». Cette convention est définie dans le contrat (termsheet) du produit. Les quatre conventions les plus communes sont : act/act, act/365, act/360, et 30/360. Enfin, le taux peut-être à taux fixe (par exemple 2%), à taux variable (Euribor 3M + 0.3%), ou à taux révisable (TEC10 + 0.4%).

Dans le cadre des obligations à taux variable, il est possible de calculer les anticipations du marché à la date de valorisation sur ce que devrait être ce taux dans x mois ou x années. Cette anticipation du marché du taux futur vue d'aujourd'hui est appelée taux forward.

Remarque

Le taux qui permet d'égaliser la somme des flux futurs avec le prix de marché de l'obligation à l'instant t est appelé le taux de rendement interne (TRI) ou « yield to maturity » (YTM) en anglais.

3.1.3 Taux Forward

Le taux forward, noté L_f se définit comme le taux court futur entre T_1 et T_2 vu en t . Il se déduit des prix des zéro-coupons via la formule de non-arbitrage suivante :

$$\text{Forward} = L^f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{dt} * \left(\frac{DF(t, T_1)}{DF(t, T_2)} - 1 \right) \quad (17)$$

Les taux forwards comme tous « taux » sont sensibles à la convention prise pour calculer la fraction d'année. Ainsi, ici dt correspond à la fraction d'année de la période pour une convention donnée⁹. Ce taux est ici déterminé actuariellement.

Le calcul de ce taux forward permet notamment le calcul des obligations à taux variables, des Forward Rate Agreement (FRA), des swaps, et des options de taux (cap, floor, swaption). Les FRA servent à se couvrir ou à spéculer sur le niveau des taux futurs à court terme.

$$\text{FRA} = N * dt * (L^f(t, T_1, T_2) - K) * DF_{T_2} \quad (18)$$

Avec N le nominal, dt la fraction d'année entre T_1 et T_2 , L^f le forward et K le taux fixé dans le contrat. Le sous-jacent du FRA est par définition un taux, mais le forward peut porter sur n'importe quel sous-jacent (action, indice, matière première, change). Il s'agit alors de forward sur action, indice, change, ou matière première.

Remarques

- Par abus de langage, le forward se réfère au taux forward alors que le « Future » se réfère au contrat.
- Les deux plus importantes différences entre le FRA et le Future sont le marché sur lequel le contrat est négocié (le FRA est sur le marché OTC, alors que le Future est sur le marché réglementé, par exemple à Paris le LIFFE¹⁰), et la présence d'appel de marge pour le contrat Future contrairement au contrat Forward.
- L'absence d'appel de marge régulier sur les FRA les rend plus sensibles au risque de contrepartie et sont donc plus risqués pour les acheteurs de FRA.

⁹ Act/360, act/365, act/act, 30/360

¹⁰ London International Financial Futures and options Exchange

- Les contrats FRA et les Futures servent à la construction de la courbe des taux pour des maturités courtes (moins de 2 ans).

3.1.4 Swap

Un swap est un produit dérivé signé entre deux contreparties afin d'échanger un flux financier contre un autre financier. Les swaps les plus traités sur le marché sont ceux dont le sous-jacent est le taux, il permet alors d'échanger un taux fixe contre un taux variable ou vice-versa. Un swap peut être sur d'autres sous-jacents, comme le total return swap (échange de rendement financier) ou le swap de volatilité (pour abaisser la volatilité de son portefeuille action par exemple). Ces produits sont nettement moins traités que le swap de taux. Sauf mention contraire, le terme swap dans ce mémoire se réfère uniquement au swap de taux.

Le swap a plusieurs caractéristiques (date de début, date de maturité, type de taux, fréquence, mode d'amortissement, devise) mais cela ne change pas le principe général qui est d'échanger deux taux différents. En gardant ce principe en tête, un swap est donc la combinaison entre l'achat (ou vente) d'une obligation à taux fixe et la vente (ou achat) d'une obligation à taux révisable. Les flux de nominaux (en rouge sur la figure ci-contre) se télescopent pour ne laisser place qu'aux flux d'intérêts (en noirs).

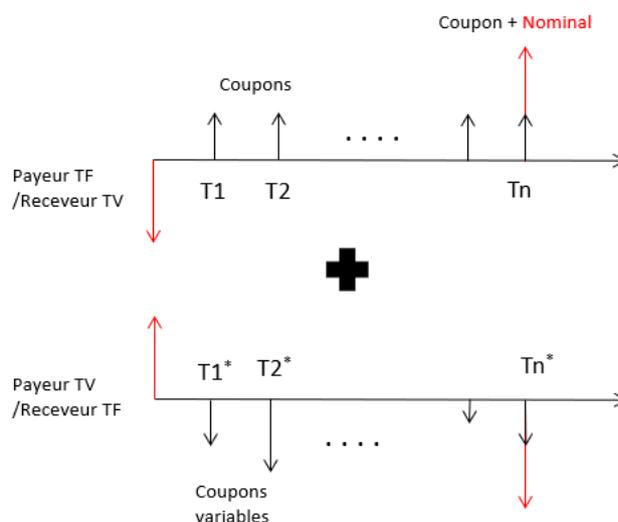


Figure 5 : Schéma des flux d'intérêts (noir) et de nominaux (rouge) d'un swap

Le prix d'un swap est obtenu à partir du prix d'une obligation taux fixe (TF) et d'une obligation taux variable (TV).

$$\begin{aligned}
 SWAP(\text{payeur TF}) &= \text{Oblig}_{TV} - \text{Oblig}_{TF} \\
 SWAP(\text{receveur TF}) &= \text{Oblig}_{TF} - \text{Oblig}_{TV}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Remarques

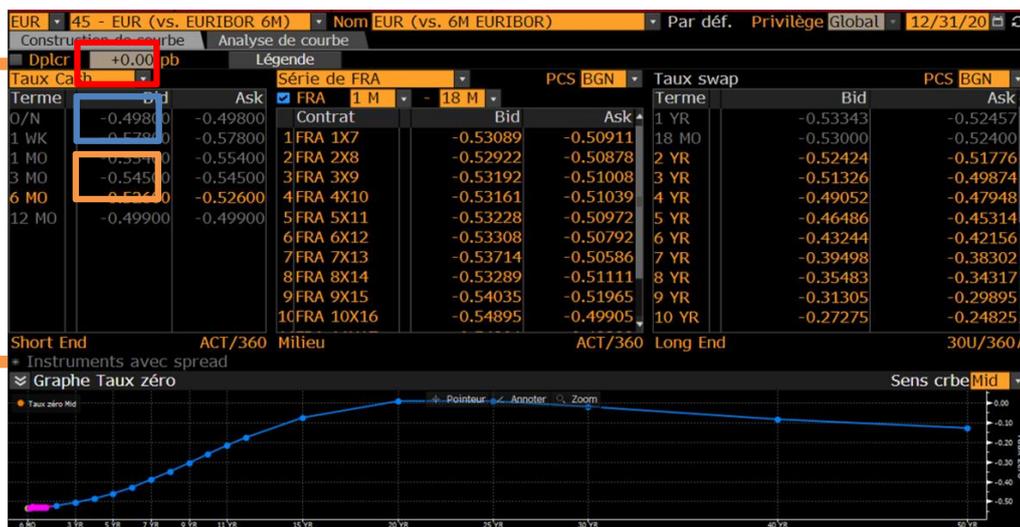
- Le swap constitue la partie longue de la courbe des taux (maturité de plus de deux ans).
- Le prix du swap à l'initiation est au pair¹¹.
- Les échéanciers de chacune des deux jambes ne sont souvent pas les mêmes, les deux dates communes seront la date de début et la date de maturité du swap.
- Les swaps servent principalement à la couverture du risque de taux pour les établissements financiers.

¹¹ C'est-à-dire que le produit vaut 0.

3.1.5 Courbe des taux

Il existe une multitude de courbes des taux et leurs compositions sont un mélange de différents instruments dérivés portant sur le même sous-jacent (le Tenor¹² du taux considéré). Le type d'instrument dépend de la date de maturité du dérivé. De plus, les prix qui sont utilisés pour reconstruire les courbes sont les prix de marché des instruments dérivés.

A titre illustratif, la courbe Euribor 6M au 31/12/2020 fournie par Bloomberg renvoie différentes cotations pour chacune des trois parties de la courbe (cash, FRA, et swap) :



CASH
FRA
SWAP (taux de la
jambe fixe)

Figure 6 : Courbe Euribor6M au 31/12/2020 (Source : Bloomberg)

Le premier point de la partie « CASH » (encadré rouge) correspond au taux overnight (O/N) fourni par un panel de banque. Il correspond au taux de facilité de dépôt fourni par la BCE (-0,5%). Le point à une semaine est le taux de dépôt à une semaine. Les points suivants correspondent aux fixings des différents tenors (1M, 3M, 6M, et 12M) côtés dans la devise. Enfin, le spread bid/ask est nul sur ces instruments, c'est aussi pour cela qu'ils sont considérés comme liquides et assimilés à du CASH, d'où le nom de cette partie de la courbe.

La seconde partie correspond au FRA (Forward Rate Agreement). Ces dérivés de taux servent à court terme soit à se couvrir, soit à spéculer sur un niveau futur des taux. La codification de cotation est la suivante : « date de début x date de maturité ». Pour le premier point de l'encadré bleu, cela veut dire que le taux ask du FRA commençant dans un mois et avec une date de maturité dans 7 mois (1 mois + 6 mois de tenor) est de -0.50911%. Cette fois-ci, le spread bid/ask est non nul soulignant ainsi une liquidité moins importante que sur la partie CASH de la courbe.

La dernière partie correspond au taux de la jambe fixe d'un swap dont la jambe variable est fixée tous les 6 mois et est indexée sur l'Euribor 6M. Ces instruments servent principalement à la couverture contre le risque de taux pour des maturités longues (à partir de 2 ans).

Remarques

- Sous chacun des encadrés la convention de taux utilisée est affichée. Sur la partie CASH et FRA, la convention choisie est généralement celle des taux monétaires : ACT/360. En revanche, sur la partie longue, il n'y a pas de convention de marché et la convention varie d'une courbe à l'autre et d'une

¹² Le Tenor fait référence à la durée sur laquelle porte le taux et correspond au qualificatif qui vient après la référence du taux. Par exemple, le Tenor de l'Euribor 3M est 3M.

devise à l'autre. Cette convention est importante à prendre en compte lors de la reconstruction d'une courbe.

- Le prix mid est généralement pris pour reconstruire la courbe des taux, il correspond à la moyenne entre le prix bid et le prix ask. Dans ce mémoire, les courbes reconstruites sont des courbes au prix mid.

3.2 Approche qualitative de la compréhension du multi-curve

3.2.1 Constat historique de l'apparition des bases inter-tenors

Dans cette section, l'apparition du phénomène de bases inter-tenor est démontrée par une approche historique et à l'aide de graphiques issus de Bloomberg.

Chaque crise impacte les marchés, et dans un second temps les pratiques. Les changements induits par ces chocs sont cependant plus proches de prises de conscience que de modification de l'approche fondamentale. L'apparition du smile de volatilité dans les années 80 a par exemple donné naissance à de nouvelles méthodes de pricing, toujours en place aujourd'hui, afin d'expliquer cette déformation et y calibrer les prix.

Jusqu'en 2007, la pratique de marché était d'utiliser une courbe unique pour actualiser les flux espérés et calculer les forwards de taux. Les banques, assurances et autres acteurs financiers utilisaient donc une courbe unique composée de la moyenne des taux de différents tenors (1M, 3M, 6M, 12M). Cette pratique se justifiait jusqu'alors tout à fait puisque le spread (appelé aussi base ou « basis spread » en anglais) entre les différents tenors d'une même devise était négligeable. Cette pratique n'existe plus aujourd'hui puisque sur le marché il existe une courbe cotée par ténor (Euribor 1M, Euribor 3M, ...).

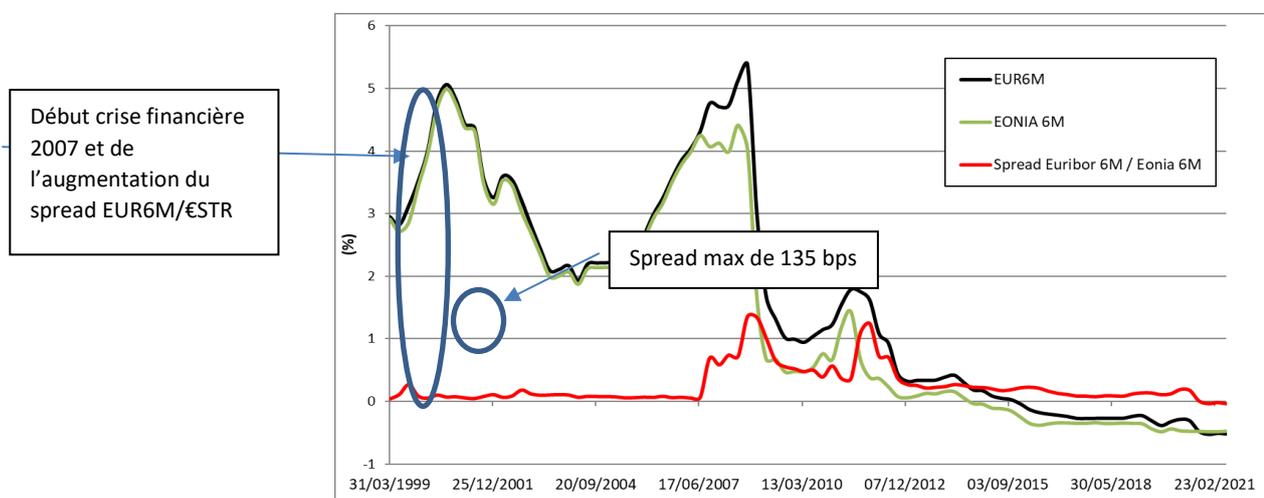


Figure 7 : Historique du fixing de l'Euribor 6M (en noir), de l'€STR (vert), et du spread entre ces deux fixings (rouge). (Source : Bloomberg)

Sur la figure ci-dessus, le spread entre le taux Euribor 6M et le taux ESTR¹³ de maturité 6M apparaît de manière significative au moment de la crise de 2007. Jusqu'en 2007, ce spread était en moyenne de 8 bps justifiant ainsi la pratique de l'époque d'ignorer cette base. De 2007 à Février 2021, ce spread est en moyenne de 35 bps, avec un spread maximal de 135 bps. L'exemple pris sur l'Euro ici est tout aussi vrai dans d'autres devises (USD, GBP, JPY, ...). Ces niveaux ont forcé les banques à changer leurs modèles de pricing des dérivés afin de rendre compte de cette base, et finalement du risque de liquidité et de crédit d'un tenor à l'autre.

¹³ Avant le 01/01/2020, le taux €STR est égale à celui de l'EONIA.

Ces risques étaient jusque-là sous-estimés, sur le marché interbancaire notamment. Se pose d'ailleurs la question de l'appellation « fair price », prix juste vis-à-vis du marché, mais « fair price » qui évolue au gré des prises de conscience successives. Ce qui nous intéresse sont les changements structurels qu'ont subi les marchés ces dernières années, changements qui remettent en question bon nombre d'acquis et formules simplistes pour valoriser les dérivés de taux.

Les taux IBOR, référence absolue sur le marché des taux mais à la réputation largement écorchée au fil des scandales ces dernières années, en sont les principales victimes. Rappelons que ces taux (LIBOR sur le marché US et EURIBOR sur le marché européen) sont fixés par un panel de banques répondant aux questions suivantes : à quel taux pensez-vous pouvoir vous financer sur le marché interbancaire ? et ce pour différentes maturités ou tenors ? Pendant la crise de 2007, la perte de confiance des panelistes envers les intervenants sur le marché interbancaire était telle que ces estimations étaient très différentes entre les différents tenors provoquant ainsi l'apparition de « basis spreads » loin d'être négligeables. Ce spread représente, dans le cas d'un spread Euribor 3M/6M, le surplus à payer pour prêter à 6M en se finançant à 3M. Il quantifie donc le risque supérieur de crédit et de liquidité pris par l'acteur prêtant à 6M au lieu de 3M. Cette prise de risque se symbolise par une prime qui est ajoutée à la jambe du tenor la plus faible afin d'avoir un prix du dérivé au pair à l'initiation. Cette prime qui se présente sous forme de spread sur la jambe 3M dans notre exemple, correspond à la somme des risques de crédit et de liquidité portées par chaque FRA.

La couverture contre ce risque dit de « base », a donné naissance au marché des Tenor swaps qui permettent de swaper un tenor contre un autre. Ainsi, la gestion du risque de taux réalisée par une banque sera de s'assurer entre autres que son risque de base est bien couvert, et de passer un basis swap le cas échéant. Sur la figure suivante, les basis spreads ou bases entre les taux swaps 5Y Euribor 6M/Euribor 3M sont tracés. Avant 2004, aucune base n'était cotée, de 2004 à 2007, la base était quasi constante et négligeable, et depuis 2007, la base est nettement plus volatile et non nulle. La base sur les taux swaps tend à se réduire avec l'atténuation de l'effet de la crise, et la politique monétaire accommodante qui fait baisser les taux courts et donc les taux swaps moyen terme et long terme. Cet effet est d'autant plus visible que les taux sont courts, c'est d'ailleurs pour cela que sur le graphique précédent la base €STR 6M/Euribor 6M est très faible actuellement (0.0043% au 30/09/2020).

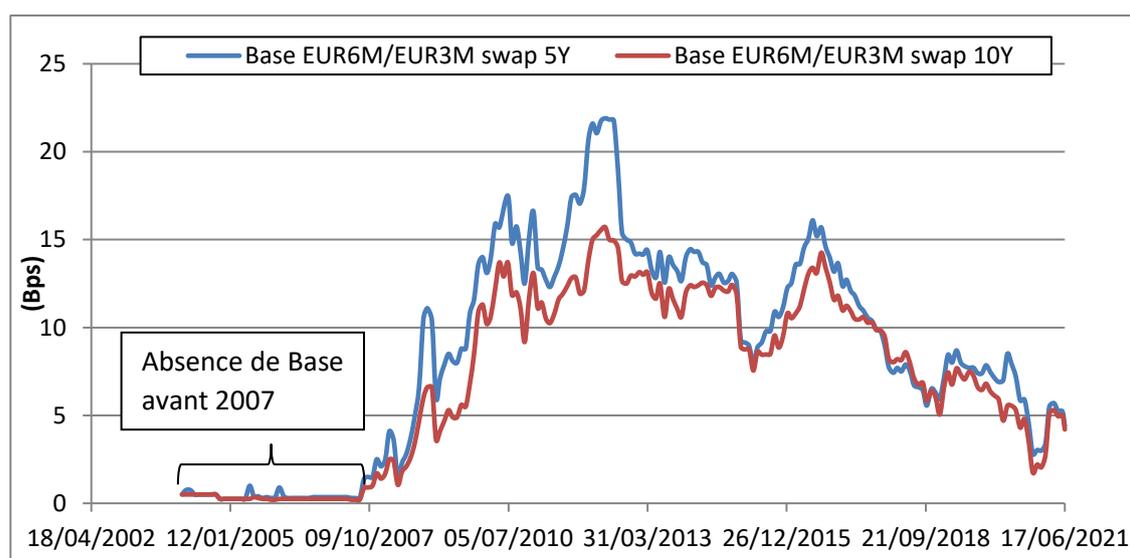


Figure 8 : Spread ou base entre le taux swap contre Euribor 6M et le taux swap contre Euribor 3M. Maturité du swap 5 ans (bleu) et 10 ans (rouge). (Source : Bloomberg)

Suivant la même logique, les différents Tenors se sont également sensiblement écartés les uns par rapport aux autres faisant apparaître une hiérarchie en termes de liquidité et de crédit (12M > 6M > 3M > 1M > OIS).

Le taux OIS (Overnight Indexed Swap) ou €STR sur le marché européen correspond au taux de financement overnight sur le marché interbancaire ou plus précisément le taux auquel les banques se prêtent leurs réserves excédentaires pour une durée d'un jour. A noter qu'aux Etats-Unis, l'OIS ou Fed Funds est traité alors qu'en Europe, il est estimé de la même manière que l'EURIBOR. Ce taux est considéré comme étant porteur des risques de crédit et de liquidité minimaux, et s'impose comme la nouvelle référence des taux sans risque. Le taux EONIA a été remplacé symboliquement en janvier 2020 par l'€STR (European Short Term Rate) suite à la manipulation des taux IBOR par les banques. La BCE participe dorénavant à sa fixation tous les jours en collaboration avec les banques. Le taux EONIA est coté jusqu'au 3 janvier 2022, et la base entre les deux indices est nulle. L'€STR est pris comme référence du taux « sans risque » pour les calculs dans ce mémoire car la date de valorisation prise pour les calculs est le 31 décembre 2020 et pour un souci de cohérence avec la nouvelle nomenclature. Mais, aucune différence dans les résultats n'aurait été observée si l'EONIA avait été choisie.

L'existence de ces différents spreads pose alors la question du choix de la courbe pour discuter les payoffs. Les taux IBOR ont longtemps été utilisés à cet effet. Cependant avec le succès grandissant des deals collateralisés dont le collatéral est rémunéré à OIS, le discounting se fait dorénavant à OIS.

3.2.2 Collatéralisation

Une conséquence de la crise de crédit de 2007, est l'avènement des contrats collateralisés afin de réduire significativement le risque de contrepartie sur les dérivés. Aujourd'hui la majorité des dérivés sont collateralisés. Une fois le contrat signé entre les deux contreparties, le marché évolue et donc la valeur du dérivé n'est plus nulle. Cela implique qu'une des deux contreparties est en risque (de défaut) par rapport à l'autre. Afin d'éviter que ce risque ne devienne trop grand et entraîne des défauts en cascade, l'idée de mettre du cash ou un actif en collatéral est apparu afin de réduire l'exposition en risque. Ce collatéral est posté à la signature du contrat, puis alimenté par l'une des deux contreparties si le prix du dérivé dépasse un certain seuil. Le prix du dérivé est recalculé tous les jours mais les échanges de collatéral ne se font qu'à une certaine fréquence. L'ensemble des termes qui régissent la collateralisation est écrite dans un CSA (Credit Support Annex) qui est une annexe à la termsheet du produit. Le CSA définit notamment : le montant du seuil, la fréquence, les actifs éligibles et leurs caractéristiques si le collatéral n'est pas du cash, les conditions de défaut, le taux de rémunération du collatéral (généralement OIS pour les raisons indiquées précédemment). La très grande majorité des CSA sont au format ISDA (International Swaps and Derivatives Association) ce qui permet aux acteurs de traiter les contrats plus facilement. Le recours à un CSA permet aux contreparties de réduire leur risque de contrepartie. Ainsi, un dérivé collateralisé est un dérivé avec un CSA dont le collatéral est rémunéré au taux du discounting c'est-à-dire au taux sans risque, autrement dit le taux €STR. C'est pourquoi la courbe €STR est la meilleure approximation à ce que serait la courbe des taux sans risque théorique.

Si le contrat n'est pas collateralisé alors le risque de contrepartie est par définition plus important et la courbe d'actualisation à utiliser pour évaluer le dérivé (et donc le risque de contrepartie) n'est plus l'€STR mais la courbe de refinancement de l'entreprise, généralement Euribor 3M ou Euribor 6M pour une entreprise dans la zone Euro.

3.2.3 Mise en place de la réglementation EMIR

En 2012, la réglementation EMIR (European Market Infrastructure Regulation) a été publiée pour une mise en place en 2016. Elle a été ensuite revue en 2020. Son objectif est d'introduire de nouvelles obligations pour les institutions financières en matière de produits dérivés. Cette réglementation vise notamment à réduire le risque de contrepartie en obligeant le recours à des chambres de compensation sur les dérivés traités de gré à gré (OTC). Le risque de contrepartie est ainsi entièrement transféré à la chambre de compensation. En

Europe, la chambre de compensation ou « clearer » la plus utilisée est EUREX. Les produits dérivés ciblés par EMIR sont les dérivés les plus liquides : swap de taux, swap de base, FRA, CDS.

EMIR prévoit aussi une obligation de reporting des produits dérivés traités auprès des référentiels agréés par l'ESMA et aussi une gestion opérationnel accrue avec :

- la confirmation des transactions des contrats de gré à gré entre les contreparties. Cette confirmation doit être rapide et si possible électronique ;
- la réconciliation des portefeuilles entre les contreparties pour s'assurer de la bonne qualité des données (caractéristiques du dérivés et prix notamment) ;
- une valorisation quotidienne du prix en mark-to-market si possible, sinon en Mark to model.

3.3 Approche quantitative de la compréhension du multi-curve

Dans la continuité de la section précédente, l'apparition des bases est démontrée de manière quantitative en faisant différentes hypothèses sur les modèles de taux. Les modèles présentés ne servent qu'à prouver l'existence d'une base théorique entre les Ténors.

3.3.1 Approche mono-curve (avant crise)

La pratique de place pour pricer un dérivé de taux consistait jusqu'à il y a peu à choisir un ensemble de produits de taux liquides (FRA, Futures, Swaps). Puis, stripper¹⁴ cet ensemble en supposant l'existence d'une seule et même courbe servant à actualiser les payoffs et calculer les forwards à l'aide de la relation de non-arbitrage suivante :

$$DF(t, T_2) = DF(t, T_1) * DF(t, T_2) \quad (20)$$

Avec $DF(t, T)$ le facteur d'actualisation vu en t de maturité T . A partir de cette relation, le forward de taux vu en t entre les dates T_1 et T_2 , noté $L^f(t, T_1, T_2)$ se déduit par :

$$DF(t, T_2) = \frac{DF(t, T_2)}{DF(t, T_1)} = \frac{1}{(1 + \Delta t * L^f(t, T_1, T_2))}$$

$$L^f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{DF(t, T_1)}{DF(t, T_2)} - 1 \right) \quad (21)$$

Avec Δt la fraction d'année entre les dates T_1 et T_2 calculée selon la base de calcul des jours de la courbe (généralement 30/360). Cette formule du forward permet de stripper la partie courte (< 2 ans) de la courbe des taux. Pour la partie longue de la courbe des taux, les taux swaps sont utilisés en sachant qu'ils doivent être au pair à l'initiation, c'est-à-dire que la jambe fixe soit égale à la jambe variable.

$$Jambe_{Fixe} = Jambe_{Variable} \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{fixe}} Tx_{swap} * \Delta t * DF(t, T_i) + DF(t, T_{N_{fixe}})$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{variable}} E^{Q_d^T} [L^f(t, T_i, T_{i+1})] * dt * DF(t, T_i) + DF(t, T_{N_{variable}})$$

¹⁴ C'est-à-dire reconstruire une courbe de facteur d'actualisation à partir d'instrument qui ne sont pas des zéro-coupons.

$$\sum_{i=1}^{N_{fixe}} T_{\mathcal{X}_{swap}} * \Delta t * DF(t, T_i) + DF(t, T_{N_{fixe}}) = 1 \quad (23)$$

Le membre de droite est égal à 1 car il correspond discount factor de maturité t .

Avec Δt et dt les fractions d'années des jambes fixe et variables selon leur propre échéancier, $E^{Q_t^T}[L^f(t, T_i, T_{i+1})]$ l'espérance du forward vu en t entre T_i et T_{i+1} sous la mesure forward-neutre. Les taux swaps sont cotés pour un amortissement in fine (d'où la simplification par le nominal des deux côtés de l'équation), et sachant que la jambe variable est au pair, cette relation peut se réécrire de manière plus classique afin de déterminer le facteur d'actualisation de la date $T_{N_{fixe}}$:

$$DF(t, T_{N_{fixe}}) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{N_{fixe}-1} T_{\mathcal{X}_{swap}} * \Delta t * DF(t, T_i)}{(1 + T_{W_{swap}} * \Delta t)} \quad (24)$$

Les méthodes de stripping diffèrent (interpolation, taux continu, convention de jours) mais de cette étape ressort une unique courbe vouée à l'actualisation des payoffs et au calcul des taux forwards. Cette méthode n'est plus cohérente avec l'état du marché actuel. En effet, l'apparition des basis spreads sous la pression du manque de liquidités nécessite une segmentation du marché des taux. Chacun des fixings pour différents Tenors du LIBOR est alors le constituant d'une courbe à part entière et non les constituants d'une seule et même courbe. Chaque Tenor (LIBOR 3M, LIBOR 6M, etc.) est un produit différent et possède sa propre courbe.

3.3.2 Approche Multi-curve (après crise)

Cette approche revient à considérer que chaque devise possède non pas une courbe de taux mais autant de courbes que de Tenors. Chaque devise ne peut cependant présenter qu'une seule courbe de discounting. En effet, quelque-soit le Tenor sous-jacent au produit considéré, la valeur actualisée d'un payoff ne doit pas être impactée.

La première étape du pricing en environnement multi-curve est donc le choix d'une courbe de référence qui servira à uniquement discountier tout payoff dans la devise concernée. Une autre courbe sera utilisée pour calculer les forwards (d'où le nom de l'approche : multi-curve ou bi-curve).

Il convient pour comprendre la distinction qui est faite dans cette partie de revenir au lien qui existe entre discounting et pricing de produits dérivés. Le pricing de produits dérivés suppose le calcul d'espérances et donc le choix d'une mesure dans laquelle calculer ces dernières. La mesure choisie est la mesure risque neutre, sous laquelle le portefeuille de répliqués actualisés est une martingale et sous laquelle le prix du dérivé peut être défini.

Mais il s'agit également de la mesure sous laquelle tout produit actualisé est une martingale, faisant du discount factor le numéraire de la mesure risque neutre (pour être précis la mesure en question est la mesure forward risque neutre). Néanmoins, il est impossible de dissocier mesure de calcul et courbe de discounting. Choisir une courbe de discounting revient donc à choisir une mesure de pricing. Cette remarque est centrale dans la bonne compréhension du multi-curve et des ajustements faits. Lors du calcul d'un simple FRA, il apparaît que l'on calcule l'espérance sous la mesure choisie du LIBOR du Tenor considéré. Autrement dit, la formulation du forward énoncé dans la partie précédente est vraie dans la mesure de la courbe mais sera fautive dans une autre mesure.

Remarque

Dans la suite, la notation suivante est utilisée : $DF^x(t_1, t_2)$, l'exposant x fait référence à la courbe considérée, pouvant prendre dans cette partie les valeurs d et f selon que la courbe serve à discounter ou à calculer des forwards. Q_d^T désigne la mesure forward risque neutre liée à la courbe de discounting choisie en T .

3.3.2.1 Reconstruction de la partie courte à partir des FRA

Un forward est toujours défini en utilisant la relation de non-arbitrage classique, à la seule différence que cette relation n'est vraie que dans la mesure choisie :

$$Forward(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{DF^f(t, T_1)}{DF^f(t, T_2)} - 1 \right) = L^f(t, T_1, T_2) = E_t^{Q_f^{T_2}} [L^f(T_1, T_2)] \quad (25)$$

Dans le cadre de la reconstruction multi-curve, nous ne sommes cependant pas intéressés par cette quantité mais plutôt par le FRA lié à la mesure Q_d^T (et non Q_f^T comme ci-dessus) qui permet de stripper la courbe sur la partie courte :

$$FRA^d(t, T_1, T_2) = N * DF(t, T_2) * dt * \left(E_t^{Q_d^{T_2}} [L^f(T_1, T_2)] - K \right) \quad (26)$$

Avec N le nominal, K le strike du FRA, dt la fraction d'année entre T_1 et T_2 , $E_t^{Q_d^{T_2}} [L^f(T_1, T_2)]$ l'espérance du taux forward sous la mesure Q_d^T .

La pratique de marché est d'ajuster cette formule théorique par l'approximation suivante : $E_t^{Q_d^{T_2}} [L^f(t, T_1, T_2)] \cong L^f(t, T_1, T_2)$. Cette pratique implique indirectement que le choix d'une courbe d'actualisation impacte bien le calcul du FRA et que $FRA^{pratique} \neq FRA^d(t, T_1, T_2)$ avec $FRA^{pratique}$ le FRA calculé dans la pratique.

Le forward qui est une martingale dans la mesure Q_f^T , n'est à priori pas une martingale dans la mesure Q_d^T . Il convient donc de s'intéresser à l'équation que vérifie $L^f(T_1, T_2)$ dans la mesure Q_d^T . En réalité seul son drift nous intéresse car seul ce dernier est affecté par un changement de mesure.

Afin de quantifier l'approximation faite, la pratique de marché est de supposer la dynamique du taux forward par un mouvement brownien géométrique avec un drift nul : μ_f , et une volatilité : σ_f qui dépend du temps dans la mesure forward neutre :

$$\frac{dL^f(t, T_1, T_2)}{L^f(t, T_1, T_2)} = \sigma_f(t) * dW_f^{T_2}(t)$$

Le changement de mesure pour faire passer l'équation du forward d'une mesure Q_f^T à Q_d^T peut s'appréhender comme un changement de numéraire, de $DF^f(t, T)$ dans la mesure Q_f^T à $DF^d(t, T)$ dans la mesure Q_d^T . En écrivant :

$$X_{fd}(t, T) = \frac{DF^f(t, T)}{DF^d(t, T)} = \frac{dQ_f^T}{dQ_d^T}$$

la densité de Radon–Nikodym du changement de mesure de Q_d^T vers Q_f^T .

Autrement dit, X_{fd} est une martingale dans $Q_d^{T_2}$, et peut s'écrire :

$$\frac{dX_{fd}(t, T_2)}{X_{fd}(t, T_2)} = \sigma_{fd} dW_d^{T_2}(t)$$

Avec σ_{fd} la volatilité du processus et $W_d^{T_2}$ un mouvement brownien sous $Q_d^{T_2}$ tel que :

$$dW_d^{T_2}(t) \cdot dW_f^{T_2}(t) = \rho_{fd} dt$$

Avec ρ_{fd} la corrélation entre les deux browniens.

En appliquant le théorème de Girsanov, le processus du taux forward peut se réécrire sous $Q_d^{T_2}$:

$$\frac{dL^f(t, T_1, T_2)}{L^f(t, T_1, T_2)} = -\sigma_f * \sigma_{fd} * \rho_{fd} dt + \sigma_f dW_f^{T_2}(t)$$

Cette nouvelle équation fait apparaître un terme de drift non nul : $\mu_f = -\sigma_f * \sigma_{fd} * \rho_{fd}$. On obtient ainsi l'expression de l'espérance sous $Q_d^{T_2}$ du forward :

$$E_t^{Q_d^{T_2}} [L^f(T_1, T_2)] = e^{-\int_t^{T_1} \rho_{fd} \sigma_{fd} \sigma_f du} * L^f(t, T_1, T_2) \quad (27)$$

Synthèse

Cette démonstration fait apparaître un terme multiplicatif du forward calculé par le marché. Ce terme correspond à un ajustement quanto (pour « quantity adjusting option »). Ce nom vient du fait que cet ajustement s'observe surtout sur les options dont le sous-jacent est dans une devise différente du prix de cotation de l'option. Ici, on calcule le prix d'un forward qui dépend de la courbe d'actualisation choisie (le forward est sensible à la corrélation et au spread entre les deux courbes).

Par ailleurs, un parallèle est faisable entre l'environnement multi-curve et les produits faisant apparaître plusieurs devises. En effet, l'existence de plusieurs courbes de taux au sein d'une même devise peut être vue comme plusieurs devises au sein d'une même devise, chacune payant un Tenor différent. Dans cette analogie, le taux de change entre ces différentes devises est de 1. Il apparaît donc que l'approche à adopter en environnement multi-curve est identique à celle adoptée lors du traitement des produits cross-currency. Le multi-curve n'est donc pas une notion nouvelle, mais la généralisation au sein de chaque devise du « cross-currency multi-curve ».

3.3.2.2 Reconstruction de la partie longue à partir des taux swaps

Pour reconstruire la partie longue de la courbe, la même démarche est faite. Les principales étapes sont présentées ci-dessous.

La dynamique des taux swaps, S , dans la mesure swap $Q_S^{T_n}$ suit un mouvement brownien géométrique avec un drift nul car l'hypothèse est faite qu'aucun phénomène de retour à la moyenne ou de tendance de fond est observable sur un historique des taux swaps. Ainsi le modèle retenu est à un facteur :

$$\frac{dS^f(t, T_1, T_n)}{S^f(t, T_1, T_n)} = \sigma_s(t) * dW_f^{T_1, T_n}(t)$$

Avec σ_s la volatilité du processus.

Par analogie, le changement de mesure, $Q_s^{T_n}$ vers $Q_d^{T_n}$ se fait via la variable Y_{fd} qui correspond au ratio des annuités des swaps dans les deux univers :

$$Y_{fd}(t, T) = \frac{\text{Annuité}^f(t, T_1, T_n)}{\text{Annuité}^d(t, T_1, T_n)} = \frac{dQ_f^{T_n}}{dQ_d^{T_n}}$$

Avec *Annuité* le facteur d'annuité du swap en t commençant en T_1 et de maturité T_n .

La dynamique Y_{fd} suit une martingale sous $Q_d^{T_n}$:

$$\frac{dY_{fd}(t, T_n)}{Y_{fd}(t, T_n)} = \sigma_{fd} dW_d^{T_n}(t)$$

On obtient alors sous $Q_d^{T_n}$ la nouvelle dynamique du taux swap avec un drift non nul :

$$\frac{dS^f(t, T_1, T_n)}{S^f(t, T_1, T_n)} = -\sigma_f * \sigma_{fd} * \rho_{fd} dt + \sigma_f dW_f^{T_n}(t)$$

Et,

$$E_t^{Q_d^{T_n}} [S^f(T_1, T_n)] = e^{-\int_t^{T_1} \rho_{fd} \sigma_{fd} \sigma_f du} * S^f(t, T_1, T_n) \quad (28)$$

Avec ρ_{fd} la corrélation entre les deux browniens.

3.4 Reconstruction des courbes en univers Multi-curve

A partir de l'approche théorique précédente, la reconstruction pratique de la courbe est mise en place. La reconstruction se fait en quatre étapes :

- **Etape 1** : Stripping des taux zéro-coupon de la courbe d'actualisation de la devise domestique choisie. Cette courbe permet d'actualiser tous les flux dans la devise domestique.
- **Etape 2** : Stripping des taux zéro-coupon de la courbe forward à partir de la courbe d'actualisation strippée à l'étape 1. Cette courbe permet de calculer les taux forwards dans la devise domestique.
- **Etape 3** : Stripping des taux zéro-coupon de la courbe d'actualisation de la devise étrangère à partir des courbes des étapes 1 et 2, et des bases inter-devises cotées.
- **Etape 4** : Stripping (identique à l'étape 2) des taux zéro-coupon des courbes forwards dans la devise étrangère en utilisant la courbe reconstruite à l'étape 3.

3.4.1 Multi-curve Mono-devise

3.4.1.1 Courbes d'actualisation en mono-devise (Etape 1)

Pour chacune des devises, un Tenor de référence est retenu. Celui-ci correspond en général au Tenor le plus liquide dans la devise sur le marché interbancaire. Les deals non collatéralisés sont discountés en utilisant la courbe de taux IBOR standard correspondant à ce Tenor. Ci-dessous les courbes de taux IBOR standards par devise :

- EUR : Euribor 6M
- JPY, GBP, CHF : Libor 6M
- USD : Libor 3M

Dans le cadre des instruments collatéralisés, en général le collatéral étant rémunéré aux taux overnight, les cash flows sont actualisés à OIS. La courbe d'actualisation correspond donc à la courbe OIS de la devise concernée.

Dans ce mémoire, la devise domestique est l'Euro. Cela correspond par exemple à une banque qui se refinance sur les marchés en Euro, ou à une compagnie d'assurance dont la devise de consolidation des comptes est l'Euro. La méthode étant identique que la courbe soit collatéralisée ou non, les calculs sont faits dans les deux cas.

La méthodologie pour stripper la courbe de discounting (C^d) est celle de l'approche mono-curve décrite dans la partie 3. Cette approche est consistante puisque les FRA et les swaps considérés verront leur jambe flottante être au pair, car à cette étape, discounting et calcul de forward se font avec la même courbe. En effet, la mesure choisie par le biais du choix de la courbe de discounting est bien celle sous laquelle les taux forwards payés sont des martingales.

Après implémentation de cette méthode sous VBA, le stripping est fait pour les cas collatéralisés en euro (courbe €STR) et les cas non-collatéralisés (Euribor 6M). Le résultat du stripping est présenté sur les deux graphes ci-dessous :

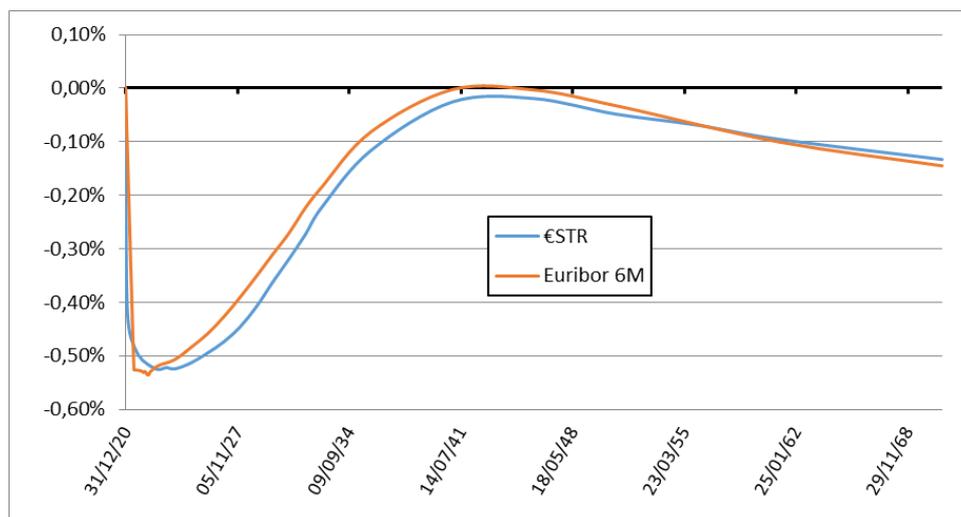


Figure 9 : Stripping des courbes €STR et Euribor 6M

Les deux courbes des taux zéro-coupons tracées sont cohérentes entre elles puisque la courbe €STR (moins risquée) est en dessous de la courbe Euribor 6M sur la majorité des maturités. Le contexte actuel de taux fait que ces deux courbes renvoient des taux zéro-coupons négatifs. Sur la partie très courte, le manque de point rend la qualité du stripping difficile avec une discontinuité pour la courbe Euribor 6M au niveau du point 6M. En effet, le premier point disponible sur cette courbe est le fixing du Tenor (soit le point de maturité 6M). Le point au 31/12/2020 (date de valorisation) a été ajouté pour faciliter l'interpolation des taux-zéro-coupon. La valeur du taux instantanée tend vers 0% pour une durée infinitésimale par définition. L'ajout de ce point permet d'avoir une tendance équivalente à la courbe €STR qui dispose d'un point à 1 jour. Pour rappel le taux de dépôt à 1 jour est de -0.5% ce qui explique la baisse brutale de la courbe au début. Cette baisse est d'autant plus visible que les taux zéro-coupons varient entre -0.53% et -0.15% sur le reste de la courbe.

La qualité du stripping est vérifiée en recalculant le prix d'un swap avec une date de maturité longue (par exemple 20 ans) en prenant pour le taux de jambe fixe le taux côté par Bloomberg et de la courbe de zéro-coupons strippée. Si le stripping est bien fait, alors le prix de ce swap doit être très proche de 0 afin de respecter la condition de prix au pair du swap à l'initiation.

Dans le tableau ci-dessous, le résultat du stripping est présenté pour deux swaps : le premier est un swap collatéralisé de 20 ans avec un taux fixe de -0.026% et un taux variable Euribor6M ; et le second est un swap non collatéralisé de maturité 20 ans avec un taux fixe de -0.003% et un taux variable Euribor6M.

	Date de valorisation	Date de début	Date de maturité	Nominal	Taux JF	Fréquence JF	Indice JV	Fréquence JV	Prix JF	Prix JV	Prix Swap	Ecart en Bps
€STR	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2040	10 000 000	-0,026%	12M	Euribor 6M	6M	10 046 789	10 046 824	-35	0
EURIBOR 6M	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2040	10 000 000	-0,003%	12M	Euribor 6M	6M	9 981 806	9 981 841	-35	0

Figure 10 : Résultat du stripping de la courbe €STR et Euribor 6M pour deux swaps de durée 20 ans

Le résultat du stripping fait apparaître un écart est -35 € pour un nominal de 10 M€. L'écart ramené en bps par rapport au nominal ($10^4 \times \text{Prix swap} / \text{nominal}$) donne un écart inférieur à 1 bp ce qui valide le stripping effectué. Le prix de la jambe fixe et variable est légèrement plus élevé lorsque les flux sont discountés avec la courbe €STR. Cela est logique puisque cette courbe est moins risquée que l'Euribor 6M (et donc un facteur d'actualisation plus grand puisque les taux sont négatifs).

3.4.1.2 Construction des courbes de taux forward en mono-devise (Etape 2)

Dans cette partie la méthodologie de reconstruction des courbes de taux permettant de calculer les forwards est décrite. Ces courbes sont reconstruites par stripping de swaps payant le Tenor correspondant à la courbe à reconstruire (Fixing du Tenor choisi, FRA et Swap).

On considèrera C^d la courbe de discounting (ou d'actualisation) pour chacune des devises et une courbe dite forward C^f , courbe payant les coupons flottants. La courbe C^d comme nous l'avons précisé en 3.4.1.1 est soit une courbe IBOR standard pour les swaps non collatéralisés, soit une courbe OIS pour les swaps collatéralisés. Ainsi, deux ensembles de courbes sont reconstruites pour la devise Euro :

- Ensemble 1 : non-collatéralisé
 - Courbe d'actualisation : Euribor 6M
 - Courbe forward : Euribor 1M funding Euribor 6M, Euribor 3M funding Euribor 6M, et Euribor 12M funding Euribor 6M.
- Ensemble 2 : collatéralisé
 - Courbe d'actualisation : €STR
 - Courbe forward : Euribor 1M funding €STR, Euribor 3M funding €STR, Euribor 6M funding €STR, et Euribor 12M funding €STR.

Il se pose alors la question de l'estimation d'un coupon flottant payant la courbe C^f , différente de C^d reconstruite à l'étape précédente. Pour cela, la théorie présentée au 3.3.2 propose un ajustement de convexité. Ce dernier suppose cependant de connaître la courbe C^f , ce qui est matériellement impossible. En effet, il ne s'agit que d'une référence théorique et cette démonstration n'est vouée qu'à l'illustration du phénomène multi-curve. Cette méthode nécessite d'autant plus de choisir un modèle pour le rapport des prix des zéros coupons, mais également de mesurer des corrélations entre ce processus et le taux sous-jacent, ce qui rend cette méthode particulièrement sujette à la qualité des paramètres choisis.

Une manière de s'affranchir de la contrainte modèle et de la mesure de paramètres, est le stripping de produits payant la courbe C^f , en considérant que ces produits sont discountés à C^d (convention de marché). Les produits utilisés sont alors le fixing de C^f , les FRA sur C^f et les swaps payant C^f .

3.4.1.2.1 Construction de la courbe de taux forward sur le court et moyen terme

Les taux swap n'étant pas liquides sur les courtes maturités, la pratique de marché consiste à récupérer les market rates ou cotations de marchés d'autres instruments plus liquides. Les fixings de taux sont alors utilisés pour les courtes maturités, les FRA (ou futures) couvrent quant à eux les maturités moyen terme.

La courbe de discounting n'est pas prise en compte pour la construction de la première partie de la courbe. Le taux zéro-coupon associé au fixing de taux, est retrouvé via la formule (15) en prenant en compte la convention de jours et de taux prise par Bloomberg pour la courbe à construire. Le fixing est associé au tenor de la courbe et ce tenor correspond à la maturité du taux zéro coupon calculé (fixing EURIBOR 6M, fixing EURIBOR 3M).

Les taux zéro coupon sur le moyen terme sont retrouvés en utilisant les FRA (ou futures dans certains cas). Les cotations récupérées de Bloomberg correspondent aux taux FRA1Mx7M, FRA2Mx8M... pour la construction de l'EURIBOR 6M par exemple.

Le taux zéro-coupon en T_i supérieur au Tenor de la courbe est retrouvé en utilisant le discount factor issu de la relation de non-arbitrage suivante :

$$DF(t, T_i) = DF(t, T_{i-1}) * DF(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{(1 + zc(T_i))^{T_i}} \quad (29)$$

Où T_{i-1} correspond à $T_i - 6\text{mois}$ dans le cas de la construction d'une courbe de tenor 6M. Le terme $DF(t, T_{i-1})$ correspond au discount facteur calculé avec le taux zéro-coupon en T_{i-1} . Le taux zéro-coupon en T_{i-1} est quant à lui récupéré en interpolant la courbe déjà calculée si la date n'est pas inférieure à la date de fixing. La méthode d'interpolation utilisée est une interpolation linéaire. $DF(T_{i-1}, T_i)$ correspond à un discount facteur forward récupéré du FRA(T_{i-1}, T_i). L'inconnu $DF(t, T_i)$ est le discount factor entre la date t (date de valorisation), et la date T_i . Le taux zéro-coupon est ensuite récupéré de ce discount factor.

En ce qui concerne les taux intermédiaires entre 1 mois et 6 mois, ou 1 mois et 3 mois, nous n'avons pas le terme $DF(T_{i-1}, T_i)$ de l'équation (21) pour en déduire l'inconnue $DF(t, T_i)$ (pour $1 < T_i < 6M / 3M$). Pour avoir plus de points sur le court terme lors de la reconstruction, il faut faire une hypothèse supplémentaire. Cette hypothèse dépend du Tenor de la courbe. Pour le Tenor 3M, l'hypothèse est d'extrapoler linéairement la donnée manquante de l'équation (27). En revanche, pour le tenor 6M, j'ai considéré les FRA côtés sur une période plus courte selon la relation suivante pour déterminer $DF(T_{i-1}, T_i)$ de l'équation (21).

$$DF(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{1 + r(T_i + 6M) \times Période(T_i - T_{i-1})} \quad (30)$$

Où $r(T_i + 6M_i)$ est le taux en $T_{i-1} + 6M > T_i$, correspondant au FRA($T_{i-1}, T_{i-1} + 6M$) côté.

Remarques

- Pour les tenor 1M et 12M, les taux zéro-coupon des courbes forward C^f de ces tenors sur le court et moyen terme sont calculés à partir de fixing de taux et des taux swaps, car il n'y a pas de FRA côté sur le moyen terme.

- Pour des arguments de liquidités pour certaines devises¹⁵, le Future est utilisé au lieu du FRA. Les payoffs des deux instruments diffèrent, un ajustement de convexité permet d'obtenir les Futures à partir FRA.

3.4.1.2.2 Construction de la courbe de taux forward sur le long terme

Les taux zéro-coupons sur le long terme sont retrouvés en se calibrant sur les taux swaps cotés dans le marché. Ainsi les zéro-coupons calculés doivent permettre d'obtenir un swap au pair à l'initiation qui paie le taux fixe côté pour une maturité donnée. Considérons un swap sur N années (N_{fixe} flux sur la jambe fixe et $N_{variable}$ sur la jambe variable), payant les taux forward de la courbe C^f contre le taux fixe de la maturité du swap. Alors la relation donnée par l'équation (22) doit être vérifiée à l'initiation :

$$Jambe_{Fixe} = Jambe_{Variable}$$

Soit,

$$\sum_{i=1}^{N_{fixe}} Tx_{swap} * \Delta t_i * DF^d(t, T_i) = \sum_{j=1}^{N_{variable}} E^{Q_d^T}[L^f(t, T_j, T_{j+1})] * dt_j * DF^d(t, T_j) \quad (31)$$

Avec :

- Tx_{swap} le taux swap de C^f , correspondant à la maturité du swap observé sur le marché.
- Δt_i la période de temps entre les deux dates de l'échéancier de la jambe fixe en $i-1$ et i (généralement la jambe fixe paie un coupon une fois par an).
- dt_j la période de temps entre les deux dates de l'échéancier de la jambe variable en $j-1$ et j (par exemple pour l'Euribor 6M, il y aura deux flux par an).
- DF^d le discount factor calculé à partir de la courbe de discounting choisie C^d .
- $E^{Q_d^T}[L^f(t, T_j, T_{j+1})]$ l'espérance du flux forward entre les deux dates de l'échéancier de la jambe variable en j et $j+1$.

Les inconnues ici sont les taux espérances des taux forward L_j^f , payés aux dates $(T_j)_{j=1 \dots N_{variable}}$ de l'échéancier de la jambe variable. $T_{N_{variable}} = T_{fixe}$ est la date de maturité du swap.

Résolution de l'équation (31)

Nous avons ici un système d'une équation et de plusieurs inconnues, ce qui est impossible à résoudre sans des hypothèses simplificatrices appropriées. Ce problème est ramené à une équation à une inconnue via l'hypothèse ci-dessous.

$L_{N_{variable}}^f$ est le dernier taux forward payé sur la jambe variable du swap. On appelle $x_{N_{variable}}$ le taux zéro coupon associé à $L_{N_{variable}}^f$.

Pour ramener le problème à une inconnue, nous allons faire l'hypothèse que les taux zéro-coupon associés au taux forward intermédiaires L_j^f sont interpolés linéairement aux dates T_j entre $x_{N_{variable}}$ et le dernier taux zéro-coupon déjà calculé pour des maturités antérieures.

Par exemple, si nous prenons un taux swap contre Euribor 6M alors la jambe variable paie deux flux variables dans l'année, et donc deux inconnues dans l'équation (30). En supposant que les zéro-coupons

¹⁵ Typiquement l'USD

intermédiaires et inconnus peuvent se réécrire comme une fonction linéaire entre le dernier zéro-coupon et le zéro-coupon inconnu de la maturité que l'on souhaite déterminer $x_{N_{variable}}$, nous pouvons alors écrire l'équation (32) suivante :

$$x_{2N-1} = x_{2N-2} + (T_{2N-1} - T_{2N-2}) \times \frac{(x_{2N} - x_{2N-2})}{(T_{2N} - T_{2N-2})} \quad (32)$$

Si on fait un schéma de l'hypothèse faite, cela veut dire que le taux est linéaire entre x_{2N-2} et x_{2N} . Sur le schéma $N_{variable}$ a été simplifié en N pour plus de lisibilité.

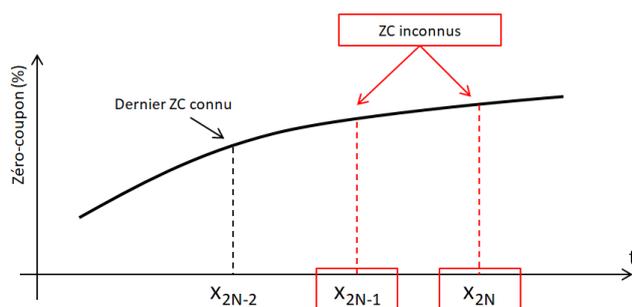


Figure 11 : Interpolation linéaire des ZC intermédiaires

Ainsi le dernier zéro-coupon peut être soit un zéro-coupon issu d'un FRA, soit un zéro-coupon issu d'un swap. Pour les cotations de longue maturité, le marché est souvent illiquide et donc avec peu de point. Le stripping est donc d'autant plus sensible à cette hypothèse que l'écartement de dates entre deux cotations est important.

Avec cette hypothèse d'interpolation linéaire et en remplaçant l'équation (32) dans l'équation (31), alors celle-ci devient une équation à une inconnue qu'il est possible de résoudre. En effet, les forwards peuvent être réécrits en fonction du taux zéro-coupon via l'équation (24).

La résolution de l'équation (31) est ensuite faite numériquement via un algorithme d'optimisation de Newton-Raphson ce qui permet de retrouver le taux zéro coupon $x_{N_{variable}}$ correspondant au taux forward inconnu L_{2N}^f . Tous les zéro-coupons intermédiaires qui étaient inconnus peuvent être alors déterminés via l'équation (32) au besoin.

3.4.1.3 Résultats des courbes forwards strippées

Le stripping est effectué sur plusieurs tenors (1M, 3M, 6M et 12M) dans la devise de discounting (EUR). Les résultats ci-dessous présentent les courbes strippées. Les deux courbes présentent un aspect similaire jusqu'en 2055. Au-delà de cette date, moins de points sont disponibles sur le marché ce qui rend instable le stripping.

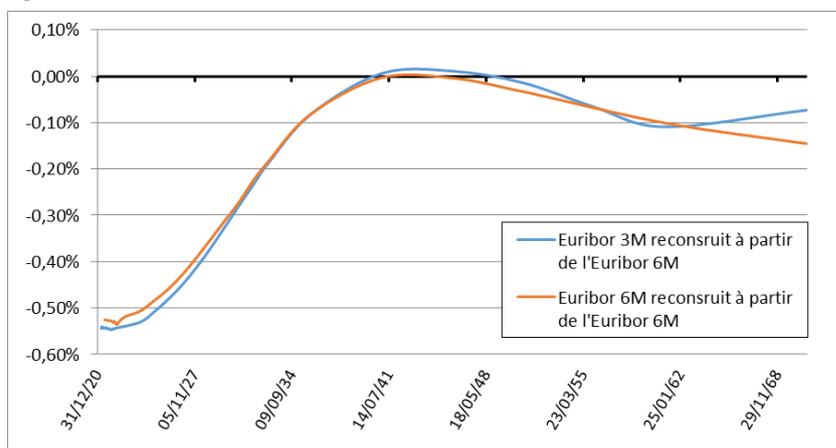


Figure 12 : Courbes zéro-coupon Euribor 3M et Euribor 6M reconstruites à partir de la courbe Euribor 6M

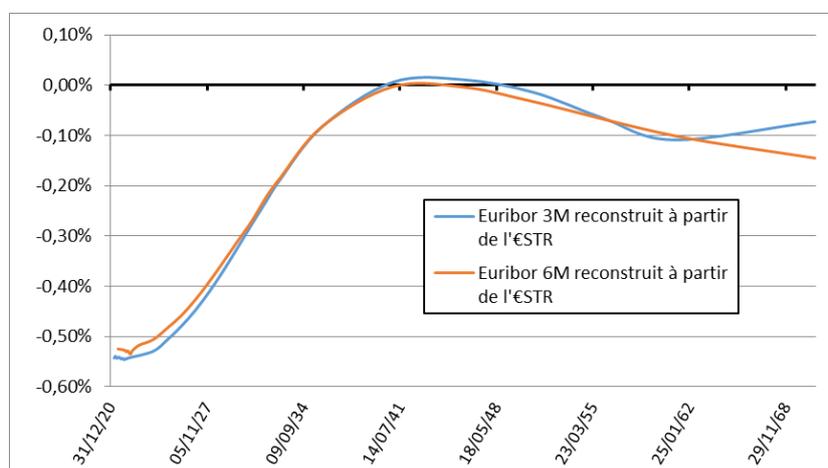
En complément, le prix pour deux swaps de maturité 20 ans à partir des courbes reconstruites est recalculé. Les résultats ainsi que les caractéristiques principales de ces deux swaps sont présentés dans le tableau ci-dessous :

EURIBOR 6M	Date de valorisation	Date de début	Date de maturité	Nominal	Taux JF	Fréquence JF	Indice JV	Fréquence JV	Prix JF	Prix JV	Prix Swap	Ecart en Bps
EURIBOR 3M	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2040	10 000 000	0,006%	12M	Euribor 3M	3M	10 000 643	10 000 671	-28	0,03
EURIBOR 6M	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2040	10 000 000	-0,003%	12M	Euribor 6M	6M	9 981 806	9 981 841	-35	0,03

Figure 13 : Résultats du stripping de la courbe swap pour l'Euribor 3M et l'Euribor 6M

Les résultats confirment que la reconstruction est correcte puisque le prix du swap est de -28 et -35€ pour un nominal de 10 M€. Soit 0.03 bps d'écart par rapport au nominal. La courbe des zéro-coupon pour l'Euribor 3M est plus lisse sur le court terme ce qui est cohérent car le nombre de point disponible pour faire cette reconstruction est plus important sur cette partie de la courbe. Sur le long terme, le nombre de taux swap côtés est sensiblement identique et les deux courbes ne font pas apparaître de discontinuité.

Le même travail est effectué pour la reconstruction de l'Euribor 3M et l'Euribor 6M à partir de l'€STR (pour les deals collatéralisés). Les résultats sont présentés ci-dessous :



Les résultats *Figure 14 : Courbes zéro-coupon Euribor 3M et Euribor 6M reconstruites à partir de la courbe €STR*

€STR	Date de valorisation	Date de début	Date de maturité	Nominal	Taux JF	Fréquence JF	Indice JV	Fréquence JV	Prix JF	Prix JV	Prix Swap	Ecart en Bps
EURIBOR 3M	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2040	10 000 000	0,006%	12M	Euribor 3M	3M	10 065 708	10 065 736	-28	0,03
EURIBOR 6M	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2040	10 000 000	-0,003%	12M	Euribor 6M	6M	10 046 789	10 046 824	-35	0,03

Figure 15 : Résultats du stripping pour les courbes Euribor 3M et Euribor 6M à partir de €STR

confirment que la reconstruction est correcte puisque le prix du swap est de -28 et -35€ pour un nominal de 10 M€. Soit 0.03 bps d'écart par rapport au nominal. La différence entre la même courbe reconstruite à partir de deux courbes d'actualisation n'est pas visible à l'œil nu à cause du faible niveau des bases inter-tenors à cette date de valorisation (31/12/2020).

3.4.2 Multi-curve en multi-devises

3.4.2.1 Principe général de reconstruction en univers multi-devises

La reconstruction de courbes dans un environnement faisant intervenir plusieurs devises se fait en suivant la même logique que dans le cas en mono-devises détaillé précédemment. L'étape supplémentaire en amont à prendre en compte dans ce cadre, consiste en la reconstruction de la courbe d'actualisation de la nouvelle

devise à partir de la devise de référence¹⁶. Ce que l'on considère comme étant devise pivot correspond en général à la devise la plus liquide ou de référence dans le cadre des deals non collatéralisés, et celle du collatéral dans le cadre de deals collatéralisés. Après avoir reconstruit la courbe d'actualisation de la nouvelle devise, le processus de reconstruction des courbes forwards de différents tenors associés à cette devise est le même que dans le cas mono-devise.

Dans la suite de cette partie on notera EEE la devise étrangère (devise à reconstruire) et DDD la devise domestique (devise de référence).

La reconstruction de courbes de taux en multidevise se fait selon les étapes suivantes :

- Choix d'une devise de référence DDD (devise la plus liquide du produit ou devise du collatéral).
- Récupération¹⁷ des données de points de report/déport (swaps points) entre les deux devises, ainsi que les cross currency swaps¹⁸ spreads.
- Choix de la courbe d'actualisation de la devise DDD (OIS si le deal collatéralisé, Tenor de référence sinon).
- Choix de la courbe d'actualisation de la devise EEE (OIS si le deal collatéralisé, Tenor de référence sinon).
- Reconstruction de la courbe d'actualisation de la devise DDD à partir de la courbe d'actualisation de la devise DDD.
- Reconstruction des courbes forward des autres Tenors de la devise DDD à partir de la courbe d'actualisation choisie de la devise DDD.
- Reconstruction de la courbe d'actualisation de la devise EEE à partir des courbes d'actualisations de la devise EEE et DDD.
- Reconstruction des courbes forward des autres Tenors de la devise EEE à partir de la courbe d'actualisation de la devise reconstruite EEE.

3.4.2.2 Hiérarchie des devises

L'ensemble des échanges réalisés sur le marché donnent lieu à une hiérarchie concernant la liquidité des devises. L'USD est considéré comme étant la devise de référence (ou devise la plus liquide), elle est suivie de l'EUR ensuite le JPY, puis GBP, et enfin le CHF.

Exemple :

- Pour un CCS (Cross Currency Swap) EUR/USD non collatéralisé, la devise de référence (ou la plus liquide) est l'USD. La courbe d'actualisation EUR est reconstruite à partir de la courbe standard Libor USD 3M. Les courbes EUR forward 6M, 3M et 12M sont ensuite reconstruites à partir de la courbe EUR reconstruite.
- Pour un CCS EUR/GBP non collatéralisé, la devise de référence (ou la plus liquide) est l'EUR. La courbe d'actualisation GBP est reconstruite à partir de la courbe standard Euribor 6M. Les courbes GBP forward 6M, 3M et 12M sont ensuite reconstruites à partir de la courbe GBP reconstruite.

¹⁶ La devise de référence du mémoire est l'EUR. La devise domestique et devise de référence sont identiques.

¹⁷ Les données sont récupérées de Bloomberg à la date de valorisation.

¹⁸ Un cross currency swap (CCS) ou swap de devise est un swap qui permet d'échanger un type de taux dans une devise A contre un autre type de taux dans une devise B. La différence principale avec un swap de taux est l'échange de nominal à l'initiation et à la maturité du swap.

Dans les exemples précédents, la devise de référence est la devise pivot à partir de laquelle sont reconstruites toutes les autres, mais ce n'est pas toujours le cas comme cela est présenté dans l'exemple suivant.

- Dans le cas d'un CCS EUR/GBP collatéralisé en GBP, la courbe d'actualisation EUR est reconstruite à partir de la courbe OIS GBP, les courbes EUR forward 6M, 3M et 12M sont ensuite reconstruites à partir de la courbe OIS EUR reconstruite. C'est la devise du collatéral qui détermine la devise pivot et pas forcément la devise de référence.

3.4.2.3 Reconstruction de la courbe d'actualisation d'une devise à une autre (Etape 3)

3.4.2.3.1 Reconstruction de la partie court terme

En l'absence de cotations de spreads de cross currency swap pour les maturités inférieures à un an, les cotations des points de report/déport ont été utilisés pour le calcul des taux d'une devise à une autre. La calibration sur le court terme se fait donc sur les forwards de change. Le calcul repose sur les deux équations suivantes du cours de change :

$$F_{EEEDDD}(t, T) = \frac{DF_{EEE}(t, T)}{DF_{DDD}(t, T)} \cdot S_{EEEDDD}(t) \quad (33)$$

$$F_{EEEDDD}(t, T) = S_{EEEDDD}(t) + \frac{SP_{EEEDDD}(T)}{10000} \quad (34)$$

Avec :

- $S_{EEEDDD}(t)$, le taux de change spot de la paire de devise EEEDDD, en t , la date de valorisation.
- $F_{EEEDDD}(t, T)$, le taux de change forward à T , la maturité de l'option, vu en t .
- $SP_{EEEDDD}(T)$, point de report/déport interpolé à la date de maturité T de l'option.
- $DF_{DDD}(t, T)$, le discount factor en monnaie domestique, en t , la date de valorisation, de maturité T .
- $DF_{EEE}(t, T)$, le discount factor en monnaie étrangère, en t , la date de valorisation, de maturité T .

L'équation (33) est une équation issue du principe d'absence d'opportunité d'arbitrage comme le montre la figure 16.

Pour avoir un nominal de 1 à la date T , deux chemins sont possibles : convertir le nominal au cours de change en T , puis actualiser en t le nouveau nominal dans la devise domestique, ou sinon actualiser en t le nominal de 1 dans la devise étrangère, puis convertir au cours de change en t . Les deux chemins aboutissent à la même valeur.

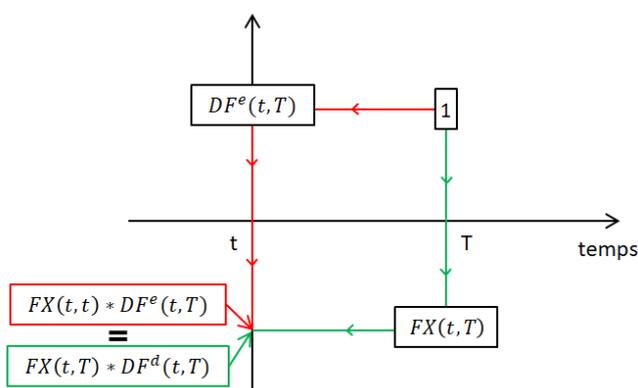


Figure 16 : Relation de non-arbitrage sur le change

L'équation (34) est une équation vérifiée par les cotations des points de report/déport. Le discount factor $DF_{EEE}(t, T)$ est retrouvé à partir des deux équations (33) et (34).

Remarque :

L'extraction faite de Bloomberg n'est pas toujours dans le sens devise EEE/DDD, c'est-à-dire devise à reconstruire/devise pivot. La formule est adaptée de façon à prendre en compte le sens de cotations de points de report/déport que l'on utilise.

3.4.2.3.2 Reconstruction de la partie long terme à partir des basis spread

Au-delà de la maturité un an, la construction de la courbe d'une devise EEE se fait à partir de celle de la devise domestique, en se calibrant une nouvelle fois sur les instruments de marchés. Afin de reconstruire la partie longue de la courbe d'actualisation en devise étrangère, nous utilisons les cotations des bases inter-devises (aussi appelé cross currency basis spread) entre les devises EEE et DDD, ainsi que les taux swap 3M de la devise EEE à reconstruire. Les bases inter-devises reflètent deux effets : un effet change et un effet taux. De plus, elles sont généralement cotées de manière à échanger un taux variable 3M dans une devise contre un taux variable 3M dans une autre devise. Cette façon de coter est visible dans la formule (36) ci-après.

La courbe reconstruite doit respecter les deux conditions de non-arbitrage suivantes :

- Le swap de taux est au pair à l'initiation,
- Le cross currency swap est au pair à l'initiation.

Ainsi ces deux conditions peuvent être réécrites sous formes de deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} Tx_{swap} * \sum_{i=1}^{N_{fixe}} \Delta t_i * DF_{EEE}(t, T_i) = \sum_{j=1}^{N_{variable}} dt_j * E_t^{EEE} [L(T_{j-1}, T_j)] * DF_{EEE}(t, T_j) \\ N_{EEE} \left(\sum_{j=1}^{N_{variable}} dt_j * (E_t^{EEE} [L(T_{j-1}, T_j)] + b_N) * DF_{EEE}(t, T_j) + DF_{EEE}(t, T_N) - DF_{EEE}(t, T_0) \right) \\ = S_{EEEDDD}(t) * \left(\sum_{j=1}^{N_{variable}} \delta t_j * E_t^{DDD} [L(T_{j-1}, T_j)] * DF_{DDD}(t, T_j) + DF_{DDD}(t, T_N) - DF_{DDD}(t, T_0) \right) \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\quad \quad \quad (36)$$

Avec :

- b_N le cross currency basis spread entre les devises EEE et DDD de maturité N années.
- $DF_{XXX}(t, T_i)$ le discount factor vu en t de maturité T_i de la devise XXX.
- $E_t^{XXX} [L(T_{j-1}, T_j)]$ l'espérance du taux forward de la devise XXX entre T_{j-1} et T_j vu en t .
- Δt_i , dt_j , et δt_j les différentes fractions d'années des différentes jambes (fixe devise EEE, variable devise EEE et variable devise DDD).
- Tx_{swap} le taux swap de la maturité du swap traité de la devise EEE.
- $S_{EEEDDD}(t)$ le cours de change entre la devise EEE et DDD en t .
- N_{EEE} le nominal en devise EEE. Les cotations se font pour des swaps In fine.

Les DF_{DDD} correspondent aux discount factors déterminés à partir de la courbe de discounting choisie C^d dans la devise DDD. Les L_j^{DDD} correspondent aux taux forward DDD reconstruits à partir des DF_{DDD} via la méthode décrite en 3.4.1.2.

Ces deux équations doivent être vérifiées par les courbes reconstruites. Les deux inconnues $DF_{EEE}(T_i)$ et L_i^{EEE} sont déterminées en égalisant (35) et (36). Nous faisons implicitement l'hypothèse ici que la devise DDD est la devise de référence (ou la plus liquide) car dans l'équation (36) le basis spread est coté de manière à avoir un CCS au pair à l'initiation en rajoutant le basis spread sur la jambe dans la devise secondaire (ou la moins liquide).

Dans l'équation (36), le second terme (celui de la jambe DDD) est par définition nul à l'initiation (cf. équation (23)). Cela permet de simplifier l'équation (36) et de la remplacer dans l'équation (35) pour éliminer les termes d'espérance des forwards dans la devise étrangère. Ainsi, on aboutit à l'équation suivante :

$$T x_{\text{swap}} \sum_{i=1}^{N_{\text{fixe}}} \Delta t_i * DF_{EEE}(t, T_i) + b_N \sum_{i=1}^{N_{\text{variable}}} \delta t_i * DF_{EEE}(t, T_i) = DF_{EEE}(t, T_0) - DF_{EEE}(t, T_N) \quad (37)$$

Les inconnues ici sont les discount factors $(DF_{EEE}(t, T_i))_{i=1 \dots N_{\text{variable}}}$.

Résolution de l'équation (37)

Nous nous retrouvons dans la même configuration qu'au 3.4.1.2.2 avec une équation et plusieurs inconnues, ce qui est impossible à résoudre sans des hypothèses simplificatrices appropriées. L'équation (37) peut être ramenée à une équation à une inconnue en utilisant la même hypothèse que pour l'équation (32).

Les zéro-coupons inconnus intermédiaires (c'est-à-dire avec une date de maturité entre le dernier zéro-coupon connu et le zéro-coupon inconnu) sont interpolés linéairement à l'aide du dernier zéro-coupon connu et du dernier zéro-coupon inconnu. Cette hypothèse se réécrit sous forme d'équation :

$$x_j = x_{N_{\text{variable}}} + (T_j - T_{N_{\text{variable}}}) \times \frac{(x_{N_{\text{variable}}} - x_{\text{dernier connu}})}{(T_{N_{\text{variable}}} - T_{\text{dernier connu}})}$$

La résolution de l'équation (37) est ensuite faite numériquement grâce à un algorithme d'optimisation de Newton-Raphson qui permet de trouver le taux zéro coupon $x_{N_{\text{variable}}}$ correspondant au discount factor $DF_{EEE}(t, T_{N_{\text{variable}}})$.

3.4.2.4 Reconstruction de la courbe forward de taux (Etape 4)

Après avoir reconstruit les courbes d'actualisation d'une devise, les courbes de taux des autres Tenors de la devise DDD sont reconstruites en utilisant la même méthodologie que dans la partie mono-devise. La courbe de discounting est la courbe d'actualisation reconstruite de la devise, autrement dit la courbe issue de l'étape 3.

3.4.2.5 Résultats du stripping

Les résultats sont présentés pour la courbe GBP Libor 3M qui a été reconstruite à partir du GBP Libor 6M, de l'€STR, et de l'USD OIS. Les courbes des zéro-coupons obtenues dans les trois cas sont tracées ci-dessous :

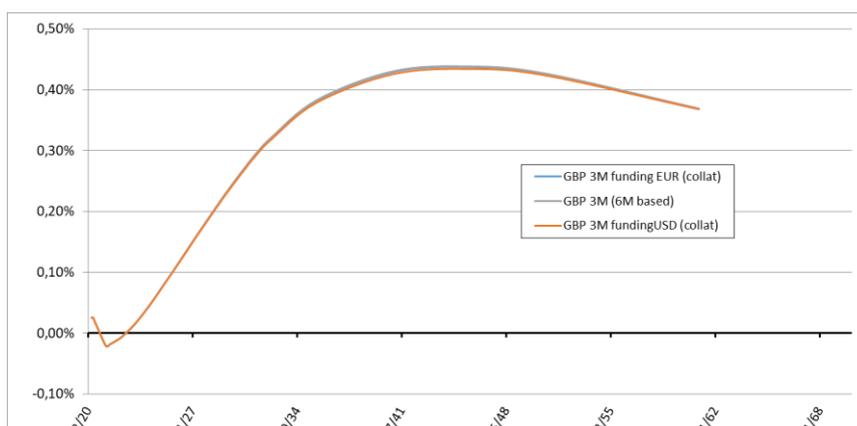


Figure 17 : Courbe ZC du GBP Libor 3M reconstruites de trois manières différentes

Le graphique montre que ces trois courbes reconstruites sont très similaires. Les trois courbes sont très proches, l'impact du choix de la courbe de discounting se verra surtout lorsque des dérivés sont pricés pour lesquels les nominaux sont importants. Afin de vérifier plus précisément le stripping effectué avec ces trois courbes, le prix d'un swap 10 ans est calculé trois fois en utilisant à tour de rôle une courbe GBP LIBOR 3M différentes.

Courbe de reconstruction	Date de valorisation	Date de début	Date de maturité	Nominal	J. Payeuse	J. Receveuse	Indice JV	Fréquence JV	Prix JP (*)	Prix JR (*)	Prix Swap	Ecart en Bps
GBP Libor 6M	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2030	10 000 000	E3M	GBP3M + 0,131%	GBP Libor 3M	3M	9 984 079	9 980 729	3 349	3
USD OIS	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2030	10 000 000	E3M	GBP3M + 0,124%	GBP Libor 3M	3M	10 338 824	10 351 099	-12 275	12
EONIA	31/12/2020	31/12/2020	31/12/2030	10 000 000	E3M	GBP3M + 0,127%	GBP Libor 3M	3M	10 038 344	10 038 944	-599	1

(*) Jambe Payeuse et Jambe Receveuse

Figure 18 : Résultats du stripping du GBP LIBOR 3M à partir de trois courbes différentes

Ces trois swaps échangent le GBP Libor 3M + une base contre l'Euribor 3M, ce sont des swaps avec deux jambes variables. Le prix de chaque swap est proche de 0. Le maximum en valeur absolue est de 12 275€, soit 12 bps d'écart pour un swap 10 ans, donc 1.2 d'écart en bps par an. Cet écart est non significatif. On remarque que les marges sur le GBP LIBOR 3M n'ont pas toutes les mêmes valeurs puisqu'elles n'intègrent pas toutes les mêmes informations. En effet, la base inter-devise EUR/GBP 3M 10 ans dépend de la devise du collatéral et de la courbe de discounting (USD, EUR ou GBP). On rappelle que cette base inter devise contient des informations sur la liquidité, le change, et les taux et aucun de ces effets ne peut être différenciés dans la cotation faite par le marché.

Outre les données d'entrées, les calculs sont sensibles à la méthode d'interpolation et aux hypothèses de méthodologie faites. Les CCS sont des produits exotiques non pas parce qu'ils sont compliqués à tarifier, mais parce que les données de marché à utiliser sont nombreuses et compliquées à intégrer correctement.

En conclusion, cette partie a permis de présenter et de valider la méthodologie employée dans ce mémoire pour reconstruire les courbes de taux. Cette méthodologie n'est pas nouvelle en ce sens que la théorie derrière était connue avant la crise. Cependant la crise financière de 2007 a mis en lumière les raccourcis méthodologique employés (mono-curve par devise) et a complexifié les méthodes de calculs afin d'épouser une réalité plus compliquée. Les banques, assurances et autres entreprises exerçant sur les marchés ont été obligé de s'aligner sur ces nouveaux standards pour ne plus ignorer le risque de base que ce soit entre les devises ou entre les Tenors d'une même devise. L'environnement multi-curve reconstruit dans cette partie servira de base par la suite dans les trois méthodes d'évaluation du risque de contrepartie présentées dans la prochaine partie.

4 Modélisation du risque de contrepartie

La partie précédente a détaillé la méthode pour construire un univers multi-curve. Ainsi, nous nous basons sur les courbes reconstruites pour calculer l'exposition au risque de contrepartie sur plusieurs dérivés. Trois méthodes sont étudiées (add-ons, options, Monte Carlo), puis comparées entre elles pour quantifier le risque de contrepartie sur les dérivés de taux et de change.

4.1 Méthodes des add-ons

La première méthode présentée est celle dite des add-ons ou « current exposure method ». Il s'agit de la méthode la plus simple à mettre en place et à comprendre puisqu'elle consiste à calculer le prix de marché (Mtm) et à lui ajouter un add-on c'est-à-dire une marge de sécurité par rapport à l'exposition actuelle (Mtm). La « *Current Exposure Method* » (CEM) a été développée par le comité de Bâle II en 1988.

La CEM est utilisée pour les contrats dont le payoff ne peut pas être modélisé par des méthodes plus fines (comme la méthode des swaptions présentée en 4.2) ou lorsque le coût technique est disproportionné par rapport au nombre de dérivé en portefeuille (comme la méthode de Monte Carlo présentée en 4.3). Une banque ou un assureur aura recours à la CEM lorsqu'elle n'a pas de modèle interne permettant de calculer l'Exposition At Default (EAD) dans l'expression de la CVA. Pour rappel, la CVA peut s'appréhender comme le produit de trois grandeurs : probabilité de défaut * LGD¹⁹ * EAD.

La méthode des add-ons vise à approximer l'EAD (qui est la grandeur la plus complexe à évaluer dans la formule de la CVA) par l'expression suivante :

$$EAD = \max(RC - \text{Collatéral}; 0) + \text{Add_on} \quad (38)$$

Avec RC le coût de remplacement qui correspond donc au prix (MtM) du dérivé, l'add-on correspond à un surplus de perte potentielle, et le collatéral venant compenser une perte potentielle si le contrat est collatéralisé.

Le principe de la Value at Risk (VaR) peut être reconnue dans l'expression (38). En effet, l'exposition du contrat peut se décomposer de la manière suivante : Exposition Actuelle + Exposition Future Potentielle (PFE). L'exposition actuelle correspondant au Mtm à la date de valorisation. L'exposition future est captée par l'add-on. Ce dernier étant calibré pour que l'exposition totale soit supérieure à l'exposition future avec un intervalle de confiance raisonnable (95% ou 99%). Cette méthode est simple à implémenter et propose des résultats conservateurs, toutefois le montant mis en provision au titre du risque de contrepartie est surestimé.

L'exposition actuelle est connue avec certitude puisqu'elle correspond au prix du dérivé aujourd'hui. En revanche, l'Exposition Future Potentielle est calculée en multipliant un facteur de conversion (fourni initialement dans Bâle II, puis repris dans Bâle III) par le nominal du dérivé. Le facteur de conversion dépend de type de dérivé et de sa durée de vie restante.

Le tableau des facteurs de conversion à appliquer est présenté ci-dessous. Il est repris dans Bâle III et fournis au paragraphe 177 du texte applicatif de Bâle II.

¹⁹ Loss Given Défaut, soit 1-taux de recouvrement. La LGD est comprise entre 0 et 1.

	Interest Rates	FX and Gold	Equities	Precious Metals Except Gold	Other Commodities
One year or less	0.0%	1.0%	6.0%	7.0%	10.0%
Over one year to five years	0.5%	5.0%	8.0%	7.0%	12.0%
Over five years	1.5%	7.5%	10.0%	8.0%	15.0%

Figure 19 : Anciens facteurs de conversion Bâle II et Bâle III pour la CEM. (Source : Réglementation Bâle III)

Ces coefficients ont été évalués en 1988 et n'ont pas été actualisés depuis, ce qui a conduit à la mise en place d'une nouvelle formule réglementaire « Standardized Approach to Counterparty Credit Risk » ou SA-CCR en 2017. Cette nouvelle formulation, plus conservatrice et plus complexe repose sur les mêmes principes à savoir un facteur de conversion déterminé en fonction du type d'actif et de sa durée. La nouvelle formule est alors devenue :

$$EAD = \alpha * (RC + PFE) \quad (39)$$

Avec α égal à 1.4 qui correspond au coefficient utilisé dans le cadre de la méthode du modèle interne par le comité de Bâle. RC correspond à l'exposition actuelle floorée à 0 et ajustée du collatéral si besoin. Enfin, la PFE (*Potential Future Exposure*) est déterminée par « *hedging set* » c'est-à-dire sous-ensemble homogène de produit (typiquement tous les swaps de taux EUR seront dans le même *hedging set*). La PFE est alors le produit entre un facteur multiplicatif et l'add-on. Cette nouvelle méthodologie s'inscrit donc dans le prolongement de l'ancienne où le facteur de conversion est devenu le « multiplicateur » et le notionnel l'« add-on ».

La réglementation SA-CCR (ou BCBS 279)²⁰ est résumée ci-dessous pour les dérivés de taux et de change qui sont étudiés dans ce mémoire. Pour plus de détail, le lecteur pourra se référer soit à la réglementation, soit au mémoire d'actuariat de M. Desmettre.

4.1.1 Dérivés de taux

La nouvelle méthode réglementaire qui s'inspire historiquement de la méthode des add-ons pour calculer l'EAD se fait en deux étapes :

- *Détermination du multiplicateur* à l'aide de la formule définie au paragraphe 149 de la réglementation SA-CCR suivante :

$$\text{multiplicateur} = \min \left\{ 1; \text{Floor} + (1 - \text{Floor}) * \exp \left(\frac{V - C}{2 * (1 - \text{Floor}) * \text{AddOn}^{\text{aggregate}}} \right) \right\}$$

where $\exp(\dots)$ equals to the exponential function, Floor is 5%, V is the value of the derivative transactions in the netting set, and C is the haircut value of net collateral held.

En reprenant l'exemple fourni dans l'Annexe 4a du règlement Bâle III sur le SA-CCR, on peut tracer l'évolution du facteur multiplicatif en fonction de $(V-C)$ afin de comprendre l'impact de ce facteur.

Ainsi, sur la figure ci-après, on remarque que le facteur est de 1 lorsque la valeur du dérivé est supérieure à celle du cash mis en collatéral, puis décroît exponentiellement vers 5% lorsque le collatéral est en-dessous du prix de marché du dérivé. Le multiplicateur est d'autant plus faible que le dérivé est en dehors de la monnaie ($V < C$).

²⁰ <https://www.bis.org/publ/bcbs279.pdf>

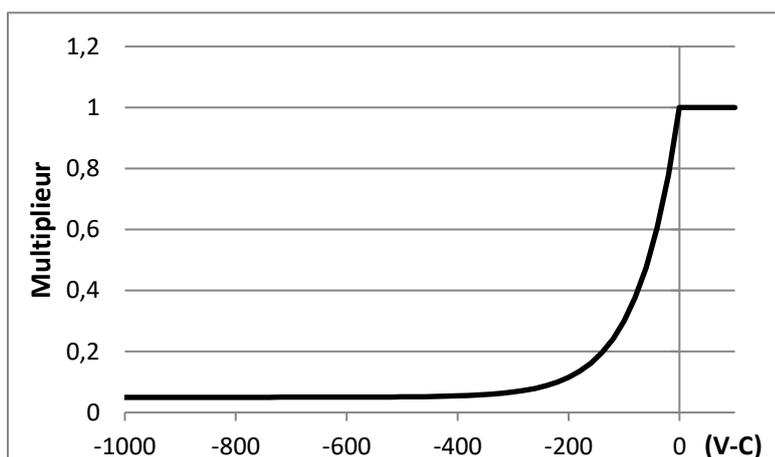


Figure 20 : Multiplier en fonction de la valeur de dérivé nette du collatéral pour un add-on de 40

Ce facteur permet donc de tenir compte du prix actuel du dérivé. Si le prix change brutalement, alors le multiplicateur augmentera pour tenir compte d'un risque de perte plus important.

Pour déterminer la valeur du facteur multiplicatif, il faut donc connaître la valeur de l'add-on du dérivé.

- Détermination de l'add-on par hedging set via la formule suivante :

$$Add - on = \sum_{j=1}^{N_{hedging\ set}} SF_j * Effective\ notional_j$$

Avec j le hedging set traité, SF le « supervisory factor » qui vaut 0.5% pour les dérivés de taux, et le notionnel effectif déterminé grâce à la formule suivante :

$$Eff\ Notional = \sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + 1.4 * (N_1N_2 + N_2N_3) + 0.6 * N_1N_3}$$

Avec N le notionnel effectif du time bucket {1, 2, 3}. Comme dans la CEM, les intervalles de temps sont : moins de 1 an, entre 1 et 5 ans et plus de 5 ans.

Le notionnel effectif pour un time bucket i est :

$$N_j = \sum_i \delta_i * N_{adj}(i) * MF_i$$

Pour les dérivés vanilles de taux hors option, le delta vaut 1 si la position est acheteuse (long) et -1 sinon. MF correspond à la maturité résiduelle ajustée, et N_{adj} correspond au notionnel traité et ajusté (notionnel * SD²¹).

$$N_{adj} = Notionnel * SD = Notionnel * \frac{\exp(-0.05 T_{start}) - \exp(-0.05 * T_{end})}{0.05}$$

$$MF_{non\ collat} = \sqrt{\frac{\min(Durée\ restante; 1)}{1}}$$

$$MF_{collat} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{Margin\ period}{1}}$$

²¹ Supervisory duration

L'approche de la nouvelle méthode SA-CCR est donc plus complexe que la CEM mais en reprend les mêmes principes.

4.1.2 Dérivés de change

Pour les dérivés de change la méthode est similaire à celle utilisée sur les dérivés de taux. Les différentes grandeurs sont calculées via les équations suivantes :

$$Add - on_{FX} = \sum_j Add - on_{FX}(j)$$

$$Add - on_{FX}(j) = SF_j * |Effective Notional_j|$$

$$Effective Notional_j = \sum_i \delta_j * N_{adj}(j) * MF_i$$

La maturité résiduelle ajustée est calculée de la même manière que pour les dérivés de taux. Le delta est de +/- 1 en fonction de la position (acheteuse ou vendeuse). Pour les options sur le change, le delta correspond à son grec calculé avec les paramètres réglementaires. Le notionnel ajusté correspond au notionnel converti au cours de change du jour. Le « supervisory factor » (SF) est de 4% pour les dérivés de change.

Synthèse

- L'EAD réglementaire obtenue par la méthode des add-ons est strictement positive, et donc par définition prudente puisqu'en réalité une EAD peut-être négative ou nulle.

Dans le tableau ci-dessous, les avantages et inconvénients de cette méthode sont listés. Cette méthode facile à mettre en place présentera l'inconvénient majeur de surestimer la CVA.

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • Simple à mettre en place • Simple à comprendre • S'applique à tous les produits 	<ul style="list-style-type: none"> • Surévalue l'exposition réelle, donc plus coûteuse en fonds propres

4.2 Méthode de duplication via des options

La méthode via des options repose sur l'idée qu'un défaut de la contrepartie occasionne une perte si le Mtm du dérivé au moment du défaut est positif. Il convient alors de ne valoriser que la partie positive du contrat au moment du défaut. Il s'agit là du payoff d'une option dont les caractéristiques sont similaires au produit initial. Ainsi, l'exposition future qui résulte d'un défaut à un instant futur est :

- Pour un swap, une swaption dont la maturité est égale à la durée de vie restante au moment du défaut avec un prix d'exercice égal au taux de la jambe receveuse. Pour rappel, une swaption est une option sur swap, à savoir que l'on choisit ou non de rentrer dans un swap à la maturité T de l'option. Une swaption est dite payeuse si l'investisseur choisit de payer le taux fixe lorsqu'il rentre (éventuellement) dans le swap sous-jacent. Il est intéressant de rentrer dans un swap uniquement si son prix est positif.
- Pour un contrat forward ou future, un call si on est acheteur (sinon à un put).

- Pour une option, cela correspond à la prime²² future de l'option puisque $\max(\text{Option}; 0) = \max(\max(\text{payoff}; 0); 0) = \max(\text{payoff}; 0) = \text{Prime}_{\text{option}}$

4.2.1 Swap de taux mono-devise

Afin d'illustrer notre propos, prenons l'exemple d'un swap. La perte générée par le défaut de la contrepartie sur un swap à un instant futur correspond à son prix au moment du défaut. Si nous connaissons la date de défaut de la contrepartie, alors la CVA qu'il faudrait comptabiliser serait exactement le prix d'une série de swaption dont les dates d'exercices seraient les dates de coupons, et dont la date maturité du swap sous-jacent serait la maturité du produit.

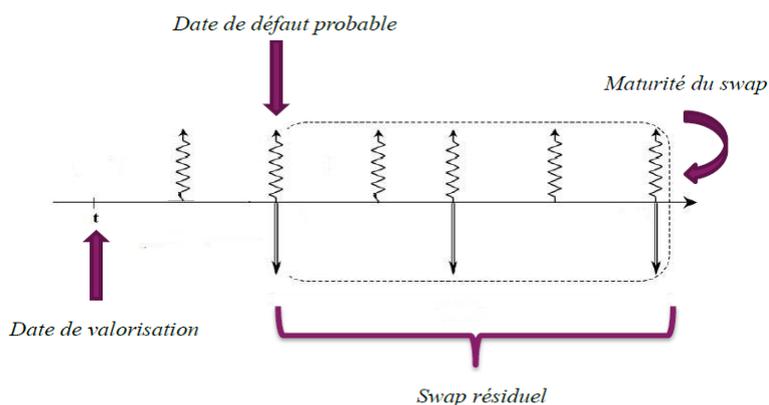


Figure 21 : Swap sous-jacent au moment du défaut

En pratique, nous ne connaissons pas l'instant exact du défaut de la contrepartie. A partir de l'équation (7), on sait que la CVA unilatérale s'écrit :

$$UCVA_t(A, B) = \int_t^T (1 - RR_{B,s}) * EPE_s * P_{\text{survie } A,B} * P_{\text{défaut } B} * DF(t, s) * ds$$

On fait l'hypothèse (H1) que le taux de recouvrement constant sur la durée de vie du dérivé. Cette hypothèse est couramment utilisée et la valeur prise par défaut est généralement 40% de taux de recouvrement soit une LGD de 60%.

Puisque l'approche par duplication via des options est déterministe²³, l'équation (3) permet de récrire l'EPE comme :

$$EPE_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Prix}^+ * f_s(\text{Prix}) * d\text{Prix} = \text{Prix}^+ = \text{Max}(\text{Prix}_s, 0)$$

Ainsi la CVA unilatérale s'écrit :

$$UCVA_t(A, B) = (1 - RR_B) \int_t^{T_n} P_{\text{survie } A,B} * P_{\text{défaut } B} * \text{Max}(\text{Prix}_s, 0) * DF(t, s) ds \quad (40)$$

²² Par exemple, si nous sommes longs sur un call, notre exposition est directement le MtM de ce call, car sa valorisation est toujours positive. Inversement, si nous sommes shorts, nous n'avons pas d'exposition positive et donc pas de CVA sur ce produit.

²³ Aucune grandeur financière n'est supposée stochastique. Les taux et la volatilité sont figés.

De plus, le prix d'une swaption (payeuse) en date t de date d'exercice T s'écrit avec JV (la jambe variable du swap sous-jacent) et JF (la jambe taux fixe) :

$$Swaption(t, T) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) * (JV(T) - JF(T))^+ | F_t \right]$$

Soit, en notant K le strike de la swaption, S le taux swap forward, T_0 la date de début du swap sous-jacent et T_N sa date de maturité, on peut réécrire l'équation précédente comme :

$$Swaption(t, T, T_0, T_N, S, K) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) * \left(\sum_{T_i=T_0}^{T_N} (S - K)^+ * dt_i * \exp \left(- \int_{T_0}^{T_i} r_s ds \right) \right)^+ | F_t \right] \quad (41)$$

Ainsi, l'équation (41) est égale à $Max(Prix_s, 0) * DF(t, s)$ dans l'équation (40). Pour rappel, dans l'équation (40) les termes sont sous un terme d'espérance risque neutre. De plus, le signe intégral et espérance peuvent être inversés puisque $\int_t^T |P_{survie A,B} * P_{défaut B} * Max(Prix_s, 0) * DF(t, s)| ds < \int_t^T |Max(Prix_s, 0)| ds < \int_t^T |\sum_{T_i=T_0}^{T_N} (S - K)^+| ds < \infty$

L'équation (40) se réécrit :

$$UCVA_t(A, B) = (1 - RR_B) \int_t^{T_n} E^Q [P_{survie A,B} * P_{défaut B} * Swaption(t, s, T_0, T_N, S_s, K)] ds$$

On fait une seconde hypothèse (H2) qui est que la date du défaut est indépendante de la dynamique du taux d'intérêt. L'espérance du produit est donc égale au produit des espérances.

$$UCVA_t(A, B) = (1 - RR_B) \int_t^{T_n} E^Q [P_{survie A,B}] * E^Q [P_{défaut B}] * Swaption(t, s, T_0, T_N, S_s, K) ds$$

Puis en discrétisant avec un pas de temps $\Delta s = \frac{T_n - t}{N_{pas}}$ l'intervalle $[t, T_n]$, il vient :

$$UCVA_t(A, B) = (1 - RR_B) * \sum_{i=1}^N P_{survie A,B}(t \leq T_{i-1}) * P_{défaut B}(T_{i-1} < t \leq T_i) * Swaption(t, s, T_{i-1}, T_N, S_i, K) * \Delta s_i \quad (42)$$

L'équation (42) qui représente la CVA pour un swap de taux d'intérêt peut se reformuler comme étant la somme de prix de swaptions de date d'exercice T_{i-1} pondérés par les probabilités de défaut de la contrepartie entre $T_{i-1} - T_i$ et de survie jusqu'à T_{i-1} , le tout multiplié par $(1 - \text{taux de recouvrement})$.

Synthèse

- La formulation faite pour l'équation (41) est universelle pour tous les swaps de taux mono-devises.
- Une façon de s'affranchir de nombreux calculs est de répliquer par sensibilité un portefeuille de swap en un swap unique avec différents piliers de maturité.
- Il peut être fait l'hypothèse que la probabilité de survie de A et de B jusqu'au moment du défaut soit majorée par 1 afin de simplifier les calculs et de prendre une marge de sécurité supplémentaire.

- Le prix des swaptions s'obtient à partir du modèle de Black-Scholes. Les dates d'exercice de l'option sont celles de paiement des coupons de la jambe fixe. Le strike correspond au taux de la jambe fixe et le taux swap forward est déterminé à partir de la courbe des taux swap de la date de valorisation t .
- Pour les autres dérivés de taux (non exotiques), la démonstration est la même, seul le terme du payoff de l'option changera.
- Si le swap était collatéralisé, alors la courbe de discounting pour le calcul des primes d'option aurait été la courbe OIS de la devise. De plus, il faut retrancher à la prime de la swaption la valeur du collatéral à chaque pas de temps.
- La méthode de calcul des probabilités de défaut est donnée dans la partie 4.2.1.1.

La méthode des add-ons ou méthode standard présente divers avantages et inconvénients résumés dans le tableau ci-dessous :

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • S'applique directement au niveau d'une transaction. • Les options vanilles sont simples à définir et à valoriser. • L'approche est plus fine que la méthode standard par add-on et offre de bons résultats avec aucune donnée calibrée. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne prend pas en compte le netting entre deux dérivés de sens opposés avec la même contrepartie. • Ne s'applique pas de manière globale à un CSA²⁴.

4.2.1.1 Probabilités de défaut et taux de recouvrement

Une des trois composantes de la CVA est la probabilité de défaut. L'évènement de défaut dépend de la définition qui est donnée au « défaut ». L'ISDA²⁵ liste une série d'événements qui peut déclencher un remboursement du dérivé dans les cas suivants :

- L'incapacité à payer l'intérêt ou le principal du produit financier (obligation comme un dérivé). Il s'agit donc d'une conséquence du risque de liquidité. Ces deux notions (crédit et liquidité) sont intimement liées par ailleurs.
- La faillite de la contrepartie.
- La modification des caractéristiques du produit (par exemple un changement de note de la contrepartie).
- Un événement intrinsèque à l'entreprise qui déclenche un remboursement prématuré (« due and payable »). Sur un titre cela correspond au fait de ne pas respecter une des conditions du prêteur (covenants). Par exemple, un changement de stratégie de l'entreprise, du comité de direction, cross default, etc.

Dans la pratique, la notion de défaut varie d'un contrat à un autre, mais le défaut reste entièrement défini dans le CSA (*Credit Support Annex*) signé entre les deux contreparties. La trame des CSA est d'ailleurs prise par les acteurs du marché sur le site de l'ISDA.

Afin d'estimer la probabilité de défaut d'une contrepartie sur une période, il existe deux approches :

²⁴ Si les produits d'un même CSA sont de natures très différentes, la définition du produit optionnel répliquant l'exposition positive du portefeuille sera trop complexe pour utiliser cette méthode.

²⁵ International Swaps and Derivatives Association.

- L'approche historique à partir des défauts observés. Cette approche empirique est simple et se fait dans la pratique à partir de la matrice des défauts par note fourni par Moody's. Cette matrice se décline en plusieurs manières (par secteur et zone géographique principalement).
- L'approche théorique qui se décline en deux approches :
 - Approche réduite (les modèles à intensité). Cette approche repose sur un processus stochastique du défaut. Autrement dit, cela signifie que l'évolution du défaut suit un processus affecté par des sauts, chaque saut représentant un événement de défaut.
 - Approche structurelle (modèle sur la base des options). Dans cette approche, on retrouve le modèle de Merton qui modélise la probabilité de défaut d'une entreprise à partir de son bilan. Ainsi le défaut intervient lorsque les fonds propres de l'entreprise sont négatifs ou nuls.

L'approche qui a été retenue dans ce mémoire est l'approche réduite car elle est simple d'application et repose sur des données de marché (CDS) facilement accessibles depuis Bloomberg. L'approche structurelle, quant à elle, demande une analyse entreprise par entreprise et est surtout utilisée dans le cadre d'arbitrage d'actions/dettes entre entreprises.

Dans l'approche réduite, le modèle le plus simple pour représenter des sauts est le processus de Poisson. Le processus de Poisson est un processus sans mémoire qui s'écrit :

$$Proba(N(t_2) - N(t_1) = n) = \lambda^n * \frac{(t_2 - t_1)^n e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{n!} \quad \text{pour } 0 \leq t_1 \leq t_2 \quad (43)$$

Plus particulièrement, si on pose $t_1 = t$ et $t_2 = t + dt$ alors on a

$$Proba(N(t_2) - N(t_1) = n) = \lambda^n * \frac{dt^n e^{-\lambda dt}}{n!}$$

En supposant que la variation de prix de l'actif (ici matérialisé par $N(t_2) - N(t_1)$) entre des deux instants est régit par un événement de défaut, alors pour $n = 1$, et en faisant tendre dt vers 0, la probabilité d'avoir un saut entre t et $t + dt$ est :

$$Proba(\Delta N = 1) = \lambda * dt \quad (44)$$

Le paramètre de la loi de Poisson λ est ici une constante appelée « hazard rate » ou « taux d'intensité du défaut ». Ce paramètre n'est pas forcément constant et peut dépendre du temps.

Par ailleurs, on considère dans ce mémoire que le défaut intervient au premier saut. Ainsi la probabilité que le défaut intervienne entre t et $t+dt$ sachant qu'il n'y a pas eu de saut au préalable s'écrit comme le produit des probabilités car ces deux événements sont indépendants (chaque accroissement est indépendant dans un processus de Poisson) :

$$Proba(\text{défaut entre } t \text{ et } t + dt \mid \text{pas défaut avant } t) = PD(t, t + dt) * (1 - PD(0, t))$$

Autrement dit,

$$Proba_{premier\ défaut}(t, t + dt) = \lambda(t) * dt * \gamma(t) \quad (45)$$

Avec γ la probabilité de survie jusqu'en t qui s'écrit $\gamma(t) = e^{\int_0^t -\lambda(u)du}$.

Remarques

- Les probabilités d'avoir un défaut quelconque (pas forcément le premier) conditionnellement ou pas à avoir survécu jusqu'en t sont identiques entre elles (propriété de processus de Poisson). Cette probabilité est donnée par la formule (44).
- La probabilité de défaut cumulée s'écrit :

$$PD(0, T) = 1 - \gamma(T) \quad (46)$$

Les données qui permettent de calculer la probabilité défaut telle qu'exprimée dans la formule (45) sont les cotations de CDS de la contrepartie. Pour rappel, le CDS est un produit dérivé qui permet de se couvrir contre le défaut d'une contrepartie donnée en payant une prime sous forme de coupon²⁶. Ainsi, à partir de son prix, la probabilité de défaut estimée par le marché peut être déduite à la date de valorisation et pour un horizon donné. En annexe 4, la formule du prix d'un CDS est rappelée ainsi que l'équation à utiliser pour stripper les lambdas et déduire les probabilités de défaut.

Nous utilisons l'approximation suivante qui offre de très bons résultats²⁷.

$$\lambda(T) = \frac{S(T)}{(1 - RR)} \quad (47)$$

Avec S le spread entre taux de rendement annuel (ou yield to maturity) de l'obligation émise par la contrepartie et le taux sans risque de même maturité, et RR le taux de recouvrement de la dette en cas de défaut de la contrepartie.

Cette formule se déduit du raisonnement suivant en univers risque réel : en achetant une obligation dont le rendement annuel est de r_{oblig} , alors si le surplus de risque (symbolisé par le spread $s = r_{oblig} - r_{sans\ risque}$) correspond uniquement à un risque de défaut. Alors, s correspond à la perte moyenne annuelle pour l'achat d'un titre émis par la contrepartie sur une durée T . Si le taux de recouvrement n'est pas nul, alors la perte nette est $(1 - RR) * \lambda$, avec λ l'intensité du défaut pour un horizon T . Ainsi, on retrouve l'équation (47).

Enfin, le spread entre le rendement obligataire de l'émetteur et le taux sans risque est égal au spread CDS sous l'hypothèse de non-arbitrage (AOA). En effet, deux stratégies sous AOA peuvent être mises en place mais offrir le même rendement : 1) acheter une obligation et un CDS pour se prémunir d'un défaut contre l'émetteur de l'obligation, ou 2) acheter le taux sans risque directement. On peut donc décomposer le rendement de l'obligation comme : $r_{oblig} = r_{sans\ risque} + s$. Et donc : $r_{sans\ risque} + s - r_{cds} = r_{sans\ risque} \Leftrightarrow s = r_{cds}$.

Alors l'équation (47) peut se réécrire aussi

$$\lambda(T) = \frac{CDS(T)}{(1 - RR)} \quad (48)$$

Avec CDS la prime du CDS à payer. On appelle cette prime spread CDS puisqu'on ajoute une composante pour se couvrir contre le défaut de la contrepartie.

²⁶ Le plus souvent le coupon est payé annuellement. La prime peut aussi être payée entièrement au début (up-front).

²⁷ Hull, *Options, Futures and Other derivatives* de John Hull. Chapitres 24 et 25.

A partir des prix des CDS cotés sur Bloomberg, on trace ci-dessous les spreads ainsi que les probabilités de défaut cumulées au 31/12/2020 pour différentes entreprises à l'aide de l'équation (46).

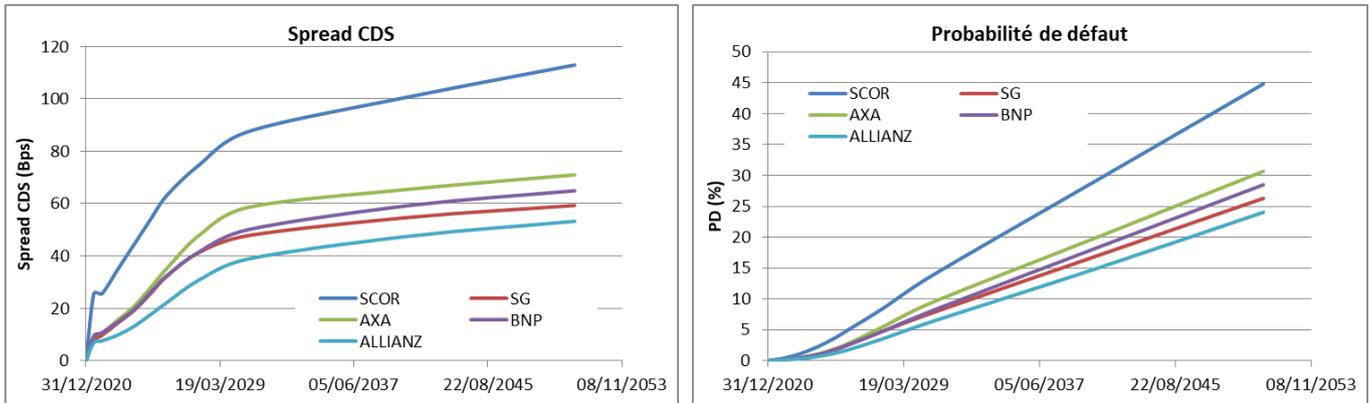


Figure 22 : Courbe de CDS pour plusieurs contreparties (gauche) et courbe des probabilités de défaut déduites pour ces mêmes contreparties (droite)

Les probabilités de défauts cumulées augmentent avec le temps. Les derniers points sont très espacés car ces spreads sont peu traités sur le marché ce qui rend la fin de la courbe linéaire. Jusqu'en 2029, les cotations sont faites tous les ans ce qui permet de retrouver une forme de courbe en racine carrée pour les CDS et une courbe parabolique pour les probabilités de défaut.

4.2.2 Swap de devise

Un swap de devise ou un cross currency swap (CCS) peut se décomposer en un swap de taux mono-devise et une série de forward de change. Pour comprendre cette décomposition, reprenons la définition d'un swap de devise. Un swap de devise est un dérivé de change et de taux qui permet d'échanger des paiements libellés dans une devise 1 en des paiements libellés dans une devise 2. Ce swap peut être variable/variable, fixe/variable ou encore fixe/fixe. Contrairement à un swap de taux vanille, ce swap donne lieu à un échange de nominaux à l'initiation et à la maturité. Son payoff est représenté sur la figure ci-après :

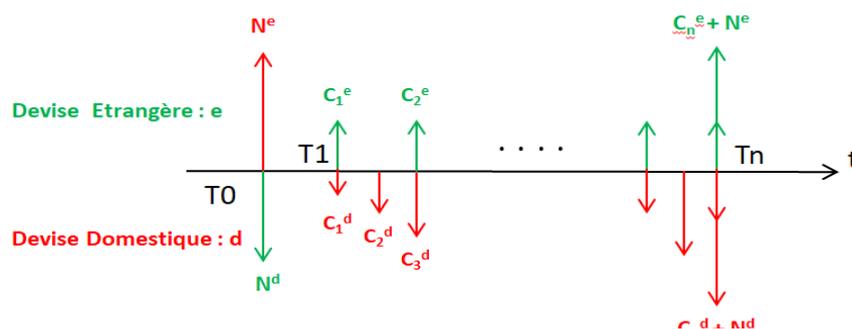


Figure 23 : Flux d'un swap de devise (CCS) payeur TV

A la mise en place, le CCS est au pair et l'équation (36) est vérifiée. A l'instant $t = t + dt$, le prix du swap devient non nul, et l'équation (36) n'est plus vérifiée. Le prix du CCS receveur taux fixe (TF) dans la devise domestique et payeur taux variable dans la devise étrangère est alors donné par la relation suivante :

$$Mtm_{CCS}(t) = N_{DDD} * \left(\sum_{j=1}^{N_{fixe}} \delta t_j * TF * DF_{DDD}(t, T_j) + DF_{DDD}(t, T_N) - DF_{DDD}(t, T_0) \right) - FX(t) * N_{EEE} \left(\sum_{j=1}^{N_{variable}} dt_j * (E_t^{EEE} [L(T_{j-1}, T_j)] + b_N) * DF_{EEE}(t, T_j) + DF_{EEE}(t, T_N) - DF_{EEE}(t, T_0) \right)$$

Pour simplifier la formule et la démonstration qui suit, on pose $FX(t) = S_{EEEDDD}(t)$; $fw d_{T_{j-1}}^E = E_t^{EEE}[L(T_{j-1}, T_j)] + b_N$; $N = N_{fixe}$; les flux dans la devise étrangère avec une astérisque (DF_{DDD} devient DF et DF_{EEE} devient DF^*).

De plus, les nominaux des deux devises sont choisis de manière à respecter le taux de change spot à la date d'initiation ; ainsi $N = FX(0) * N^*$. Les deux flux de nominaux initiaux se simplifient pour arriver à la formulation suivante :

$$Mtm_{CCS}(t) = JF - JV^* + N * DF(t, T_N) - FX(t) * N^* * DF^*(t, T_N) \quad (49)$$

$$\text{Avec } JF = N(\sum_{j=1}^N \delta t_j * TF * DF(t, T_j)) \text{ et } JV^* = FX(t) * N^* (\sum_{j=1}^{N_{variable}} dt_j * fw d_{T_{j-1}}^* * DF^*(t, T_j)).$$

On ajoute et on retranche ensuite le terme JF^* pour faire apparaître un terme de swap de taux mono-devise.

$$Mtm_{CCS}(t) = JF - JV^* + JF^* - JF^* + N * DF(t, T_N) - FX(t) * N^* * DF^*(t, T_N)$$

$$Mtm_{CCS}(t) = (JF^* - JV^*) + (JF - JF^*) + N * DF(t, T_N) - FX(t) * N^* * DF^*(t, T_N) = A + B \quad (50)$$

$$\text{Avec } JF^* = FX(t) * N^* (\sum_{j=1}^N \delta t_j * TF * DF^*(t, T_j)) ; \quad A = JF^* - JV^* \quad \text{et} \quad B = (JF - JF^*) + N * DF(t, T_N) - FX(t) * N^* * DF^*(t, T_N).$$

Ceci permet de faire apparaître un swap de taux mono-devise (terme A) dans la devise étrangère. Ainsi la CVA sur A peut se calculer via la méthode des options sur un swap de taux mono-devise telle qu'explicitée dans la partie 4.1. La problématique est donc de simplifier B.

A l'aide de la relation (33), on peut écrire que :

$$DF^*(t, T_i) * FX(t) = FX(t, T_i) * DF(T_i)$$

On remplace cette équation dans B que l'on réarrange pour obtenir :

$$B = N * DF(t, T_N) * \left(1 - \frac{FX(T_N)}{FX(T_0)}\right) + \sum_{j=1}^N N * \delta t_j * TF * \left(1 - \frac{FX(T_j)}{FX(0)}\right) * DF(t, T_j) \quad (51)$$

B correspond donc à un forward de change à la maturité du swap pour un nominal N , et une somme de forward de change à chaque date de coupon de la jambe fixe pour un nominal $N * \delta t_j * TF$. La fraction d'année δt_j correspond à celle de la jambe de la devise domestique (ici à taux fixe).

Ainsi, on peut décomposer la CVA sur CCS comme la somme de la CVA liée à la partie taux et la CVA liée à la partie change. En repartant de la formule continue (7) pour un taux de recouvrement constant :

$$UCVA_t(A, B) = (1 - RR_B) \int_t^T P_{survie A, B} * P_{défaut B} * Mtm_{CCS}^+(s) * DF(t, s) * ds$$

Avec $Mtm_{CCS}^+ = \max(Mtm_{CCS}; 0)$. Puis en appliquant la formule (50) et l'inégalité suivante : $(A + B)^+ \leq A^+ + B^+$ alors un majorant de la relation précédente est :

$$UCVA_t(A, B) = (1 - RR_B) * \left(\int_t^T P_{survie\ A,B} * P_{défaut\ B} * A^+ * DF(t, s) * ds + \int_t^T P_{survie\ A,B} * P_{défaut\ B} * B^+ * DF(t, s) * ds \right)$$

Le terme B^+ est une somme de forward de change. Cette somme peut donc de nouveau être majorée en utilisant l'inégalité précédente. Il vient alors :

$$UCVA_t(A, B) = UCVA_{swap\ taux} + UCVA_{change} \quad (52)$$

Avec $UCVA_{swap\ taux}$ la CVA pour un swap de taux donnée par la formule (42) et $UCVA_{change}$ telle que :

$$UCVA_{t,change}(A, B) = (1 - RR_B) \int_t^T P_{survie\ A,B} * P_{défaut\ B} * FXO * ds \quad (53)$$

La formule (53) a été allégée, le terme symbolisant l'option de change FXO correspond à une somme d'option de change de nominaux (*respectivement égaux au montant du coupon et du nominal du swap*) Ces options ont des dates d'exercice différentes (*date de coupon et date de maturité du swap*).

Une option de change se définit comme $E[K_s - S|F_t]$ avec K_s le cours de change à la date s . Une telle option se valorise en utilisant le modèle de Garman-Kohlhagen²⁸ et la nappe de volatilité des options de change (européenne) à la date de valorisation t extraite de Bloomberg :

$$FXO(t, T, \sigma, FX(T), FX(0), Nominal) = Nominal * e^{-r_d T} * (FX(T) * N(d_1) - FX(0) * N(d_2)) \quad (54)$$

Avec r_d, r_e les taux sans risque de maturité T respectivement dans la devise domestique et étrangère, $FX(T) = FX(0) * e^{(r_d - r_e)T}$ le cours de change en $t = T$, K le cours de change de l'option (ici c'est le cours de change initial fixé dans le CCS correspondant au ratio des nominaux des deux jambes du swap). $N(d_1)$ et $N(d_2)$ correspondent à la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite (σ correspond à la volatilité qui a été implicite des options de change de maturité T cotée sur Bloomberg).

Et $d_{1/2}$:

$$d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{FX(T)}{FX(0)}\right) \pm \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

La formule (52) permet donc de décomposer la CVA en deux termes plus simple à estimer. Ces deux termes majorent la CVA réelle et permet ainsi de la calculer de manière prudente. Pour aller plus loin, la CVA obtenue par des options sera donc toujours supérieure à celle calculer par la méthode de Monte Carlo comme cela sera vu dans la partie 5.

4.2.3 Forward/Future et Options

Par déduction de la démonstration faite sur le CCS et de la formule (53), la CVA à un instant t sur un contrat forward (ou Future) est égale à :

²⁸ Ce modèle est une adaptation du modèle de Black-Scholes sur les options de taux.

$$UCVA_{t,forward}(A,B) = (1 - RR_B) \int_t^T P_{survie\ A,B} * P_{défaut\ B} * option\ forward * ds \quad (55)$$

Avec *option forward* le Mtm d'une option sur le strike du contrat forward (ou Future). Si par exemple, il s'agit d'un forward de change alors la formule de Garman-Kohlhagen est utilisée pour valoriser l'option de change. S'il s'agit d'un forward de taux ou sur action/indice, la formule de valorisation de Black-Scholes pour des call/put est utilisée (modulo un « shift » pour les taux ou un autre modèle si les taux sont négatifs comme actuellement).

Comme écrit au début de la partie 4.2, l'exposition en risque sur une option correspond à son Mtm. Donc pour déterminer sa CVA, on utilise la même formulation que pour les contrats forwards.

Synthèse

La méthode de duplication par des options permet de calculer une CVA précise tant que les produits traités ne sont pas trop exotiques. Dans le tableau ci-dessous, les avantages et inconvénients de cette méthode sont listés.

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • Permet de s'appliquer directement au niveau d'une transaction. • Les options vanilles sont « simples » à définir et à valoriser. • La méthode est plus fine que la méthode standard par add-on et offre de bons résultats avec aucune donnée calibrée. • S'applique à une variété de produits simples qui correspond à la majorité des dérivés traités sur le marché. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne prend pas en compte le netting entre deux dérivés de sens opposé avec la même contrepartie. • Ne s'applique pas de manière globale à un CSA²⁹. • Demande une certaine expertise financière (dérivés, modèles de valorisation et courbes des taux) en plus d'une connaissance technique du code ou du progiciel utilisé.

Pour traiter tous les dérivés, la méthode de Monte Carlo est la plus universelle mais nécessite plus de temps de calcul, de paramétrage et d'expertises financières.

4.3 Méthode de Monte Carlo

4.3.1 Principe général

La méthode de Monte Carlo a pour principe de valoriser un grand nombre de fois une quantité à l'aide d'un ou de plusieurs processus aléatoires. Cette méthode est bien connue puisqu'elle a été proposée par Nicholas Metropolis en 1947. Elle était trop coûteuse informatiquement pour l'époque et a donc été très peu utilisée en finance, mais les progrès informatiques depuis les années 90 ont permis un regain d'intérêt pour cette méthode.

²⁹ Si les produits d'un même CSA sont de natures très différentes, la définition du produit optionnel répliquant l'exposition positive du portefeuille sera trop complexe.

Elle est basée sur la loi des grands nombres : un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sont tirées d'une même loi Y , puis les grandeurs X_i dépendants de cette loi sont calculées. La moyenne arithmétique de ces grandeurs est prise et permet d'avoir une approximation de l'espérance d' Y . La convergence est assurée par la loi des grands nombres.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \rightarrow E[Y]$$

Ainsi, cela permet de calculer des primes d'options qui ne peuvent pas être calculées à l'aide de formules fermées (par exemple les options américaines et bermudéennes). L'intérêt d'une telle méthode dans le cadre de l'estimation de la CVA est de moyenniser les pertes potentielles futures calculées à partir des conditions de marché futures simulées.

4.3.2 Structure de l'algorithme

L'algorithme, construit sous VBA dans le cadre de ce mémoire, a été scindé en plusieurs blocs pour des raisons de temps de calculs et de précaution. Le fait de le scinder permet d'éviter de recommencer les calculs depuis le début à chaque fois mais aussi de vérifier les résultats de chaque étape.

- **Bloc 1** : Préparation des données de marchés pour le calcul des Mark-to-Future (MtF)
 - Génération des variables aléatoires selon une loi Normale centrée réduite
 - Calculs des corrélations entre les facteurs de risques (change, taux, et crédit)
 - Génération des variables aléatoires corrélées via Choleski
 - Calibration des modèles pour diffuser les facteurs de risques
 - Simulation des chemins selon le modèle du facteur de risque et à partir des variables aléatoires corrélées et des paramètres calibrés.
- **Bloc 2** : Calcul intermédiaires sur les données de marché
 - Reconstruction des courbes de taux à la date future T_i à laquelle les MtF sont calculés
 - Calcul de la probabilité de défaut à partir des CDS sur chaque pas de temps, c'est-à-dire entre T_{i-1} et T_i .
- **Bloc 3** : Calcul des MtF
 - Calcul des MtF à partir des données de marché (taux, change, CDS) pour chaque scénario et chaque date future.
- **Bloc 4** : Calcul des indicateurs
 - Calcul par période de la moyenne de la CVA, de l'EPE, et de l'ENE.

Remarques

- Afin d'accélérer la convergence de nos résultats, la méthode des variables antithétiques est utilisée.
- La grande majorité des calculs sont faits sous VBA en stockant les calculs dans des tableaux de données VBA. Cela permet de réduire les temps de calcul et de faire un nombre de simulation plus importants. Si la convergence est atteinte avant, alors les calculs sont arrêtés. Le seuil de convergence des résidus (la différence entre la CVA précédemment calculée avec un nombre de simulation N_i et la CVA calculée avec un nouveau nombre de simulation N_{i+1}) est fixé à 1 bp de la CVA calculée pour N_i .

- Les données sont stockées dans des tableaux de variables afin d'accélérer les traitements et les calculs. Cette technique est utile lorsque le volume des données traitées est important et les calculs nombreux.
- La simulation de bout en bout prend environ 15 minutes avec un ordinateur puissant³⁰ pour 3 à 4 produits. Les swaps sont les plus longs à calculer car les flux échangés pour calculer le MtF sont nombreux (un échancier par jambe et une durée souvent plus longue que les options ou futures).

4.3.3 Diffusion et calibration des facteurs de risque

4.3.3.1 Génération des variables aléatoires

Les variables aléatoires sont générées via les fonctions natives d'Excel. La matrice de corrélation utilisée entre chacun des facteurs de risque correspond à la matrice des corrélations fournies par l'EIOPA dans le cadre de Solvabilité II. Ce mémoire ayant pour objectif d'optimiser le SCR contrepartie pour les dérivés, il est plus logique de privilégier le plus possible les paramètres réglementaires que de calculer des corrélations historiques. D'autant plus que les corrélations Solvabilité II ont été elles aussi paramétrées en tenant compte de l'historique. A titre de comparaison, en annexe 6, les corrélations historiques entre facteur de risque ont été calculées. Les résultats en annexe 6 montrent que les corrélations sont de mêmes signes sauf pour le change. Dans le cadre de ce mémoire et pour la modélisation des facteurs de risques, il a été choisi de prendre la matrice des corrélations EIOPA qui est fournie ci-dessous. Ceci constitue un choix de la modélisation faite dans ce mémoire.

i \ j	Taux d'intérêt	Actions	Actifs immobiliers	Marge	Concentration	Devise
Taux d'intérêt	1	A	A	A	0	0,25
Actions	A	1	0,75	0,75	0	0,25
Actifs immobiliers	A	0,75	1	0,5	0	0,25
Marge	A	0,75	0,5	1	0	0,25
Concentration	0	0	0	0	1	0
Devise	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1

Le paramètre A est égal à 0 lorsque l'exigence de capital pour risque de taux d'intérêt fixée à l'article 165 est l'exigence de capital visée au point a) dudit article. Dans tous les autres cas, le paramètre A est égal à 0,5.

Figure 24 : Corrélations réglementaires Solvabilité II (Source : Règlement Délégué Solvabilité II)

Les facteurs de risque pris sont : le taux, le crédit et le change puisque les produits étudiés dans ce mémoire sont des dérivés de taux et de change. Ainsi, nous avons trois facteurs de risque à diffuser à l'aide

de trois variables aléatoires corrélées. La matrice de corrélation $\Gamma = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{bmatrix}$ peut se réécrire via

les valeurs de l'EIOPA comme :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 1 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

³⁰ La configuration pour avoir ces résultats est un SSD + processeur i7 10^{ème} génération

Trois vecteurs de variables aléatoires indépendantes sont générés suivant une loi Normale centrée réduite. Puis, à l'aide de la matrice de corrélation (factorisation de Choleski), trois vecteurs de variables aléatoires corrélés selon Γ sont obtenus. Cette méthode s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$[\varepsilon] = A[\eta]$$

Avec $[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $[\eta] = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$. La matrice A est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients se calculent en trouvant la solution de l'équation suivante : $A * A^T = \Gamma$, avec Γ la matrice de corrélation.

On obtient alors les coefficients de la matrice A pour la ligne i et colonne j :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ii} = \sqrt{\left(1 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2\right)} \\ a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \sqrt{\left(\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk}\right)} \end{array} \right.$$

La solution de la résolution nous donne la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.87 & 0 \\ 0.25 & 0.13 & 0.96 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que les variables aléatoires ainsi générées sont corrélées selon la matrice Γ . Ci-dessous sont présentés à gauche la matrice de corrélation calculée sur les vecteurs de variables aléatoires avant application de la méthode de Choleski, et à droite la matrice de corrélation après.

$$\Gamma_{avant} = \begin{pmatrix} 1 & -0.0005 & -0.0005 \\ -0.0005 & 1 & -0.0054 \\ -0.0005 & -0.0054 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma_{après} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4997 & 0.2498 \\ 0.4997 & 1 & 0.2396 \\ 0.2498 & 0.2396 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les variables aléatoires générées après application de la méthode de Choleski ressortent bien avec les corrélations voulues. Pour obtenir ces résultats, trois vecteurs de 50 000 variables aléatoires ont été tirées.

4.3.3.2 Simulation des taux courts

Le modèle choisi pour diffuser le taux est le modèle de taux court de Hull-White à un facteur. Il permet de diffuser le taux court, puis de reconstruire entièrement la courbe des taux zéro-coupon à partir des paramètres préalablement calibrés et du taux court simulé.

Le modèle de Hull-white à un facteur s'écrit selon l'équation suivante :

$$dr(t) = (a_r(t) - b_r(t) * r(t)) * dt + \sigma_r(t) * dW_1(t) \tag{56}$$

Avec a_r une fonction déterministe du temps, b_r est la vitesse de retour à la moyenne reliant le taux court au taux long, σ_r la volatilité des taux court et W_1 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Le modèle est calibré en minimisant la somme des erreurs quadratiques entre le prix d'un zéro-coupon du marché et le prix du zéro-coupon donné par le modèle de Hull White. Autrement dit, (a_r, b_r) sont déterminés tels que :

$$erreur = \min \left(\sum (DF_{marché} - DF_{HW})^2 \right)$$

Avec DF_{HW} le prix d'une obligation zéro-coupon donné par le modèle de Hull White et $DF_{marché}$ celui du marché.

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-b_r(t) * (T-t)}}{b_r(t)} \quad \begin{cases} A(t, T) = \frac{DF_{marché}(0, T)}{DF_{marché}(0, t)} * e^{-B(t, T) * fwd(0, t, t+dt) - C(\sigma, t, b_r)} \\ fwd(0, t, t + dt) = \frac{1}{dt} * \left(\frac{DF_{marché}(0, t + dt)}{DF_{marché}(0, t)} - 1 \right) \\ C(\sigma, t, b_r) = \sigma_r^2 (e^{-b_r T} - e^{-b_r t})^2 * \frac{e^{2b_r t} - 1}{4b_r^3} \end{cases} \quad (48)$$

Ainsi, le taux forward $fwd(0, t, t + dt)$ est d'abord calculé à l'aide de la courbe des taux du marché, puis, C, B, A, et enfin le facteur d'actualisation (prix d'un zéro-coupon) donné par le modèle de Hull-White. Le discount factor calculé en t ($DF_{HW}(t, T)$) est ramené en 0 en multipliant par $DF_{HW}(0, t)$ pour être comparé avec le discount factor déduit du marché entre 0 et T.

Après résolution numérique, les résultats suivants sont obtenus et tracés sur les différents graphiques ci-dessous : Courbe des facteurs d'actualisation (en haut à gauche) ; Courbe des forwards déduits de la courbe d'actualisation (en haut à droite) ; Courbe des erreurs par date et cumulées (en bas à gauche) ; Courbe des paramètres par date (en bas à droite).

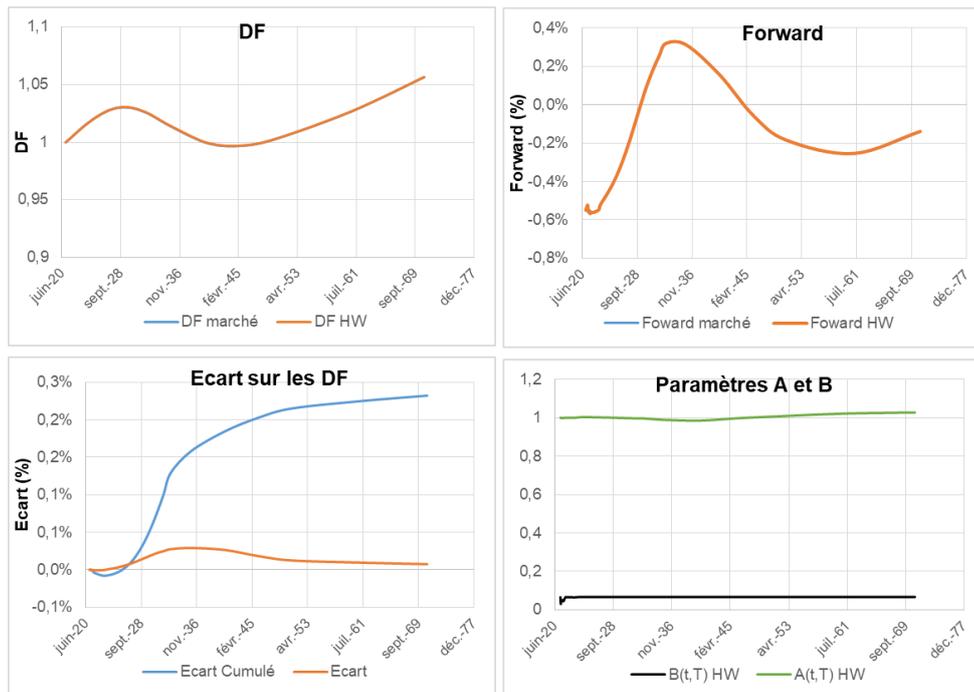


Figure 25 : Résultats de la calibration pour les paramètres $b=15$ et $\sigma=0.015$

L'erreur quadratique obtenue est de $8.07 \cdot 10^{-10}$ avec les paramètres calibrés $b = 15$ et $\sigma = 0,015$. Ces valeurs donnent une courbe reconstruite quasi identique à celle du marché comme on le constate sur le graphique 25 (en haut à gauche). Néanmoins ces valeurs sont à prendre avec précaution, puisque l'algorithme de résolution a tendance à réduire le terme B pour faire converger b_r vers $+\infty$. Ainsi, le terme A converge alors vers le ratio des discounts factors issu du marché $\frac{DF(0,T)}{DF(0,t)}$, et donc la courbe reconstruite vers la courbe de marché. Ce comportement est observable sur la figure ci-dessus (en bas à droite) présentant l'évolution des paramètres A et B au cours du temps. Les écarts cumulés sur les facteurs d'actualisation augmentent avec les dates mais restent très faibles ($<0.1\%$ par date et $<0.3\%$ en cumulé) comme le montre le graphique en bas à gauche. Les forwards sont quasi identiques entre ceux reconstruits et ceux du marché aussi bien sur le court terme que le long terme comme on le constate sur le graphique ci-dessus (en haut à droite).

Si on trace les taux courts simulés avec ces paramètres, on obtient des valeurs qui oscillent fortement d'un pas à l'autre (comme une sinusoïde). Ce comportement est possible théoriquement mais irréaliste puisque les taux n'oscillent pas aussi brutalement sur les marchés.

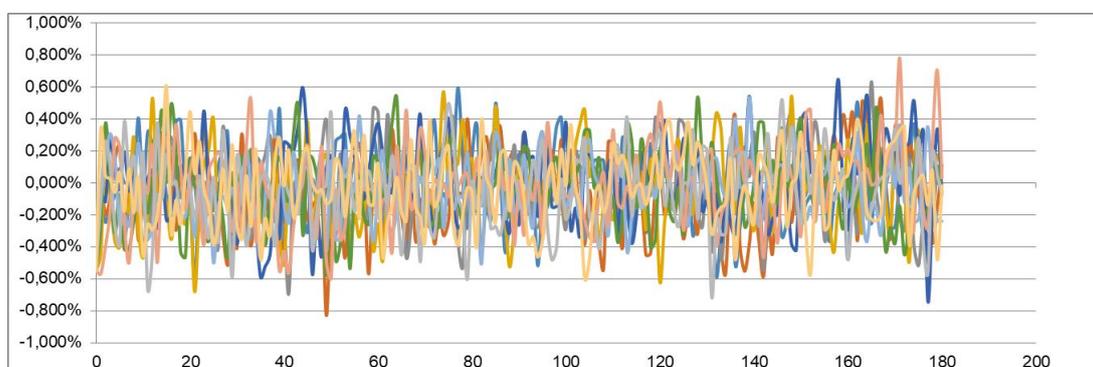


Figure 26 : Taux courts simulés avec $b=15$ et $\sigma = 0.015$ pour 10 trajectoires différentes

Cette fluctuation est obtenue car la volatilité du modèle est trop faible par rapport au paramètre b_r . Ainsi, il faut trouver un juste milieu entre une erreur quadratique faible et des trajectoires générées cohérentes.

La littérature³¹ sur ce sujet renvoie des valeurs de b entre 0.1 et 0.3 et σ entre 0.01 et 0.02. Avec ces valeurs, la minimisation diverge et renvoie une erreur quadratique de 0.004 (ce qui reste acceptable comme erreur), et une divergence sur les maturités au-delà de 2030. Cette divergence est causée par le double changement de signe des forwards (négatif, puis positif, et enfin négatif).

³¹ https://people.kth.se/~aurell/Teaching/SF2975_HT17/calibration-hull-white.pdf

Avec les paramètres $b = 0.15$ et $\sigma = 0,015$, les quatre mêmes graphiques que précédemment sont tracés afin de voir l'impact de ces nouveaux paramètres sur les résultats.

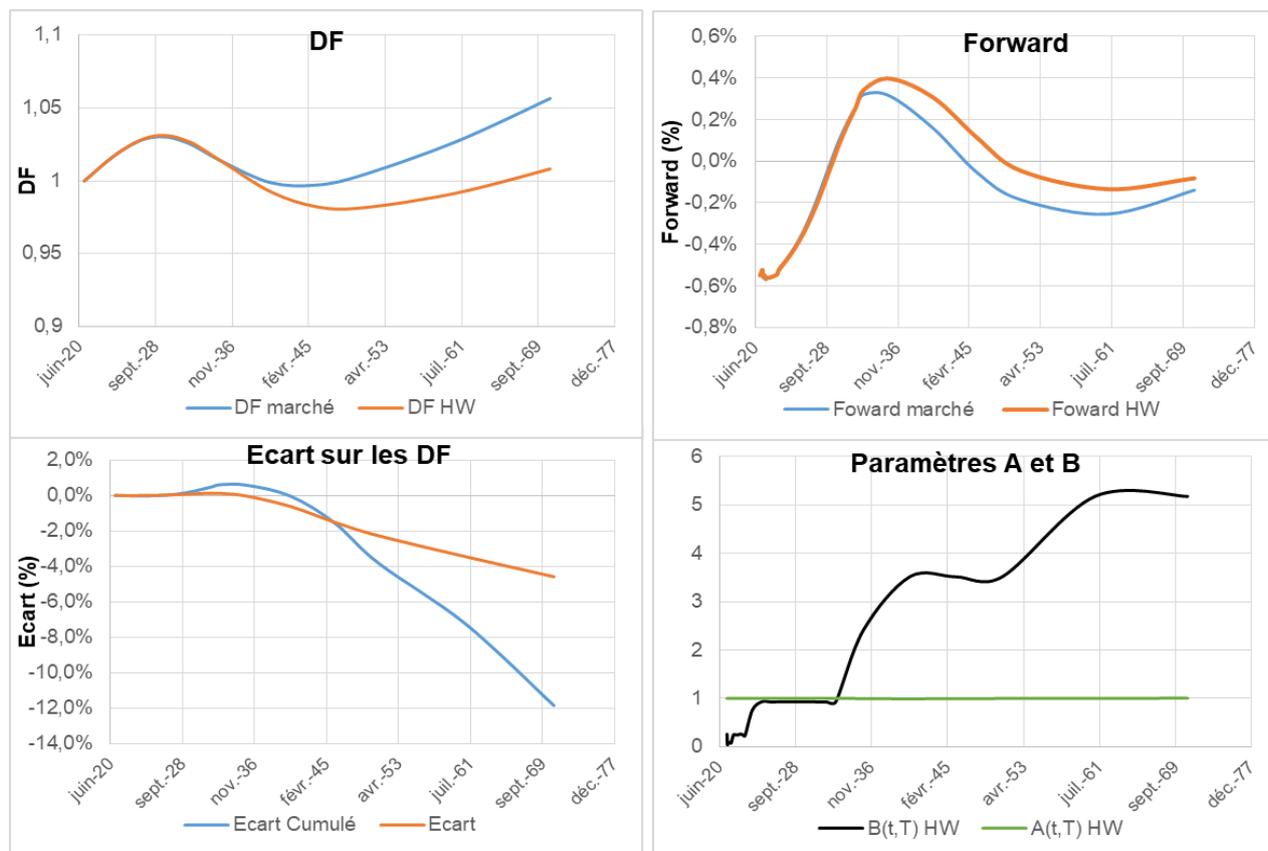


Figure 27 : Résultats pour les paramètres $b=0.15$ et $\sigma = 0.015$

Sur les graphiques de l'écart des discounts factors (DF) et des DF, la divergence entre les valeurs de marché et celles du modèle semble importante mais reste acceptable au vu de l'échelle prise. Ce comportement s'explique par l'écartement dans le temps des points cotés sur le marché. Jusqu'en 2030 des taux sont disponibles tous les ans, puis à partir de 2030, les taux sont espacés de 3 ans, puis 5 ans et enfin 10 ans (d'où les sauts présents quand on trace B en noir sur la figure en bas à droite de la figure 27). Cet allongement de l'écartement des points engendre une augmentation de l'exponentielle dans la fonction B pour le modèle Hull White, et donc la fonction B tend progressivement vers $\frac{1}{b_r} = 6.67$.

La pratique de place est de calibrer le paramètre de volatilité du modèle à partir des prix de marché des options de taux (plutôt des caps/floors que des swaptions). Le prix de l'option ATM au 31/12/2020 est de 17,28€ pour un nominal de 1M€ (cf. Annexe 7). A partir de ce prix, la volatilité implicite calculée est de 1,59%, soit 0,0159.

A titre de vérification, les paramètres b_r et σ_r sont affinés numériquement afin de minimiser l'erreur quadratique mais aussi de générer des trajectoires des taux courts plus réalistes. On trouve (par itération) comme paramètres finaux : $b_r = 0.55$ et $\sigma = 0,015$ pour la calibration de la courbe Euribor 3M. Le paramètre de volatilité coïncide presque avec la volatilité implicite d'un cap de maturité courte (3 mois). Le paramètre de volatilité retenue est $\sigma = 0,015$.

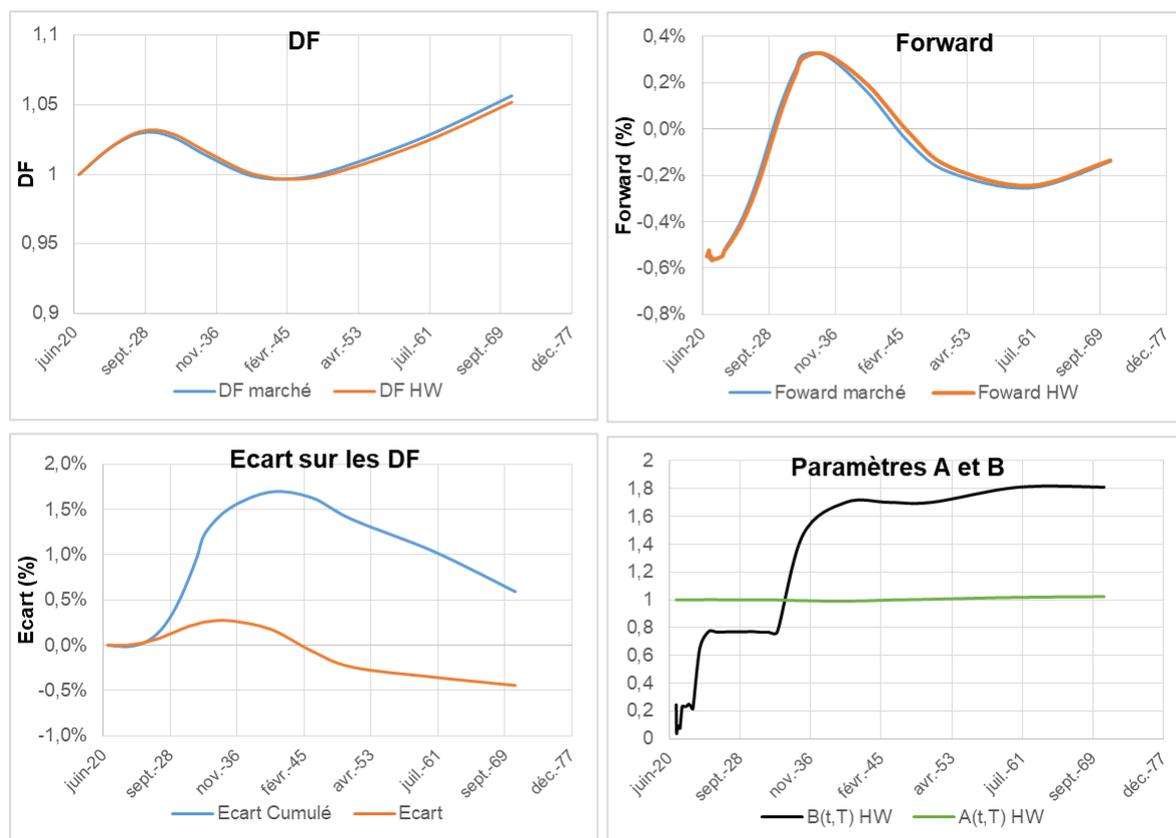


Figure 28 : Résultats pour les paramètres $b=0.55$ et $\sigma = 0.015$

L'erreur quadratique est de $7.2 \cdot 10^{-5}$ ce qui est très correct. La courbe des facteurs d'actualisation obtenue est quasi confondue avec celle du marché sauf sur la partie longue car les points sont moins nombreux sur le long terme comme le confirment les sauts observés dans la fonction B tracés ci-dessus. La courbe des forwards reconstruite est très proches de celle du marché aussi bien sur le court terme que sur le long terme. Enfin l'erreur cumulée sur les facteurs d'actualisation reste sous les 2%.

Les 10 premières trajectoires obtenues avec ces paramètres pour le taux courts Euribor 6M sont tracés ci-dessous :

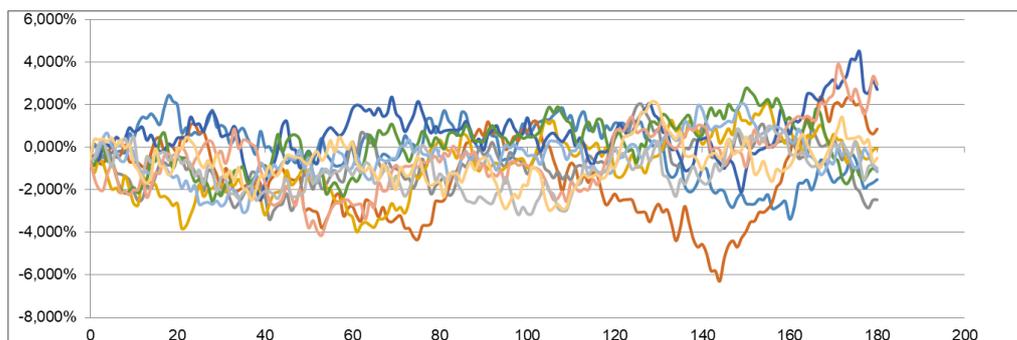


Figure 29 : Trajectoires des taux courts simulés pour l'Euribor 6M avec $b = 0.9$ et $\sigma = 0.015$

Ainsi, les trajectoires obtenues sont moins sinusoïdales que celles obtenues précédemment et correspondent davantage au comportement qui peut être observé sur les marchés. Ce travail de calibration est réitéré sur les autres courbes de l'Euro, dont les résultats globaux sont présentés ci-dessous :

	€STR	EUR3M	EUR6M
b	0,8	0,55	0,9
sigma	0,02	0,016	0,015

Remarques

- A titre de comparaison, la volatilité annuelle historique des taux courts est comprise entre 0.5% et 5% pour les tenors usuels (€STR, 1M, 3M, 6M, 12M) comme on peut le voir sur le ci-dessous :

Profondeur d'historique	€STR	Euribor 1M	Euribor 3M	Euribor 6M	Euribor 12M
5Y	1,09%	1,52%	1,80%	2,22%	2,85%
3Y	1,63%	2,46%	3,24%	4,07%	5,04%
1Y	0,53%	0,79%	0,92%	0,71%	1,02%
Moyenne	1.08%	1.59%	1.98%	2.33%	2.97%

Source : Banque de France

La volatilité historique moyenne de l'Euribor3M à 1Y (1,98%) est dans le même ordre de grandeur que celle calibrée : entre 1.5% et 2% pour la volatilité du modèle et entre 1.08% et 2.97% pour celle historique.

- Ce travail de calibration est réalisé aussi lorsque les courbes sont dans d'autres devises et que l'on souhaite simuler les taux courts. C'est typiquement le cas pour les swaps de devise.
- Dans un souci de cohérence et d'optimisation des temps de calcul, les taux courts pour une simulation i et un pas de temps futur j sont simulés pour les courbes de référence³². Puis la courbe de référence est reconstruite via la méthode explicitée dans la partie 3. Enfin, la courbe servant à calculer les forwards dans une devise donnée pour un tenor donné est déduite en ajoutant un spread à la courbe de référence pour une maturité donnée. Ce spread est un spread zéro-coupon et il est égal à la différence entre le taux zéro-coupon de la courbe de référence et le taux zéro-coupon de la courbe forward à la date de valorisation. Ce spread dépend de la date de maturité du zéro-coupon.

4.3.3.3 Simulation des taux de change

Pour modéliser la dynamique du cours de change de la paire de devise (EEE/DDD), le modèle utilisé est le modèle de Garman-Kohlhagen :

$$dF_{EEEDDD} = (r_{DDD} - r_{EEE})F_{EEEDDD}dt + \sigma_{EEEDDD}dW_2(t) \quad (57)$$

Avec F_{EEEDDD} le cours de change spot à la date de valorisation entre la devise étrangère (EEE) et la devise domestique (DDD), r_{DDD} et r_{EEE} les taux zéro-coupon courts respectivement dans la devise étrangère et domestique, σ_{EEEDDD} la volatilité spot du cours de change EEE/DDD. Enfin W_2 un mouvement brownien standard.

Ce modèle est calibré à l'aide des données de marché du 31/12/2020. Le swap de devise étudié dans ce mémoire est un swap EUR/JPY, on fera donc l'exercice de calibration pour cette paire. Le taux de change

³² La courbe de référence dépend du dérivé valorisé. Pour un dérivé en euro non collatéralisé, la courbe de référence est l'Euribor 3M, et pour un deal collatéralisé l'€STR.

EURJPY spot au 31/12/2020 est 126.84. Le taux court dans les deux devises sont $r_{EEE} = -0.04\%$ et $r_{DDD} = -0.55\%$. La volatilité d'une option EURJPY ATM au 31/12/2020 est de 7.06%. A titre de comparaison, la volatilité annuelle historique sur un an d'historique est de 3.08% et la volatilité sur 3 ans d'historique est de 4.83%.

A partir des paramètres ci-dessus, les 10 premières trajectoires des cours de change EUR/JOY sont tracées ci-dessous :

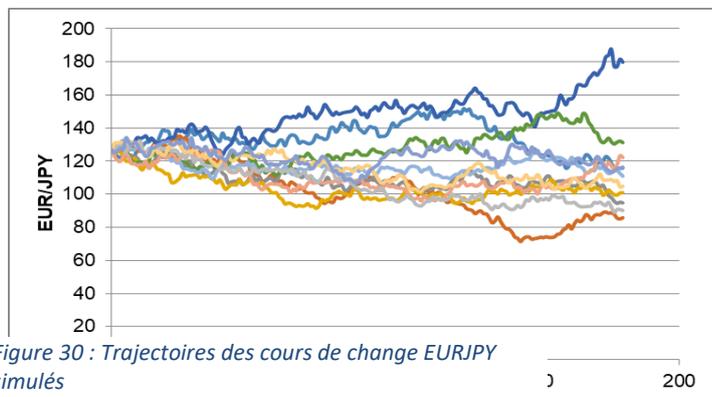


Figure 30 : Trajectoires des cours de change EURJPY simulés

Le terme $r_{DDD} - r_{EEE}$ est négatif ce qui fait apparaître une pente négative sur les taux de change simulés. La moyenne des taux simulés au pas de temps 180 est de 125 contre un point de départ avec un taux de de change à 121.27.

4.3.3.4 Simulation des spread CDS

Pour la composante crédit, les spreads CDS sont diffusés selon un modèle d'intensité stochastique. Le modèle retenu est le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Il est un des plus utilisé et à l'avantage de simuler une grandeur strictement positive (grâce à la présence de la racine carrée) ce qui est une condition nécessaire pour un CDS.

L'EDS du processus est définie par CIR est donnée ci-dessous :

$$ds_t = k * (b_s - s(t))dt + \sigma_s * \sqrt{s(t)}dW_3(t) \quad (58)$$

Avec k la vitesse de retour à la moyenne des spreads, θ le niveau des CDS à long terme, $\sigma_s * \sqrt{s(t)}$ la volatilité du processus, et W_3 un mouvement brownien standard.

Les deux conditions nécessaires pour que ce processus soit bien défini sont :

- $s(t) > 0$ pour tout t ;
- $2k * \theta > \sigma_s^2$ avec $k, \theta, et \sigma_s$ appartenant à \mathbb{R}^{+*} . Si ces trois paramètres sont nuls alors le processus est défini mais n'a aucun intérêt.

La résolution de ce modèle permet alors d'écrire la probabilité de survie $Q^{CIR}(\tau > T)$ comme :

$$Q^{CIR}(\tau > T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)s_t) \quad (59)$$

Avec :

$$\begin{cases} B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + k)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ A(t, T) = \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+k)(T-t)}{2}}}{(\gamma + k)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma_s^2}} \end{cases} \quad (60)$$

Et $\gamma = \sqrt{k^2 + 2 * \theta^2}$

Remarques

- Le processus CIR appartient à la même famille de modèle que celui de Hull White, c'est-à-dire la famille des modèles de structure affine.
- Une autre solution consisterait à appliquer une probabilité de défaut constante dans le temps mais qui dépend de la qualité de crédit de la contrepartie. Cette méthode est décrite à l'Article 199 du Règlement Délégué (UE) 2015/35 publié par l'EIOPA en 2015. Nous proposons ici une alternative plus complexe mais plus en accord avec les pratiques de place qui consiste à diffuser ce facteur de risque.

Afin de calibrer le modèle CIR, on se place ici du point de vue de l'assureur qui souhaite couvrir son risque de taux en le transformant en taux variable à l'aide d'un swap. L'assureur contacte une banque avec une qualité de crédit donnée. Prenons par exemple la banque BNP qui a un taux de recouvrement de 40%. A partir des formules (59) et (60), nous recherchons les trois paramètres qui minimisent l'erreur quadratique entre la probabilité de défaut implicite des spreads CDS de BNP et la probabilité calculée par le modèle CIR. Les résultats numériques sont fournis dans le tableau ci-dessous.

Date	Spread CDS	A	B	PD CIR	PD marché	Erreur
31/12/2020	0	1,000	0,000	0,000%	0,000%	0,00E+00
20/06/2021	9,35	1,000	0,461	0,054%	0,073%	3,65E-08
20/12/2021	10,61	1,000	0,938	0,145%	0,171%	6,86E-08
20/12/2022	14,84	0,998	1,843	0,457%	0,486%	8,53E-08
20/12/2023	19,59	0,996	2,687	0,932%	0,965%	1,09E-07
20/12/2024	26,2	0,993	3,475	1,614%	1,720%	1,12E-06
20/12/2025	32,56	0,989	4,210	2,440%	2,662%	4,96E-06
20/12/2027	41,7	0,980	5,538	4,285%	4,730%	1,98E-05
20/12/2030	50,07	0,961	7,214	7,312%	7,987%	4,57E-05
20/12/2040	59,35	0,877	10,838	17,792%	17,936%	2,09E-06
20/12/2050	64,88	0,779	12,643	28,204%	27,695%	2,59E-05
					Total	9,98E-05

Taux de recouvrement : 40%

Figure 31 : Tableau des résultats de la calibration du modèle CIR pour les CDS

Après la résolution numérique, l'erreur quadratique est $9.98.10^{-5}$, et les paramètres sont : $k = 6.85\%$, $\theta = 1.45\%$, et $\sigma = 1.05\%$. La condition pour que ce modèle existe est vérifiée puisque $2k * \theta > \sigma_s^2$ donne 0.0019 qui est bien supérieur à 0.0001.

Sur le graphique ci-dessous, les probabilités de défaut cumulées issues du marché et recalculées avec les paramètres ci-dessus se confondent bien.

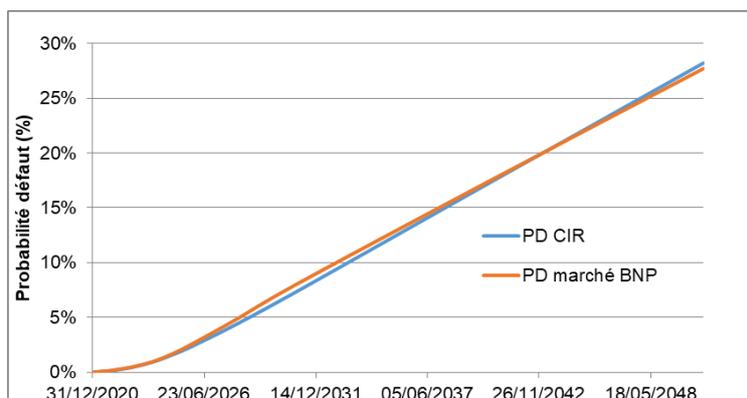


Figure 32 : Courbes des probabilités de défaut cumulé : bleue celle du modèle, et orange celle du marché

A partir des paramètres k , θ , et σ obtenus, les CDS courts sont simulés sur les 15 prochaines années avec un pas de temps $dt = 20$ jours. Au pas de temps de temps 180 (31/12/2035), les CDS courts simulés sont en moyenne de 0.7%.



Figure 33 : CDS simulés par le modèle CIR

Il est présenté en annexe 9, les chocs sur les spreads de crédit ont été calibrés sur la période de stress de la crise covid-19 en 2020. Le choc retenu sur les spreads CDS est un choc de 30% toutes maturités confondues.

4.4 Modélisation des appels de marge

Actuellement, la grande majorité des dérivés sont collatéralisés avec du CASH ou des obligations très liquides (Etats de la Zone Euro notés AA ou plus). Les caractéristiques des appels de marge varient en fonction du contrat et de la contrepartie. Néanmoins, dans le cadre de ce mémoire, les appels de marge seront modélisés par du CASH en euros uniquement (il s'agit ici d'une limite du modèle) et de la manière suivante :

- Fréquence : hebdomadaire. Toutes les semaines, les deux contreparties se mettent d'accord sur le prix du dérivé et vérifie s'il faut effectuer ou pas un appel de marge.
- Seuil : 3% du notionnel. Si le prix du dérivé passe en-dessous des 3% du notionnel alors un appel de marge est effectué afin de restituer le montant de l'appel de marge initial.
- Appel de marge initial : 4% de l'exposition notionnelle.

Le niveau de l'appel de marge initial est celui recommandé par le comité de Bâle dans son annexe A³³. A noter qu'aucun seuil minimal en montant (Minimum transfer amount) n'a pas été pris en compte dans le modèle proposé. De plus, le taux retenu pour le seuil de versement est pris en dessous de l'appel de marge initial mais aucune recommandation précise n'existe sur ce sujet. Dans la pratique, les contreparties se mettent d'accord entre elles sur le seuil défini. Plus ce seuil est bas, plus l'accord entre les contreparties (CSA) est robuste.

4.5 SCR contrepartie

Dans le cadre de ce mémoire, la VaR CVA est comparée, à titre indicatif, dans la dernière partie au SCR contrepartie. Cette sous-partie vise donc à présenter, sur les dérivés uniquement, le calcul du SCR propre au risque de contrepartie. Les références utilisées sont les articles 189 à 201 du Règlement Délégué Solvabilité II mais uniquement les articles 192, 199, 200 et 201 se réfèrent aux dérivés et sont fournis en annexe 3. Le SCR contrepartie est donné par la formule suivante :

$$SCR_{contrepartie} = \sqrt{SCR_{def1}^2 + 1.5 * SCR_{def1} * SCR_{def2} + SCR_{def2}^2}$$

³³ https://www.bis.org/bcbs/publ/d317_fr.pdf

Cette formule se simplifie puisque le risque de contrepartie sur les dérivés est de type 1 en sachant que le SCR_{def1} est fourni dans le Règlement Délégué par la formule suivante :

$$SCR_{def1} = 3\sigma = 3\sqrt{V}$$

Avec $V = \frac{\sum 1.5PD*(1-PD)}{2.5-PD} \sum LGD^2$ où PD est la probabilité de défaut de la contrepartie et LGD la perte en cas de défaut. La PD est fonction de la qualité de crédit de la contrepartie et est constante. La grille d'équivalence entre la note et la PD est donnée dans l'article 199 du Règlement Délégué (voir annexe 3). Pour AXA, notée A (échelon 2), cette PD est de 0.05%.

La LGD est donnée dans l'article 192 paragraphe 3 :

$$LGD = \max(90\%(Mtm_{dérivé} + RM_{dérivé}) - F' * Collatéral; 0)$$

Avec $Mtm_{dérivé}$ le prix du dérivé, $RM_{dérivé}$ l'effet d'atténuation qu'à le dérivé sur le risque de marché, F' représente un facteur tenant compte de l'effet économique du collatéral sur le dérivé en cas de défaut de la contrepartie, et $Collateral$ le prix de marché du collatéral.

On peut noter ici plusieurs éléments sur le calcul du SCR contrepartie :

- La PD est constante et ne tient pas compte du contexte de marché actuel et agrège tous les « notch » de note ensemble. Par exemple, la probabilité de défaut n'est pas la même entre une contrepartie notée BBB+ ou BBB-, surtout en période de stress où les CDS ont tendance à s'envoler. La granularité des PD est donc moins importante dans SII que dans Bâle III. De plus, les probabilités de défaut sous Bâle III sont déduites des niveaux CDS : soit de la contrepartie directement, soit d'une courbe moyenne du triplet (rating/secteur/zone géographique). La réglementation Bâle III prend ainsi en compte le contexte économique de l'instant contrairement à SII. Par exemple, en mars 2023, lors de la faillite de SVB, les spreads des banques se sont très fortement tendus (et donc leur PD aussi) là où leurs ratings n'ont pas bougé.
- La LGD sous Solvabilité II est strictement positive et homogène à un montant, là ou dans la sphère bancaire, la LGD est un pourcentage de perte sur un montant total exposé. L'équivalent de la LGD (sous Solvabilité II) est l'EAD : Exposure At Default (sous Bâle III).
- La prise en compte du risque d'atténuation dans la LGD permet de ne pas sous-estimer le risque de perte. En effet, en cas de défaut de la contrepartie sur le dérivé, la peine est double puisque l'assureur perd le prix du dérivé et surtout la couverture. Il faut donc bien prendre en compte le montant couvert dans le calcul du SCR contrepartie.
- Sous Bâle III, le montant de fonds propres réglementaire au titre du risque de contrepartie est $3 * \sqrt{CVA + CVA_{stressé}}$, et sous Solvabilité II le montant de $SCR_{contrepartie}$ est de $3\sigma = 3\sqrt{V}$, on peut, par analogie, estimer que $V \approx CVA + CVA_{stressé}$.

Hypothèse du mémoire dans le calcul de l'effet atténuateur :

L'effet atténuateur est défini (article 196 du Règlement Délégué) comme le maximum entre 0 et la différence entre l'exigence en capital sans dérivé et avec dérivé.

Dans le cadre de ce mémoire, nous ne nous connaissons pas le passif mais on peut supposer assez légitimement que l'assureur alloue d'une part son actif sur une durée similaire à celle du passif afin de réduire au maximum sa sensibilité au taux, et d'autre part majoritairement sur des obligations ayant une échéance en adéquation avec son passif pour avoir un risque de liquidité le plus faible possible. Ainsi, le prix du ou des dérivés en couverture des actifs évolue en sens opposé au prix des actifs couverts. Un choc sur les prix des dérivés aura alors quasiment même effet en valeur absolue qu'un choc sur les actifs. Ce

qui revient à prendre comme approximation de l'effet atténuateur les variations de prix du dérivé au lieu des variations de prix de l'actif sans tenir compte des effets de compensation éventuels au passif (par exemple : hausse de taux entraînant une baisse des provisions techniques) et sous l'hypothèse d'un gap de duration faible entre les actifs et les passifs. En conclusion, le quantile à 99.5% de la distribution de la variation des prix du dérivé à 1 an est pris comme un majorant de l'effet atténuateur.

5 Comparaison des méthodes sur différents dérivés

Pour chaque dérivé, le risque CVA (VaR à 99%) est calculée selon différentes approches (Add-on, Option, et Monte Carlo) et comparées entre elles. A titre indicatif, le SCR contrepartie (étalonné à un niveau de confiance 99%³⁴) est calculée selon l'approche standard du Règlement Délégué Solvabilité II.

5.1 Forward de taux et de change

5.1.1 Forward de taux

Intérêt du contrat

L'intérêt pour l'assureur d'utiliser un contrat forward est généralement de se couvrir contre un mouvement défavorable du sous-jacent (taux, change, ...). Ainsi, si dans son bilan l'assureur a des obligations à taux fixe et/ou en devise qui génèrent un risque de taux, devise et crédit, alors il peut choisir de couvrir ou non ces risques à l'aide de dérivés de taux, change et crédit. Les contrats forwards de taux peuvent être utilisés pour se couvrir contre le taux sur des maturités courtes (<18 mois). Pour les maturités moyennes et longues, le swap est privilégié. L'acheteur d'un contrat forward voit sa position se valoriser quand le cours du sous-jacent (l'indice du taux de référence choisi) augmente. Ainsi, si les taux montent (resp. baissent) entre la date de signature et la date de maturité du FRA alors l'acheteur du FRA est gagnant (perdant) et le vendeur est perdant (gagnant).

Présentation du contrat

Pour le contrat étudié dans cette partie, on se place dans le cas d'une position acheteuse sur un forward de taux dont le sous-jacent est l'Euribor 3M. La maturité du contrat est le 30/06/2022 avec un taux forward de 0.2%. Le nominal du contrat est de 5 M€. Pour cet exemple, les deux contreparties sont : un assureur (acheteur : AXA) et une banque (vendeur : BNP). A la date du 31/12/2020, le prix de marché de ce contrat est de -37.8 k€.

Résultats et Analyses

Pour le dérivé défini précédemment, le risque CVA (VaR CVA à 99%) est calculé selon les trois méthodes présentées (Add-on, Options, et Monte Carlo). La méthode des add-ons porte différents noms, mais son principe reste le même, on retrouve les noms suivants : méthode standard/add-on/réglementaire/CEM (Current Exposure Method). Sous Solvabilité II, la méthode des add-ons n'existe pas³⁵, il s'agit plutôt de la méthode standard qui sert à calculer le risque de contrepartie sur un dérivé. Comme mentionné en introduction de cette partie, le SCR contrepartie est calculé à titre informatif et remis avec un seuil de 99% afin d'être sur le niveau de confiance que pour la méthode des Add-ons (VaR à 99%). Les résultats obtenus pour le calcul du risque CVA pour chacune des méthodes sont présentés ci-dessous :

Méthode	VaR CVA (€)	VaR CVA / Nominal	Variation vs. méthode Add-on
Add-on	335,0	0,01%	-
Options	2,0	0,00%	-99,4%
Monte Carlo	0,0	0,00%	-100,0%
SCR contrepartie	0,0	0,00%	-100,0%

³⁴ Cette valeur correspond au ratio entre l'intégrale de la fonction de distribution cumulée d'une loi normale standard inverse à 99% et 99.5%, soit 2.3263 et 2.5758.

³⁵ Une analogie entre Solvabilité II et Bâle III est réalisée en annexe 3 afin de déterminer ce que vaudrait la CVA sous la réglementation Solvabilité II. Cette analogie est grossière puisque les probabilités de défaut ne sont pas les mêmes entre les deux méthodes (déterministe vs stochastique ou marché).

Les résultats, quelle que soit la méthode choisie, sont globalement faibles par rapport au montant du nominal (5M€). La VaR CVA représente au plus 0.01% du nominal du dérivé et au minimum 0%. Cela s'explique par deux phénomènes :

- le contrat au moment du calcul a un prix négatif (-37.8k€) pour l'acheteur. Autrement dit, le risque de contrepartie pour l'acheteur est nul à cette date puisque son prix de marché est négatif.
- le niveau des CDS à fin 2020 des deux contreparties est assez faible puisque leurs notations respectives sont très bonnes (AA pour AXA et A pour BNP). Ce faible niveau des spreads CDS entraîne une probabilité de défaut moindre à court terme, et donc une CVA faible.

Sous Solvabilité II, si la somme du prix du dérivé et de l'effet d'atténuation du risque est négative alors l'exposition en risque est nulle, et donc le SCR contrepartie aussi. L'effet d'atténuation est de 3 508€, et donc l'exposition au moment du défaut est négative (-37.8k€ + 3.5 = -34.3k€). Il en résulte un SCR de contrepartie de 0€ puisque le SCR ne peut pas être négatif.

En revanche, la méthode décrite dans la réglementation SA-CCR écrite en 2017 indique une CVA de 335.0€. Le montant en risque au titre du risque CVA sous l'approche SA-CCR est supérieure aux autres puisque l'EAD à la somme du prix flooré à 0 (comme Solvabilité II) et de la PFE (Potential Future Exposure) multipliée par le coefficient de majoration (1.4). La PFE fait office de VaR, et vaut 12k€. L'EAD est donc de 16.75 k€ ce qui donne un risque CVA de 335.0€. Ce montant est très faible mais donne néanmoins une bonne indication du côté conservateur de la méthode réglementaire.

Ensuite, la CVA obtenue par la méthode de réplcation d'option de taux (cap) est très faible et vaut 0.29€ en situation normale et de 0.37€ en situation de stress. Le montant de risque CVA est de 1.98€. La CVA est positive puisque cette méthode pondère les primes d'option (une prime est strictement positive) par les probabilités de défaut. Le strike de l'option est en dehors de la monnaie ce qui explique que les primes d'option calculées soient faibles mais croissantes avec le temps comme le montre le graphique ci-dessus. En effet, plus le temps passe, plus la probabilité que les taux remontent est importante et que le prix du contrat soit positif.

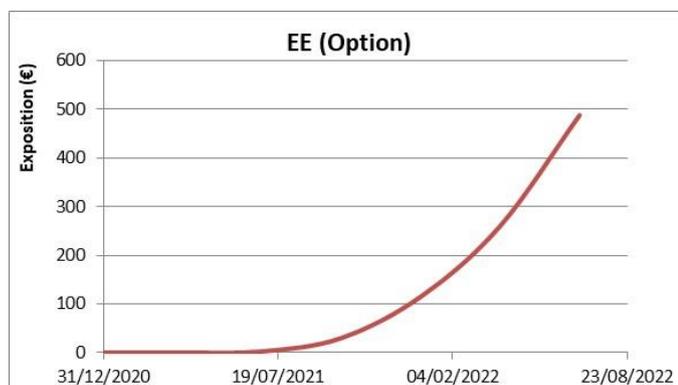


Figure 34 : Expected Exposure (EE) d'un contrat forward par la méthode des options

Enfin, la CVA calculée avec la méthode de Monte Carlo est nulle puisque les Mark-to-Future calculés sont très majoritairement négatifs (le dérivé étant très en dehors de la monnaie initialement). Une CVA dite « financière » c'est-à-dire en intégrant les prix futurs négatifs (ENE) donneraient une valeur de -53.1€. Pour rappel, la CVA peut-être négative quand elle est calculée dans un sens financier et non réglementaire. Pour la VaR CVA réglementaire en Monte Carlo, deux scénarios sont possibles :

- floorer la CVA à 0 et avoir une VaR CVA nulle comme retenue ici ;
- prendre uniquement les EPE en compte ce qui aurait conduit à une CVA de 2.12 €, ce qui est plus conservateur que la CVA avec la méthode des options (0.29€) mais néanmoins très inférieure (99% plus petite) à la valeur sous Bâle III (335€).

Une CVA négative équivaut à dire que le risque de contrepartie pour l'acheteur (AXA) est nul à la date du calcul puisque le produit n'a que très peu de chances de voir son prix devenir positif pour AXA. En d'autres termes, le risque de contrepartie est dans ce cas précis porté par la contrepartie BNP qui a vendu le contrat à AXA. Si plusieurs contrats dérivés étaient signés entre BNP et AXA, la CVA de chaque produit pourrait être sommée et nettée puisque les dérivés ont la même contrepartie. Ce « netting » n'est possible et surtout pertinent que dans une approche Monte Carlo qui permet le calcul d'expositions futures négatives.

Pour l'approche Monte Carlo, l'Expected Exposure (EE) peuvent être tracées ainsi que l'Expected Positive Exposure (EPE) et l'Expected Negative Exposure (ENE) sur le graphique ci-dessous :

Le point de départ de l'EE en méthode de Monte Carlo correspond au prix du dérivé (-37.8k€). L'EPE en Monte Carlo démarre à 0 puisque le contrat Forward a une valeur très négative. Puis, l'EPE croît jusqu'à la date de maturité du contrat. L'EPE est croissante avec le temps puisque l'échange du forward se fait à la date de maturité du contrat. Ainsi, il y a plus de chance d'avoir un taux forward supérieur au strike dans un des scénarios si la durée résiduelle est importante. Le prix du forward étant négatif au moment de la simulation, on retrouve une conclusion similaire à celle de la méthode utilisant

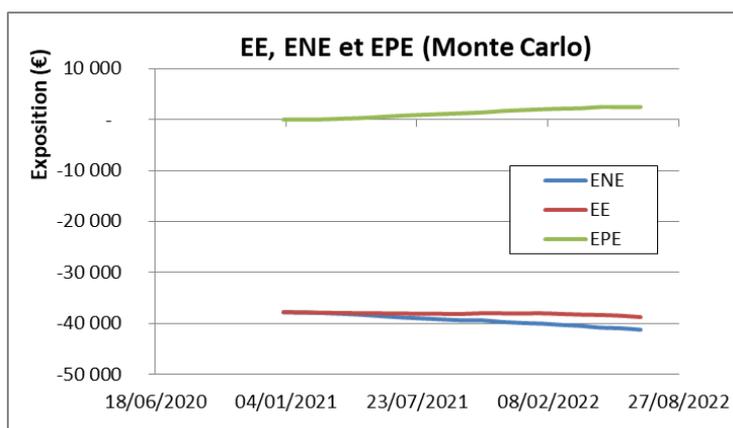


Figure 35 : EE, EPE et ENE d'un Forward de taux en méthode de Monte Carlo

les options, à savoir qu'il y a peu de chance de générer une perte future. On note enfin l'intérêt majeur de passer par la méthode de Monte Carlo puisqu'elle permet de calculer une CVA plus réaliste mais aussi potentiellement négative. Ainsi si on avait deux contrats (un avec une CVA positive et l'autre négative) alors on pourrait sommer les CVA et réduire le montant total.

Synthèse

Dans un contrat forward, l'échange entre les deux contreparties se fait à la date de maturité. Cette particularité concentre le risque de défaut à la maturité du contrat. Cela se traduit en termes de profil d'exposition future comme une droite croissante jusqu'à la date de maturité du forward. Plus cette date est lointaine et son sous-jacent volatil, plus il y aura de risque. Pour se prémunir de ce risque qui grandit linéairement avec le temps, l'assureur privilégiera plutôt les contrats Futures où des appels de marge se font quotidiennement si le montant du dérivé dépasse un certain seuil. Ce seuil est défini dans le CSA signé par les deux contreparties au moment de l'échange. Ainsi, si sur une journée, les marchés sont très volatils et que le prix du Future dépasse ce seuil, alors l'un des deux contreparties fait un virement à l'autre pour réduire l'exposition.

Dans le cadre de cet exemple, la CVA est très faible puisque le dérivé a un prix de marché négatif. Si l'assureur avait opté pour un modèle interne afin de calculer son SCR contrepartie alors cela lui aurait coûté légèrement plus cher en fonds propres (6,4€ au plus contre 0.0€).

5.1.2 Forward de change

Présentation du contrat

Dans cet exemple, une position acheteuse sur un forward de change sur la paire de devise EUR/USD est supposée. La maturité du contrat est le 23/07/2022 avec un cours de change forward fixé à 1.20 pour un nominal de 5M€. Les deux contreparties sont AXA (acheteur) et BNP (vendeur). L'intérêt d'un tel contrat est identique au Forward de taux (modulo un risque sous-jacent différent : change contre taux précédemment).

Résultats et Analyses

Au 31/12/2020, le contrat ci-dessus a un prix de marché positif (57 335 €) pour son détenteur, le risque de contrepartie pour AXA est plus important que dans le cas précédent. Pour le Forward défini précédemment, la CVA a été calculée selon les trois méthodes présentées (Add-on, Option, et Monte Carlo). Comme dans le cas précédent, le SCR contrepartie est ramené à un seuil de 99% au lieu de 99.5% et son calcul est indicatif. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Méthode	VaR CVA (€)	VaR CVA / Nominal	Variation vs. méthode Add-on
Add-on	10 468,7	0,21%	-
Options	2 273,2	0,05%	-78,3%
Monte Carlo	665,4	0,01%	-93,6%
SCR contrepartie	3 820,9	0,08%	-63,5%

Les quatre VaR CVA obtenues sont comprises entre 665.4€ et 10 468.7€. La valeur la plus grande (10 468.7€) est obtenue dans le cadre de la réglementation Bâle III, et la plus petite (665.6€, soit 93.6% de moins) est calculée avec la méthode de Monte Carlo. Les CVA obtenues via la méthode des options ou en Monte Carlo sont plus faibles que l'approche par Add-on. Ces deux approches minimisent donc le montant de risque CVA pour ce dérivé.

Pour la méthode des add-ons, dans le cadre de Bâle III, le notionnel effectif est de 5M€, le delta vaut +1 puisqu'on se place dans le cas d'un achat du contrat. Son facteur de maturité est le minimum entre la maturité résiduelle et 1 an. Le contrat ayant une maturité résiduelle de 1.5 an, son facteur de maturité tel que défini dans l'article 164 dans le SA-CCR du comité de Bâle est donc de 1. L'add-on réglementaire des dérivés de change est de 4% du notionnel effectif (5M€), soit 200 000€. Le prix du dérivé en date du 31/12/2020 est de 57 334€. L'EAD réglementaire est alors de 360 267€³⁶. Enfin, avec une LGD de 40%, et une contrepartie notée A (échelon de crédit de 2) qui a une probabilité de défaut de 0.8%. Par application de la formule réglementaire, le montant au titre du risque CVA est de 10 468.7€. Il est à noter que la forte de la VaR CVA en approche add-on est fortement lié à l'add-on réglementaire sur les dérivés de change (4%) qui est 8 fois supérieur à celui sur les dérivés de taux (0.5%). Ainsi, à titre illustratif, si l'add-on avait été de 0.5% alors la VaR CVA aurait été de 2392€, soit 4.4 fois moins. Ainsi, le montant de VaR CVA de 10 468.7€ est composé à 77% d'effet change et 23% (2 392/10 468) d'effet taux. Les dérivés de change sont donc très coûteux en fonds propres au titre du risque CVA comme on le constatera aussi les swaps de change dans la partie 5.3.

Pour l'approche sous Solvabilité II, le SCR contrepartie est de 3 820.9€. Cette valeur est plus importante que celle obtenue pour le premier contrat (0.0€ pour rappel) puisque la somme du Mtm (57.3 k€) et de l'effet d'atténuation (33.1 k€) est positive. Autrement dit, la CVA sous cette réglementation est très dépendante du niveau du prix du dérivé à la date de valorisation et de l'effet d'atténuation.

Pour la méthode des options, la VaR CVA est de 2 273€. Cette valeur a été obtenue en valorisant une série d'option de change avec le même strike (EUR/USD à 1.2) mais dont la date d'exercice augmente dans le temps. Sur le graphique ci-dessous, les expositions attendues ont été tracées et augmentent avec le temps.

³⁶ 1.4*(200 000 + 57 334)

Comme mentionné précédemment, cette tendance est caractéristique des contrats forwards qui procède au règlement du dérivé à la date de maturité.

Puisque le forward est dans la monnaie au 31/12/2020, son exposition est positive et démarre bien au-dessus de 0.

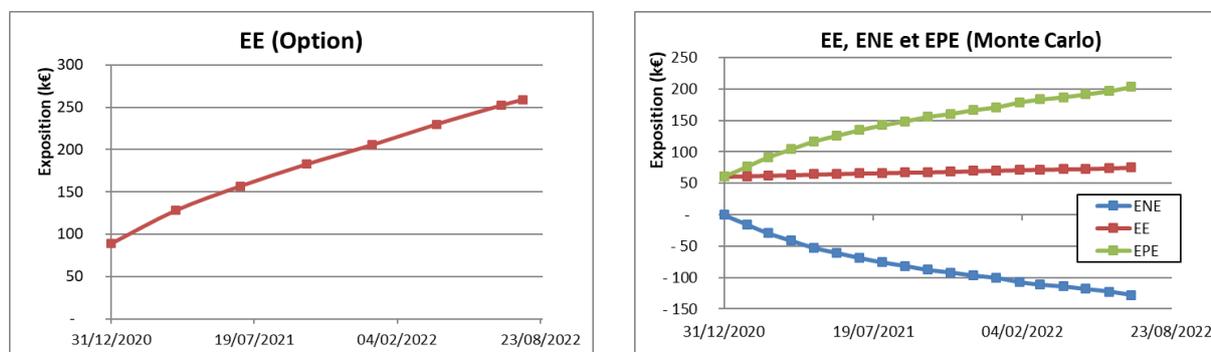


Figure 36 : Expected Exposure d'un Forward de change (gauche : méthode des options, droite : Monte Carlo)

En complément de ces résultats, on trace aussi l'EE, l'EPE et l'ENE ci-dessus avec la méthode de Monte Carlo. Le point de départ est le prix du forward à la date de calcul (57 334€). L'exposition augmente avec le temps comme pour la méthode des options ce qui est cohérent avec le profil des pertes attendues sur un contrat forward. L'Expected Exposure augmentent plus vite dans le cadre de la méthode des options qu'avec la méthode de Monte Carlo. Cette différence s'explique par le fait qu'avec la méthode de Monte Carlo, les expositions négatives sont prises en compte ($EE = EPE + ENE$) réduisant ainsi la vitesse de croissance de l'EE. L'EE calculée avec la méthode des options est à comparer avec l'EPE calculée avec la méthode de Carlo. Auquel cas, les deux courbes ont une vitesse de progression similaire.

5.2 CVA des swaps de taux

Présentation des contrats

Les deux swaps pris pour cette partie sont de même nominaux (10M€) avec le premier qui a une maturité résiduelle courte (5 ans) et le seconde une maturité résiduelle longue (16 ans). Les deux swaps sont des swaps payeurs taux fixe. Leurs caractéristiques sont fournies dans le tableau ci-dessous :

Identifiant du produit	IRS 1	IRS 2
Date de début	04/01/2015	04/01/2020
Date de maturité	04/01/2025	31/03/2036
Nominal	10M€	10M€
Broken period	Start	Start
Accrual basis	Act/365	Act/365
Business day convention	Modified following	Modified following
Fréquence jambe fixe	Annuelle	Annuelle
Taux jambe fixe	0.20%	0.20%
Fréquence jambe variable	Trimestrielle	Semestrielle
Indice jambe variable	Euribor 3M	Euribor 6M
Marge jambe variable	60 bps	20 bps

L'intérêt d'un tel contrat est de se couvrir contre le risque de taux en changeant un taux fixe en taux fixe, taux variable en taux fixe ou encore taux fixe d'un indice particulier en un autre indice. Ainsi, une compagnie d'assurance qui possède à son actif une obligation à taux fixe pourra décider ou non de se couvrir contre un mouvement défavorable des taux (une hausse dans notre cas). Pour cela l'assureur prend un swap avec une

banque généralement, paie un taux fixe et reçoit un taux variable (Euribor 3M généralement). Ainsi la sensibilité de l'assureur au mouvement des taux sera quasi nulle contrairement à s'il n'avait pas pris de couverture. Une fois swappé en taux variable, l'actif n'est plus sensible aux mouvements des taux.

Le premier swap (IRS 1) a une maturité résiduelle de 5 ans, il paie un taux fixe de 0.2% et reçoit l'Euribor3M + 60 bps. Son prix de marché à la date du 31/12/2020 est de -48 301 €. Le second swap (IRS 2) a une durée résiduelle plus longue et un taux fixe identique. L'indice taux variable est cette fois-ci Euribor 6M et la marge est de 20 points de base. Son prix au 31/12/2020 est de 133 506 €.

Pour rappel, l'univers multi-curve permet de reconstruire la courbe Euribor 6M à partir de l'Euribor 3M et d'une base entre les deux tenors. Avec ces deux courbes et les caractéristiques du swap présenté dans le tableau ci-dessus, les *Marks-to-futures* du swap peuvent être valorisés en Monte Carlo ainsi que les primes d'options sur les swaps sous-jacent (*swaption*) pour la méthode des options.

Résultats et Analyses

Comme précédemment, la VaR CVA est calculée pour les deux swaps selon les trois méthodes présentées dans ce mémoire plus le SCR contrepartie à titre indicatif. L'analyse est scindée en deux parties, la première concernant le premier swap : IRS 1, et la seconde concernant le second swap : IRS 2.

- **IRS 1**

Sur le tableau synthèse ci-dessous, le risque CVA varie nettement entre les différentes méthodes. Elle varie de 0 (sous Solvabilité II) à 18 969.1 € (sous Bâle III). Le dérivé a un SCR contrepartie nul car la somme de l'effet atténuateur et du prix du dérivé est négative. De plus, la méthode des options permet de réduire la CVA de 96.9% par rapport à l'approche réglementaire standard Bâle III et de 78.5% lorsqu'on passe par une méthode de Monte Carlo.

Méthode	VaR CVA (€)	VaR CVA / Nominal	Variation vs. méthode Add-on
Add-on	18 969,1	0,19%	-
Options	620,2	0,01%	-96,7%
Monte Carlo	4 081,5	0,04%	-78,5%
SCR contrepartie	0,0	0,00%	-100,0%

Les deux approches réglementaires donnent des résultats opposés. En effet, l'approche Solvabilité II considère la valeur de marché (-48.3k€) du dérivé à la date de calcul plus l'effet d'atténuation (17.2k€). La somme de ces deux éléments étant négative, cela conduit à un SCR nul. En revanche dans la réglementation de Bâle III, la VaR CVA est la somme du prix d'aujourd'hui flooré à 0 (donc comme pour Solvabilité II), et d'une VaR strictement positive (253.7k€). Ce qui donne après application de la formule réglementaire une VaR CVA de 18 969.1€.

Les deux approches plus fines avec des options et du Monte Carlo donnent logiquement une CVA plus faible (-96.9% pour les options et -78.5% pour Monte Carlo) que celle de la réglementation Bâle III. Pour la méthode optionnelle, le profil de la CVA, de l'Expected Exposure ainsi que de la probabilité de défaut sont tracés sur la figure 37 ci-dessous.

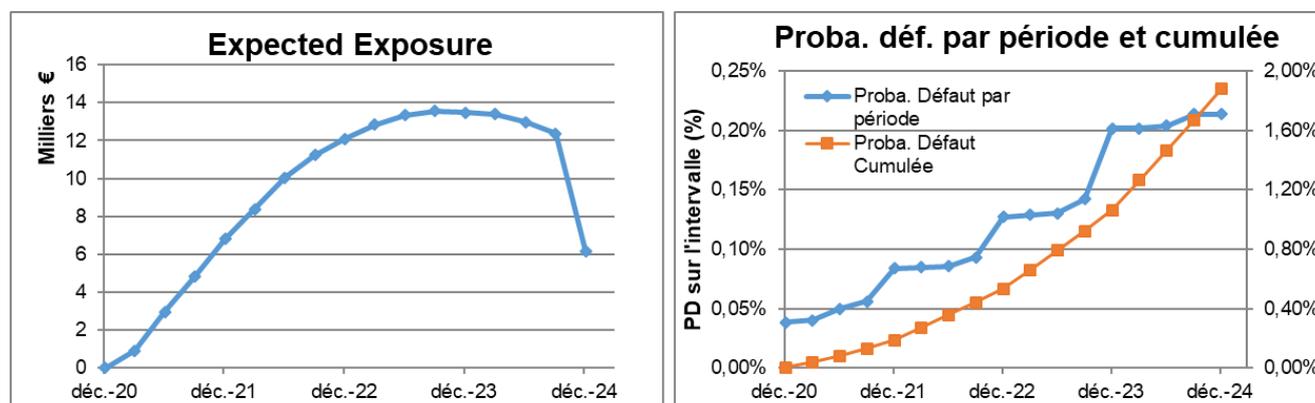
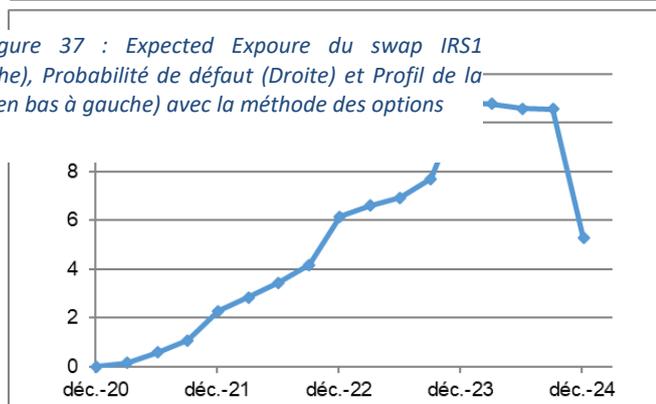


Figure 37 : Expected Expoure du swap IRS1 (gauche), Probabilité de défaut (Droite) et Profil de la CVA (en bas à gauche) avec la méthode des options



Pour la méthode des options, sur le graphique de l'Expected Exposure (en haut à gauche), on retrouve un profil en forme parabolique concave qui est caractéristique des swaps de taux. Ces dérivés, contrairement au swap de devise ou aux contrats forwards, n'ont pas d'échange de nominaux et ont un risque de contrepartie qui tend vers zéro à mesure qu'on se rapproche de leur date de maturité. La valeur du Mark-to-Future augmente dans un premier temps, puis atteint son maximum et enfin décroît vers zéro. Le swap a un prix négatif, ce qui explique que le prix d'une swaption de date d'exercice 04/01/21 (prochain coupon) est nul (0.00€) puisque cette option n'a que très peu de chance d'être exercée. Le point de départ de l'EE est donc zéro dans ce cas. Les primes d'options calculées sont très faibles ce qui implique une VaR CVA très faible pour ce dérivé. Les volatilités implicites utilisées dans le calcul des primes des swaptions sont de l'ordre de 25% car le swap sous-jacent est court (entre 1 et 4 ans) contrairement au swap IRS 2 (plus bas) dont les volatilités des swaptions sont de l'ordre de 50%. Si les calculs avaient été fait avec une volatilité de 40%, la VaR CVA pour le swap IRS 1 auraient été de 968€.

A mesure que la maturité de l'option s'éloigne, la prime de la swaption coûte de plus en plus cher puisque le swap sous-jacent a encore des coupons à détacher et l'option a une plus grande probabilité d'être dans la monnaie. Ceci jusqu'à un certain point, où l'option a une forte probabilité d'être exercée mais la maturité résiduelle du swap sous-jacent est trop faible pour avoir un prix élevé. Le produit des deux grandeurs (probabilité de défaut et Expected Exposure) devient alors de plus en plus faible. Cet effet se retrouve aussi si on trace le profil de la CVA au cours du temps (graphique en bas à gauche de la figure 37). La forme est moins lisse à cause des « sauts » de valeur dans la probabilité de défaut (courbe bleue sur le graphique en haut à droite de la figure 37). Ces sauts sont causés par l'apparition de nouvelles valeurs de CDS qui réajuste l'interpolation du spread pour le calcul de la probabilité de défaut.

Dans l'approche par des simulations de Monte Carlo, les expositions sont tracées ci-contre en figure 38. Sur le graphique, la forme concave pour l'EPE et convexe pour l'ENE est de nouveau observée. L'EPE est maximale en juin 2022, puis décroît progressivement vers 0 jusqu'à la date de maturité du swap. Les deux profils (EPE et ENE) ont une forme semblable et relativement symétrique ce qui est caractéristique d'un swap dont le prix est proche de 0 ou que le taux de la jambe fixe soit proche du taux swap de marché et de même maturité.

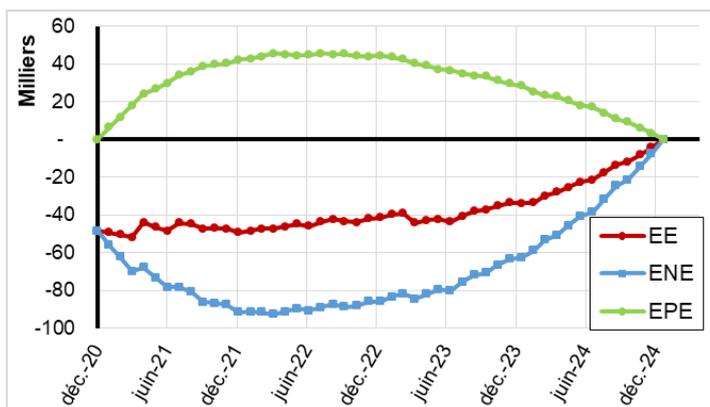


Figure 38 : EPE, ENE, EE du swap IRS 1 via la méthode de Monte Carlo

Enfin, la distribution de la CVA (bilatérale) est tracée sur la figure 39. Cela permet de calculer une VaR à 95% et 99% de la CVA.

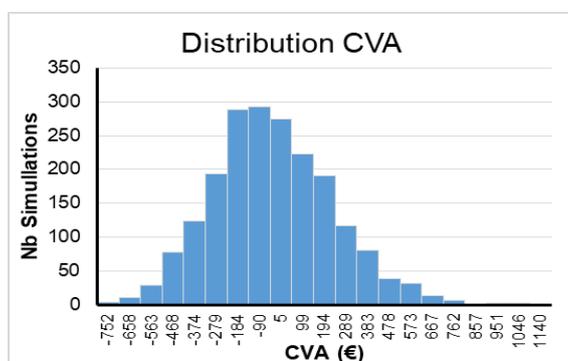


Figure 39 : Distribution de la CVA en Monte Carlo pour le swap IRS 1

La distribution est légèrement asymétrique vers les valeurs de CVA négatives. D'ailleurs, la CVA moyenne au sens financier (en prenant en compte les ENE) est de -77€ alors que la CVA moyenne au sens réglementaire est de 71€. En période de stress sur les spreads de crédits, la CVA stressée est de 92.6€. La CVA maximale est de 1046€, la VaR à 95% est de 377€ et celle à 99% à 592€. La VaR CVA est alors la somme de la CVA stressée et non stressée multipliée par 3, soit 4 081.5€. Cette VaR CVA est plus importante que celle calculée à partir d'options car les primes d'options sont très faibles. La distribution est légèrement centrée dans la partie négative ce qui est cohérent avec le graphique des expositions ci-dessous où les ENE sont plus importantes en valeurs absolues que les EPE. Les simulations de Monte Carlo recalculent les prix futurs du dérivé qui peuvent donc être négatifs si le dérivé en question est en dehors de la monnaie. Ainsi, si dans son portefeuille AXA possède un autre dérivé qui a une CVA positive avec la même contrepartie (BNP), alors la méthode de Monte Carlo permettra de réduire la CVA du portefeuille. Ce cas de figure qui est illustré dans le second swap ci-dessous.

- **IRS 2**

Par rapport au premier swap étudié, ce second swap possède un prix de marché positif (133k€) à la date de calcul (31/12/2020). Ce second swap a une durée de vie résiduelle plus longue que le premier et une jambe variable indexée sur l'Euribor 6M. La CVA est calculée avec les trois méthodes plus le SCR contrepartie dont les résultats sont présentés ci-dessous.

Méthode	VaR CVA (€)	VaR CVA / Nominal	Variation vs. méthode Add-on
Add-on	265 362,2	2,65%	-
Options	158 873,7	1,59%	-40,1%
Monte Carlo	109 372,8	1,09%	-58,8%
SCR contrepartie	6 311,6	0,06%	-97,6%

La VaR CVA obtenue par la méthode Solvabilité 2 est de 6 311.6 € alors que celle obtenue en Bâle III est de 265 362.2€. Avec la méthode des options, la CVA est de 158 873.7€ et de 109 372.8€ pour la méthode de Monte Carlo. Le swap étant dans la monnaie, les montants de CVA sont plus importants que pour le swap IRS 1.

Le risque CVA sous Bâle III est bien plus importante que pour Solvabilité II. En effet, la CVA sous Solvabilité II est proportionnelle au prix du dérivé spot et de l'effet d'atténuation du dérivé. Ce comportement linéaire n'est pas présent sous Bâle III à cause de l'add-on, du supervisory factor et du nominal ajusté en fonction du type de risque. Le montant de VaR CVA est important pour la méthode standard à cause notamment d'une vision très conservatrice pour l'EAD (934k€) qui impacte directement les fonds propres réglementaires exigibles au titre du risque CVA.

Pour la méthode des options, on trace l'Expected Exposure, la CVA et la probabilité de défaut en fonction du temps de la même manière que pour le premier swap (IRS 1). Les courbes sont présentées ci-dessous :

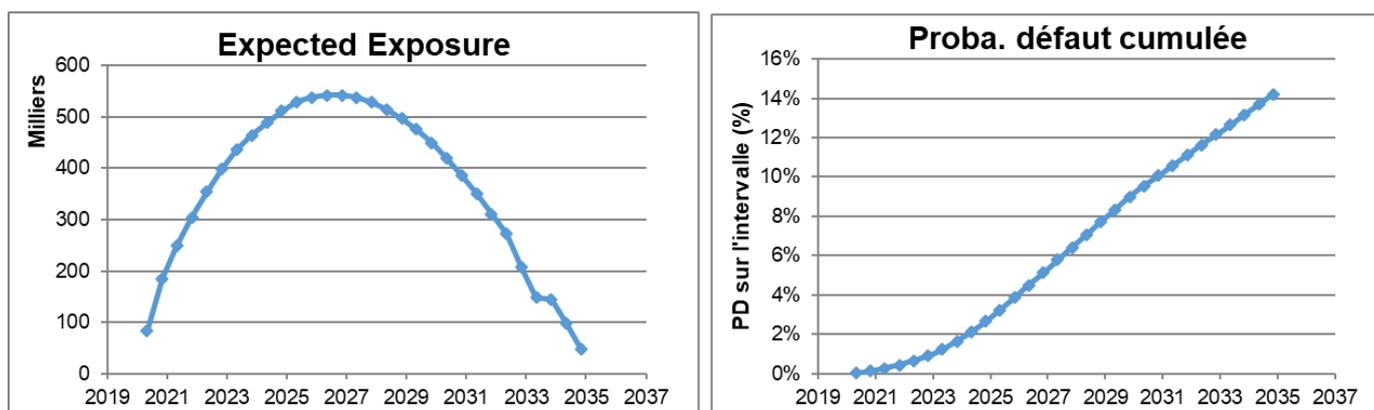
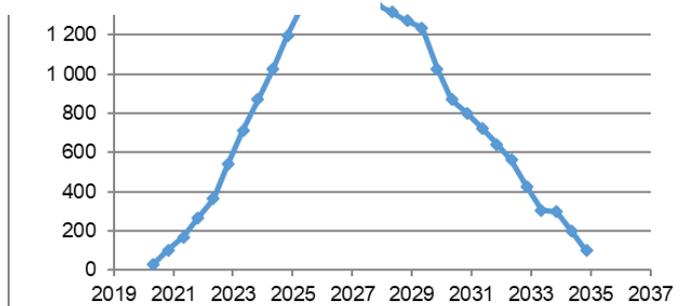


Figure 40 : Expected Expoure du swap IRS2

(gauche), Probabilité de défaut (Droite) et Profil de la CVA (en bas) avec la méthode des options



L'Expected Exposure démarre au-dessus de 0 puisque le swap a un prix de marché positif (133 k€), donc le prix d'une swaption sur le swap qui a une Mtm positif sera positif. Sa prime vaut : 83 k€. Le profil parabolique concave est plus net dans ce swap que sur le précédent, avec un maximum de son exposition future atteint en 2026 (soit 1/3 de la durée de vie restante) avec une valeur de 542 k€. Les expositions tendent ensuite vers 0 à mesure que la durée de vie résiduelle du swap sous-jacent diminue.

Les probabilités de défaut entre chaque coupon sont déduites de la courbe CDS de BNP. Cette courbe montre une augmentation de la possibilité de faire défaut avec le temps. Il n'existe pas de CDS cotés pour toutes les maturités ce qui explique les « sauts » dans les probabilités de défaut et des paliers. Ainsi, de 2030 à 2040, la probabilité est toujours la même.

Avec la méthode de Monte Carlo, on trace les profils des EE, EPE, et ENE sur la durée de vie du dérivé.

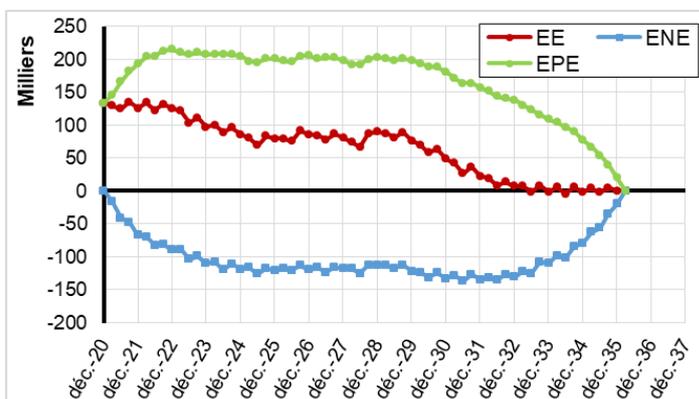


Figure 41 : EPE, ENE, EE du swap IRS2 via la méthode de Monte Carlo

On note un point de départ de l'EPE du swap à son prix de marché, soit 133k€.

Puis, une hausse de l'EPE jusqu'en 2022, un palier de 2022 à 2030 et enfin une baisse de 2030 à 2035 jusqu'à atteindre 0 en 2035. Quant à elle, l'ENE démarre à 0 puisque le prix du swap est positif à la date de valorisation, puis baisse de 0 à -140 k€ en 2024 et augmente à partir de 2031 pour atteindre 0 à la date de maturité du swap. La forme parabolique pour le EPE et l'ENE est plus écrasée que dans la méthode des options mais reste toutefois visible.

On peut en complément tracer la VaR à 95% et 99% de l'EE afin d'avoir un profil des VaR futures. Le profil strictement positif et concave est cohérent avec un prix positif du dérivé en date de valorisation. De plus, La moyenne de la VaR 95% est de 586k€ et celle à 99% est de 787k€.

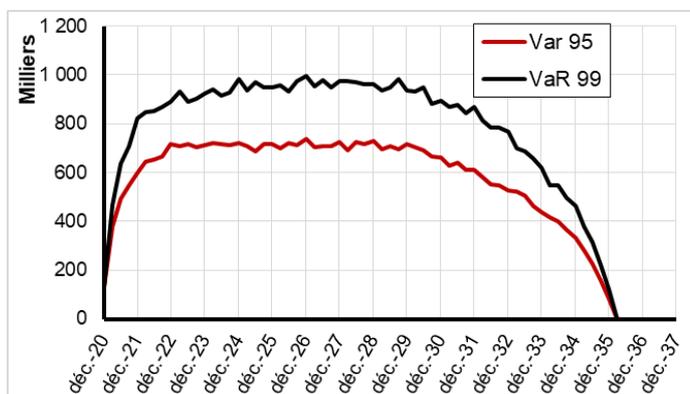


Figure 42 : Profil de la VaR à 95% et à 99% de l'EE du swap IRS2

Sensibilité du taux fixe du swap sur les expositions

Les calculs sont relancés pour le swap IRS 1 avec un taux fixe de la jambe payeuse à 1% puis à -0.6%. Ceci permet de visualiser l'impact d'une forte variation du taux de la jambe fixe sur le profil des expositions (EPE, ENE et EE), et mettre ainsi en évidence si le profil du dérivé est caractéristique d'un dérivé dans la monnaie ou pas.

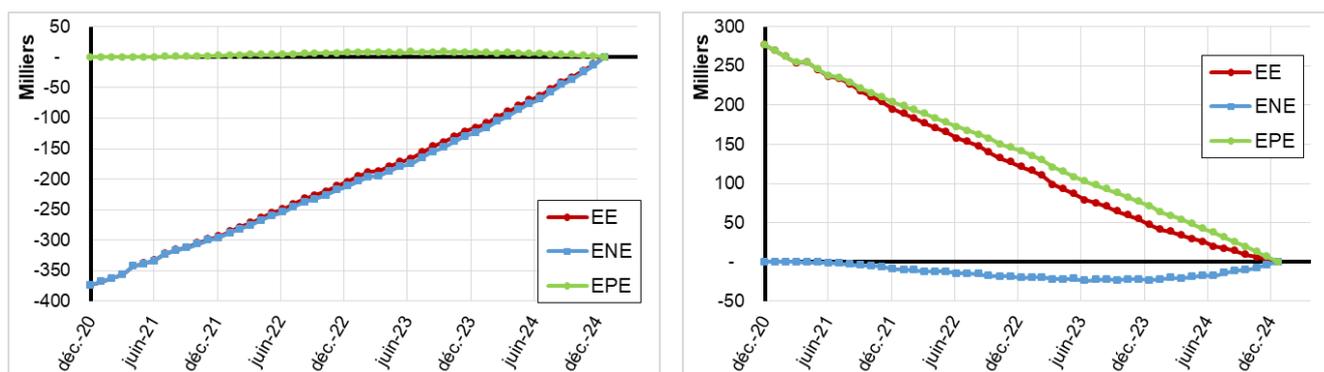


Figure 43 : EPE, ENE, et EE d'un swap de taux en dehors de la monnaie (gauche) et dans la monnaie (droite). Profils obtenus en Monte Carlo

Sur la figure 43, le graphique de gauche correspond à une jambe payeuse de 1% et à droite de -0.6%. On constate que les profils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. De plus, un swap fortement en dehors de la monnaie c'est-à-dire avec un prix de marché à la date de la simulation très négatif (-360k/10M€ = 3.6% du notionnel) fait apparaître une EPE quasi nulle au cours du temps et une ENE qui diminue en valeur absolue linéairement jusqu'à atteindre 0 à la date de maturité. De même, pour un swap dans la monnaie, l'EPE diminue linéairement jusqu'à atteindre 0 à la date de maturité et l'ENE est proche de zéro sur la durée du swap.

Sensibilité du collatéral et netting

Si le détenteur d'un tel swap avait souhaité réduire son risque avec cette contrepartie, il aurait alors deux possibilités : soit prendre un swap en dehors de la monnaie pour réduire la CVA, soit mettre du collatéral en face de ce swap. La première possibilité n'est possible que pour l'approche Monte Carlo qui permet de prendre en compte les ENE. En effet, si on ajoute le swap IRS1 à un portefeuille composé uniquement du swap IRS2, la CVA (financière) totale serait de 1800€ (1877-77). Pour la seconde possibilité, les calculs sont relancés en ajoutant un collatéral (cash) de 200k€ mis en dépôt à la signature du dérivé. Les distributions de la CVA sans et avec collatéral sont tracés ci-dessous :

La présence d'un collatéral permet de translater la distribution de CVA vers la partie négative du graphique, et ainsi d'éliminer la queue (positive) de distribution entourée comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous. Cette conclusion se retrouve aussi sur la valeur de la CVA moyenne³⁷ qui passe de 3 216€ sans collatéral à 1 672€, soit une réduction de la CVA de 48%.

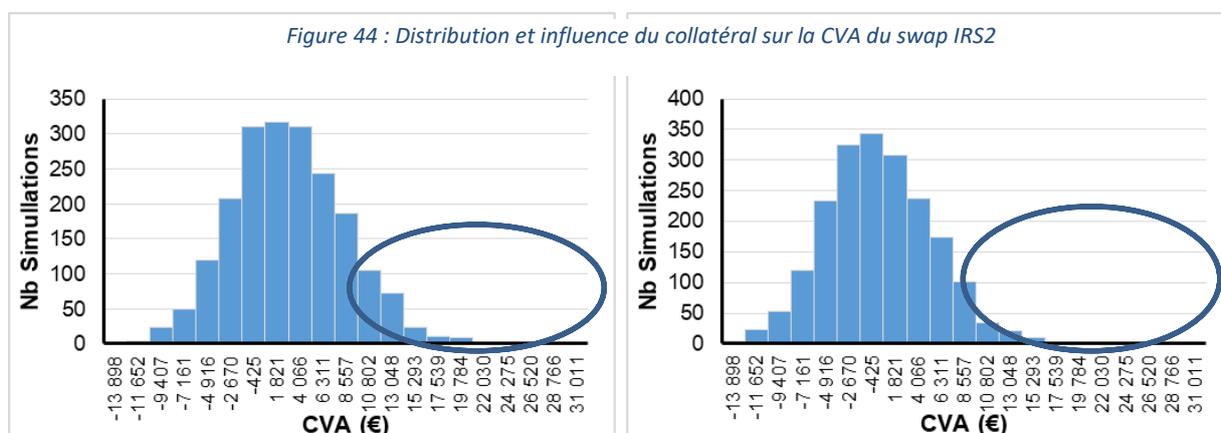


Figure 44 : Distribution et influence du collatéral sur la CVA du swap IRS2

³⁷ En ne prenant en compte que les expositions positives. Les expositions négatives ont un plancher à 0.

Sensibilité aux appels de marge

On applique maintenant une modélisation plus fine (présentée en 4.4) avec des appels de marge hebdomadaires sur le contrat IRS2. Le collatéral est versé à chaque appel de marge est du cash ou des titres assimilables³⁸ à du cash et correspond au montant à verser pour atteindre le seuil fixe, soit 3% du nominal du dérivé. Après avoir relancé les calculs (méthode de Monte Carlo), la distribution des CVA avant et après appel de marge sont présentés ci-dessous :

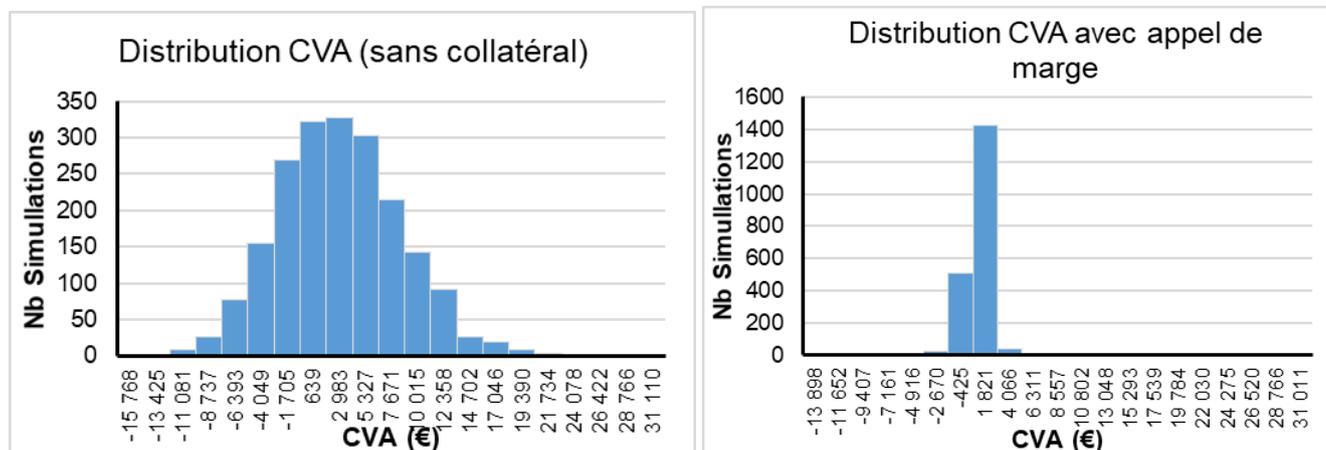


Figure 45 : Distribution de la CVA du swap IRS 2 avec et sans appels de marge

La distribution de gauche correspond à la distribution précédente, c'est-à-dire sans appel de marge. La distribution de droite correspond à la distribution de la CVA après application des appels de marge lorsque le Mark-to-Futur ont été réduit des appels de marge successifs. Sur la distribution de la CVA avec les appels de marge, les queues de distribution contenant des fortes expositions (positives ou négatives) ont entièrement disparu grâce aux appels de marge. Ainsi, la CVA moyenne passe de 3 216€ sans appel de marge à 281€ avec appel de marge, le maximum de 28.8 k€ à 4.1k€, et le minimum de -16.1k€ à -5.3k€. La distribution est alors centrée sur des valeurs proches de zéro. Cette réduction de CVA se retrouve aussi sur les VaR95 et VaR99 des expositions futures sont tracés ci-dessous.

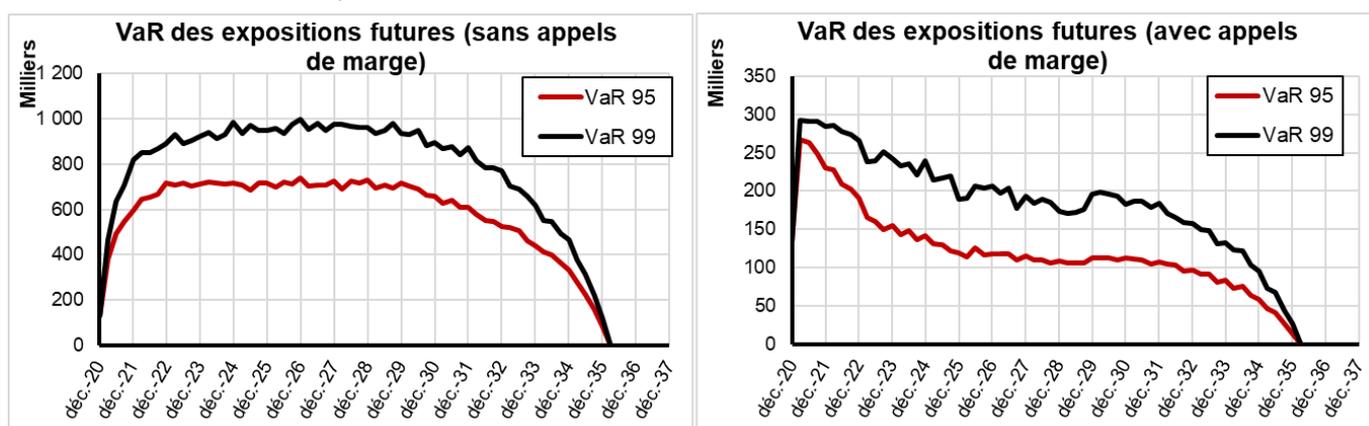


Figure 46 : VaR95 et VaR99 des expositions futures (EE) du swap IRS 2 avec et sans appels de marge

Dès le premier pas de temps, la VaR95 et la VaR99 des expositions futures sont réduites significativement. La forme des expositions devient décroissante et non plus parabolique, le maximum est atteint au début du contrat et non plus en 2026.

³⁸ Titres Etats notés AA avec une durée résiduelle inférieure à un an ou des OPC monétaires.

5.3 CVA des swaps de change

Présentation du contrat

Le swap de change ou cross currency swap (CCS) permet de neutraliser deux risques avec un seul produit : le taux et le change. Il permet de neutraliser deux risques avec un seul produit : le taux et le change. Cette caractéristique rend le calcul de son risque de contrepartie plus compliqué lorsqu'on passe par des options mais reste aussi difficile par des méthodes de Monte Carlo. Puisqu'il neutralise deux effets, la CVA d'un CCS peut se scinder en deux parties : la CVA change et la CVA taux. La CVA change correspond à la CVA sur une série de forward de change et la CVA taux correspond à la CVA sur un swap de taux usuel (comme calculé précédemment).

Dans le cadre des simulations de Monte Carlo, nous n'avons pas besoin de scinder la CVA en deux puisqu'on recalcule les Mark-to-futur du dérivé. En revanche, avec la méthode des options, nous devons décomposer notre CCS en deux sous-produits pour calculer la CVA de chaque sous-produit, puis sommer les CVA pour obtenir la CVA globale du dérivé. Cela implique davantage de calculs et de complexité.

Les principales caractéristiques du swap EUR/JPY payeur taux fixe en JPY et recevant de l'Euribor 3M sont présentés ci-dessous :

Identifiant du produit	CCS
Date de début	30/11/2007
Date de maturité	20/09/2036
Broken period	Start
Accrual basis	Act/365
Business day convention	Modified following
Nominal jambe fixe	16100 M¥
Fréquence jambe fixe	Semestrielle
Taux jambe fixe	0.5%
Nominal jambe variable	100 M€
Fréquence jambe variable	Trimestrielle
Indice jambe variable	Euribor 3M
Marge jambe variable	0 bps

Le cours de change initial JPY/EUR est de 161,01. La particularité du swap de devise est l'échange de nominal à la signature et à la maturité du contrat entre les deux contreparties faisant ainsi naître un risque important sur l'échange à terme du nominal. On se place ici dans le cas où AXA aurait émis de la dette en JPY et qu'AXA souhaiterait se couvrir contre le taux et la devise. AXA reçoit donc du JPY de sa contrepartie (BNP) et paie en échange de l'Euro à taux variable. Au 31/12/2020, le prix de ce dérivé est de 35 M€.

Résultats et Analyses

Les résultats des CVA obtenues selon les différentes méthodes sont présentés dans le tableau ci-dessous. La CVA minimale est de 2.827 M€ avec l'approche Solvabilité II, et la CVA maximale est de 16.157M€ avec l'approche Bâle III. Les quatre CVA sont très importantes pour ce swap dans la monnaie non collatéralisé en devise et de maturité résiduelle importante.

Méthode	VaR CVA (€)	VaR CVA / Nominal	Variation vs. méthode Add-on
Add-on	16 157 172,5	12,64%	-
Options	9 722 527,5	7,61%	-39,8%
Monte Carlo	7 262 308,3	5,68%	-55,1%
SCR contrepartie	2 827 170,5	2,21%	-82,5%

La réglementation Solvabilité II calcule un risque de contrepartie nettement inférieure aux autres notamment à cause de la probabilité de défaut de 0.05% quand celle déduite des CDS est en moyenne de 0.63%. En prenant comme probabilité de défaut 0.63%, alors la CVA avec la méthode Solvabilité II serait de 10.1M€. A l'inverse l'approche Bâle III est très conservatrice. La valeur élevée de la CVA obtenue en Bâle III est due à l'EAD calculée qui est de 58.8M€³⁹. En comparaison, l'EAD maximale est de 41.5M€ avec l'approche via des options et 39.7M€ avec celle de Monte Carlo.

Comme indiqué plus haut, l'intérêt du CCS est de se couvrir contre le taux et contre le change. Ainsi, le risque CVA, calculé via les deux méthodes (options et Monte Carlo), peut être divisé en deux parties : une partie change et une partie taux.

Les graphiques ci-dessous représente l'EE en fonction du temps pour la partie taux et la partie change, ainsi que la probabilité de défaut sur chaque intervalle et l'exposition totale (change + taux) calculée à partir de la méthode des options.

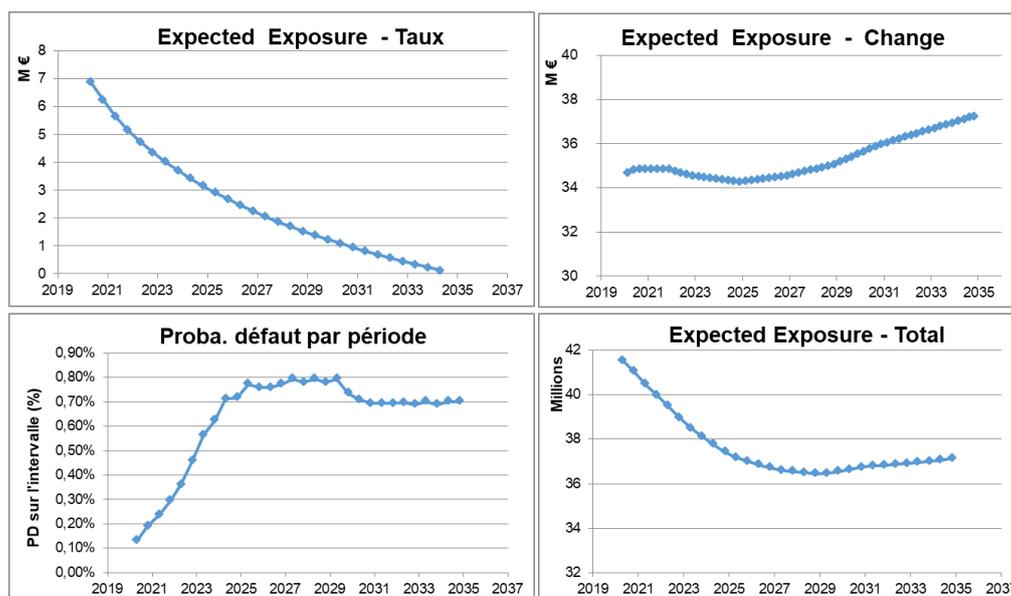


Figure 47 : Expected Exposure taux, change et total du swap de devise

Le graphique de l'Expected Exposure (EE) taux a la même allure que celui de l'IRS 1 pour un dérivé dans la monnaie (Figure 39). L'exposition diminue avec le temps jusqu'à atteindre 0 à la date de maturité. Le graphique de la partie change a aussi une allure semblable à celle de l'EE d'un forward de change puisque le risque de contrepartie est croissant avec le temps. Cet effet est principalement dû à l'échange de nominal à la date de maturité. Le profil de la probabilité de défaut (PD) est inchangé et celui de l'EE totale s'interprète comme la somme des effets taux et change. On remarque ainsi, un profil qui démarre haut puisque le swap a Mtm positif, puis qui décroît jusqu'en 2027 sous l'effet taux. Enfin le profil augmente légèrement avec la partie change qui devient prépondérante devant la partie taux. On note que l'exposition (et aussi la CVA)

³⁹ 1.4*(35 M€ de Mtm + 7 M€ d'add-on)

pour un CCS ne tend pas vers 0 contrairement à un swap de taux classique puisque la particularité du CCS est d'avoir un échange de nominaux à la date de maturité.

De plus, le CCS pris est fortement dans la monnaie aussi bien sur la partie taux que sur la partie change. Il aurait été tout à fait possible d'avoir un EE taux convexe (swap dans proche du pair), et une EE change croissante ce qui aurait donné un profil de la CVA du CCS proche de celle de la CVA d'un forward de change (une droite). On peut comparer ces résultats avec ceux obtenus avec la méthode de Monte Carlo tracés ci-dessous.

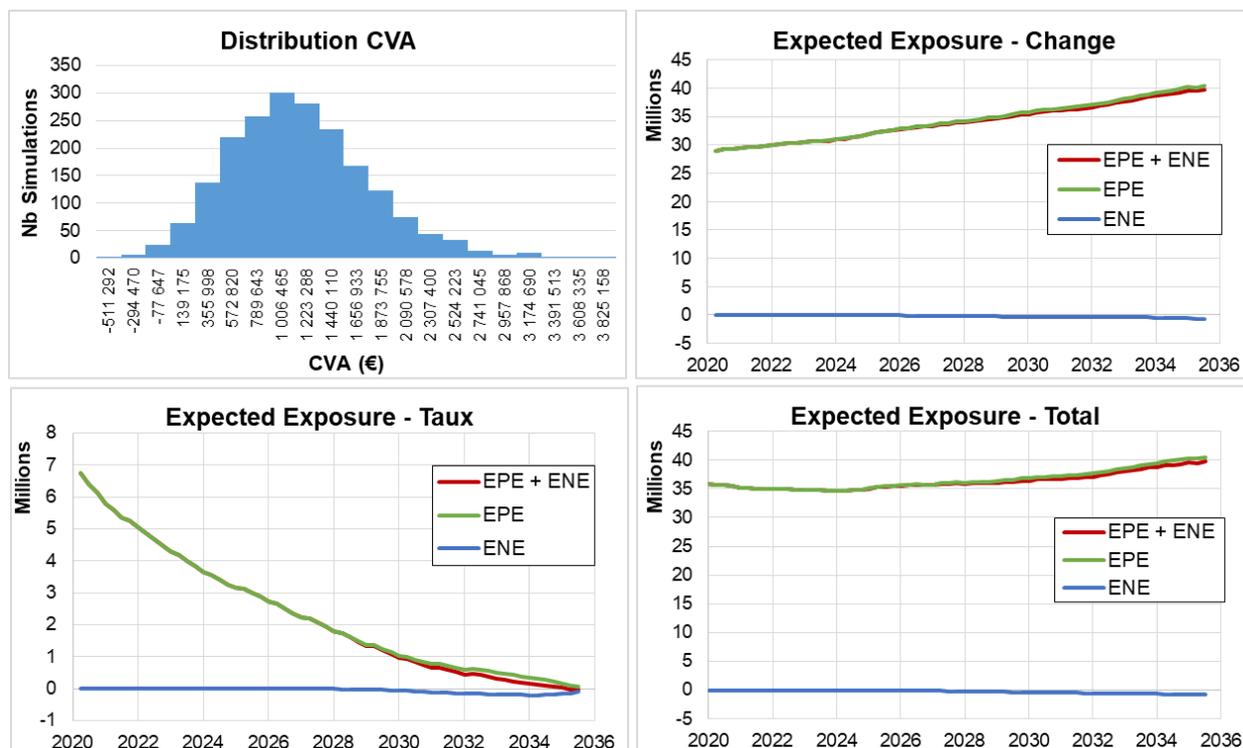


Figure 48 : Distribution de la CVA et profil d'exposition (EPE, ENE et EE) du CCS en Monte Carlo

Les deux graphiques des expositions taux et change ont les mêmes allures que ceux obtenus avec la méthode des options, à savoir décroissante pour la partie taux et croissante pour la partie change. L'exposition totale diminue légèrement moins au début qu'avec la méthode des options, puis remonte jusqu'à atteindre 40 M€ à la date de maturité. La distribution de la CVA sur le graphique en haut à gauche montre une CVA centrée autour de 1.05 M€. Cette valeur moyenne de CVA est très proche de celle obtenue avec la méthode des options (1.17M€).

En conclusion, pour deux swaps dans la monnaie (un de taux et un de change), le swap de change a une CVA plus importante puisqu'il intègre une composante en plus (le change). Cette composante est d'autant plus importante qu'elle implique un échange de notionnel (qui est souvent très important sur les dérivés) à la date de maturité. Cet effet change entraîne une exposition totale et une CVA non nulle à la maturité du dérivé.

5.4 Optimisation du SCR marché via le SCR contrepartie

Dans cette partie, on montre que le SCR peut être piloté à l'aide de dérivé en transférant du SCR marché, plus couteux, vers du SCR contrepartie, moins couteux en fonds propres. Pour cela, nous allons supposer deux portefeuilles :

- Portefeuille 1 : actif constitué d'une seule obligation à taux fixe et de duration 15 ans. Le passif est constitué uniquement de fonds propres qui sont modélisés par un flux unique à 1 an.
- Portefeuille 2 : actif constitué d'une seule obligation à taux fixe et de duration 15 ans. Un swap de taux de même quantité nominal est ajouté afin de couvrir le risque de taux. Ce swap a la même duration que l'obligation. Le passif est toujours constitué uniquement de fonds propres qui sont modélisés par un flux unique à 1 an.

Portefeuille 1

Le premier portefeuille contient uniquement une obligation taux fixe émise par une entreprise privée notée A. La duration de l'obligation identique à celle de la jambe fixe du swap, soit 15 ans. D'après le Règlement Délégué Solvabilité II, le SCR spread se calcule comme suit :

$$SCR_{spread} = Facteur_{SII} * Mtm$$

Le facteur Solvabilité II est de 13% pour une duration de 15 ans sur une obligation privée de la Zone Euro notée A. Le SCR contrepartie est de 13% pour une obligation de prix 1€.

Le SCR taux est obtenu en stressant la courbe des taux EIOPA au 31/12/2020 à la hausse et à la baisse. Le pire scénario est retenu afin de calculer le SCR taux. Il est calculé à l'aide de la courbe EIOPA up et down au 31/12/2020 qui permet de calculer deux valeurs actualisées du passif. Le choc retenu est un choc à la baisse des taux. Le SCR taux obtenu est de 0.42% pour un prix de 1€.

L'application de la matrice de corrélation SII pour un choc à la baisse des taux donne alors un **SCR marché total de 13.22% de l'actif, soit 1,096 M€**. En face de l'actif, on suppose un passif à 1 an du même montant que l'actif.

Portefeuille 2

Le second portefeuille est composé de l'obligation ci-dessus et du swap IRS 2 payeur taux fixe. La quantité nominale du swap IRS 2 est de 10 M€ et l'obligation est prise dans les mêmes proportions que celles du swap. Ainsi la quantité nominale de l'obligation est de 10M€. Son prix est de 82.94€ pour un nominal de 100, soit 8.294M€ pour 10M€ de nominal.

La duration de la jambe fixe est identique à celle de l'obligation ce qui neutralise au premier degré le risque de taux. Ainsi le SCR taux du portefeuille est nul. Le SCR contrepartie est alors la somme du prix du dérivé (133.0 k€), plus le risque de marché neutralisé par le dérivé, soit 0.42% du prix de l'obligation : 34.84k€.

$$LGD_{SII} = 0.9 * (Mtm + RM_{fin})$$

$$LGD_{SII} = 0.9 * (133.0 + 34.84) * 10^3 = 151.0 \text{ k€}$$

Le SCR contrepartie du dérivé est alors 7.06k€ en appliquant la formule réglementaire (cf. annexe 3). Ce SCR correspond au SCR total puisque le risque de marché (risque de taux uniquement) a été neutralisé avec le dérivé. Remis sur une base 100 et en ajoutant les 13% de SCR contrepartie de l'obligation, **le SCR total est de 1.085M€, soit 13.08% de l'actif**. Le transfert du SCR marché vers le SCR contrepartie a donc permis de réduire de 0.14% le coût en capital. Ainsi, le suivi du risque de contrepartie permet de piloter le montant du SCR total en transvasant du SCR marché vers le SCR contrepartie qui est moins coûteux. La réduction du SCR est d'autant plus intéressante que le SCR marché est important.

6 Conclusion

Les produits dérivés sont utilisés par les banques et les assureurs majoritairement à des fins de couverture du bilan contre les différents risques de marché. En utilisant ces produits, les institutionnels font naître un nouveau risque : le risque de contrepartie (CVA). Ce risque avait été négligé jusqu'à la crise de 2007 où les CDS tous secteurs et tous émetteurs confondus ont atteints des sommets. Après la crise, le comité de Bâle a estimé qu'environ deux tiers des pertes subies par les acteurs financiers au titre du risque de crédit était en fait des pertes liées à la CVA. Le montant exigible au titre du risque CVA est une VaR à 99%. L'EIOPA a elle aussi ajusté ses exigences en ajoutant la prise en compte du risque de contrepartie au travers du « SCR contrepartie ». L'approche pour les assureurs ou les réassureurs, en formule standard, reste néanmoins plus grossière que celle applicable aux banques sous Bâle 3 ou selon un modèle interne.

En complément de cette prise de conscience, les institutionnels ont instauré un suivi plus important du risque CVA et un changement des pratiques de valorisation des dérivés. Avant la crise, les faibles bases des différentes courbes de taux n'avaient que très peu d'impact sur la valeur des dérivés, mais après la crise cela n'a plus du tout été le cas. Les banques et les assurances ont dû s'adapter et développer des univers multi-curve ou utiliser des progiciels intégrant ces univers. La partie 3 de ce mémoire a présenté les aspects théoriques et pratiques d'une reconstruction complète d'un tel univers. Cette reconstruction est d'autant plus importante qu'elle est utilisée pour valoriser à la juste valeur tous les dérivés de l'entreprise. Ainsi, le risque de contrepartie doit être quantifié, et une condition préalable est d'utiliser un univers multi-curve (notamment si l'assureur utilise des dérivés de change). Cet univers repose sur une devise de référence et une courbe de référence qui varie en fonction du pays de l'assureur.

A partir des courbes reconstruites en univers multi-curve, nous avons par la suite calculer la CVA et le risque CVA sur deux grands types de dérivés (forwards et swaps) utilisés à des fins de couverture. Les sous-jacents de ces dérivés sont du taux et du change. Les trois méthodes présentées en allant du plus simple au plus complexe (réglementaire, options et Monte Carlo) ont permis de comparer les valeurs de risque CVA obtenus pour chacune des méthodes sur un même dérivé.

Dans le cadre de Bâle III, l'EAD (Exposition At Default) dans la CVA est la somme du prix flooré à 0 (comme dans la réglementation Solvabilité II) plus une VaR sous forme d'add-on du notionnel. Cela permet de surestimer la CVA du dérivé et ainsi d'avoir une marge de sécurité : le risque CVA ou CVA-VAR. L'approche réglementaire Bâle III peut être affinée notamment sur la composante EAD qui peut s'évaluer selon deux méthodes plus fines pour le calcul des Marks-to-futures. La première méthode consiste à calculer le prix d'option avec différentes dates d'exercice sur la position sous-jacente au dérivé, et la seconde est de refaire un calcul global des prix futurs du dérivés selon une série de scénarios (Monte Carlo). La méthode des options présente l'avantage de dépendre de moins de paramètres et nécessite moins de travail de calibration que la méthode de Monte Carlo. Elle donne aussi des résultats plus rapides. En revanche, elle ne s'applique que pour des produits dérivés simples et ne permet pas d'opération de netting lorsque plusieurs dérivés sont signés selon le même CSA. Ainsi, une banque ou une compagnie d'assurances qui a peu de dérivés et veut prendre une position conservatrice a tendance à privilégier l'approche réglementaire via des add-ons. Si le coût en capital est trop important et si son portefeuille ne comporte pas de produits exotiques alors elle pourra se diriger vers une approche plus fine comme celle des options. Enfin, si le portefeuille de dérivé est conséquent et que l'entreprise a les moyens humains et techniques alors il est judicieux pour elle d'opter pour une approche par Monte Carlo afin d'optimiser au mieux son risque de contrepartie et par la suite ses besoins en fonds propres.

La mise en place d'une méthode de calcul fine comme celle des options permet de réduire le montant mis au titre du risque de contrepartie de l'ordre de 30% par rapport à l'approche standard et de 90% pour la méthode de Monte Carlo. Cette réduction est importante en pourcentage pour des dérivés en dehors de la

monnaie car moins stricte que la méthode réglementaire. Lorsque le dérivé est dans la monnaie, alors le gain reste néanmoins substantiel (entre 30% et 90% en fonction de la méthode et de la complexité du dérivé). Il est important de relever que ces réductions sont liées aux paramètres pris dans nos modèles et aux données de marché de la date de valorisation. Par exemple, si le même exercice avait été refait lors de la guerre en Ukraine de 2022, alors les spreads auraient été beaucoup plus importants augmentant ainsi les probabilités de défaut et, in fine, le montant de la CVA. Enfin, le modèle présenté s'est focalisé sur la partie EAD, mais il aurait été tout à fait possible d'affiner la composante « taux de recouvrement » en fonction de données historique, du secteur, et de la note par exemple.

De plus, le suivi du risque de contrepartie avec la mise en place d'un calcul interne tel que modélisé dans ce mémoire de l'exposition potentielle future (EE) permettrait de piloter, voire d'optimiser, le SCR global de la compagnie d'assurance en transvasant du SCR marché vers du SCR contrepartie. Cette mécanique a été présentée dans la partie 5.4 du mémoire et a permis de réduire de 0.14%, soit un peu plus de 1% du montant du SCR de marché, mais ce gain pourrait être plus significatif pour d'autres sociétés d'assurance, notamment en vie où les risques de marché sont généralement prédominants. Certaines classes d'actifs utilisés par les assureurs n'ont pas été couverts dans ce mémoire (actions notamment).

Pour finir, la réglementation actuelle des compagnies d'assurances se focalise sur les engagements pris au passif vis-à-vis des assurés mais assez peu sur les expositions potentielles nées des dérivés. Ainsi, il est envisageable que la réglementation assurantienne se complexifie et se durcisse dans les années à venir en allant dans le sens de celle de Bâle III. L'actuaire aura alors pour rôle de surveiller de plus près ce risque de contrepartie et devra développer des outils adaptés comme ceux présentés dans ce mémoire.

7 Bibliographie

Multicurve

- [1]. *Interest Rates After The Credit Crunch : Multiple-curve vanilla derivatives and SABR*. Marco Bianchetti and Mattia Carlicchi. 2012.
- [2]. *Two curves, one price : Pricing & Hedging Interest Rate Derivatives Decoupling Forwarding and Discounting Yield Curves*. Marco Bianchetti, 2012.
- [3]. *A note on construction of multiple swap curves with and without collateral*. Masaaki Fujii†, Yasufumi Shimada‡, Akihiko Takahashi, 2010.

CVA

- [4]. *The economics of XVA trading*, Peter J. Zeitsch, 2017.
- [5]. *Monte Carlo simulation of counterparty credit risk*, Robert Havelka, 2014.
- [6]. *XVA Desks – A new era for risk management*. I. Ruiz, 2015.
- [7]. *Valuation in a world of CVA, DVA and FVA*. Donald J. Smith, 2018.
- [8]. *The XVA of financial derivatives : CVA, DVA and FVA explained*. Dongsheng Lu, 2015.
- [9]. *Eléments d'implémentation d'un modèle de CVA : Etude du modèle de taux*. Mémoire d'actuariat d'Aymeric Veyron, 2015.
- [10]. *Mesure du risque de contrepartie sur opérations de marché : enjeux réglementaires et outils de contrôle*. Mémoire d'actuariat d'Olivier Desmettre et François Germain, 2017.

Réglementation

- [11]. *Solvabilité II - RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2016/467 DE LA COMMISSION du 30 septembre 2015*
- [12]. *Bâle III - RÈGLEMENT (UE) No 575/2013 DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL, 2013*
- [13]. *Mesure du risque de contrepartie et des ajustements de valorisation au titre du risque de contrepartie*, Mémoire d'actuariat de Gaëlle CHALAS, 2017.
- [14]. *Comité de Bâle - Exigences de marge pour les dérivés non compensés centralement, 2013*

Finance de marché

- [15]. *Finance de marché : instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques*. Roland Portait et Patrice Poncet, 2014
- [16]. *Options, Futures, and other derivatives*. John C. Hull. 2011
- [17]. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Fabio Mercurio, Damiano Brigo, 2001

8 Annexes

7.1 Annexe 1 : Méthode standard CVA sous Bâle III

Dans la réglementation CCR de Bâle III publiée en 2013, le régulateur détaille la formule de calcul de la CVA en approche standard. La figure ci-dessous reprend l'article 384 de la réglementation Bâle III.

Article 384

Méthode standard

1. Un établissement qui ne calcule pas ses exigences de fonds propres pour risque de CVA lié à ses contreparties conformément à l'article 383 calcule une exigence de fonds propres pour risque de CVA pour chaque contrepartie selon la formule suivante, compte tenu des couvertures du risque de CVA qui sont éligibles conformément à l'article 386:

$$K = 2.33 \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\left(\sum_i 0.5 \cdot w_i \cdot \left(M_i \cdot EAD_i^{total} - M_i^{hedge} B_i \right) - \sum_{ind} w_{ind} \cdot M_{ind} \cdot B_{ind} \right)^2 + \sum_i 0.75 \cdot w_i^2 \cdot \left(M_i \cdot EAD_i^{total} - M_i^{hedge} B_i \right)^2}$$

où

h = l'horizon de risque d'un an (en unités d'un an); h = 1;

w_i = la pondération applicable à la contrepartie "i".

La contrepartie "i" reçoit l'une des six pondérations w_i prévues dans le tableau 1, selon l'évaluation externe du crédit qui lui a été attribuée par un OEEC désigné. Dans le cas d'une contrepartie pour laquelle il n'existe pas d'évaluation de crédit établie par un OEEC désigné:

- un établissement qui applique l'approche exposée au titre II, chapitre 3, fait correspondre sa notation interne de la contrepartie à l'une des évaluations externes de crédit;
- un établissement qui applique l'approche exposée au titre II, chapitre 2, attribue une pondération w_i=1,0 % à cette contrepartie. Cependant, si un établissement recourt à l'article 128 pour attribuer une pondération de risque à des expositions au risque de crédit d'une contrepartie, une pondération w_i=3,0 % est attribuée à ladite contrepartie;

EAD_i^{total} = le montant total de la valeur exposée au risque de crédit de la contrepartie "i" (sur tous les ensembles de compensation) compte tenu de l'effet des sûretés conformément aux méthodes exposées au titre II, chapitre 6, sections 3 à 6, selon celle qui est applicable au calcul des exigences de fonds propres pour risque de crédit de contrepartie dans le cas de cette contrepartie particulière. Un établissement utilisant l'une des méthodes exposées au titre II, chapitre 6, sections 3 et 4, peut utiliser comme EAD_i^{total} la valeur pleinement ajustée de l'exposition conformément à l'article 223, paragraphe 5.

Dans le cas d'un établissement qui n'applique pas la méthode exposée au titre II, chapitre 6, section 6, l'exposition est actualisée par application du facteur suivant:

$$\frac{1 - e^{-0.05 \cdot M_i}}{0.05 \cdot M_i}$$

B_i = le montant notionnel des couvertures par CDS à signature unique achetées (la somme des notionnels, s'il y a plus d'une position), référant la contrepartie "i" et utilisées pour couvrir le risque de CVA.

Ce montant notionnel est actualisé par application du facteur suivant:

$$\frac{1 - e^{-0.05 \cdot M_{ind}}}{0.05 \cdot M_{ind}}$$

w_{ind} = la pondération applicable aux couvertures indiciaires.

L'établissement détermine w_{ind} en calculant une moyenne pondérée des w_i applicables aux différents éléments constituant l'indice;

M_i = l'échéance effective des opérations conclues avec la contrepartie "i".

Dans le cas d'un établissement qui applique la méthode exposée au titre II, chapitre 6, section 6, M_i est calculée conformément à l'article 162, paragraphe 2, point g). Toutefois, à cette fin, M_i n'est pas plafonné à cinq ans, mais à l'échéance résiduelle contractuelle la plus longue dans l'ensemble de compensation.

Dans le cas d'un établissement qui n'applique pas la méthode exposée au titre II, chapitre 6, section 6, M_i correspond à l'échéance moyenne pondérée en fonction des montants notionnels, visée à l'article 162, paragraphe 2, point b). Toutefois, à cette fin, M_i n'est pas plafonné à cinq ans, mais à l'échéance résiduelle contractuelle la plus longue dans l'ensemble de compensation.

M_i^{hedg} = l'échéance de l'instrument de couverture de montant notionnel B_i (les quantités B_i doivent être additionnées s'il y a plusieurs positions);

M_{ind} = l'échéance de la couverture indiciaire.

Lorsqu'il y a plus d'une position sur couverture indiciaire, M_{ind} est l'échéance pondérée par les montants notionnels.

2. Lorsqu'une contrepartie entre dans la composition d'un indice sur lequel est basé un CDS utilisé à des fins de couverture du risque de crédit de contrepartie, l'établissement peut déduire le montant notionnel attribuable à cette contrepartie, conformément à sa pondération d'entité de référence, du montant notionnel du CDS indiciaire et le traiter comme une couverture à signature unique (B_i) de cette contrepartie, avec une échéance basée sur l'échéance de l'indice.

Tableau 1

Échelon de qualité de crédit	Pondération w_i
1	0,7 %
2	0,8 %
3	1,0 %
4	2,0 %
5	3,0 %
6	10,0 %

La correspondance des échelons de crédit est fournie dans l'annexe III du Capital Requirements Regulation (CRR) :

- 1 -> AAA à AA-
- 2 -> A+ à A-
- 3 -> BBB+ à BBB-
- 4 -> BB+ à B-
- 5 -> inférieur à B-
- 6 -> non cotée

7.2 Annexe 2 : Méthode avancée CVA sous Bâle III - Article 383 du CRR

La figure ci-dessous reprend l'article 383 du CRR.

Article 383

Méthode avancée

1. Pour toutes les opérations pour lesquelles un établissement est autorisé à utiliser la IMM pour calculer la valeur exposée au risque liée à l'exposition au risque de crédit d'une contrepartie conformément à l'article 283, un établissement autorisé à utiliser un modèle interne pour le risque spécifique lié aux titres de créance conformément à l'article 363, paragraphe 1, point d), calcule ses exigences de fonds propres pour risque de CVA en modélisant l'impact, sur les ajustements des évaluations de crédit de toutes les contreparties à ces opérations, des variations des écarts de crédit de ces contreparties, compte tenu des couvertures du risque de CVA qui sont éligibles conformément à l'article 386.

Un établissement utilise son modèle interne pour calculer les exigences de fonds propres pour le risque spécifique lié aux positions sur titres de créance négociés et il applique un intervalle de confiance de 99 % et une période de détention équivalant à dix jours. Le modèle interne est utilisé de manière à simuler les variations des écarts de crédit des contreparties, mais il ne modélise pas la sensibilité des ajustements des évaluations de crédit aux variations d'autres facteurs de marché, notamment les variations de valeur de l'actif, de la matière première, de la monnaie ou du taux d'intérêt de référence d'un dérivé.

Pour chaque contrepartie, les exigences de fonds propres pour risque de CVA sont calculées selon la formule suivante:

$$CVA = LGD_{MKT} \cdot \sum_{i=1}^T \max \left\{ 0, \exp \left(- \frac{s_{i-1} \cdot t_{i-1}}{LGD_{MKT}} \right) - \exp \left(- \frac{s_i \cdot t_i}{LGD_{MKT}} \right) \right\} \cdot \frac{EE_{i-1} \cdot D_{i-1} + EE_i \cdot D_i}{2}$$

où

t_i = le moment de la $i^{\text{ème}}$ réévaluation, à compter de $t_0 = 0$;

t_T = l'échéance contractuelle la plus longue parmi les ensembles de compensation avec la contrepartie;

s_i = l'écart de crédit de la contrepartie au moment t_i qui est utilisé pour calculer le CVA de la contrepartie. Lorsque l'écart sur contrat d'échange sur risque de crédit (CDS) est disponible, l'établissement utilise cet écart. Lorsque l'écart sur CDS n'est pas disponible, l'établissement utilise une approximation de l'écart qui est appropriée au regard de la notation, du secteur d'activité et de l'implantation géographique de la contrepartie;

LGD_{MKT} = les LGD de la contrepartie, qui sont basées sur l'écart sur un instrument de marché de la contrepartie lorsqu'un tel instrument est disponible. Lorsqu'un tel instrument n'est pas disponible, la valeur de LGD se fonde sur une approximation de l'écart qui est appropriée au regard de la notation, du secteur d'activité et de l'implantation géographique de la contrepartie.

Le premier facteur de la somme représente une approximation de la probabilité marginale, implicite selon le marché, d'un défaut survenant entre t_{i-1} et t_i ;

EE_i = l'exposition anticipée (EE) envers la contrepartie au moment t_i de la réévaluation, pour la détermination de laquelle les expositions des différents ensembles de compensation pour cette contrepartie sont additionnées et l'échéance la plus longue de chaque ensemble de compensation est donnée par l'échéance contractuelle la plus longue à l'intérieur de cet ensemble de compensation. Dans le cas des opérations faisant l'objet d'un accord de marge, l'établissement applique le traitement énoncé au paragraphe 3 s'il utilise la mesure de l'exposition positive anticipée (EPE) visée à l'article 285, paragraphe 1, point a) ou b).

D_i = le facteur d'actualisation sans risque au moment t_i , D_0 étant égal à 1.

7.3 Annexe 3 : Risque de contrepartie sur les dérivés sous Solvabilité II

Le module du SCR correspondant au risque de contrepartie sur les dérivés est détaillé dans les articles 189 à 201. Les articles 192, 199, 200 et 201 sont fournis ci-dessous ainsi que l'interprétation utilisée pour estimer la CVA dans ce mémoire.

Article 192

Perte en cas de défaut

1. La perte en cas de défaut sur une exposition sur signature unique est égale à la somme de la perte en cas de défaut sur chacune des expositions des contreparties relevant de l'exposition sur signature unique. La perte en cas de défaut est exprimée nette des passifs envers des contreparties relevant de l'exposition sur signature unique pour autant que ces passifs et ces expositions soient compensés en cas de défaut des contreparties et que les dispositions des articles 209 et 210 soient respectées en ce qui concerne ce droit à compensation. Aucune compensation n'est prise en compte si l'on s'attend à ce que les passifs seront éteints avant que l'exposition de crédit soit compensée.

2. La perte en cas de défaut sur un contrat de réassurance ou une titrisation d'assurance se calcule comme suit:

$$LGD = \max[50\% \cdot (REcoverables + 50\% \cdot RM_{re}) - F \cdot Collateral; 0]$$

où:

- (a) *Recoverables* représente la meilleure estimation des montants recouvrables découlant du contrat de réassurance ou de la titrisation d'assurance ainsi que des dettes correspondantes;
- (b) RM_{re} représente l'effet d'atténuation du risque qu'a le contrat de réassurance ou la titrisation sur le risque de souscription;
- (c) *Collateral* représente la valeur pondérée des sûretés en ce qui concerne le contrat de réassurance ou de titrisation;
- (d) *F* représente un facteur visant à tenir compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le contrat de réassurance ou la titrisation en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

Lorsque le contrat de réassurance est conclu avec une entreprise d'assurance ou de réassurance ou une entreprise d'assurance ou de réassurance d'un pays tiers et que 60 % ou plus des actifs de la contrepartie sont soumis à des contrats de sûreté, la perte en cas de défaut se calcule comme suit:

$$LGD = \max[90\% \cdot (REcoverables + 50\% \cdot RM_{re}) - F \cdot Collateral; 0]$$

où:

F représente un facteur visant à tenir compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le contrat de réassurance ou la titrisation en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

3. La perte en cas de défaut sur un produit dérivé se calcule comme suit:

$$LGD = \max(90\%(Derivative + RM_{\beta m}) - F' \cdot Collateral; 0)$$

où

- (a) *Derivative* représente la valeur du dérivé conformément à l'article 75 de la directive 2009/138/CE;
- (b) $RM_{\beta m}$ représente l'effet d'atténuation qu'a le dérivé sur le risque de marché;
- (c) *Collateral* représente la valeur pondérée des sûretés en ce qui concerne le dérivé;
- (d) *F'* représente un facteur tenant compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le dérivé en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

Dans Solvabilité II, la LGD est un montant de perte. Il s'assimile donc à l'EAD sous Bâle III.

Le coefficient de LGD (40% en général) utilisé sous Bâle III ainsi que la probabilité de défaut apparaissent dans la formule de l'article 201.

Article 199

Probabilité de défaut

1. La probabilité de défaut d'une exposition sur signature unique est égale à la moyenne des probabilités de défaut de chacune des expositions sur les contreparties qui relèvent de l'exposition sur signature unique, pondérée par la perte en cas de défaut pour ces expositions.

2. Une exposition sur signature unique i pour laquelle une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné est disponible se voit attribuer une probabilité de défaut PD_i conformément au tableau suivant.

Échelon de qualité de crédit	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité de défaut PD_i	0,002 %	0,01 %	0,05 %	0,24 %	1,20 %	4,2 %	4,2 %

3. Une exposition sur signature unique i sur une entreprise d'assurance ou de réassurance pour laquelle une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné n'est pas disponible et qui respecte son minimum de capital requis, se voit attribuer une probabilité de défaut PD_i en fonction du ratio de solvabilité de l'entreprise, conformément au tableau suivant:

Ratio de solvabilité	196 %	175 %	150 %	125 %	122 %	100 %	95 %	75 %
Probabilité de défaut	0,01 %	0,05 %	0,1 %	0,2 %	0,24 %	0,5 %	1,2 %	4,2 %

Lorsque le ratio de solvabilité est situé entre les ratios de solvabilité précisés dans le tableau ci-dessus, la valeur de la probabilité de défaut est interpolée de manière linéaire à partir des valeurs de probabilité de défaut les plus proches correspondant aux ratios de solvabilité les plus proches mentionnés dans le tableau ci-dessus. Lorsque le ratio de solvabilité est inférieur à 75 %, la probabilité de défaut est de 4,2 %. Lorsque le ratio de solvabilité est supérieur à 196 %, la probabilité de défaut est de 0,01 %.

Aux fins du présent paragraphe, le «ratio de solvabilité» représente le rapport entre le montant des fonds propres éligibles pour couvrir le capital de solvabilité requis et le capital de solvabilité requis, calculé selon les valeurs disponibles les plus récentes.

4. Les expositions d'une entreprise d'assurance ou de réassurance qui ne respecte pas son minimum de capital requis se voient attribuer une probabilité de défaut de 4,2 %.

5. Les paragraphes 3 et 4 du présent article ne s'appliquent qu'à compter de la première date de publication, par l'entreprise correspondant à l'exposition, du rapport sur sa solvabilité et sa situation financière visé à l'article 51 de la directive 2009/138/CE. Avant cette date, si une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné est disponible pour les expositions, le paragraphe 2 s'applique. Dans le cas contraire, les expositions se voient attribuer le même facteur de risque que celui qui résulterait de l'application du paragraphe 3 aux expositions sur une entreprise d'assurance ou de réassurance dont le ratio de solvabilité est de 100 %.

6. Les expositions sur une entreprise d'assurance ou de réassurance d'un pays tiers pour laquelle une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné n'est pas disponible, située dans un pays dont le régime de solvabilité est jugé équivalent, conformément à l'article 227 de la directive 2009/138/CE, à celui établi par la directive 2009/138/CE, et qui satisfait aux exigences de solvabilité de ce pays tiers, se voient attribuer une probabilité de défaut de 0,5 %.

7. Les expositions sur des établissements de crédit et des établissements financiers au sens de l'article 4, paragraphe 1, points 1) et 26), du règlement (UE) n° 575/2013 qui respectent les exigences de solvabilité prévues dans la directive 2013/36/UE et dans le règlement (UE) n° 575/2013, pour lesquels une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné n'est pas disponible, se voient attribuer une probabilité de défaut de 0,5 %.

8. Les expositions sur les contreparties visées à l'article 180, paragraphe 2, points a) à d), se voient attribuer une probabilité de défaut égale à 0 %.

9. La probabilité de défaut des expositions sur signature unique autres que celles visées aux paragraphes 2 à 8 est de 4,2 %.

10. Si une lettre de crédit, une garantie ou un arrangement équivalent est fourni pour garantir pleinement une exposition et que cet arrangement est conforme aux articles 209 à 215, l'émetteur de cette lettre de crédit, garantie ou arrangement équivalent peut être considéré comme la contrepartie de l'exposition garantie aux fins de l'évaluation de la probabilité de défaut d'une exposition sur signature unique.

11. Aux fins du paragraphe 10, les expositions pleinement, inconditionnellement et irrévocablement garanties par les contreparties figurant dans l'acte d'exécution adopté conformément à l'article 109 bis, paragraphe 2, point a), de la directive 2009/138/CE sont traitées comme des expositions sur l'administration centrale.

Les paragraphes importants sont les 1 et 2 qui vont s'appliquer aux dérivés.

Article 200

Expositions de type 1

1. Lorsque l'écart type de la distribution des pertes des expositions de type 1 est inférieur ou égal à 7 % des pertes totales en cas de défaut de l'ensemble des expositions de type 1, l'exigence de capital pour le risque de défaut de la contrepartie sur des expositions de type 1 se calcule comme suit:

$$SCR_{def,1} = 3 \cdot \sigma$$

où σ représente l'écart type de la distribution des pertes des expositions de type 1, tel qu'il est défini au paragraphe 4.

2. Lorsque l'écart type de la distribution des pertes des expositions de type 1 est supérieur à 7 % et inférieur ou égal à 20 % des pertes totales en cas de défaut sur l'ensemble des expositions de type 1, l'exigence de capital pour le risque de défaut de la contrepartie sur des expositions de type 1 se calcule comme suit:

$$SCR_{def,1} = 5 \cdot \sigma$$

où σ représente l'écart type de la distribution des pertes des expositions de type 1.

3. Lorsque l'écart type de la distribution des pertes des expositions de type 1 est supérieur à 20 % des pertes totales en cas de défaut sur l'ensemble des expositions de type 1, l'exigence de capital pour le risque de défaut de la contrepartie sur des expositions de type 1 est égale aux pertes totales en cas de défaut sur l'ensemble des expositions de type 1.

1.2015

FR

Journal officiel de l'Union européenne

L 12/133

4. L'écart type de la distribution des pertes des expositions de type 1 se calcule comme suit:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

où V représente la variance de la distribution des pertes des expositions de type 1.

Article 201

Variance de la distribution des pertes des expositions de type 1

1. La variance de la distribution des pertes des expositions de type 1 visée à l'article 200, paragraphe 4, est égale à la somme de V_{inter} et de V_{intra} .

2. V_{inter} se calcule comme suit:

$$V_{inter} = \sum_{(j,k)} \frac{PD_k \cdot (1 - PD_k) \cdot PD_j \cdot (1 - PD_j)}{1,25 \cdot (PD_k + PD_j) - PD_k \cdot PD_j} \cdot TLGD_j \cdot TLGD_k$$

où:

- (a) la somme couvre toutes les combinaisons possibles (j,k) des différentes probabilités de défaut des expositions sur signature unique, telles que visées à l'article 199;
- (b) $TLGD_j$ et $TLGD_k$ représentent la somme des pertes en cas de défaut sur les expositions de type 1 pour les contreparties dont la probabilité de défaut est, respectivement, de PD_j et PD_k .

3. V_{intra} se calcule comme suit:

$$V_{intra} = \sum_j \frac{1,5 \cdot PD_j \cdot (1 - PD_j)}{2,5 - PD_j} \cdot \sum_{PD_j} LGD_i^2$$

où:

- (a) la première somme couvre toutes les probabilités différentes de défaut des expositions sur signature unique, telles que visées à l'article 199;
- (b) la seconde somme couvre toutes les expositions sur signature unique dont la probabilité de défaut est de PD_j ;
- (c) LGD_i représente la perte en cas de défaut de l'exposition sur signature unique i .

Dans les articles 200 et 201, la probabilité de défaut est constante par contrepartie sur toute la durée de vie du dérivé. Cette probabilité dépend de l'échelon de crédit. Dans les calculs, les contreparties prises ont un échelon de crédit de 2 soit une probabilité de 0.05%. Pour simplifier notre analogie entre la formulation de Bâle III et celle de Solvabilité II, on suppose qu'il n'y a pas de défaut joint (V_{inter}), mais uniquement un risque unique (V_{intra}).

De plus, puisque le montant de fonds propres sous Bâle III est $3 * \sqrt{CVA + CVA_{stressé}}$ et que sous Solvabilité II le montant de $SCR_{default}$ est de $3\sigma = 3\sqrt{V}$, on peut par analogie estimer que $V \approx CVA + CVA_{stressé}$.

7.4 Annexe 4 : Stripping des probabilités de défaut à partir des prix CDS

Les probabilités de défaut peuvent être implicites de proche en proche à partir du prix des primes CDS.

Un CDS se valorise comme suit pour un nominal de 1 s'il n'y a pas de défaut :

$$CDS = s * \sum_{i=1}^N (1 - PD_i) * dt_i * DF_i$$

Avec s le spread du CDS (coupon), dt la fraction d'année entre deux paiements, et DF le discount facteur.

S'il y a un défaut, alors le CDS vaut en $t = D$ (situé à milieu de la période entre deux coupons) :

$$CDS = s * \sum_{i=1}^D (1 - PD_i) * dt * DF_i + s * \frac{dt}{2} * PD_D$$

Le montant récupéré en cas de défaut est :

$$(1 - R) * (1 - PD_d) * DF_D$$

Sous hypothèses d'absence d'arbitrage, cela donne en réarrangeant :

$$s = \frac{(1 - R) * \sum_{i=1}^N PD_i DF_i}{\sum_{i=1}^N (1 - PD_i) * dt_i * DF_i + \sum_{i=1}^N PD_i * DF_i * \frac{dt_i}{2}}$$

Puisque les spreads CDS s sont cotés sur les marchés, on peut en déduire la probabilité de défaut pour chaque point coté. Soit :

$$PD_n = \frac{s_n (\sum_{i=1}^{N-1} PS_i * dt_i * DF_i + PS_{N-1} * dt_n * DF_N) - (1 - R) * \sum_{i=1}^{N-1} PD_i DF_i}{DF_N * (s_n dt_n + (1 - R))}$$

Avec PS la probabilité de survie qui se déduit de la probabilité de défaut comme $PS = 1 - PD$. Dans l'équation ci-dessus, tous les termes de droite sont connus, et la seule inconnue est la probabilité de défaut en $t = N$ (à gauche de l'équation).

7.5 Annexe 5 : Supervisory factor Bâle III

Ci-dessous le tableau des « supervisory factor » fourni dans Bâle III par classe d'actif ou sous-jacent du dérivé.

Asset Class	Subclass		Supervisory factor	Correlation	Supervisory option volatility
Interest rate			0.50%	N/A	50%
Foreign exchange			4.0%	N/A	15%
Credit, Single Name	AAA		0.38%	50%	100%
	AA		0.38%	50%	100%
	A		0.42%	50%	100%
	BBB		0.54%	50%	100%
	BB		1.06%	50%	100%
	B		1.6%	50%	100%
	CCC		6.0%	50%	100%
Credit, Index	IG		0.38%	80%	80%
	SG		1.06%	80%	80%
Equity, Single Name			32%	50%	120%
Equity, Index			20%	80%	75%
Commodity	Electricity		40%	40%	150%
	Oil/Gas		18%	40%	70%
	Metals		18%	40%	70%
	Agricultural		18%	40%	70%
	Other		18%	40%	70%

7.6 Annexe 6 : Corrélation SII et corrélation historiques

Les corrélations historiques sont calculées sur une profondeur de 7 ans (2015-2021). Les grandeurs suivantes ont été prises pour calculer la matrice de corrélation historique ;

- Change : la paire de devise EUR/USD
- Immobilier : l'indice « EDHEC IEIF immobilier d'entreprise France »
- Taux : l'indice « BOFA Merrill Lynch 10-15 All Euro gouvernement Index »,
- Actions : l'indice Eurostoxx 50 total return
- Spread : Moyenne pondérée d'indices de spread de crédit entreprise notée AAA à NN d'un portefeuille obligataire supposé de composition constante sur les 7 années

Corrélations	Taux	Action	Immobilier	Spread	Change
Taux	100,00%	12,66%	18,44%	65,52%	-11,99%
Action	12,66%	100,00%	-1,04%	43,36%	-3,47%
Immobilier	18,44%	-1,04%	100,00%	10,34%	-14,31%
Spread	65,52%	43,36%	10,34%	100,00%	-5,31%
Change	-11,99%	-3,47%	-14,31%	-5,31%	100,00%

La matrice de corrélation SII est fournie ci-dessous :

i \ j	Taux d'intérêt	Actions	Actifs immobiliers	Marge	Concentration	Devise
Taux d'intérêt	1	A	A	A	0	0,25
Actions	A	1	0,75	0,75	0	0,25
Actifs immobiliers	A	0,75	1	0,5	0	0,25
Marge	A	0,75	0,5	1	0	0,25
Concentration	0	0	0	0	1	0
Devise	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1

Le paramètre A est égal à 0 lorsque l'exigence de capital pour risque de taux d'intérêt fixée à l'article 165 est l'exigence de capital visée au point a) dudit article. Dans tous les autres cas, le paramètre A est égal à 0,5.

Les corrélations entre les deux matrices sont globalement de même signe sauf pour le change. Ceci s'explique par notre hypothèse de prendre uniquement l'EUR/USD. Les corrélations SII ont l'avantage d'avoir fait l'objet d'une calibration approfondie, il paraît donc plus pertinent de les prendre en compte. Ceci constitue un choix ou une limite propre à ce mémoire.

7.8 Annexe 8 : Fonctions des paramètres A et B du modèle Cox-Ingersoll-Ross et génération du cube des probabilités de défaut via ce modèle

```
Function CIR_B(param_k As Double, param_sigma As Double, date_1 As Date, date_2 As Date)
```

```
Dim gamma As Double
Dim B_num As Double
Dim B_den As Double
Dim dt As Double
```

```
dt = ecart_date(date_1, date_2, "act/act")
gamma = Sqr(CDb1(param_k) ^ (2) + 2 * CDb1(param_sigma) ^ (2))
B_num = 2 * (Exp(gamma * dt) - 1)
B_den = (gamma + param_k) * (Exp(gamma * dt) - 1) + 2 * gamma

CIR_B = B_num / B_den
```

End Function

```
Function CIR_A(param_k As Double, param_sigma As Double, param_theta As Double, date_1 As Date, date_2 As Date)
```

```
Dim gamma As Double
Dim A_num As Double
Dim A_den As Double
Dim dt As Double
Dim exposant As Double
```

```
exposant = 2 * param_k * param_theta / (CDbl(param_sigma) ^ (2))
dt = ecart_date(date_1, date_2, "act/act")
gamma = Sqr(CDb1(param_k) ^ (2) + 2 * CDb1(param_sigma) ^ (2))
A_num = 2 * gamma * Exp((gamma + param_k) * 0.5 * dt)
A_den = (gamma + param_k) * (Exp(gamma * dt) - 1) + 2 * gamma

CIR_A = (A_num / A_den) ^ (exposant)
```

Cube PD :

```
Function Cube_PD_CIR(Matrice_CDS_1 As Range, _
    date_valo As Date, _
    param_k As Double, _
    param_sigma As Double, _
    param_theta As Double, _
    Dates_MtF_1 As Range, _
    Indice_MtF_1 As Range)
```

```
Dim Matrice_CDS As Variant
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim result As Variant
Dim result_2 As Variant
Dim Indice_MtF As Variant
Dim Indice_tenor As Variant
Dim Dates_MtF As Variant
```

```
Matrice_CDS = DTT_RangeIntoVector_2(Matrice_CDS_1)
Dates_MtF = DTT_RangeIntoVector(Dates_MtF_1)
Indice_MtF = DTT_RangeIntoVector(Indice_MtF_1)
```

```
ReDim Preserve Dates_MtF(UBound(Dates_MtF) + 1)
ReDim result(UBound(Matrice_CDS, 1), UBound(Indice_MtF))
```

```
For i = UBound(Dates_MtF) To 2 Step -1
    Dates_MtF(i) = CDate(Dates_MtF(i - 1))
Next
```

```
Dates_MtF(1) = date_valo
```

```
For i = 1 To UBound(result, 1)
    For j = 1 To UBound(result, 2) - 1
        result(i, j) = 1 - CIR_A(param_k, param_sigma, param_theta, CDate(Dates_MtF(j)), CDate(Dates_MtF(j + 1))) _
            * Exp(-Matrice_CDS(i, Indice_MtF(j) + 1) * CIR_B(param_k, param_sigma, CDate(Dates_MtF(j)), CDate(Dates_MtF(j + 1))))
    Next
Next
```

```
Cube_PD_CIR = result
```

7.9 Annexe 9 : Cube des Mark-to-Futur calculés pour le cross currency swap

```

Function Matrice_MtF_CCS(Matrice_taux_courts_R_dev_1 As Range, _
    date_taux_courts_1_dev_1 As Range, _
    Matrice_FX_1 As Range, Dates_FX_1 As Range, _
    date_valo As Date, _
    param_a_dev_1 As Double, param_sigma_dev_1 As Double, _
    Tenor_Curve_R As Range, _
    Dates_MtF_R As Range, _
    Indice_MtF_R As Range, _
    Courbe_initiale_dates_R_dev_1 As Range, Courbe_initiale_DF_R_dev_1 As Range, Spread_R_fwd_dev_1 As Range, _
    Spread_R_zc_dev_2 As Range, Spread_R_fwd_dev_2 As Range, _
    Nominal_JF As Double, _
    dateD_JF As Date, _
    dateF_JF As Date, _
    taux_JF As Double, _
    frequ_JF As Integer, _
    conv_JF As String, _
    period_JF As String, _
    Nominal_JV As Double, _
    dateD_JV As Date, _
    dateF_JV As Date, _
    frequ_JV As Integer, _
    conv_JV As String, _
    period_JV As String)

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim result As Variant
Dim Dates_DF_temp_dev_1() As Variant
Dim DF_zc_temp_dev_1() As Variant
Dim DF_fwd_temp_dev_1() As Variant
Dim Dates_DF_temp_dev_2() As Variant
Dim DF_zc_temp_dev_2() As Variant
Dim DF_fwd_temp_dev_2() As Variant
Dim Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1() As Variant
Dim Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2() As Variant
Dim V_Spread_R_zc_dev_2() As Variant
Dim V_Spread_R_fwd_dev_2() As Variant
Dim Matrice_taux_courts_temp() As Variant

Dim date_taux_courts() As Variant
Dim Matrice_FX() As Variant
Dim Dates_FX() As Variant
Dim echeancier_temp_JF() As Date
Dim Dates_MtF() As Variant
Dim Prix_JF As Double
Dim Prix_JV As Double
Dim fixing As Double

Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1 = Cube_DF_HN(Matrice_taux_courts_R_dev_1, date_valo, param_a_dev_1, param_sigma_dev_1, Tenor_curve_R, Dates_MtF_R, _
    Indice_MtF_R, Courbe_initiale_dates_R_dev_1, Courbe_initiale_DF_R_dev_1, Spread_R_fwd_dev_1)

ReDim Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 1), UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 2), UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 3), UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 4))

V_Spread_R_zc_dev_2 = DTT_RangeIntoVector_2(Spread_R_zc_dev_2)
V_Spread_R_fwd_dev_2 = DTT_RangeIntoVector_2(Spread_R_fwd_dev_2)

For i = 1 To UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 1)
    For j = 1 To UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 2)
        For k = 1 To UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 3)
            Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(i, j, k, 1) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1(i, j, k, 1)
            Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(i, j, k, 2) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1(i, j, k, 2) + V_Spread_R_zc_dev_2(k)
            Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(i, j, k, 3) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1(i, j, k, 2) + V_Spread_R_fwd_dev_2(k)
        Next
    Next
Next

ReDim result(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 1), UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 2))
Matrice_taux_courts_temp = DTT_RangeIntoVector_2(Matrice_taux_courts_R_dev_1)
date_taux_courts = DTT_RangeIntoVector_2(date_taux_courts_1_dev_1)
Matrice_FX = DTT_RangeIntoVector_2(Matrice_FX_1)
Dates_FX = DTT_RangeIntoVector_2(Dates_FX_1)
Dates_MtF = DTT_RangeIntoVector(Dates_MtF_R)

For j = 1 To UBound(result, 2)

    echeancier_temp_JF = echeancier_adapte(CDate(Dates_MtF(j)), dateD_JF, dateF_JF, frequ_JF, period_JF, conv_JF)
    echeancier_temp_JV = echeancier_adapte(CDate(Dates_MtF(j)), dateD_JV, dateF_JV, frequ_JV, period_JV, conv_JV)

    For i = 1 To UBound(result, 1)
        ReDim Dates_DF_temp_dev_1(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 3))
        ReDim DF_zc_temp_dev_1(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 3))
        ReDim DF_fwd_temp_dev_1(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 3))
        ReDim Dates_DF_temp_dev_2(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 3))
        ReDim DF_zc_temp_dev_2(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 3))
        ReDim DF_fwd_temp_dev_2(UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 3))

        For k = 1 To UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1, 3)
            Dates_DF_temp_dev_1(k) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1(i, j, k, 1)
            DF_zc_temp_dev_1(k) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1(i, j, k, 2)
            DF_fwd_temp_dev_1(k) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_1(i, j, k, 3)
        Next

        For k = 1 To UBound(Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2, 3)
            Dates_DF_temp_dev_2(k) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(i, j, k, 1)
            DF_zc_temp_dev_2(k) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(i, j, k, 2)
            DF_fwd_temp_dev_2(k) = Cube_taux_zc_et_fwd_dev_2(i, j, k, 3)
        Next

        fixing = get_fixing(echeancier_temp_JV(1), Matrice_taux_courts_temp, date_taux_courts, i)
        Prix_JV = pricer_oblig_tx_variable(CDate(Dates_MtF(j)), echeancier_temp_JV, Nominal_JV, 19 / 10000, "act/360", Dates_DF_temp_dev_1, DF_zc_temp_dev_1, Dates_DF_temp_dev_1, DF_fwd_temp_dev_1)
        Prix_JF = pricer_oblig_tx_fixe(CDate(Dates_MtF(j)), echeancier_temp_JF, Nominal_JF, taux_JF, "act/365", Dates_DF_temp_dev_2, DF_zc_temp_dev_2(3))
        FX_rate = get_fixing(CDate(Dates_MtF(j)), Matrice_FX, Dates_FX, i)
        result(i, j) = Nominal_JV * DF_zc_temp_dev_1(1) + Prix_JV - (1 / FX_rate) * (Nominal_JF * DF_zc_temp_dev_2(1) + Prix_JF)
    Next
Next

Matrice_MtF_CCS = result

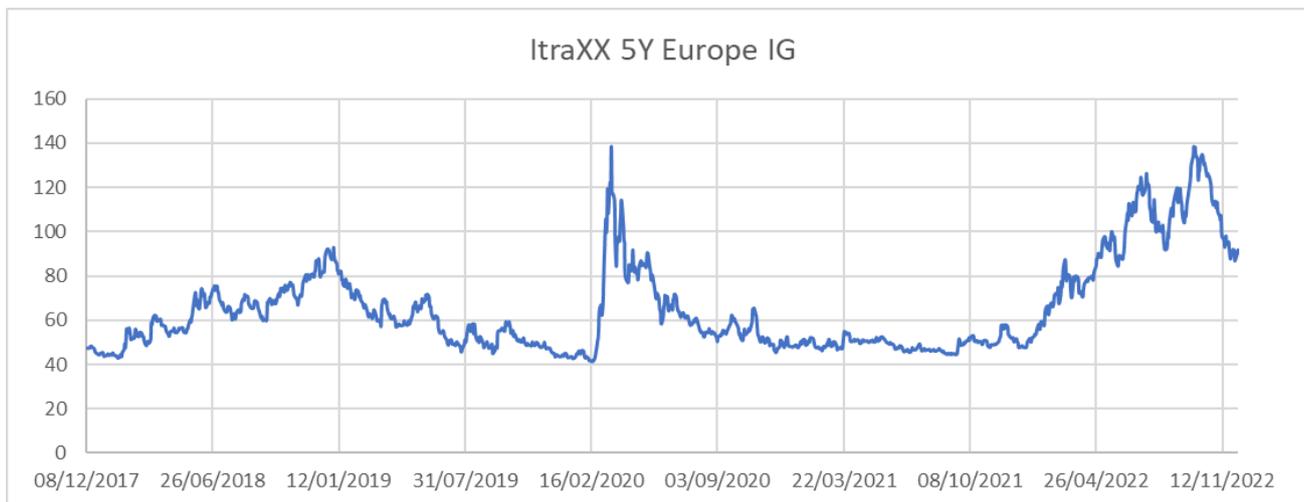
End Function

```

Le code est très compact et fait appel à plusieurs fonctions de pricing (pour les obligations TV et TV) ainsi que pour la reconstruction des courbes via le modèle Hull-White 1 facteur.

7.10 Annexe 10 : Calibration des chocs sur les spreads CDS dans le cadre du calcul de la VaR stressée.

Pour connaître le choc à appliquer sur les spreads CDS afin de calculer une VaR stressée dans le cadre du calcul des fonds propres réglementaires pour le risque CVA, nous avons calculé la volatilité historique des spreads CDS sur différentes périodes. L'indice retenu est un ItraXX Europe 5Y pour des obligations Investment grade (notes >BBB-). L'historique sur les 5 dernières années des niveaux des CDS de l'ItraXX est tracée ci-dessous :



A partir de cette série temporelle, on distingue deux périodes de crises, la première en 2020 lors de la crise Covid-19, et la seconde en 2022 après le début de la guerre en Ukraine. La moyenne et la volatilité de l'indice a été calculée depuis 5 ans, 3 ans et sur 2020 :

	2017-2022	2019-2022	2020
Moyenne	67,74	91,46	62,69
Volatilité	21,38%	26,59%	29,48%

Il en ressort que la période de crise la plus volatile pour les spreads est 2020 où la volatilité a atteint 29.48%. C'est donc cette valeur qui sera retenue pour choquer les spreads CDS dans les calculs de VaR CVA.