



**EVALUATION DES INDICATEURS DE
RISQUES ET DE PERFORMANCE DU PEPP**

Table des matières

RESUME.....	5
ABSTRACT.....	7
REMERCIEMENTS.....	8
INTRODUCTION.....	9
1 L'ÉPARGNE-RETRAITE EN EUROPE.....	10
1.1 Le marché européen actuel de l'épargne-retraite individuelle.....	10
1.2 Présentation du Pan-European Personal Product (PEPP).....	13
1.2.1 Objectifs et publics visés.....	14
1.2.2 Cadre réglementaire et caractéristiques d'un produit labellisé PEPP.....	15
1.2.2.1 Définition officielle du PEPP.....	15
1.2.2.2 Enregistrement et radiation du PEPP.....	16
1.2.2.3 Portabilité du PEPP.....	16
1.2.2.4 Sous-compte d'un PEPP.....	17
1.2.2.5 Phase d'Accumulation.....	17
1.2.2.6 Phase de Rente.....	18
1.2.2.7 Couverture des risques.....	18
2 METHODE D'ETUDE PROPOSEE PAR L'EIOPA.....	19
2.1 Description du modèle stochastique.....	20
2.2 Stratégies d'investissements.....	21
2.2.1 Stratégies dépendant de l'âge de l'épargnant (1).....	21
2.2.1.1 Step linear decline with age.....	21
2.2.1.2 Step decline with age.....	21
2.2.1.3 Linear decline with age.....	21
2.2.1.4 Smooth decline according to age and balance level.....	22
2.2.1.5 Step decline according to age and balance level.....	23
2.2.2 Stratégies dépendant des réserves sur les capitaux (2).....	24
2.2.2.1 Reserves from investment returns.....	24
2.2.2.2 Reserves from contributions.....	25
2.2.3 Garanties (3).....	26
2.2.4 Stratégies avec un portefeuille fixe (4).....	26
2.2.5 Stratégies de ventes et d'achats d'actifs (5).....	26
2.3 Indicateurs de risques.....	27
2.3.1 Probabilité de récupérer le capital cotisé.....	27
2.3.2 Déficit attendu.....	30
2.3.3 Montants les plus faibles attendus.....	31
2.3.4 Dispersion de la distribution des montants cotisés par l'épargnant.....	32

2.3.4.1	Étendue	32
2.3.4.2	Étendue Interquartile	33
2.3.4.3	Écart-type.....	34
2.3.4.4	Coefficient de variation	35
2.4	Indicateurs de performance ou de potentielle rentabilité	36
2.4.1	Gain potentiel d'une stratégie d'investissement	36
2.4.2	Probabilité d'atteindre un certain niveau d'ambition	38
2.5	Couple Risque/Rentabilité	41
2.5.1	Description de la méthode de classification.....	42
2.5.2	Application de la méthode de classification par l'EIOPA.....	43
3	MISE EN ŒUVRE DE LA MODELISATION	47
3.1	Modèle du taux d'intérêt nominal.....	49
3.1.1	Présentation du modèle.....	49
3.1.2	Solution explicite et discrétisation	51
3.1.3	Calibrage des paramètres du modèle	52
3.1.4	Données utilisées.....	52
3.1.5	Résultats du calibrage	53
3.1.6	Simulations	53
3.1.7	Gamme de Taux.....	56
3.2	Modèle du taux de rendement des actions.....	57
3.2.1	Présentation du modèle.....	57
3.2.2	Solution explicite et discrétisation	57
3.2.3	Calibrage des paramètres du modèle	58
3.2.4	Résultats du calibrage	59
3.2.5	Simulations	59
3.3	Modèle du taux d'inflation.....	62
3.3.1	Présentation du modèle.....	62
3.3.2	Solution explicite et discrétisation	62
3.3.3	Calibrage des paramètres du modèle	63
3.4	Description de la modélisation des risques du marché du travail.....	66
3.4.1	Périodes de chômage	66
3.4.2	Trajectoires réelles des salaires	68
3.5	Modélisation des stratégies d'investissements	69
3.5.1	Module Hypothèses.....	69
3.5.2	Module Actifs.....	69
3.5.3	Module Indicateurs	69
4	PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS	70
4.1	Indicateurs de risques.....	70

4.1.1	Probabilité de récupérer le capital cotisé.....	71
4.1.2	Déficit attendu.....	72
4.1.3	Dispersion de la distribution des montants accumulés.....	73
4.2	Indicateurs de performance.....	74
4.2.1	Somme attendue par l'épargnant à la fin de la phase d'accumulation.....	74
4.2.2	Probabilité d'atteindre une certaine ambition.....	75
4.3	Summary Risk Indicator.....	76
4.4	Impact de la durée du contrat.....	78
4.5	Autres indicateurs intéressant l'assuré.....	79
4.5.1	Les indicateurs de rentabilité.....	79
4.5.1.1	Taux de Rentabilité Interne (TRI).....	79
4.5.1.2	Sustainable Product Value (SPV).....	80
4.5.2	Les indicateurs de risques.....	82
4.6	Indicateurs pour l'assureur.....	83
4.6.1	Indicateur de performance.....	83
4.6.2	Indicateur de risques.....	85
4.7	Conclusions générales sur l'étude.....	87
CONCLUSION.....		88
BIBLIOGRAPHIE.....		90
TABLE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES.....		91
LISTE DES TABLEAUX.....		92
NOTE DE SYNTHÈSE.....		93
EXECUTIVE SUMMARY.....		96
ANNEXE.....		99
	Filtre de Kalman.....	99
	Application du Filtre de Kalman au modèle de taux d'intérêt nominal.....	103
	Algorithme d'optimisation current-to-p-best.....	107
	Application de l'Algorithme d'optimisation current-to-p-best.....	109

RESUME

L'épargne de long terme est un élément essentiel pour la retraite. Ces deux sujets questionnent beaucoup dans le monde et particulièrement en Europe. En effet, les systèmes de retraites européens sont soumis entre autres aux changements démographiques et aux changements sur le marché du travail. L'une des préoccupations des États européens est celle d'un système de retraite qui permettrait aux populations de mieux épargner pour leur retraite tout en développant des fonds d'investissements sur les marchés européens.

Dans l'optique de réunir les marchés des capitaux européens en élargissant d'une part la possibilité d'épargne individuelle pour une meilleure retraite et d'autre part en mutualisant cette épargne pour une stabilité des marchés des capitaux européens, la Commission européenne a annoncé le 29 Juin 2017, une proposition législative relative à un produit d'épargne retraite individuel, le Pan-European Personal Product (PEPP).¹Le PEPP est un produit d'épargne ou d'investissement disponible pour toute personne désireuse d'épargner quelle que soit sa situation financière, professionnelle et géographique en Europe. Il se veut transparent, transférable et à faible coût pour l'épargnant.

Ainsi, avant la conception et la mise en place d'un tel produit, le fournisseur du produit doit connaître les risques qui y sont liés ainsi que la rentabilité pour lui et pour l'épargnant. C'est la raison pour laquelle, dans ce mémoire, nous étudierons les indicateurs de risques et de rentabilité liés aux stratégies d'investissements des cotisations des épargnants PEPP. Une étude similaire avait déjà été réalisée par l'EIOPA qui a proposé un modèle d'étude stochastique du PEPP. L'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) est l'autorité européenne qui s'assure de contrôler les risques dans le secteur européen des assurances et des retraites européennes. Notre étude aura donc pour but d'expliquer le modèle stochastique suggéré par l'EIOPA, d'évaluer les indicateurs de risques et de performance associés au PEPP en se basant sur des stratégies d'investissement de cette épargne PEPP, proposées elles aussi par l'EIOPA.

Le modèle stochastique proposé fait intervenir des modélisations de taux et d'actifs financiers comme les obligations, les actions, etc... en se basant sur certaines méthodes de calibrage peu utilisées sur le marché à l'heure actuelle comme le Filtre de Kalman, l'algorithme d'évolution différentiel, etc... Ces modèles permettent de simuler des scénarios stochastiques d'évolution des taux de rendements des actifs financiers pour établir la performance des stratégies d'investissements proposées par l'EIOPA. Les résultats des projections ainsi que l'évaluation des indicateurs de risques et de performance, permettront ensuite de construire un indicateur de risque accessible combinant ces indicateurs (couple risque/performance) pour aider

¹ Source : [Le PEPP : Produit Paneuropéen d'Epargne-Retraite Individuelle - Fréquence Retraite \(frequence-retraite.com\)](http://Le PEPP : Produit Paneuropéen d'Epargne-Retraite Individuelle - Fréquence Retraite (frequence-retraite.com))

l'épargnant à décider si les stratégies d'investissement de ses cotisations sont adaptées à ses projets d'épargne ou si tout simplement il souhaite investir sur le PEPP.

Mots clés : EIOPA, PEPP, Indicateurs de performance, Indicateurs de risques, Filtre de Kalman, Stratégies d'investissement, Modèles de taux.

ABSTRACT

Long-term savings are an essential element for retirement. The subject of retirement and that of savings are a major issue in the world and particularly in Europe. Indeed, European pension systems are subject, among other things, to demographic changes and therefore to changes in the labor market. One of the concerns of European states is a pension system that would allow people to save better for their retirement while developing a good investment fund on European markets.

With a view to bringing together European capital markets by broadening on the one hand the possibility of individual savings for a better retirement and on the other hand by pooling this savings for the stability of European capital markets, the European Commission announced on 29 June 2017, a legislative proposal relating to a personal pension product, the Pan-European Personal Product (PEPP).²The PEPP is a savings or investment product available to anyone wishing to save regardless of their financial, professional, and geographical situation in Europe. It is intended to be transparent, transferable and at low cost for the saver.

Thus, before designing and implementing such a product, the supplier of the product must know the risks associated with it as well as the profitability for him and for the investor. Therefore, in this brief, we will study the risk and profitability indicators related to the investment strategies of PEPP savers' contributions. This study had already been carried out by EIOPA, which proposed a stochastic study model of the PEPP. The EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) is the European authority responsible for controlling risks in the European insurance and pensions sector. Our study will therefore aim to explain the stochastic model suggested by EIOPA, to assess the risk and performance indicators associated with the PEPP based on investment strategies for this PEPP savings, also proposed by EIOPA.

The proposed stochastic model involves models of rates on the financial market and models of financial assets such as bonds, stocks, etc. based on calibration methods little used on the market now such as the Kalman Filter, the differential evolution algorithm, etc... These models make it possible to simulate stochastic scenarios of changes in the rates of return on financial assets to establish the performance of the investment strategies proposed by EIOPA. The results of the projections, as well as the evaluation of the risk and performance indicators, will then make it possible to construct an accessible risk indicator combining these indicators (risk/performance pair) to allow the saver to decide whether the investment strategies of his contributions are adapted to his savings projects or if he simply wishes to invest in the PEPP.

Key Words: EIOPA, PEPP, Performance Indicators, Risk Indicators, Kalman Filter, Investment Strategies, Rate Models.

² Source : [Le PEPP : Produit Paneuropéen d'Epargne-Retraite Individuelle - Fréquence Retraite \(frequence-retraite.com\)](http://Le PEPP : Produit Paneuropéen d'Epargne-Retraite Individuelle - Fréquence Retraite (frequence-retraite.com))

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier particulièrement Etienne Reynal, pour son accompagnement et sa disponibilité lors de cette étude.

Je remercie mes tuteurs Florian Bollotte et Olivier Renaudin pour leurs conseils et pour leur suivi. Je remercie également Maylis Kouek pour son soutien et sa gentillesse.

J'adresse aussi mes remerciements à l'ensemble du cabinet GALEA & Associés, pour leur bienveillance.

Je remercie Norbert Gautron, Maud Vannier-Moreau et l'ensemble des associés du cabinet de m'avoir offert la possibilité de faire ce mémoire dans leur cabinet.

Je termine par ma mère, ma famille et mes amis qui m'ont encouragé, soutenu et motivé durant tout ce temps.

INTRODUCTION

L'économie d'aujourd'hui n'est plus ce qu'elle était il y a trente ans. A cette époque, il y avait une forte inflation et des taux d'intérêts réels qui étaient négatifs. Il était plus facile d'investir dans l'immobilier que dans une assurance vie, considérée alors comme un luxe.

Une dizaine d'années plus tard, l'inflation n'était plus qu'un souvenir. Les taux de rendements de l'épargne financière surpassaient ceux de l'épargne immobilière. Les gens commençaient alors à se tourner vers l'assurance vie. En effet, l'épargne financière de long terme se trouvait être la meilleure solution pour pallier les incertitudes des régimes de retraite.

L'état actuel de l'économie mondiale sujette à une hausse des prix et de nombreuses crises comme entre autres le COVID-19 et la guerre en Ukraine, incite de nombreux États notamment ceux de l'Europe à stabiliser les marchés financiers et rassurer leurs populations sur l'intérêt de l'épargne à long terme.

Dans le but de renforcer le marché financier européen et de développer une base d'investissement renflouée et sûre, la Commission Européenne a proposé la mise en place d'un produit d'épargne-retraite paneuropéen le Pan European Personal Product (PEPP) qui permettrait à n'importe quel citoyen de l'Union européenne d'épargner pour protéger sa retraite quelle que soit sa situation financière, professionnelle et géographique d'une part et de rassembler les capitaux des marchés européens en mutualisant cette épargne d'autre part.

L'EIOPA, qui se charge entre autres de protéger l'épargne pour la retraite des professionnels, a étudié différents indicateurs de risques et de performance associés à ce produit en se basant sur des modèles de taux et d'allocation des stratégies d'investissement. En effet, l'entrée sur le marché d'un produit comme le PEPP nécessite l'étude des risques et des rentabilités qui lui sont associés afin de mieux informer l'épargnant et de permettre au fournisseur du produit de présenter les potentielles rentabilités de celui-ci.

Le but de ce mémoire est d'étudier les indicateurs de risques et de performance du PEPP en nous basant sur le modèle stochastique développé par l'EIOPA et discuter des résultats obtenus tout en analysant les potentielles insuffisances de ce modèle.

Ainsi, dans une première partie, nous allons présenter l'état actuel de l'épargne-retraite en Europe à travers le niveau des encours, les offres d'épargne-retraite dans certains pays européens, la mobilité des travailleurs européens, avant de présenter le PEPP et ses caractéristiques. Dans une deuxième partie, nous allons montrer comment l'étude des indicateurs de risques et de performance a été menée, en présentant les indicateurs connus sur le marché actuel, les modèles de taux et d'allocation des stratégies d'investissements utilisés par l'EIOPA et leurs méthodes de calibrage, les procédures de calcul des indicateurs, les résultats avant de conclure sur nos remarques par rapport à ces derniers.

1 L'ÉPARGNE-RETRAITE EN EUROPE

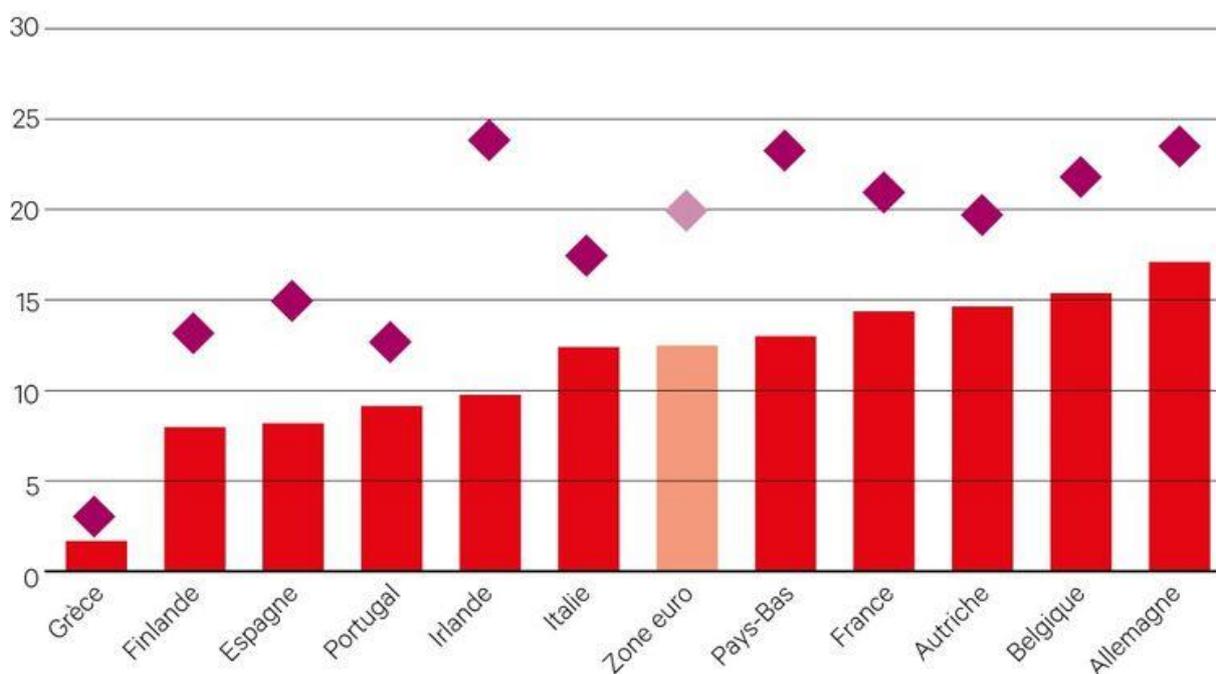
1.1 Le marché européen actuel de l'épargne-retraite individuelle

Le taux d'épargne des ménages est une donnée très importante permettant de traduire le pourcentage de revenu qu'ils attribuent à leur épargne. A plus long terme, cette épargne constitue une grande source de financement en ce sens où elle est mise à la disposition des investisseurs comme des prêts. L'épargne joue donc un rôle majeur dans la croissance économique.

La population de l'Union Européenne est parmi celles qui épargnent le plus dans le monde. D'après un article des « Echos », on estimait en 2020 à 1400 milliards d'euros, le niveau de l'épargne dans l'Union Européenne. Voici une illustration du niveau de l'épargne des ménages de la zone Euro entre les années 2000 et 2019.

Le taux d'épargne des ménages de la zone euro

En % du revenu disponible brut ■ Moyenne 2000-2019 ◆ 2020



« LES ÉCHOS » / SOURCE : SME AVEC EUROSTAT

3

Nous pouvons voir sur les vingt dernières années, que le niveau de l'épargne n'a fait que croître avec une moyenne estimée à 13% pour la zone Euro. Cependant, il existe une disparité entre les pays de l'Union Européennes avec un taux d'épargne à 2% pour la Grèce tandis que

³ Source : [Les Européens ont accumulé 600 milliards d'épargne supplémentaire pendant la crise | Les Echos](#)

l'Allemagne se retrouve elle, avec un taux de 17%. Les Français quant à eux ont économisé 14% de leurs revenus sur les vingt dernières années.

Les ménages épargnent pour plusieurs raisons et principalement pour être à l'abri du besoin en cas d'absence de revenus suffisants. L'absence de revenu peut survenir en période de chômage, d'arrêt de travail ou de retraite. Afin de fournir à leurs populations une couverture minimale qui permettrait à chacun d'améliorer en cas de retraite le niveau de revenus, de nombreuses réformes des régimes de retraites ont été entreprises par certains pays européens. A chaque pays européen, on peut attribuer un système de retraite différent mais partageant à proportions différentes, une pension de retraite minimale, des régimes obligatoires et facultatifs, des politiques de retraite publiques et privées, etc...

Épargner en vue de sa retraite, est l'un des nombreux défis auquel doivent faire face les ménages européens. L'Europe étant un continent vieillissant avec des changements radicaux au niveau du marché du travail, du profilage des carrières et de la répartition des richesses, il devient primordial de garantir un bon niveau de prestation de retraite pour la population à travers les pensions de retraite.

Le marché de l'épargne-retraite représente un ensemble de produits d'investissements financiers permettant la constitution d'une épargne lors de la vie active qui aboutira à la disposition d'un capital ou d'une rente, à la retraite.

Le paysage de l'épargne retraite en Europe peut être peint sur différents tableaux. Nous avons choisi de présenter l'offre en produit d'épargne retraite individuelle de certains pays européens.

En Allemagne, le niveau de la retraite publique est très faible, à peu près 35% du dernier salaire. C'est ce faible taux qui a incité la mise en place de nombreux mécanismes d'épargne pour une bonne préparation de la retraite de la population allemande. En termes d'épargne retraite individuelle, la population allemande privilégie quatre catégories de produits :

- La Retraite d'Entreprise, pour les salariés fidèles à leur employeur et aux revenus modestes. L'avantage principal en est le prélèvement des versements sur le salaire brut, et donc l'absence d'impôts et de cotisations sociales pour les salariés gagnant moins que les plafonds de la sécurité sociale. Un autre avantage peut être l'abondement par l'employeur. Cependant, il peut être soumis à une imposition importante des rentes à la retraite et à une absence de flexibilité en cas de changement d'employeur ou de départ d'Allemagne.
- La Riester-Rente, pour les salariés et familles. La Riester-Rente du nom de son inventeur a été créée en 2001 pour compenser la baisse des retraites publiques décidée à l'époque. Il a pour avantages la participation de l'État par subvention pour de modestes cotisations et la déduction des cotisations des impôts. De manière générale, la répartition des versements entre cotisant et État est de 60%-40%. De plus,

l'argent économisé est accessible en cas d'achat immobilier en Union Européenne. Par ailleurs, la rente reste imposable et la procédure pour récupérer les subventions étatiques nécessite un suivi professionnel du contrat, qui n'est généralement pas constaté chez tous les opérateurs. Ces contrats sont réservés aux salariés et le plafond de versement est de 2100 € / an.

- La Basis-rente, pour les indépendants et les salariés fortement rémunérés. La Basis-Rente ou Rürup-Rente du nom de son inventeur créée en 2005 a pour avantage l'accessibilité du contrat aux professions libérales et la déduction des cotisations du revenu imposable. Cependant, la rente est imposable et les cotisations sont débloquées uniquement à l'âge de la retraite.
- Les assurances-vie allemandes, pour épargner en toute flexibilité. L'épargne complémentaire en assurance-vie allemande (Rentenversicherung) est très populaire. Il s'agit de contrats flexibles qui permettent d'accéder au capital avant la retraite et de ne pas payer d'impôts sur les intérêts capitalisés annuellement au contrat. Il a pour avantages la sortie en capital ou en rente à la retraite, de faibles impôts sur les rentes, la possibilité de rendement à vie et de continuer des versements même en cas de départ de l'Allemagne. Son principal inconvénient cependant reste les frais de gestion qui rend ces contrats non attractifs pour un placement à moyen terme.

En France, afin de faire évoluer, rendre plus transparent et faciliter l'accès à l'offre en produits d'épargne-retraite individuelle, l'État a mis en place la loi PACTE. La loi PACTE (Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation des Entreprises) a été présentée le 18 juin 2018 en conseil des ministres par le ministre de l'Économie et des Finances, Bruno Le Maire. Elle a été ensuite adoptée le 11 avril 2019 par l'Assemblée nationale. La loi PACTE vise la croissance des entreprises et notamment des PME, dans le but d'encourager la création d'emplois. Afin de répondre aux objectifs fixés par le gouvernement, la Loi PACTE a permis la mise en place d'un nouveau produit d'épargne retraite : le Plan d'Épargne Retraite (PER). Disponible depuis le 1er octobre 2019, il remplace progressivement les plans d'épargne retraite qui étaient alors en place (le Plan d'Épargne Retraite Populaire, le PERCOL, l'article 83 et le contrat Madelin).

Le PER est un produit de retraite supplémentaire, un contrat d'assurance vie de groupe à adhésion facultative et fonctionne par capitalisation. Il a été conçu de manière à corriger les inconvénients présents pour les différents produits qu'il remplace. Il possède toujours l'inconvénient du blocage de l'épargne jusqu'à la retraite. Cependant, il est plus souple dans la mesure où il permet le déblocage anticipé de l'épargne dans un nouveau cas de figure : l'achat de la résidence principale durant la phase de constitution ce qui n'était possible qu'avec le PERCOL ou le PERP. Il est également possible de sortir en capital ou en capital fractionné pour l'intégralité de l'épargne en plus de la sortie en rente viagère. Le PER est présent sous trois formes : le PER Individuel (ou PERIN), le PER Collectif (ou PERCOL) et le PER Obligatoire (ou PERO). Leur fonctionnement est similaire avec une divergence au niveau de la provenance de l'épargne.

1.2 Présentation du Pan-European Personal Product (PEPP)

Le secteur de l'épargne-retraite individuelle actuel est sujet à plusieurs préoccupations. Dans de nombreux pays de l'Union Européenne, la segmentation des produits d'épargne entrave leur portabilité⁴.

Cet obstacle freine la capacité d'un individu à travailler dans un pays de l'UE tout en cotisant dans un autre. De plus, cela rend difficile de proposer des produits standardisés pour les prestataires de services d'épargne retraite.

Il est essentiel de souligner que le domaine de l'épargne retraite établit un lien solide et durable entre les investisseurs financiers et les épargnants.

Un marché plus étendu et varié pourrait favoriser une meilleure mobilisation des ressources pour les investisseurs, stimulant ainsi l'investissement dans l'économie concrète.

⁴ Le terme portabilité est employé dans ce contexte pour désigner la capacité d'un individu à conserver une certaine police d'assurance ou un produit financier lorsqu'il change d'emploi ou déménage dans un autre pays, sans perdre les avantages ou les conditions associés.

1.2.1 Objectifs et publics visés

Les régimes de retraite reposent principalement sur les dispositifs publics. Pour l'Union Européenne, la stabilité dépend fortement des traités, de l'adéquation des revenus et de la santé financière de ces régimes. Dès lors, l'idée de rediriger une grande part de l'épargne des citoyens européens, notamment celle placée dans des comptes bancaires à court terme, s'avère bénéfique pour dynamiser l'économie de l'UE. Cela permet aussi d'offrir aux épargnants des rendements plus attractifs. Dans cette perspective, la Commission européenne a annoncé en juin 2017 la création d'un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle, le PEPP, qui a été concrétisé en mars 2022.

L'objectif de cette initiative est de forger un marché paneuropéen d'épargne-retraite, qui serait "plus sûr, rentable, transparent et abordable"⁵. Elle vise notamment à adresser les défis tels que le vieillissement démographique, en offrant aux Européens des options d'investissement variées pour préparer leur retraite.

Le PEPP est conçu comme une solution d'épargne retraite volontaire pour les individus. Il ne s'agit pas d'une loi ou d'une directive, mais d'un règlement directement exécutoire dans tous les pays membres, ce qui signifie qu'il échappe à des règles nationales spécifiques. Toutefois, certains aspects non couverts par ce règlement, comme les modalités de la phase d'accumulation, sont régis par des normes nationales.

La mise en place du PEPP vise à enrichir les options disponibles en matière d'épargne retraite et à unifier le marché européen dans ce secteur. Bien qu'il ne vise pas à supplanter les régimes publics, le PEPP se veut complémentaire aux solutions existantes.

Sa portabilité est l'un de ses atouts majeurs : les fournisseurs peuvent étendre leurs offres au-delà des frontières, et les épargnants bénéficient d'une flexibilité sans précédent, leur permettant de travailler dans un pays tout en cotisant dans un autre, sans compromettre leurs droits ni changer de fournisseur.

⁵ (RÈGLEMENT (UE) 2019/1238 DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 20 Juin 2019 relatif à un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle (PEPP), 2019)

1.2.2 Cadre réglementaire et caractéristiques d'un produit labellisé PEPP

1.2.2.1 Définition officielle du PEPP

Un produit d'épargne-retraite individuelle est un accord contractuel entre un épargnant et une institution financière, destiné à compléter les dispositifs légaux ou professionnels d'épargne-retraite. Il sert à renforcer les provisions pour la retraite en plus des régimes publics ou des plans d'épargne liés à l'emploi.

Dans cette optique, le Produit Paneuropéen d'épargne-retraite individuelle ou Pan-European Personal Product en anglais (PEPP) se définit d'après le règlement⁶ du Parlement Européen « *comme un produit d'épargne-retraite individuelle à long terme, qui est fourni par une entreprise financière éligible, dans le cadre d'un contrat PEPP, que souscrit un épargnant PEPP, ou une association indépendante d'épargnants PEPP au nom de ses membres, en vue de la retraite, sans possibilité de remboursement ou avec des possibilités de remboursement strictement limitées, et qui est enregistré conformément au présent règlement* »

Ainsi, le contrat PEPP doit établir les dispositions spécifiques concernant le PEPP. Le contrat PEPP doit donc comporter selon ledit règlement :

- *« Une description du PEPP de base, y compris des informations sur la garantie du capital investi ou sur la stratégie d'investissement destinée à assurer la protection du capital ;*
- *Une description des autres options d'investissement, le cas échéant ;*
- *Les conditions relatives au changement d'option d'investissement ;*
- *Lorsque le PEPP comprend une couverture des risques biométriques, le détail de cette couverture, notamment les circonstances susceptibles de donner lieu à celle-ci ;*
- *Une description des prestations de retraite PEPP, en particulier les formes possibles de prestations et le droit de modifier les formes de prestations ;*
- *Les catégories de coûts et le coût total agrégé exprimé en pourcentage et en termes monétaires, le cas échéant ;*
- *Les conditions relatives à la phase d'accumulation pour le sous-compte correspondant à l'État membre de résidence de l'épargnant PEPP ;*
- *Les conditions relatives à la phase de versement pour le sous-compte correspondant à l'État membre de résidence de l'épargnant PEPP ;*
- *Le cas échéant, les conditions dans lesquelles les avantages ou les incitations accordés doivent être remboursés à l'État membre de résidence de l'épargnant PEPP. »⁷*

⁶Règlement (UE) 2019/1238 du parlement européen et du conseil du 20 Juin 2019

⁷(RÈGLEMENT (UE) 2019/1238 DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 20 Juin 2019 relatif à un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle (PEPP), 2019)

1.2.2.2 Enregistrement et radiation du PEPP

Un produit d'épargne-retraite individuelle ne peut porter la dénomination « produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle » ou « PEPP » que si l'EIOPA l'a enregistré sous cette dénomination conformément au règlement.

Dans un délai de cinq jours ouvrables à compter de la date de communication de la décision d'enregistrement ainsi que des informations et des documents, l'EIOPA enregistre le PEPP dans le registre public centralisé et informe en conséquence les autorités compétentes⁸ sans retard indu. Le fournisseur de PEPP peut fournir le produit et le distributeur peut distribuer celui-ci à compter de la date d'enregistrement du PEPP dans le registre public centralisé.

Les autorités compétentes prennent une décision de radiation d'un PEPP lorsque :

- *« Le fournisseur de PEPP renonce expressément à l'enregistrement ;*
- *Le fournisseur de PEPP a obtenu l'enregistrement au moyen de fausses déclarations ou par tout autre moyen irrégulier ;*
- *Le fournisseur de PEPP a gravement ou systématiquement enfreint le règlement ;*
- *Le fournisseur de PEPP ne remplit plus les conditions d'obtention de l'enregistrement »⁹*

1.2.2.3 Portabilité du PEPP

Selon de règlement de l'Union Européenne sur le PEPP, « *les fournisseurs de PEPP peuvent fournir, et les distributeurs de PEPP distribuer, des PEPP sur le territoire d'un État membre d'accueil au titre de la libre prestation de services ou de la liberté d'établissement, à condition qu'ils le fassent en respectant les règles et procédures pertinentes établies par le droit de l'Union qui leur sont applicables, et après notification de leur intention d'ouvrir un sous-compte pour cet État membre d'accueil conformément.* ». Ainsi, toute entreprise financière¹⁰ d'un pays membre de l'Union Européenne peut distribuer des PEPP qu'elle a conçus ou non, mais répondant aux caractéristiques du PEPP.

Les épargnants PEPP ont donc le droit d'utiliser un service de portabilité qui leur confère le privilège de continuer à contribuer à leur compte PEPP existant même si ces derniers s'installent dans un autre État membre. S'ils recourent au service de portabilité, les épargnants PEPP ont le droit de conserver tous les avantages accordés par leur fournisseur et liés à l'investissement continu dans leur PEPP.

⁸Les autorités nationales désignées par un État membre pour assurer la surveillance des fournisseurs de PEPP ou des distributeurs de PEPP, le cas échéant, ou exercer les fonctions prévues.

⁹(RÈGLEMENT (UE) 2019/1238 DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 20 Juin 2019 relatif à un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle (PEPP), 2019)

¹⁰Seules les entreprises financières agréées ou enregistrées en vertu du droit de l'Union, peuvent demander l'enregistrement d'un PEPP.

1.2.2.4 Sous-compte d'un PEPP

Un sous-compte PEPP est une division nationale au sein d'un compte PEPP global, adaptée aux réglementations et incitations spécifiques d'un État membre de l'UE où réside l'épargnant PEPP. Il encapsule les particularités légales et les conditions décidées au niveau national pour les investissements dans un PEPP. Selon la réglementation en vigueur pour l'accumulation d'épargne et les rentes, une personne peut soit épargner soit bénéficier d'un PEPP via un sous-compte spécifique.

Quand un fournisseur de PEPP offre la portabilité, il s'assure que tout nouveau sous-compte créé au sein d'un compte PEPP respecte les réglementations et conditions du nouvel État membre où l'épargnant PEPP réside. Ainsi, toutes les transactions réalisées au sein d'un compte PEPP sont allouées à un sous-compte approprié. Bien que les transactions se fassent dans un cadre commun, les contributions et les retraits depuis ce sous-compte peuvent être régis par des conditions contractuelles distinctes.

Pour exploiter cette flexibilité et créer un sous-compte, l'épargnant PEPP doit fournir au prestataire les informations essentielles, telles que son nouvel État de résidence, la date de début des contributions au nouveau sous-compte et toute autre donnée pertinente.

Lorsque le fournisseur de PEPP n'est pas en mesure d'assurer l'ouverture d'un nouveau sous-compte correspondant au nouvel État membre de résidence de l'épargnant PEPP, l'épargnant PEPP, suivant son choix, peut :

- Changer de fournisseur de PEPP sans retard et sans frais, nonobstant les exigences concernant la fréquence des changements ;
- Continuer à contribuer au dernier sous-compte ouvert.

1.2.2.5 Phase d'Accumulation

La phase d'accumulation est le moment où les fonds sont amassés, et elle s'étend jusqu'au début de la phase de rente. Pendant cette période, les actifs liés au PEPP sont gérés et investis par les prestataires de PEPP en respectant le principe de la « personne prudente »¹¹ et en suivant les directives établies par la Commission européenne.

Les aspects de la phase d'accumulation pour les sous-comptes nationaux non couverts par ce règlement sont déterminés par les États membres respectifs. Ces spécificités peuvent comprendre des critères tels que l'âge minimum pour commencer cette phase, une durée minimale d'accumulation, ainsi que des plafonds et planchers pour les contributions et leur fréquence.

¹¹ Principe de la personne prudente : Le principe de la « personne prudente » énoncé à l'article 132 de la directive 2009/138/CE veut que les entreprises d'assurance et de réassurance n'investissent que dans des actifs dont elles peuvent correctement identifier, mesurer, suivre, gérer, contrôler et déclarer les risques.

1.2.2.6 Phase de Rente

La phase de rente est la période durant laquelle les actifs accumulés sur un compte peuvent être prélevés pour financer la retraite ou d'autres besoins de revenus.

Les fournisseurs de PEPP mettent à la disposition des épargnants PEPP une ou plusieurs des formes suivantes de prestations :

- Une prestation dite « rente » qui correspond à un montant payable à des intervalles donnés sur une durée donnée,
- Une prestation dite « retraits » qui représente les montants discrétionnaires qu'un bénéficiaire de PEPP peut retirer dans une certaine limite pour une période donnée,
- Une prestation représentant une combinaison de ces deux formes.

Les épargnants PEPP doivent choisir lors de la conclusion du contrat PEPP ou de l'ouverture d'un sous-compte PEPP, la forme que prendront les prestations durant la phase de rente. Il faut noter que la forme des prestations peut varier d'un sous-compte à l'autre.

Pour le PEPP de base, au début de la phase de versement, le fournisseur de PEPP propose à l'épargnant PEPP un plan de retraite personnalisé portant sur l'utilisation durable du capital accumulé dans les sous-comptes PEPP, en prenant au moins en compte :

- La valeur du capital accumulé dans les sous-comptes PEPP ;
- Le montant total d'autres droits à pension accumulés ;
- Les exigences et besoins à long terme en matière de retraite de l'épargnant PEPP.

1.2.2.7 Couverture des risques

Selon le règlement de l'UE sur le PEPP, « *l'emploi de techniques d'atténuation des risques garantit que la stratégie d'investissement pour le PEPP est conçue de manière à constituer un futur revenu de retraite individuel stable et adéquat à partir du PEPP et à assurer un traitement équitable pour toutes les générations d'épargnants PEPP. Toutes les techniques d'atténuation des risques, qu'elles soient appliquées dans le cadre du PEPP de base ou pour d'autres options d'investissement, sont saines, solides et conformes au profil de risque de l'option d'investissement concernée.* »¹²

¹²(RÈGLEMENT (UE) 2019/1238 DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 20 Juin 2019 relatif à un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle (PEPP), 2019)

2 METHODE D'ETUDE PROPOSEE PAR L'EIOPA

Un produit d'épargne-retraite individuelle offre à l'individu l'opportunité de se constituer un pécule pour sa retraite tout en cherchant à valoriser ce capital. Toutefois, un enjeu majeur de ce type de produit est la possibilité de ne pas réaliser le rendement anticipé ou, pire encore, de voir son capital diminuer lors de la clôture du contrat. La sensibilité à ce risque dépend largement de la situation propre à l'épargnant, notamment de sa tolérance au risque, de la durée de son investissement et du montant de ses cotisations.

Afin de viser un rendement spécifique sur les cotisations lors de la clôture du contrat, et pour être pleinement informé de l'efficacité des méthodes d'investissement de son capital épargné, l'épargnant doit être conscient des risques liés à ces approches d'investissement.

L'EIOPA, dans son document intitulé « *EIOPA's stochastic model for a holistic assessment of the risk profile and potential performance* ¹³ » publié en août 2020, décrit les techniques employées ainsi que le modèle stochastique élaboré. Ce dernier vise à simuler les résultats potentiels liés aux prestations de retraite associées au Pan-European Personal Pension (PEPP).

Les méthodes proposées par l'EIOPA ont été élaborées dans le but de quantifier l'incapacité potentielle qu'aurait le PEPP à surperformer l'inflation et donc à perdre en termes réels ou à ne pas suffisamment être agressif pour atteindre des rendements de placement plus élevés afin de compenser les niveaux de cotisation potentiellement faibles.

Dans cette optique, elles mesurent aussi les risques et les avantages, la performance et l'efficacité des techniques d'atténuation des risques. En effet, les résultats observés ont permis de déterminer les niveaux d'ambition appropriés en termes de risques et de performances potentielles, d'élaborer les scénarios de performance pour le Document d'Informations Clés (DIC ou KID en anglais) et les projections des prestations de retraite pour le relevé des prestations de retraite (PBS) et enfin de déterminer la méthodologie de l'indicateur de risque récapitulatif.

¹³ https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/publications/eiopa-20-505_pepp_stochastic_model.pdf

2.1 Description du modèle stochastique

Un modèle stochastique permet d'illustrer des phénomènes ou variations dus à des événements inconnus ou impossibles à quantifier. Dans notre cas, le modèle stochastique dont il est question va nous permettre de reproduire des résultats possibles des cotisations pour la retraite au travers de différents scénarios à la fin de la phase d'accumulation pour évaluer les profils de risque et les rendements potentiels des stratégies d'investissements.

Le modèle va donc simuler plusieurs scénarios du monde réel et générer pour chacun d'eux les rendements des actifs, et les montants accumulés à la fin de la phase d'accumulation. Ces montants vont ensuite permettre de calculer différents indicateurs afin d'évaluer le profil de risque et la performance potentielle associée à chacune des stratégies d'investissement.

Le modèle stochastique décrit dans le document de l'EIOPA, met en avant la modélisation du taux d'intérêt nominal, du taux d'inflation, des taux de rendements des actions et le spread de crédit. En effet, l'évaluation des profils de risques et de performances associés à des stratégies d'investissements nécessitent d'évaluer les potentiels risques financiers à savoir le caractère incertain des taux de rendements des obligations ainsi que des actions, et l'inflation.

Les diverses simulations de l'EIOPA sont obtenues en faisant des simulations de type Monte-Carlo qui parcourent 10 000 chemins de la figure d'intérêt¹⁴.

Afin de simuler de manière stochastique les taux d'intérêt nominaux, l'EIOPA a retenu le modèle de taux G2++. Dans ce modèle, deux facteurs stochastiques déterminent l'évolution future des taux d'intérêt.

La modélisation du taux d'inflation est faite selon un processus de Vasicek. Le taux d'inflation est calibré de sorte à atteindre l'inflation cible de la Banque Centrale Européenne (BCE).

Les taux de rendements des actions sont modélisés en suivant un mouvement brownien géométrique avec une prime d'action et un taux d'intérêt.

L'ensemble des modèles sont décrits dans la partie 3 du mémoire avec plus de détails techniques.

¹⁴ Figure d'intérêt : Dans notre cas, la figure d'intérêt représente chacune des variables modélisées par le modèle stochastique.

2.2 Stratégies d'investissements

En termes de stratégies d'investissement, l'EIOPA présente 5 grandes catégories de stratégies à savoir :

- **Life cycle investment (1)** : stratégie dont l'investissement en actifs de type obligations ou actions dépend de l'âge de l'épargnant.
- **Strategies establishing reserves from contributions and/or investment returns (2)** : stratégie dont l'investissement en actifs de type obligations ou actions dépend des rendements et des capitaux accumulés au cours des années précédentes
- **Fixed portfolio strategies (3)** : stratégie dont le poids en actifs de type actions est fixé au fil du temps avec un rééquilibrage annuel
- **Guarantees (4)** : stratégie assurant à l'épargnant de récupérer au moins la somme nominale de ses cotisations, avant tout frais et primes, à l'âge de sa retraite, la prime de la garantie étant prélevée sur les cotisations.
- **Buy-and-Hold stratégies (5)** : stratégie dont les cotisations annuelles sont investies dans des actions et des obligations avec une division fixe. Cependant, le portefeuille n'est jamais rééquilibré.

2.2.1 Stratégies dépendant de l'âge de l'épargnant (1)

Cette catégorie de stratégies est basée sur une évolution du poids des actions dans le portefeuille en fonction de l'âge du cotisant.

2.2.1.1 Step linear decline with age

Ici, nous supposons que le poids des actions dans le portefeuille d'actifs est constant entre 20 et 10 ans avant l'âge de la retraite de l'assuré. A partir de là, le poids décroît linéairement jusqu'à un minimum lorsque l'assuré atteint l'âge de sa retraite.

2.2.1.2 Step decline with age

Dans cette stratégie, la proportion d'actions dans le portefeuille diminue à mesure que les épargnants atteignent des seuils d'âge spécifiques. Ainsi, nous pouvons avoir des proportions entre 60% et 40% et entre 40% et 20% quand ils atteignent respectivement 35ans et 55ans, par exemple.

2.2.1.3 Linear decline with age

Ici, on considère l'âge du cotisant et en fonction de celui-ci, on calcule linéairement le poids des actions dans le portefeuille.

Le graphique suivant issu du document de référence de l'EIOPA présente l'évolution de la proportion des actions dans le portefeuille d'actifs selon chacune des stratégies de la catégorie *Life cycle investment*.

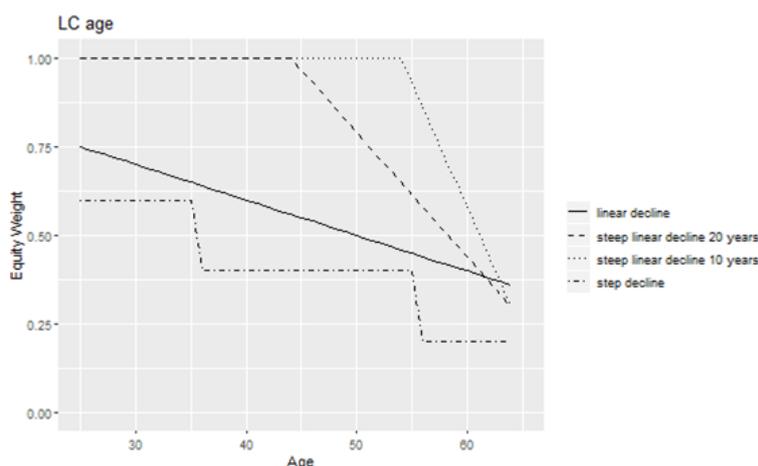


Figure 1 : Évolution de la proportion d'actifs selon les stratégies dépendant de l'âge de l'épargnant (Source EIOPA)

2.2.1.4 Smooth decline according to age and balance level

Le poids des actions du portefeuille d'un assuré est calculé chaque année. Il prend en compte le coefficient d'aversion au risque, le rendement moyen de l'action, la volatilité, le taux d'intérêt, la valeur actuelle des contributions futures par an et le solde total du compte par an.

La pondération des capitaux propres diminue avec l'âge à mesure que la valeur actuelle des cotisations futures diminue lorsque l'épargnant approche de l'âge de la retraite. La pondération des capitaux propres dépend également de l'évolution du solde du compte, qui dépend des réalisations antérieures des rendements des actifs.

Par conséquent, à un âge donné (c'est-à-dire pour un niveau donné de la valeur actualisée des contributions futures), la proportion d'actions dans le portefeuille est plus faible lorsque le solde du compte est plus élevé. En outre, les épargnants plus réticents au risque ont des pondérations en actions plus faibles. La valeur actualisée des cotisations futures est calculée sur la base d'un taux de cotisation fixe (10 %) et d'un profil de revenu déterministe, en supposant qu'il n'y ait pas de périodes de chômage, une inflation fixe (2 %) et une croissance fixe de la productivité (1,1 %) au cours de la carrière.

Les cotisations futures sont actualisées en utilisant la structure à terme initiale des taux d'intérêt. Le solde réel du compte peut être remplacé par celui obtenu lorsque toutes les contributions sont investies dans l'actif sans risque et gagnent le taux d'intérêt (échéance de 10 ans par rapport à la structure à terme initiale des taux d'intérêt). Alternativement, le solde réel du compte peut être remplacé par son attente, en supposant que les rendements des actions sont déterministes. L'analyse tient compte des deux façons de déterminer la trajectoire de pondération des actions. Les stratégies diffèrent par le coefficient d'aversion relative au risque, de 1 à 5.

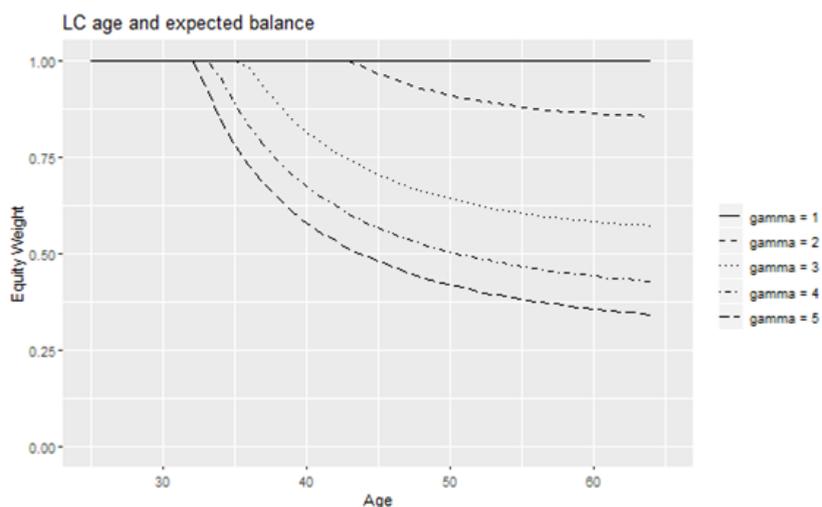


Figure 2 : Évolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)

2.2.1.5 Step decline according to age and balance level

Le poids des actions dans le portefeuille diminue fortement à mesure que les cotisants au régime atteignent des seuils d'âge précis.

En outre, la pondération des capitaux propres est encore réduite pour les soldes de comptes dépassant certains seuils. La trajectoire de pondération des actions dépend de la simulation, car elle varie en fonction de l'évolution des soldes des comptes et des rendements des actifs.

La pondération des capitaux propres peut prendre deux niveaux différents entre 40 et 49 ans selon le solde du compte (67,2 % ou 54,0 %) ; trois niveaux différents entre 50 et 57 ans (54,4 %, 47,3 % ou 40,5 %) ; et deux niveaux différents à l'âge de 58 ans (33.7% or 19.7%).

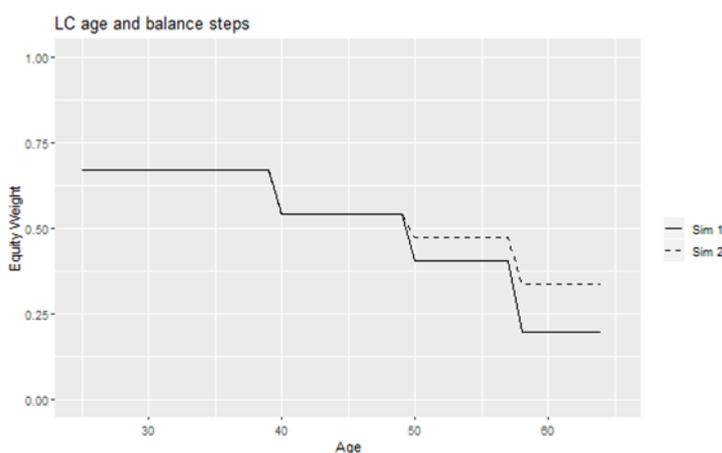


Figure 3 : Evolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)

2.2.2 Stratégies dépendant des réserves sur les capitaux (2)

2.2.2.1 Reserves from investment returns

Le gestionnaire du régime de retraite choisit un ratio de réserve stratégique (ρ_s) et une exposition stratégique au risque (σ_s) pour le fonds. L'exposition au risque est entièrement déterminée par l'allocation en actions de chaque année. Le gestionnaire crédite le même rendement dans chaque compte individuel (η), ce qui est différent du rendement réel gagné par le fonds (μ_r).

Le ratio de réserves augmente (ou diminue) en fonction de la différence entre les deux rendements.

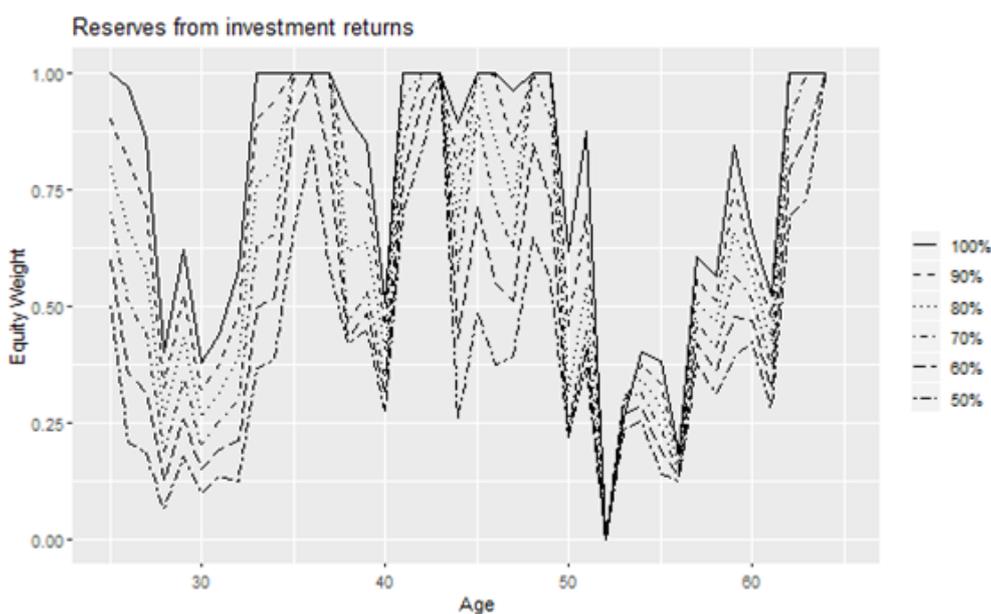


Figure 4 : Évolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)

2.2.2.2 Reserves from contributions

Le poids des actions dans le portefeuille dépend de la différence entre les actifs et un certain plancher construit avec une partie des contributions.

Le fournisseur de PEPP utilise des stratégies d'assurance de portefeuille à proportion constante qui visent à protéger les épargnants contre les mouvements défavorables du marché. Cette méthode alloue les actifs de manière dynamique au fil du temps afin que le niveau des actifs accumulés dans le compte individuel soit supérieur à un certain plancher à tout moment.

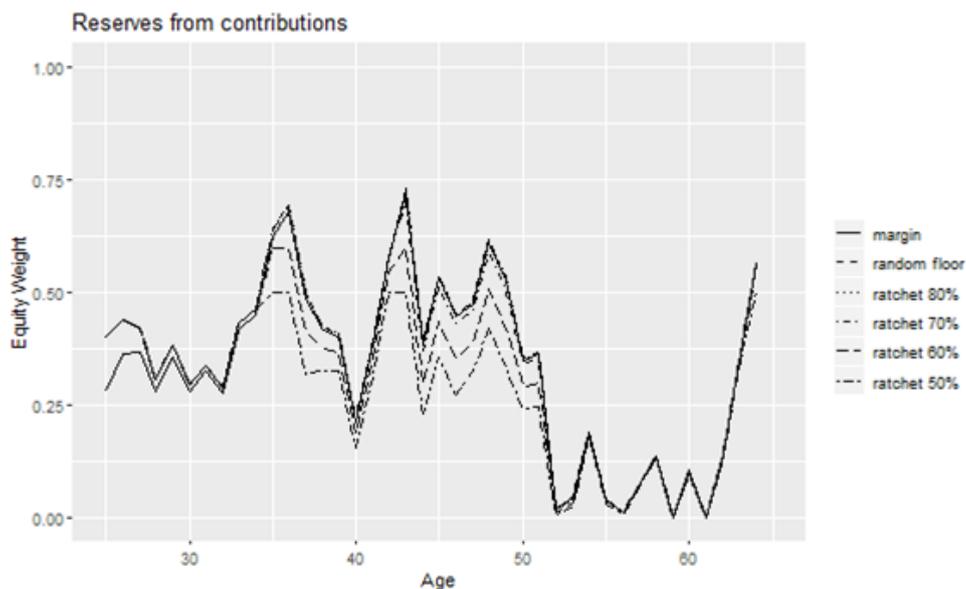


Figure 5 : Evolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)

2.2.3 Garanties (3)

Cette stratégie consiste à fixer le poids des actions dans le portefeuille au fil du temps, avec un rééquilibrage annuel du portefeuille. L'épargnant récupère au moins la somme nominale de ses cotisations, avant tout frais et primes, à l'âge de sa retraite, la prime de la garantie étant prélevée sur les cotisations. Le poids des actions est déterminé de manière que le fournisseur de garantie soit neutre, ce qui signifie que la valeur actuelle des primes de garantie futures attendues est égale à la valeur actuelle des paiements de garantie futurs attendus (pour une période d'investissement de 40 ans). Dans l'étude, on fait varier le rééquilibrage entre 50% et 100%.

2.2.4 Stratégies avec un portefeuille fixe (4)

Le poids des actions dans le portefeuille est fixé au fil du temps, avec un rééquilibrage annuel du portefeuille. Les stratégies ne diffèrent que par la pondération des actions fixes, de 0% à 100%.

2.2.5 Stratégies de ventes et d'achats d'actifs (5)

La proportion d'actions dans le portefeuille évolue en fonction du temps. Les cotisations annuelles sont investies dans des actions et des obligations avec une division fixe. Cependant le portefeuille n'est jamais rééquilibré.

Par conséquent, en fonction des rendements obtenus par chaque catégorie d'actifs, la répartition du portefeuille entre les deux catégories d'actifs à tout moment peut être différente de la répartition fixe appliquée aux cotisations. La trajectoire de pondération des actions dépend donc de la simulation.

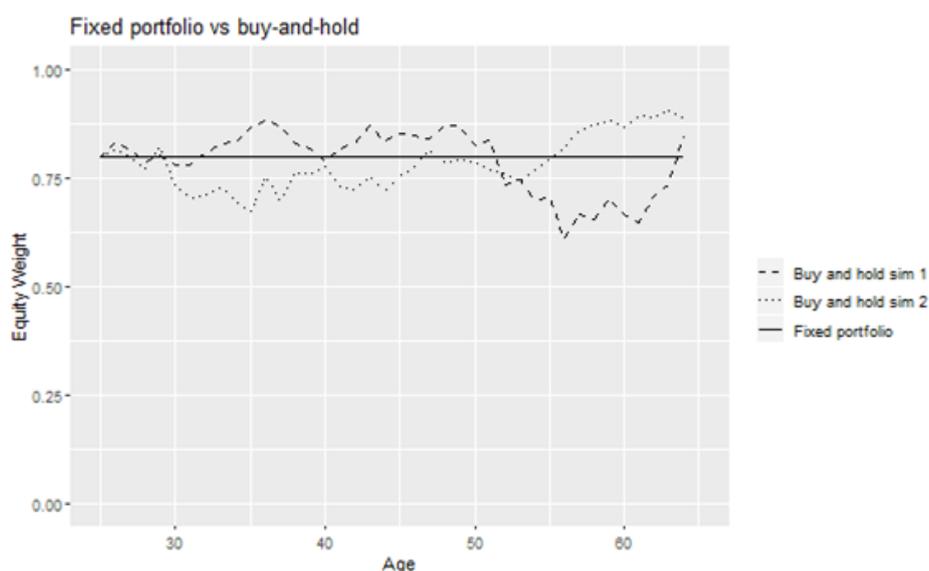


Figure 6 : Évolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)

2.3 Indicateurs de risques

Afin d'évaluer le caractère risqué des stratégies d'investissement, l'EIOPA a défini des indicateurs potentiels. Ces indicateurs utilisent les sorties du modèle stochastique précédemment décrit, notamment les projections des montants cotisés au cours de la phase d'accumulation et les taux de rendements en cas d'investissement.

2.3.1 Probabilité de récupérer le capital cotisé

Le premier indicateur de risque choisi par l'EIOPA est la probabilité de récupérer le capital cotisé à la fin de la phase d'accumulation. En effet, le PEPP n'offre pas de garantie de capital de base. C'est pour cette raison que le règlement sur les caractéristiques du PEPP exige que des techniques d'atténuation des risques (comme celui de ne pas pouvoir récupérer le capital cotisé) soient mises en place pour permettre à l'épargnant de récupérer son capital.

Cet indicateur peut être calculé de deux manières, à savoir calculer la probabilité de récupérer le capital cotisé en prenant en compte les cotisations soit nettes, soit brutes de frais.

Le modèle stochastique précédemment décrit nous permet de projeter dans le temps les taux nominaux et les taux de rendements des actifs. Ainsi, avec ces taux, nous pouvons évaluer dans le temps (durant la phase d'accumulation) l'évolution des cotisations investies.

Afin de calculer la probabilité de récupérer le capital cotisé, on fait la différence entre deux cotisations :

- Montant total de la valeur atteinte de l'épargne résultant de la gestion des cotisations investies
- Montant total des cotisations versées par le client

On compte ensuite le nombre de fois où cette différence est positive.

On divise ensuite ce nombre par le nombre total de simulations.

Ci-dessous, des illustrations de la probabilité de récupérer le capital, calculée par l'EIOPA dans les deux cas et selon chaque stratégie d'investissement.

Il faut noter que les stratégies illustrées sont les stratégies précédemment définies :

- BH : Buy-and-Hold
- FP : Fixed Portofolio
- Guarantees
- LC_Age: Step linear decline with age, Step decline with age, Linear decline with age
- LC_Balance: Smooth decline according to age and balance level, Step decline according to age and balance level
- Reserves_cont: Reserves from contributions
- Reserves_rtn: Reserves from returns

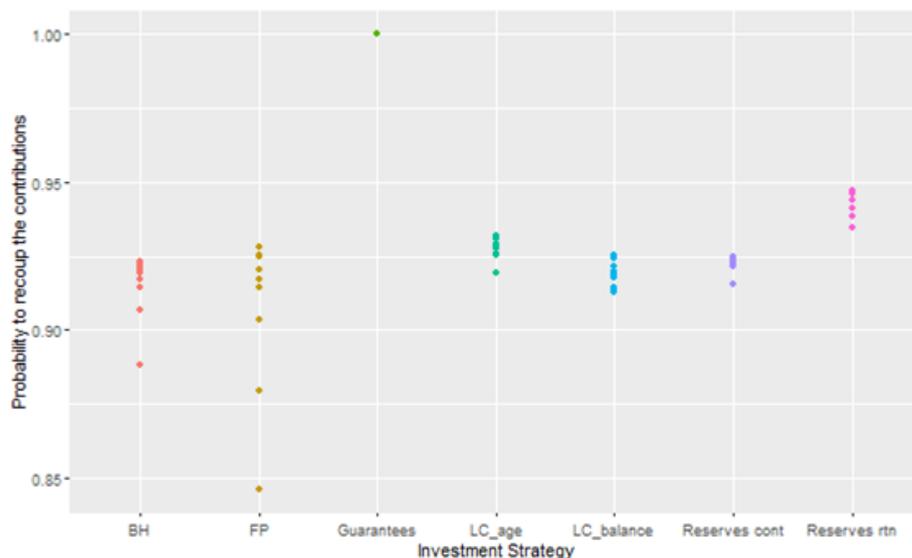


Figure 7 : Probabilité de récupérer le capital avec prise en compte des frais (source EIOPA)

Nous constatons d'après les résultats de l'EIOPA, que pour la majeure partie des stratégies d'investissement précédemment décrites, la probabilité de récupérer le capital cotisé y compris avec la prise en compte des frais, se trouve entre 90% et 95%. Par ailleurs les stratégies ayant une probabilité en dessous de 90% sont celles avec une faible exposition aux risques des actifs de type actions comme les *Fixed Portfolio* et les *Buy-and-Hold* avec 40% d'actions sur toute la durée de projection.

En effet, les stratégies utilisant de faibles proportions en actions sont sujettes à de faibles rendements sur les investissements sur la période de projection. Cela peut s'expliquer par le caractère volatile des taux de rendements des actions qui varient tout au long de la projection et peuvent ou non produire des taux de rendements élevés. A contrario, les taux d'intérêts nominaux des obligations sont eux constants et ne permettent pas d'espérer une surperformance des stratégies.

Ainsi, les stratégies d'investissements les mieux adaptées pour avoir une meilleure certitude de récupérer les capitaux cotisés et investis sont celles prenant en compte plus d'actifs de type actions comme les *Life cycle investment*, les *Guarantees* et les stratégies établies sur la base des provisions (*Reserves from contributions and/or investment returns*).

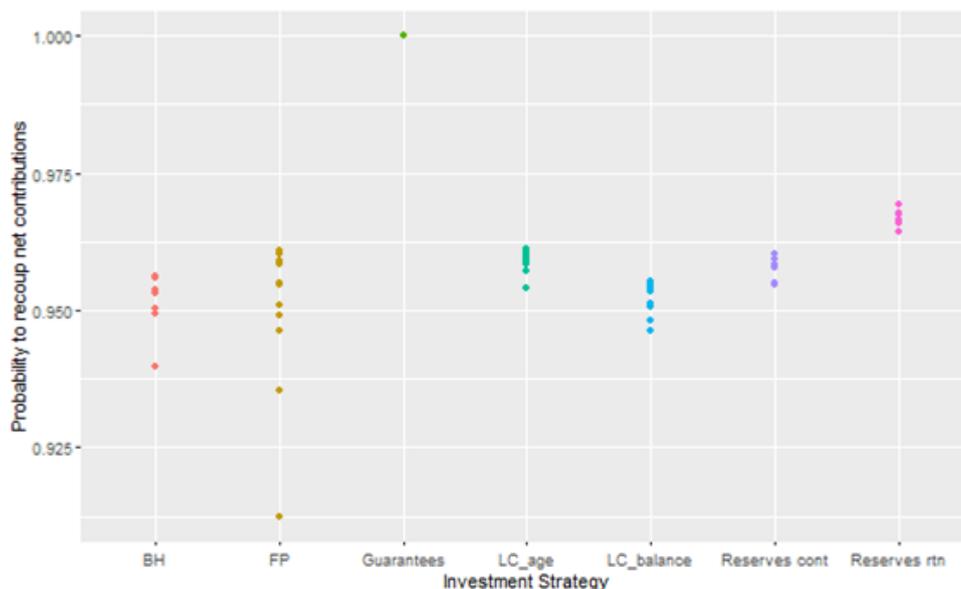


Figure 8 : Probabilité de récupérer le capital sans prise en compte des frais (source EIOPA)

Lorsqu'on évalue la probabilité de récupérer les capitaux investis sans prendre en compte les frais, on constate que toutes les stratégies d'investissement permettent d'atteindre une probabilité au-delà de 95% à l'exception de la stratégie *fixed portfolio* avec 0% d'actions. Cette dernière a une probabilité de 91%. En effet, il est facile d'atteindre l'objectif de récupérer le capital investi dans ce cas en raison de l'absence de frais.

Les résultats obtenus par l'EIOPA permettent d'établir un seuil de probabilité à partir duquel les stratégies d'investissements pourraient être qualifiées de valides. Ainsi, le seuil de 99% pour la probabilité de récupérer le capital investi a été établi pour toutes les stratégies et un seuil de 95% a été établi pour les stratégies où l'investissement se fait sur une période inférieure à 10 ans.

On note donc qu'en considérant les résultats obtenus, même avec des cotisations nettes de frais, le seuil de 99% est trop élevé car aucune des stratégies, hormis celle des *Guarantees*, ne permet d'obtenir cette probabilité. Avec ce seuil, les stratégies ne sont donc pas valides.

2.3.2 Déficit attendu

En combinaison avec la probabilité de ne pas récupérer le capital, un indicateur intéressant qu'a évoqué le document de l'EIOPA est la valeur qui permettrait d'évaluer dans quelle mesure le montant total cotisé et investi est en dessous du montant total cotisé par l'assuré hors investissement. En effet, si le montant total cotisé et investi à la retraite est inférieur à la somme des cotisations, mais proche de celle-ci, le risque pour l'individu est limité.

Ainsi, il s'agit de calculer le déficit attendu dans le cas où le montant cotisé à la retraite est inférieur à la somme des cotisations. Le modèle nous permet de calculer le déficit attendu, en faisant la différence moyenne entre :

- Le montant total cotisé et investi, récupéré à l'âge de la retraite
- Le total des cotisations, sachant que le capital cotisé et investi n'est pas totalement récupéré par l'assuré à l'âge de la retraite

Plus le manque à gagner attendu est important, plus le risque que l'épargnant obtienne un montant total cotisé et investi bien inférieur au montant total cotisé est grand.

Ci-dessous, une illustration du déficit attendu calculé par l'EIOPA selon chaque stratégie.

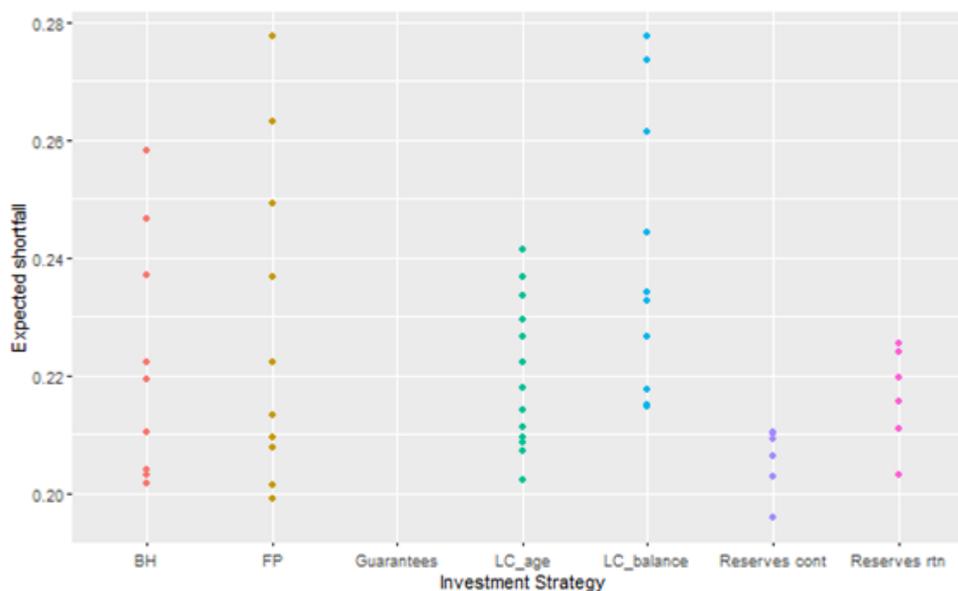


Figure 9 : Déficit attendu par l'épargnant en cas de non-récupération du capital accumulé (source EIOPA)

Cette illustration nous permet de constater qu'en cas de non-récupération du capital investi, le manque à gagner se situe entre 19% et 28% pour l'ensemble des stratégies d'investissements. En effet, dans cet intervalle, les stratégies les plus à risques, donc ayant une forte composition en actions, se rapprochent des 28% de manque à gagner, tandis que les autres s'en éloignent, pour rester autour des 19% de manque à gagner. Ainsi, plus la

stratégie d'investissement a une forte composition en actifs de type actions et plus cette stratégie s'expose à un plus grand manque à gagner.

2.3.3 Montants les plus faibles attendus

Lorsqu'un épargnant cotise son argent pour la retraite, son but n'est pas seulement de récupérer le capital cotisé au départ de la retraite, mais de faire fructifier la somme cotisée. Cependant, les épargnants PEPP doivent être conscients qu'ils ne pourront pas toujours avoir un excellent rendement des investissements faits sur leurs cotisations.

Les distributions des montants investis peuvent rendre compte du risque d'obtenir de faibles rendements sur ces montants. Il s'agit notamment de certaines positions sur les distributions comme le 5^e centile pour montrer le capital accumulé dans le pire des scénarios par exemple. Ces distributions peuvent servir à établir des scénarios de rendement pour le KID et/ou des projections des prestations de retraite.

Le document de l'EIOPA fait référence à trois scénarios principaux : mauvais rendements, rendements moyens, très bons rendements. Ces scénarios correspondent en général au 25^e centile, 50^e centile (médiane) et 75^e centile, respectivement :

- Scénario défavorable : 25^e centile, c'est-à-dire la valeur telle que, dans 25 % des cas, la somme forfaitaire lui serait inférieure,
- Scénario intermédiaire : médiane, c'est-à-dire la valeur telle que, dans 50 % des cas, la somme forfaitaire lui serait inférieure,
- Scénario favorable : 75^e centile, c'est-à-dire la valeur telle que, dans 75 % des cas, la somme forfaitaire lui serait inférieure.

Ci-dessous, une illustration du 5^e centile de la distribution des cotisations investies, calculé par l'EIOPA selon chaque stratégie.

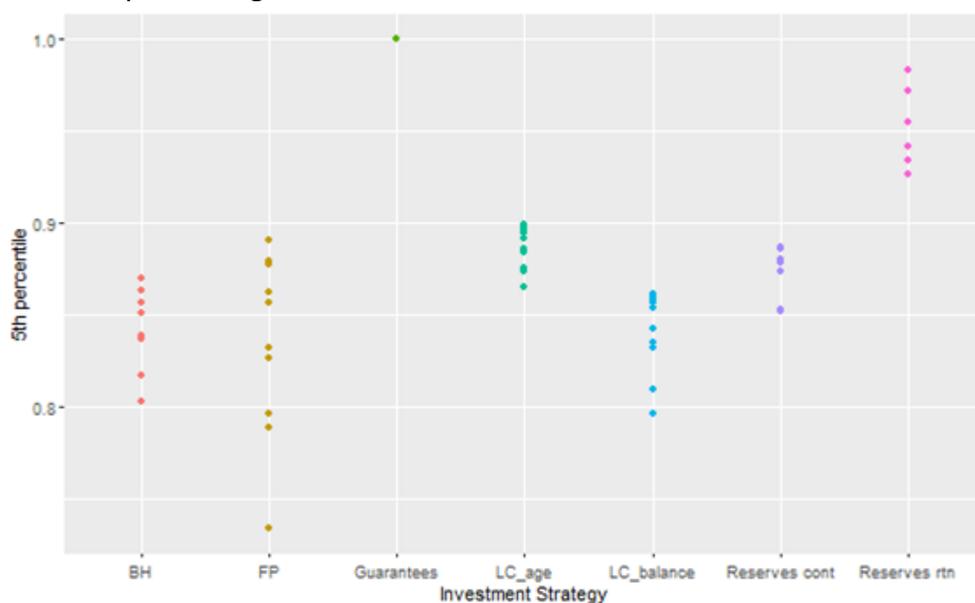


Figure 10 : Illustration du 5^e centile de la distribution pour toutes les stratégies d'investissement (source EIOPA)

Le 5^e centile de la distribution comme décrit plus haut permet de se rendre compte des pires scénarios qui pourraient être envisagés. On constate que pour les stratégies ayant une faible composante en actions, les rendements obtenus sont négatifs car les cotisations obtenues à la fin de la phase d'accumulation sont inférieures aux cotisations initiales hors investissement (entre 74% et 80% des cotisations sont récupérées). De même pour les stratégies avec un niveau de risque élevé comme les *Guarantees_100%*, les *Guarantees_90%*, les *Reserves_from_investment_returns*, etc..., les cotisations accumulées restent en deçà des cotisations hors investissement (90% des cotisations sont récupérées).

2.3.4 Dispersion de la distribution des montants cotisés par l'épargnant

Les différents indicateurs évoqués dans le document de l'EIOPA permettent de quantifier les risques associés aux placements et aux choix faits par le cotisant PEPP. Cependant, pour permettre à ce dernier d'avoir plus de clairvoyance sur son investissement pour une meilleure retraite, la réglementation exige la mise en place d'un indicateur unique basé sur une notation ou une échelle permettant au cotisant de se rendre compte par lui-même des avantages et des inconvénients de son choix. Cet indicateur est le SRI (Summary Risk Indicator).

En effet, il s'agirait d'évaluer le risque de s'éloigner de l'objectif de la retraite en liant le caractère risqué des stratégies d'investissements aux variations des distributions des sommes cotisées (les performances réalisées). Ainsi, il faudrait mesurer la dispersion des sommes cotisées investies en se basant sur la répartition de ces dernières. En fait, plus la dispersion est grande et plus le cotisant sera loin d'atteindre son objectif de retraite. La deuxième étape sera donc de catégoriser (construire une notation) chacune des stratégies d'investissements sur une échelle pour un meilleur choix de celles-ci en se basant sur cette dispersion.

Afin d'évaluer la dispersion, de nombreuses mesures peuvent être utilisées. Nous allons nous intéresser ici aux quatre mesures principales choisies par l'EIOPA : le Range R (l'étendue), l'Inter-quartile Range IQR (l'écart entre le premier et le troisième quartile), l'écart-type SD et le coefficient de variation CSD associé à l'écart-type.

2.3.4.1 **Étendue**

L'étendue représente une des mesures les plus élémentaires de la dispersion. En effet, il s'agit de la différence entre les valeurs maximales et les valeurs minimales de la distribution. Elle prend donc en compte les valeurs extrêmes de la distribution.

Ci-dessous une illustration par stratégie de l'étendue calculée par l'EIOPA.

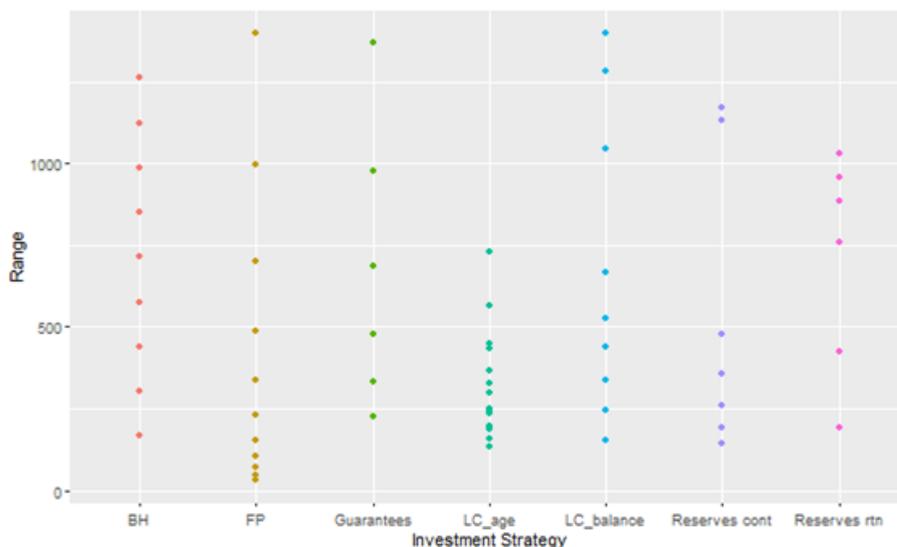


Figure 11 : L'étendue (range) pour chacune des stratégies (source EIOPA)

On constate que plus les stratégies sont risquées et plus l'étendue de la distribution des cotisations est grande.

2.3.4.2 Étendue Interquartile

L'interquartile Range (IQR) encore appelé l'étendue interquartile, permet d'évaluer l'étendue de la dispersion entre le premier quartile et le troisième quartile. Du fait de sa définition, elle ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la distribution.

Ci-dessous, une illustration par stratégie de l'IQR calculée par l'EIOPA.

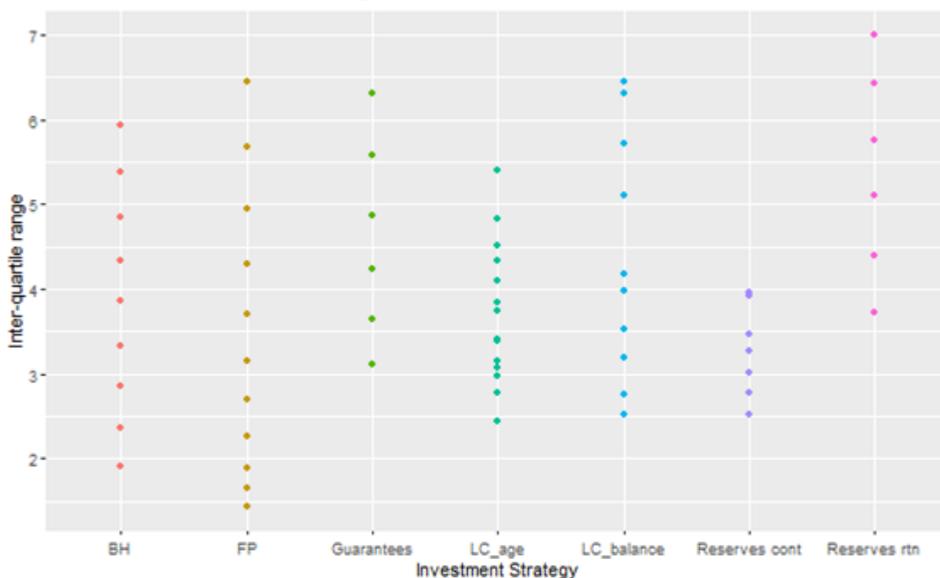


Figure 12 : L'étendue interquartile de chaque stratégie d'investissement (source EIOPA)

Nous pouvons constater que l'IQR se trouve entre 1,4 et 6,9 pour l'ensemble des stratégies d'investissement. Cela traduit donc que la différence entre le premier quartile et le troisième quartile représente un multiple entre 1,4 et 6,9 de la somme totale cotisée. Nous pouvons nous rendre compte de l'écart existant entre les quartiles de la distribution des montants cotisés. De plus, les écarts interquartiles les plus grands sont associés aux stratégies ayant une forte exposition aux actions.

2.3.4.3 Écart-type

L'écart-type est la racine carrée de la somme des différences au carré par rapport à la moyenne divisée par le nombre d'observations moins un. Par conséquent, plus la distribution est dispersée, plus il y a de valeurs éloignées de la moyenne et plus l'écart-type est grand.

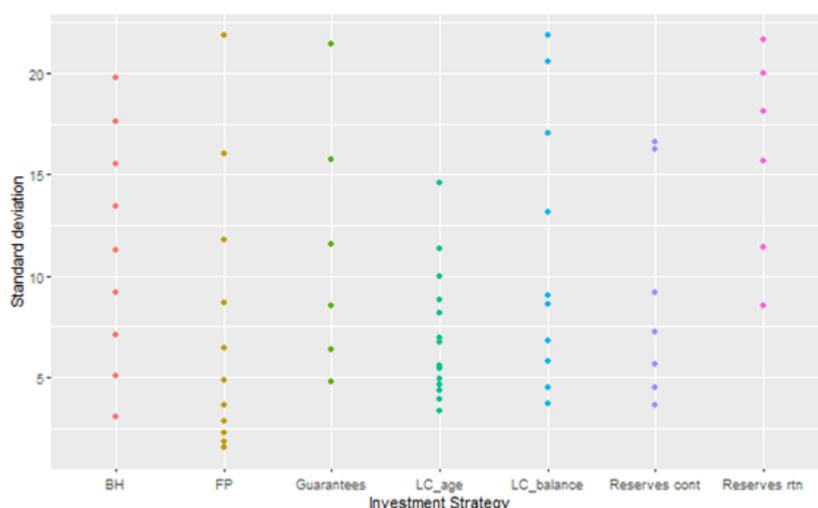


Figure 13 : L'écart type de la distribution de chacune des stratégies (source EIOPA)

Le graphe ci-dessus nous montre la dispersion de la distribution de chacune des stratégies d'investissement autour de leur moyenne. Cette illustration est basée sur les calculs de l'EIOPA.

Nous pouvons constater à partir de ce graphe que les stratégies ayant le plus de composantes en actions sont celles ayant le plus des distributions dispersées autour de leurs moyennes. Cela confirme bien les résultats du calcul de l'étendue (Range) qui montrent que les stratégies les plus risquées sont celles ayant une étendue plus grande.

2.3.4.4 Coefficient de variation

Enfin, le coefficient de variation CSD est une mesure relative de la variation standard. C'est le rapport entre l'écart-type et la moyenne. Il montre l'étendue de la variabilité par rapport à la moyenne. L'avantage par rapport à l'écart-type est qu'il peut être exprimé en pourcentage.

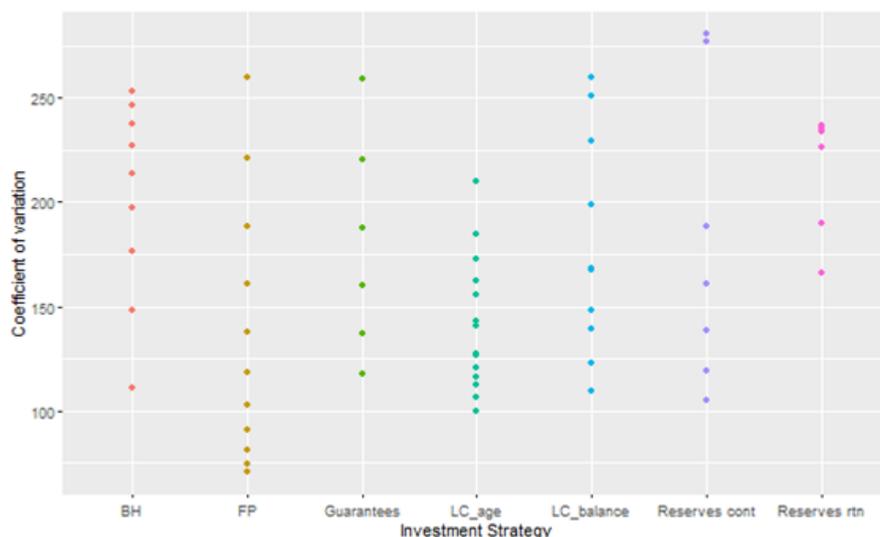


Figure 14 : Coefficient de variation de la distribution des stratégies (source EIOPA)

Le graphe ci-dessus nous présente le coefficient de variation de la distribution de chacune des stratégies d'investissement. Cette illustration est basée sur les calculs de l'EIOPA.

Nous pouvons constater que le coefficient de variation évolue entre 70% et 280% autour de la moyenne. Les stratégies se basant sur des réserves comme « *Reserves from investment returns* » et « *Reserves from contributions* », ont tendance à produire des coefficients de variation très similaires, autour de 225% de la moyenne, malgré les différentes expositions stratégiques aux actions.

2.4 Indicateurs de performance ou de potentielle rentabilité

Bien qu'évaluer les risques associés aux stratégies d'investissements soit très important pour le cotisant PEPP, il est aussi important d'évaluer la performance associée à chacune d'elle. Pour ce faire, l'EIOPA a évoqué deux indicateurs, à savoir le montant attendu après investissement et la probabilité d'atteindre les ambitions du cotisant.

2.4.1 Gain potentiel d'une stratégie d'investissement

Le gain potentiel d'une stratégie d'investissement peut être mesuré en fonction du montant attendu après investissement. Mathématiquement, la valeur attendue d'une variable est la moyenne pondérée en fonction des probabilités de toutes ses valeurs possibles.

Dans notre cas, toutes les valeurs ont la même probabilité de se produire, de sorte que la somme attendue après investissement est simplement la moyenne de toutes les simulations des sommes attendues après investissement.

Cependant, se baser sur la moyenne de toutes les simulations des montants attendus n'est pas une méthode sûre. En effet, la moyenne est très sensible aux valeurs extrêmes. On pourrait considérer la médiane comme une mesure alternative plus robuste. Il s'agit du point médian de la distribution, c'est-à-dire la valeur telle que dans 50% des cas, la somme investie serait inférieure aux cotisations.

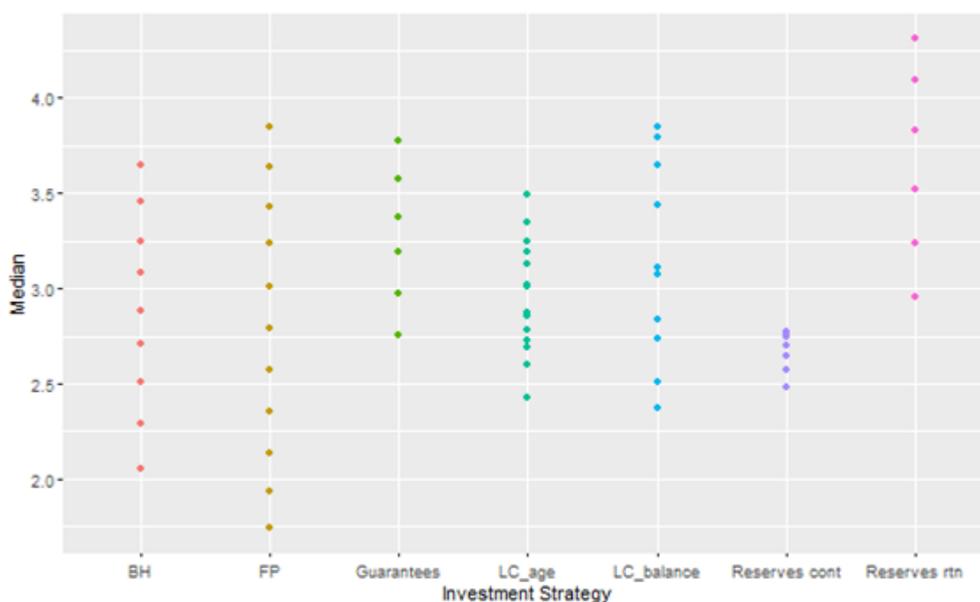


Figure 15 : Somme médiane attendue après investissement pour chacune des stratégies (source EIOPA)

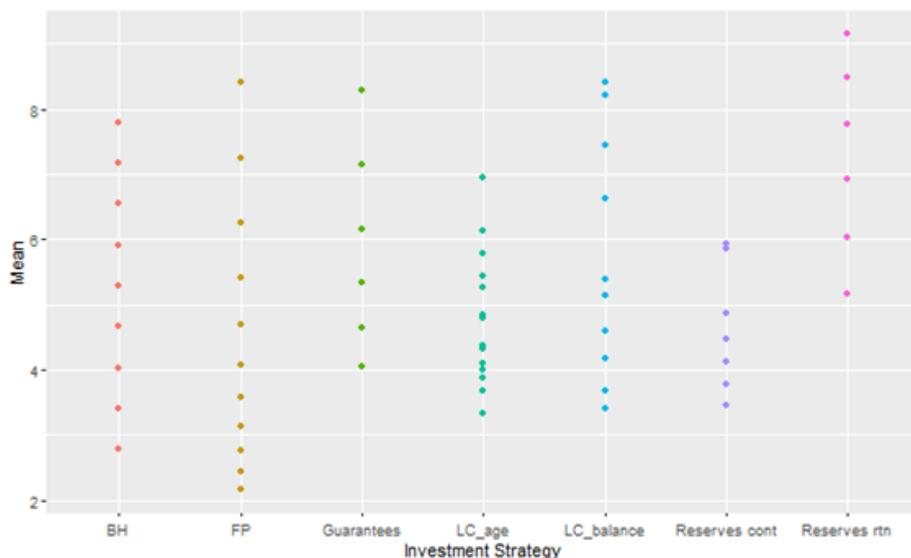


Figure 16 : Somme moyenne attendue après investissement pour chacune des stratégies (source EIOPA)

Les illustrations de l’EIOPA nous permettent de constater que la distribution moyenne des cotisations investies est plus dispersée que la distribution médiane pour les stratégies d’investissement. Cela s’explique bien puisque la moyenne est toujours plus sensible aux valeurs extrêmes que la médiane.

Cependant, en termes de classement pour les stratégies d’investissement, on retrouve la même tendance. En effet, dans les deux cas, plus la stratégie a des composantes en actions et plus cette dernière assure une meilleure espérance pour les rendements des cotisations investies.

2.4.2 Probabilité d'atteindre un certain niveau d'ambition

La performance d'une stratégie d'investissement pourrait également être mesurée par sa capacité à atteindre l'ambition du cotisant. L'EIOPA a fait référence à trois objectifs différents pour les options d'investissement en PEPP :

- Protéger l'épargne accumulée contre l'inflation
- Atteindre au moins le taux sans risque à long terme en utilisant le taux à terme ultime publié par l'EIOPA (UFR) à la date des projections
- Limiter la dispersion des avantages futurs

L'ambition de protéger l'épargne accumulée de l'inflation équivaut à atteindre un rendement moyen au cours de la phase d'accumulation au moins égal à l'inflation moyenne. On se base donc sur le modèle stochastique pour estimer la probabilité de ce rendement moyen, en calculant la proportion de simulations où la somme investie est égale ou supérieure à la somme des cotisations réelles, avant frais.

L'ambition d'atteindre au moins le taux sans risque à long terme équivaut à atteindre un rendement moyen sur la phase d'accumulation au moins égal à l'UFR actuel (3,45% en 2022).

La probabilité d'atteindre ce rendement moyen pourrait être estimée en calculant la proportion de simulations où le montant investi est égal ou supérieur au montant investi qui serait obtenu avec un portefeuille offrant un rendement de 3,45 % chaque année. Cela ne signifie pas que la stratégie d'investissement atteindrait un rendement de 3,45 % chaque année, mais plutôt que le rendement annuel composé sur l'ensemble de la phase d'accumulation serait d'au moins 3,45 %.

L'ambition de limiter la dispersion des rendements futurs peut être évaluée en se basant sur la dispersion des sommes cotisées investies.

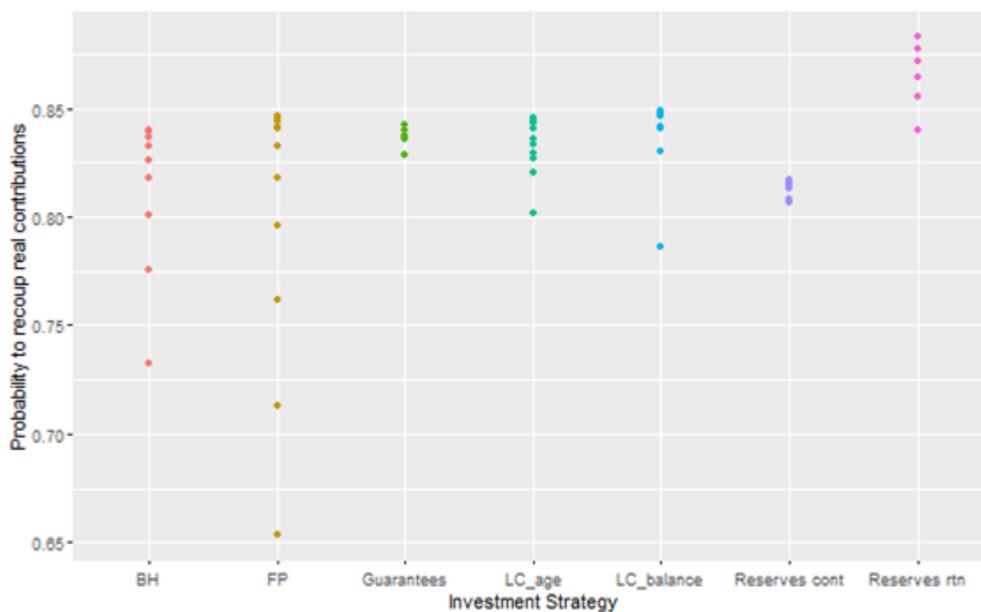


Figure 17 : Probabilité de récupérer la totalité des montants cotisés et investis pour l'ensemble des stratégies d'investissement (source EIOPA)

Le graphe ci-dessus, basé sur les calculs de l'EIOPA, présente pour l'ensemble des stratégies d'investissement, la probabilité de récupérer la totalité des montants cotisés et investis. Comme expliqué précédemment, il s'agit d'évaluer la probabilité de protéger l'épargne contre l'inflation.

Les résultats du graphique nous montrent que pour la majeure partie des stratégies (les *Garantées*, les *Life cycle investment*, les *Reserves from contributions*), la probabilité calculée se trouve dans l'intervalle $[0,80 ; 0,85]$. De même, pour les stratégies *Buy-and-Hold*, *Fixed Portfolio*, cette probabilité se trouve dans le même intervalle hormis les stratégies ayant une faible proportion en actifs.

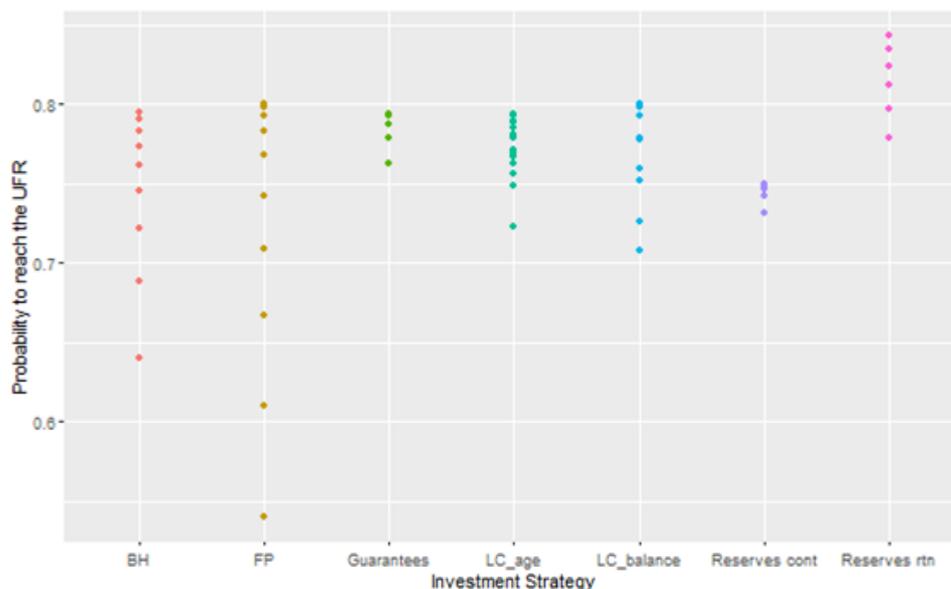


Figure 18 : Probabilité d’obtenir un rendement moyen équivalent au taux sans risque de l’EIOPA (UFR) pour l’ensemble des stratégies d’investissement (source EIOPA)

L’ambition d’atteindre au moins le taux sans risque à long terme équivaut à atteindre un rendement moyen sur la phase d’accumulation au moins égal à l’UFR actuel (3,45% en 2022).

Les résultats du graphique nous montrent que pour la majeure partie des stratégies (les *Guarantees*, les *Life cycle investment*, les *Reserves from contributions*), la probabilité calculée se trouve dans l’intervalle [0,75 ; 0,80]. De même, pour les stratégies *Buy-and-Hold*, *Fixed Portfolio*, cette probabilité se trouve dans le même intervalle hormis les stratégies ayant une faible proportion en actifs.

2.5 Couple Risque/Rentabilité

Comme expliqué précédemment, les indicateurs de risque et de performance pris individuellement ne permettent que partiellement d'expliquer l'impact des stratégies d'investissements sur le rendement attendu par le cotisant à son départ à la retraite.

Ainsi pour pouvoir choisir les meilleures stratégies selon sa situation personnelle, le cotisant a besoin d'une information compréhensible d'un coup d'œil comme une échelle ou une notation sur les stratégies.

Pour construire cette échelle, l'EIOPA recommande la mise en place d'un indicateur sommaire regroupant conjointement les indicateurs de risques et les indicateurs de performance. Il s'agit du SRI (Summary Risk Indicator). En effet, les indicateurs calculés peuvent être divisés en catégories pour construire les classes de l'indicateur de risque sommaire (SRI). Une façon de créer les classes du SRI pourrait être de choisir des portefeuilles de référence qui représenteraient le comportement de différentes catégories.

Les seuils de division des classes pourraient être établis en examinant la dispersion des portefeuilles de référence et en s'assurant que chaque portefeuille de référence appartient à une classe différente. Par exemple, les seuils pourraient être définis comme le point médian entre les indicateurs de dispersion de deux portefeuilles de référence adjacents. Les stratégies d'investissement aboutissant à un indicateur de dispersion proche de celui d'un portefeuille de référence donné seraient donc classées dans la même catégorie.

Korn et Wagner (2018) ¹⁵utilisent cette approche pour construire les classes de la classification performance-risque.

¹⁵[Innovations in Insurance, Risk- and Asset Management \(468 Pages\) \(worldscientific.com\)](https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/9789814681111_0015)

2.5.1 Description de la méthode de classification

Cette description se base sur la méthode décrite dans le livre Korn et Wagner (2018).

Les différentes étapes de construction de l'indicateur de risque sommaire se présentent comme suit :

- Choisir un portefeuille de référence qui représente le comportement de plusieurs stratégies d'investissement. Chaque portefeuille de référence appartient à une classe différente. Chaque classe CRC^{16} représente une note sur l'échelle de notation. Ainsi, en classifiant une stratégie dans une classe CRC on lui attribue une notation.
- Établir des seuils de division des classes du SRI. Les seuils de division des classes du SRI sont établis en examinant la dispersion des portefeuilles de référence. Un seuil est défini en calculant le point médian entre les indicateurs de dispersion (Moyenne, Étendue, IQR, Écart-type, Coefficient de variation) de deux portefeuilles de référence adjacents. Pour séparer les différentes classes, on trace des droites de coefficient directeur respectifs -1 qui passent par le point médian.
- On représente ensuite graphiquement l'indicateur de performance en fonction de l'indicateur de risque. On ajoute à ce graphique les droites associées aux classes CRC et les points associés à chacune des stratégies d'investissements.
- Il y a environ 10000 simulations par année. Les stratégies aboutissant à un indicateur de dispersion proche de celui d'un portefeuille de référence donné sont classées dans la même catégorie.
- Pour le choix des portefeuilles de référence, on peut par exemple prendre un portefeuille d'obligations notées AAA – ayant pour maturité la période de cotisation pour le CRC_1 . Pour le CRC_5 on peut prendre un portefeuille rempli d'actions avec une volatilité de 20%.

¹⁶ Chance-Risk Classification

2.5.2 Application de la méthode de classification par l'EIOPA

Dans son document, l'EIOPA applique la méthode précédemment décrite à ses différentes stratégies d'investissements. En effet, dans le document, l'indicateur de risque choisi est, dans un cas, l'indicateur Écart-type (*Standard Deviation*) associée à la dispersion des distributions des cotisations et, dans l'autre cas, l'indicateur Mean Low Lump Sum (moyenne du 20^e centile des distributions). Dans chacun des cas, l'indicateur de performance est l'indicateur Mean correspondant à la moyenne des distributions des cotisations.

L'échelle de notation est {CRC1 ; ... ; CRC4}. Les stratégies d'investissement dans la classe CRC1 se caractérisent par un faible risque et un faible potentiel de rendement. En revanche, les stratégies d'investissement dans la classe CRC4 se caractérisent par un risque élevé et un potentiel de rendement élevé.

Pour les portefeuilles de référence, l'EIOPA a choisi quatre portefeuilles tels que :

- Portefeuille 1 = {No equity exposure \Rightarrow 100% d'obligations}
- Portefeuille 2 = {30% equity exposure \Rightarrow 30% d'actions et 70% d'obligations}
- Portefeuille 3 = {50% equity exposure \Rightarrow 50% d'actions et 50% d'obligations}
- Portefeuille 4 = {80% equity exposure \Rightarrow 20% d'actions et 80% d'obligations}

Chaque portefeuille est respectivement associé à une classe de CRC1 à CRC4.

Voici les résultats graphiques de l'EIOPA des deux classifications :

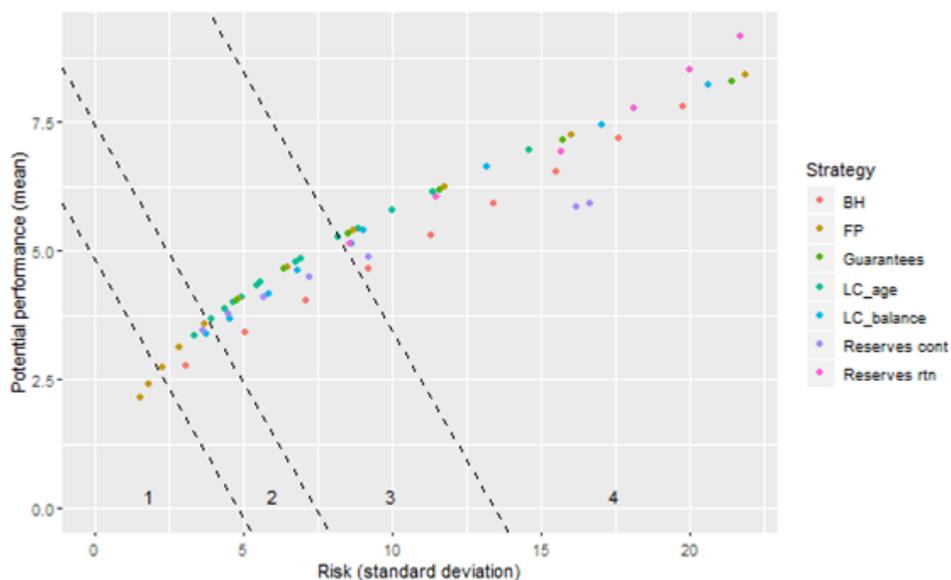


Figure 19 : Graphique de classification de l'EIOPA utilisant l'écart-type et la moyenne du 20^e centile des distributions pour l'ensemble des stratégies d'investissement. (source EIOPA)

La première illustration présente la classification des stratégies selon le couple *Standard Deviation/Mean*. Dans cette première illustration, on constate pour les 64 stratégies d'investissements, que la plupart des catégories de stratégies ayant une forte performance

ont un risque assez élevé. En effet, cela s’explique par le fait que ces stratégies aient une forte proportion d’actions et donc une forte exposition aux risques du marché.

L’utilisation de cette combinaison nous montre que certaines stratégies avec une forte composante en actions réalisent quand même une faible performance. Par exemple, la stratégie Fixed Portofolio (FP) avec une composition à 60% d’actions produit un faible rendement et est dominé par les autres stratégies de type Fixed Portofolio (FP). On constate en effet, qu’ils produisent des rendements équivalents à leur exposition au risque. Cela est illustré dans le deuxième graphique.

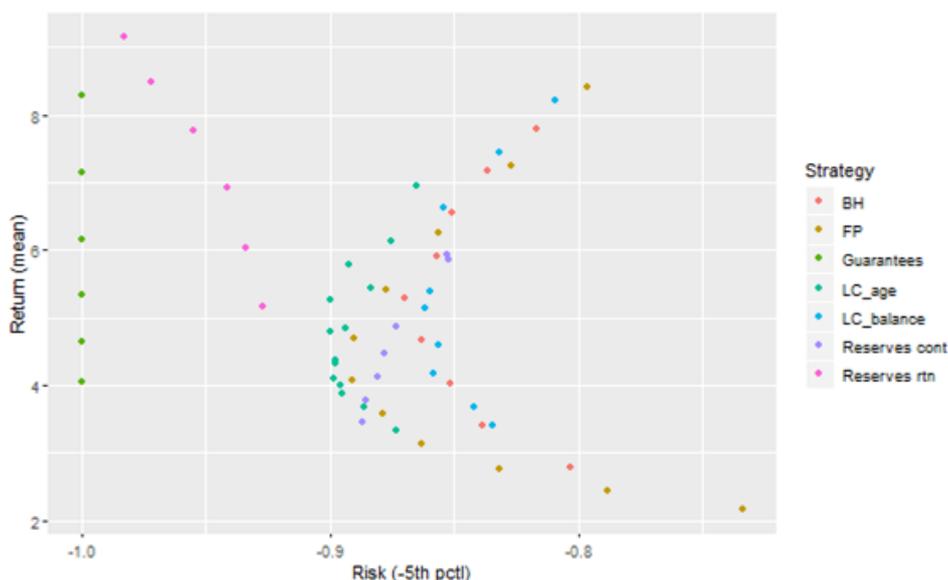


Figure 20 : Indicateur risque-performance utilisant le 5e centile et la moyenne (source EIOPA)

Dans son étude, l’EIOPA a ensuite effectué une classification de stratégies selon les quatre indicateurs de dispersion précédemment étudiés (Range, IQR, Standard Deviation, Coefficient of Variation). Ci-dessous, deux exemples de cette classification avec quelques stratégies. Les tableaux suivants présentent une classification de certaines stratégies d’investissement selon un indicateur de risque sommaire. Les résultats de ce tableau sont issus du document de référence de l’EIOPA.

Tableau 1: Classification de certaines stratégies d'investissement selon un indicateur de risque sommaire (source EIOPA)

Stratégie	Range	IQR	SD	Coefficient
Buy and Hold 60%	4	4	4	4
Buy and Hold 30%	3	3	3	3
Buy and Hold 10%	2	2	2	2
FixedPortofolio80%	4	4	4	4
FixedPortofolio50%	3	3	3	3
FixedPortofolio 30%	2	2	2	2
Guarantees 100%	4	4	4	4
Guarantees 70%	4	4	4	4
Guarantees 50%	3	3	3	3
LC Linear decline with age	3	3	3	3
LC Step linear decline with agefrom 45 and from 100%	3	4	4	4
LC Step linear decline with agefrom 55 and from 90%	4	4	4	4
LC Step linear decline with agefrom 45 and from 60%	3	3	3	3
LC Step linear decline with agefrom 55 and from 70%	3	3	3	3
LC Step decline with age	2	2	2	2
LC Step decline according to age and balance level	2	2	2	2

Les stratégies classifiées sont des *Buy_and_Hold*, des *Fixed Portofolio*, des *Guarantees* et des *Life Cycle*.

Les indicateurs de risque sommaires ont été construits selon les couples suivants :

- Moyenne du 20^e centile des distributions / Étendue des distributions (Range)
- Moyenne du 20^e centile des distributions / Étendue interquartile des distributions (IQR)
- Moyenne du 20^e centile des distributions / Écart-type des distributions (SD)
- Moyenne du 20^e centile des distributions / Coefficient de variation des distributions (Coefficient).

A partir des résultats ci-dessus, nous pouvons constater que les stratégies les mieux classées sont celles ayant une forte composante en actifs de type action à savoir *Buy_and_Hold_60%*, *Fixed Portofolio 80%*, *Guarantees 100%*, *Guarantees 70%* et *LC Step linear decline with age from 55 and from 90%*. A contrario, celles ayant une forte composante en actifs de type obligations sont notées à 2 sur une échelle de 4.

Nous pouvons donc conclure que plus la stratégie d'investissement a une forte composante en actions et meilleure elle est.

Une classification de ces mêmes stratégies a été réalisée selon la période d'investissement.

Tableau 2 Classification de certaines stratégies d'investissement selon la période d'investissement (source EIOPA)

Stratégie	40 YEARS	30 YEARS	20 YEARS	10 YEARS	5 YEARS
Buy and Hold 60%	4	4	4	4	3
Buy and Hold 30%	3	3	3	2	2
Buy and Hold 10%	2	2	1	1	1
FixedPortfolio80%	4	4	4	4	4
FixedPortfolio50%	3	3	3	3	3
FixedPortfolio 30%	2	2	2	2	2
Guarantees 100%	4	4	4	4	4
Guarantees 70%	4	4	3	3	3
Guarantees 50%	3	3	3	3	3
LC Linear decline with age	3	3	3	2	2
LC Step linear decline with age from 45 and from 100%	4	4	3	2	2
LC Step linear decline with age from 55 and from 90%	4	4	3	3	2
LC Step linear decline with age from 45 and from 60%	3	3	2	2	2
LC Step linear decline with age from 55 and from 70%	3	3	3	3	2
LC Step decline with age	2	2	2	1	1
LC Step decline according to age and balance level	2	2	2	2	2

L'indicateur de risque sommaire a été construit selon le couple moyenne du 20^e centile des distributions / étendue des distributions (Range). Cet indicateur a ensuite été évalué pour différentes périodes d'investissement (40 ans, 30 ans, 10ans, 5ans). Nous entendons ici par période d'investissement la durée selon laquelle l'investissement est réalisé.

Nous pouvons constater que les stratégies ayant une forte composante en actions restent celles ayant les meilleures classifications. Par ailleurs, lorsque l'investissement est réalisé sur une courte période (entre 5 et 10 ans), l'indicateur sommaire des stratégies décroît. Nous pouvons conclure que les stratégies d'investissement, qu'elles soient fortement composées d'actions ou d'obligations, ont de meilleurs rendements sur une longue période. Cela peut s'expliquer par le fait qu'on observe une évolution à la hausse des taux de rendement dans le temps, principalement le taux de rendement des actions.

3 MISE EN ŒUVRE DE LA MODELISATION

La Gestion Actif-Passif (Asset Liabilities Management, en anglais) est une stratégie visant à maximiser la rentabilité des capitaux propres tout en maintenant un équilibre des risques financiers, tels que les risques liés aux taux d'intérêt, aux taux de change et à la liquidité. Son objectif est également de garantir une allocation adéquate des fonds propres, en ajustant l'activité aux fluctuations du marché ainsi qu'aux contraintes financières et réglementaires, y compris les ratios de prudence. Il s'agit, en essence, d'équilibrer les rendements tout en maîtrisant les risques.

La gestion active des fonds propres est en majeure partie assimilée aux techniques de gestion des risques, l'objectif étant notamment de maîtriser la sensibilité des résultats de l'entreprise à l'évolution des taux du marché. Par conséquent, le principe même de l'ALM est d'identifier, de mesurer et de contrôler les divers risques pouvant peser sur le bilan de l'entreprise.

Afin d'évaluer et de contrôler les risques, il est important d'avoir une perspective des divers scénarios économiques auxquels peut être soumis le marché. L'observation de ces derniers nécessite la réalisation d'une projection dans le temps. Cette projection peut se faire sous deux dynamiques selon la vision des acteurs du marché :

- Une projection déterministe qui consiste à projeter les différents flux futurs entrants et sortants en réponse à un unique scénario financier
- Une projection stochastique qui consiste à projeter les flux futurs entrants et sortants en réponse à un grand nombre de scénarios financiers, permettant donc de traduire un effet aléatoire et imprévisible dans les trajectoires du marché.

Chacune des projections peut également être réalisée sous deux différents univers à savoir :

- L'univers risque neutre où toutes les projections sont réalisées avec un taux sans risque. L'environnement risque neutre permet de travailler avec des actifs actualisés qui sont des martingales¹⁷
- L'univers monde réel où ce sont les taux réels du marché qui sont utilisés pour les projections

L'ensemble de ces simulations est possible grâce à un générateur de scénarios économiques.

Cependant, l'environnement risque neutre a deux défauts majeurs, le premier étant l'absence de primes de risque, le second, lié au premier, est que l'environnement risque neutre ne permet pas de réaliser d'études de gestion actif-passif car toutes les allocations stratégiques rapportent le même rendement, le taux sans risque. De ce fait, seule la volatilité peut être minimisée afin de choisir l'allocation optimale, cette allocation optimale étant l'allocation la plus diversifiée car elle permet de réduire la volatilité.

¹⁷**Martingales** : Dans ce contexte, les martingales impliquent une équitabilité entre la valeur de marché actualisée des actifs à l'instant t et la valeur de marché des actifs à l'instant 0

Un Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est une combinaison de modèles de différents taux, tels que les taux d'intérêt nominaux, les rendements des actions, les spreads, l'inflation, et les taux de crédit. Son rôle principal est de créer de manière aléatoire plusieurs scénarios envisageables pour l'évolution des marchés financiers. Ces échantillons de scénarios sont alors exploités comme des bases de travail pour évaluer les risques associés et la performance des produits financiers sur le marché.

Le modèle stochastique décrit dans le document de l'EIOPA, met en avant la modélisation du taux d'intérêt nominal, du taux d'inflation, des taux de rendements des actions et le spread de crédit. En effet, l'évaluation des profils de risques et de performances associés à des stratégies d'investissements nécessitent d'évaluer les potentiels risques financiers à savoir le caractère incertain des taux de rendements des obligations ainsi que des actions, et l'inflation.

Les diverses simulations de l'EIOPA sont obtenues en faisant des simulations de type Monte-Carlo qui parcourent 10 000 chemins de la figure d'intérêt¹⁸. Cependant, dans le cadre de nos travaux, nous avons réalisé des simulations de type Monte-Carlo qui parcourent 1000 chemins de la figure d'intérêt.

Dans la suite, nous allons décrire notre méthode d'implémentation et de calcul des différentes figures d'intérêts du modèle stochastique de l'EIOPA en précisant les données et les méthodes utilisées.

L'ensemble de ces méthodes et figures d'intérêt ont été implémentées sur Python.

Il faut noter que le modèle du spread de crédit n'a pas été implémenté par manque de temps.

¹⁸ Figure d'intérêt : Dans notre cas, la figure d'intérêt représente chacune des variables modélisées par le modèle stochastique.

3.1 Modèle du taux d'intérêt nominal

3.1.1 Présentation du modèle

Le modèle de taux nominal ¹⁹ retenu par l'EIOPA et dans le mémoire, est le modèle de taux G2++ tel qu'il est décrit par le livre Brigo et al. (2006)²⁰.

Il s'agit d'un modèle à deux facteurs c'est-à-dire qu'il est donné par la somme de deux facteurs gaussiens corrélés et d'une fonction déterministe choisie de manière à être adaptée aux deux facteurs. Ce modèle de taux est particulièrement utile pour la modélisation des rendements des obligations et des options sur ces obligations parce qu'il permet de modéliser des taux négatifs qui sont souvent très observés dans le monde réel.

La présence des deux facteurs permet une description plus précise de la variabilité des taux du marché. En fait, ils permettent un étalonnage plus précis en ce sens où il existe une corrélation imparfaite entre les taux de différentes maturités qui est mise en exergue par ces deux facteurs.

Ainsi, un tel modèle peut permettre de pricer²¹ les obligations et toute autre option associée à ces dernières.

La dynamique du taux nominal est donnée par la somme des deux facteurs $x(t)$ et $y(t)$ et d'un facteur de décalage déterministe. On a :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t) , \quad r(0) = r_0$$

Avec

$$\varphi(T) = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})$$

- $\varphi(T)$ le facteur de décalage déterministe
- $f^M(0, T)$, le taux forward instantané à la date initiale de projection de maturité T
- Les paramètres de la fonction $\varphi(T)$ sont définis ci-dessous.

Dans le modèle, les deux facteurs sont représentés par $x(t)$ et $y(t)$. L'équation stochastique différentielle des deux facteurs se présente comme suit :

¹⁹Un taux d'intérêt nominal peut se définir comme un taux d'intérêt ne prenant pas compte l'inflation.

²⁰Brigo, D., Mercurio, F.: Interest Rate Models – Theory and Practice, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001, 2006.

²¹Pricer un actif revient à calculer la valeur de marché de cet actif.

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1^{\mathbb{Q}}(t), \quad x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2^{\mathbb{Q}}(t), \quad y(0) = 0$$

Avec :

- a et $b > 0$ les vitesses de retour à la moyenne respectives des facteurs $x(t)$ et $y(t)$
- σ et $\eta > 0$, les volatilités respectives associées aux facteurs $x(t)$ et $y(t)$
- $W_1^{\mathbb{Q}}$ et $W_2^{\mathbb{Q}}$, deux processus de Wiener corrélés sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} tels que :

$$dW_1^{\mathbb{Q}}(t)dW_2^{\mathbb{Q}}(t) = \rho dt$$

ρ étant le facteur de corrélation des deux processus tel que $-1 \leq \rho \leq 1$

Le modèle décrit par Brigo et al. (2006) est énoncé pour une modélisation sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . Cependant le PEPP est un produit qui doit être pris en compte dans le monde réel. Le modèle doit donc être adapté à des calculs sous une probabilité monde-réel \mathbb{P} . Pour ce faire, une prime de risque indépendante du temps est intégrée au processus de Wiener sous la probabilité monde réel \mathbb{P} .

Ainsi, nous avons :

$$dW_i^{\mathbb{P}} = -\lambda_i dt + dW_i^{\mathbb{Q}}, \quad i = 1, 2$$

Avec λ_i la prime de risque.

Nous avons donc sous la dynamique de la mesure de \mathbb{P} , de nouvelles équations différentielles pour les deux facteurs $x(t)$ et $y(t)$ à savoir :

$$dx(t) = (\lambda_1 \sigma - ax(t))dt + \sigma dW_1^{\mathbb{P}}(t), \quad x(0) = 0$$

$$dy(t) = (\lambda_2 \eta - by(t))dt + \eta dW_2^{\mathbb{P}}(t), \quad y(0) = 0$$

3.1.2 Solution explicite et discrétisation

L'intégration nous permet d'obtenir l'expression suivante du taux court instantané $r(t)$, pour $s < t$:

$$r(t) = \varphi(t) + x(s)e^{-a(t-s)} + \lambda_1\sigma(1 - e^{-a(t-s)}) + y(s)e^{-b(t-s)} + \lambda_2\eta(1 - e^{-b(t-s)}) \\ + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1^{\mathbb{P}}(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2^{\mathbb{P}}(u)$$

On en tire les caractéristiques suivantes :

- Espérance :

$$E\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = x(s)e^{-a(t-s)} + \lambda_1\sigma(1 - e^{-a(t-s)}) + y(s)e^{-b(t-s)} + \lambda_2\eta(1 - e^{-b(t-s)}) \\ + \varphi(t)$$

- Variance :

$$Var\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2b(t-s)}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)(t-s)}]$$

Pour la suite, il est utile de disposer d'une expression en termes de processus de Wiener indépendants.

Pour ce faire, on écrit :

$$dW_1^{\mathbb{P}}(t) = d\tilde{W}_1^{\mathbb{P}}(t)$$

$$dW_2^{\mathbb{P}}(t) = \rho d\tilde{W}_1^{\mathbb{P}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}_2^{\mathbb{P}}(t)$$

Où $\tilde{W}_1^{\mathbb{P}}$ et $\tilde{W}_2^{\mathbb{P}}$ sont des processus de Wiener indépendants, et on obtient :

$$r(t) = \varphi(t) + x(s)e^{-a(t-s)} + \lambda_1\sigma(1 - e^{-a(t-s)}) + y(s)e^{-b(t-s)} + \lambda_2\eta(1 - e^{-b(t-s)}) \\ + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} d\tilde{W}_1^{\mathbb{P}}(u) + \eta\rho \int_s^t e^{-b(t-u)} d\tilde{W}_1^{\mathbb{P}}(u) \\ + \eta\sqrt{1 - \rho^2} \int_s^t e^{-b(t-u)} d\tilde{W}_2^{\mathbb{P}}(u)$$

Il existe une discrétisation exacte du processus :

$$r(t) = \varphi(t) + \lambda_1\sigma(1 - e^{-at}) + \lambda_2\eta(1 - e^{-bt}) \\ + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2at}] + \frac{\eta^2\rho^2}{2b} [1 - e^{-2bt}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)t}]} \cdot \varepsilon_1 \\ + \sqrt{\frac{\eta^2(1 - \rho^2)}{2b} [1 - e^{-2bt}]} \cdot \varepsilon_2$$

Où ε_1 et ε_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois normales centrées réduites.

3.1.3 Calibrage des paramètres du modèle

Les paramètres à calibrer sont : $a, b, \sigma, \eta, \rho, \lambda_1, \lambda_2$

Dans son document de référence, l'EIOPA précise sans aucune explication, la méthode utilisée pour le calibrage des dits paramètres. Il s'agit de l'application du Filtre de Kalman et de l'utilisation de l'algorithme d'optimisation nommé current-to-p-best.

Le Filtre de Kalman ainsi que l'algorithme d'optimisation nommé current-to-p-best, sont définis et expliqués en détail dans la partie Annexe. Il y est également présenté leurs applications au modèle de taux nominal.

3.1.4 Données utilisées

Les données utilisées²² pour les calculs sont les taux historiques de rendements sans risques de la BCE.

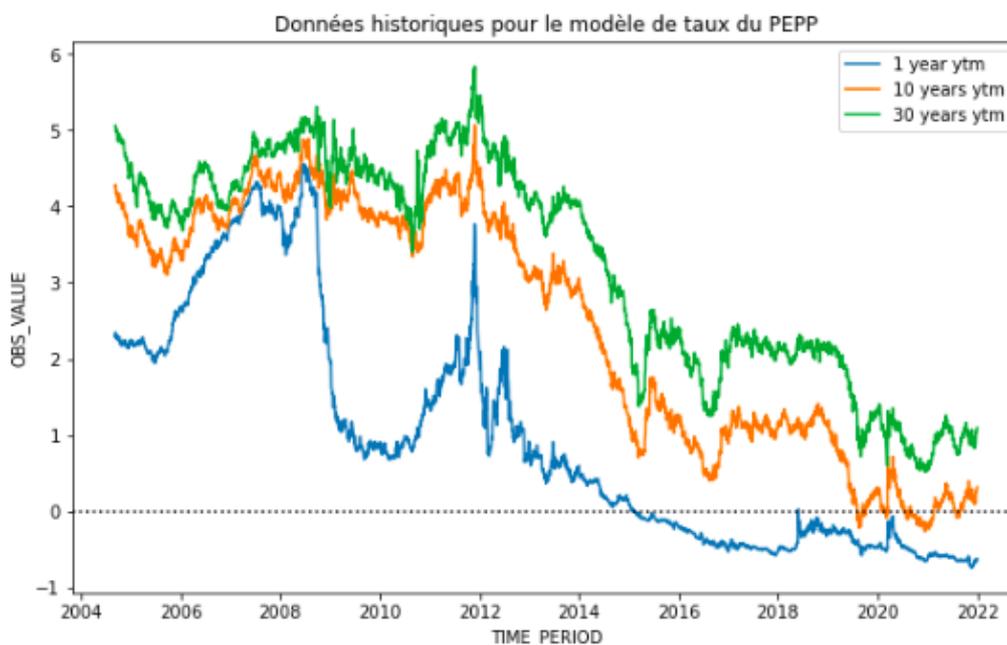
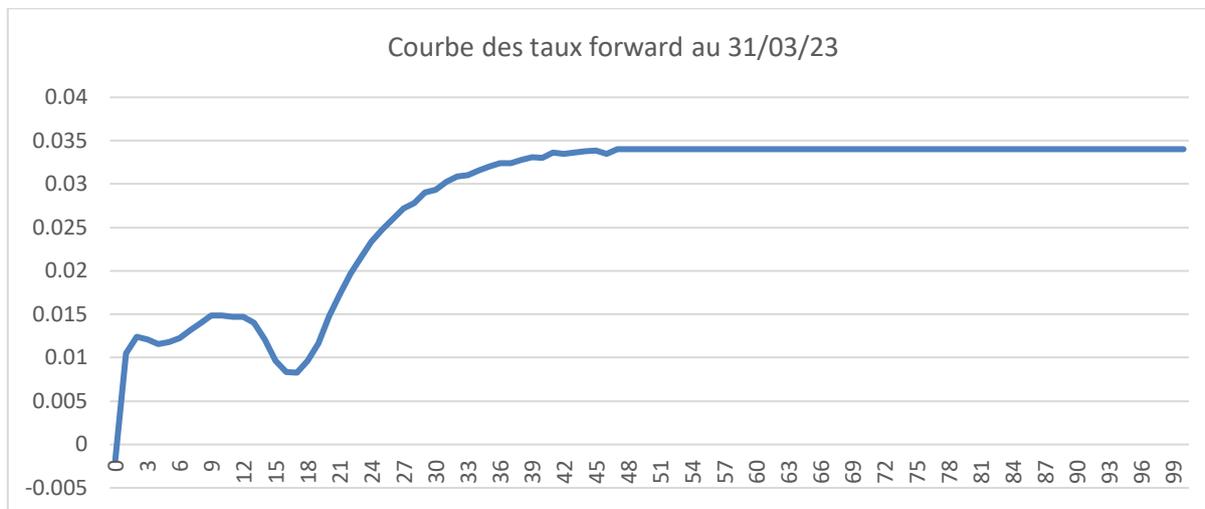


Figure 21 : Taux historiques de rendements sans risques de la BCE

Pour le calcul du gain de Kalman qui passe par l'évaluation et la mise à jour des taux de rendements à maturité, les taux « *All euro area central government bonds yield curve* » qui représentent les taux de rendements sans risque à maturité 1 an, 10 ans et 30 ans entre 2004 et 2022 sont utilisés.

²² L'ensemble des données utilisées sont celles choisies par l'EIOPA dans le document de référence.

De plus, la courbe des taux forward définie par $f^M(0, T)$ à la date du 31 mars 2023 a été utilisée pour le calcul des taux nominaux définie par $r(t)$.



3.1.5 Résultats du calibrage

A la suite de l'application du Filtre de Kalman et l'algorithme d'optimisation, nous avons obtenu les résultats suivants pour les paramètres :

$$\begin{aligned}
 a &= 0.45 \\
 b &= 0.038 \\
 \sigma &= 0.0017 \\
 \eta &= 0.00086 \\
 \rho &= 0.71 \\
 \lambda_1 &= 0.0097 \\
 \lambda_2 &= 0.0098
 \end{aligned}$$

3.1.6 Simulations

Les résultats obtenus après le calibrage des paramètres et la résolution des équations différentielles du modèle de taux nominal sont illustrés ci-dessous. Ces résultats sont le fruit de milliers de simulations sur une période de 40 ans. L'ensemble des méthodes de calibrage des paramètres, l'implémentation des solutions des équations différentielles du modèle ainsi que les simulations ont été effectuées sur Python. Il faut cependant noter que ces illustrations sont des échantillons représentatifs des résultats obtenus (une centaine de simulations).

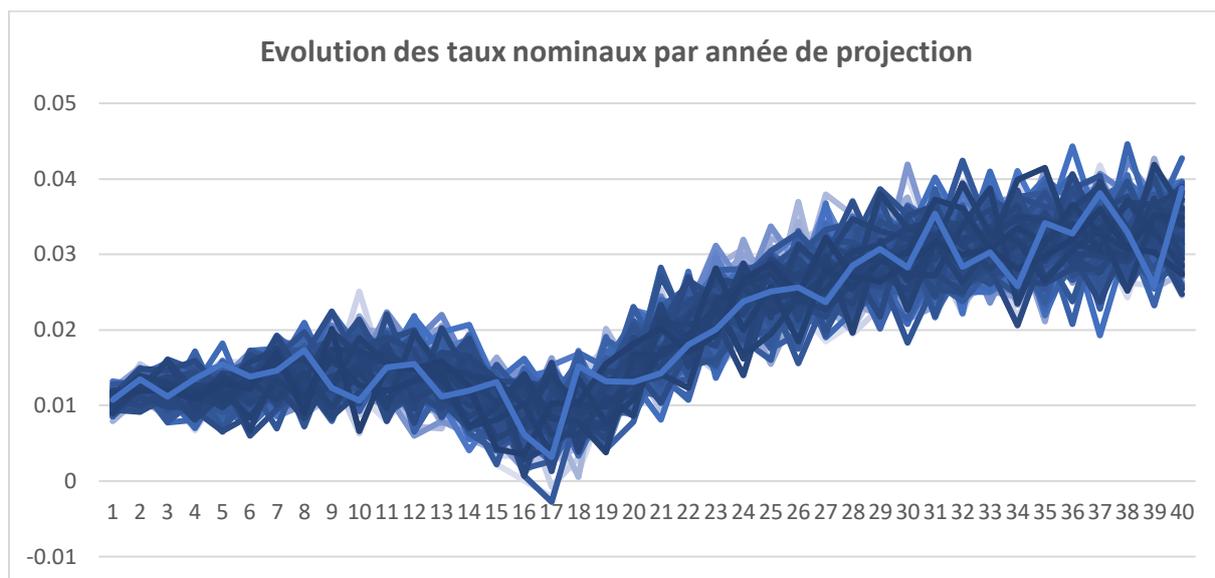
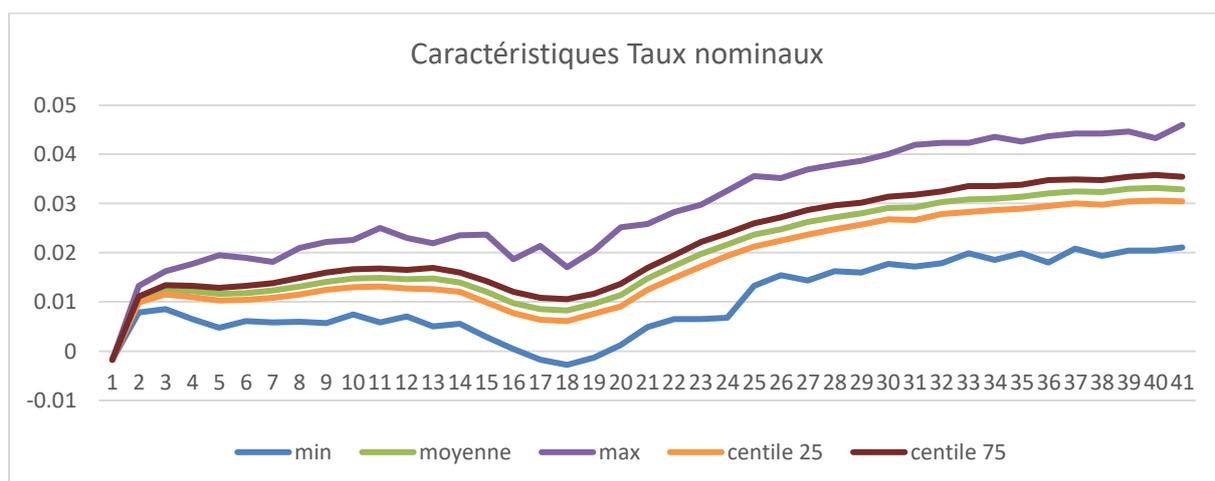


Figure 22 : Évolution des taux nominaux obtenus sur une période de 40 ans



Afin de nous assurer de la qualité des simulations que nous avons obtenues, nous avons effectué des tests statistiques afin de comparer l'espérance théorique du modèle à la moyenne empirique des résultats de nos simulations.

Voici une illustration des résultats obtenus :

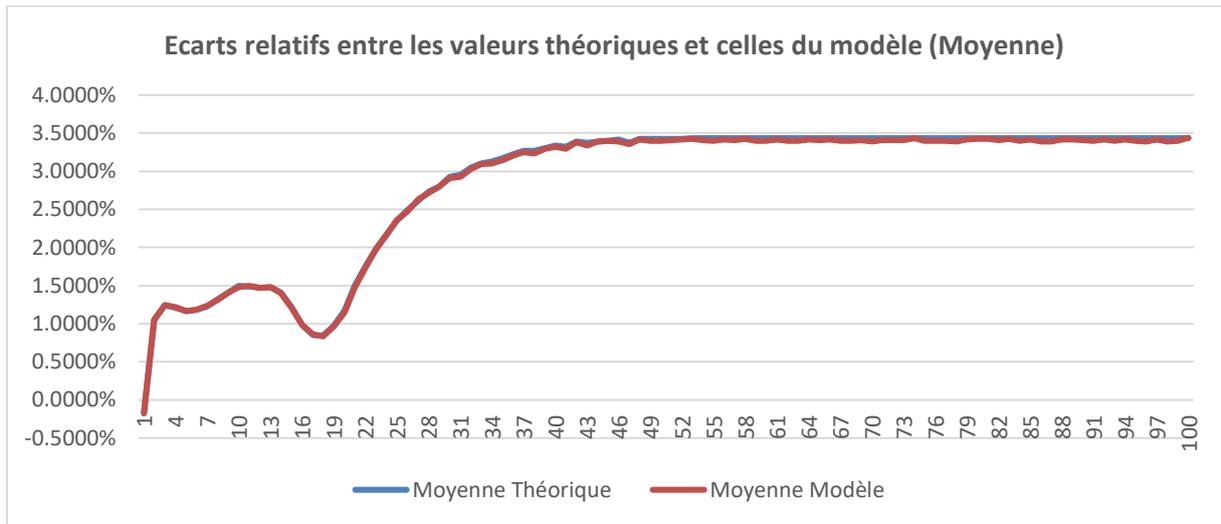


Figure 23 : Écarts relatifs entre l'espérance et la moyenne empirique

3.1.7 Gamme de Taux

Dans le modèle G2++, le prix zéro coupon est donné par :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(a, t, T)x(t) - B(b, t, T)y(t)}$$

Avec :

- T représente la date de remboursement de l'obligation zéro-coupon
- t représente la date d'évaluation
- $A(t, T) := \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{\frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)]}$
- $V(t, T) := \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} (e^{-a(T-t)}) - \frac{1}{2a} (e^{-2a(T-t)}) - \frac{3}{2a} \right] + \frac{\eta^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} (e^{-b(T-t)}) - \frac{1}{2b} (e^{-b(T-t)}) - \frac{3}{2b} \right] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]$
- $B(z, t, T) := \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}$
- $P^M(t, T)$ qui représente le prix zéro coupon de maturité T du marché à la date t
- $RZC(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln(- (T-t)P(t, T))$, qui représente le taux zéro-coupon à la date t et de date d'exercice T

3.2 Modèle du taux de rendement des actions

3.2.1 Présentation du modèle

Le modèle actions proposé par l'EIOPA et implémenté dans le mémoire est un modèle décrivant la dynamique du prix d'une action. Celui-ci vérifie l'équation différentielle :

$$dS(t) = (r(t) + \lambda)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Avec :

- $S(t)$, l'indice boursier
- $r(t)$, le taux d'intérêt nominal sans risque (fourni par le modèle EIOPA de taux nominal, décrit ci-dessus.)
- λ , la prime sans risque
- σ , la volatilité
- $W(t)$, le mouvement géométrique brownien sous la mesure \mathbb{P} en monde réel

3.2.2 Solution explicite et discrétisation

Dans son document de référence, l'EIOPA n'explique pas comment est implémenté numériquement le modèle déterminé par l'équation différentielle stochastique ci-dessus.

Pour le mémoire, la discrétisation suivante de l'indice boursier a été retenue :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left(RZC(t, t + \Delta t) + \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \varepsilon\right)$$

Où

- ε , représente un tirage aléatoire issu d'une distribution normale standard
- $RZC(s, t)$ désigne le taux Zéro-coupon à la date s , de date d'exercice t

Le rendement des actions prend alors la forme suivante :

$$Rdt(t, \Delta t) = \ln\left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)}\right) = \left(RZC(t, t + \Delta t) + \lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \varepsilon$$

- Espérance :

$$E[Rdt(t, \Delta t)] = \left(RZC(t, t + \Delta t) + \lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$$

- Variance :

$$Var[Rdt(t, \Delta t)] = (Var(RZC(t, t + \Delta t)) + \sigma^2)\Delta t$$

3.2.3 Calibrage des paramètres du modèle

Les données utilisées pour les calculs sont celles relatives à l'indice boursier S&P 500 Europe entre 2008 et 2022. ²³Il s'agit de l'indice représentatif du rendement des 500 plus grandes entreprises européennes. De plus, le taux nominal à maturité 10ans utilisé est celui produit par le modèle de taux d'intérêt nominal.

Le calibrage des paramètres du modèle a nécessité des méthodes différentes selon les paramètres. Ainsi, pour la :

- **Volatilité σ**

Il s'agissait de calculer l'écart-type des rendements mensuels en se basant sur les données liées au rendement de l'indice boursier S&P 500 Europe, sur les douze derniers mois et d'annualiser le résultat. Pour l'annualisation, la formule suivante a été appliquée :

$$\text{Volatilité} = \sqrt{\text{Variance}(\text{Indice})} * \sqrt{12}$$

Indice étant les valeurs de l'indice choisie pour l'étude.

- **Prime de risque λ_{eq}**

Il s'agissait de calculer directement la prime de risque via la formule suivante :

$$\lambda_{eq} := E[R_m] - R_f$$

Sachant que $E[R_m]$ représentant l'espérance des rendements attendus sur le marché de l'indice choisi, est donnée par la résolution de l'équation polynomiale :

$$PV_{Index} = \frac{\gamma P_0}{(1 + E[R_M])} + \frac{\gamma(1 + g)P_0}{(1 + E[R_M])^2} + \frac{\gamma(1 + g)^2 P_0}{(1 + E[R_M])^3} + \frac{\gamma(1 + g)^3 P_0}{(1 + E[R_M])^4} + \frac{\gamma(1 + g)^4 P_0}{(1 + E[R_M])^5} + \frac{\frac{\gamma(1+g)^4(1+R_f)P_0}{E[R_m] - R_f}}{(1 + E[R_M])^5}$$

En supposant que :

$$PV_{Index} = P_0, \quad \text{à } t = 0$$

Et en prenant

- R_f , le taux spot à maturité 10 ans à la date de projection qui est le 30 juin 2022
- γ , la somme des taux de rendements et de rachats à la date de projection
- g , le taux de croissance à long terme 1,4%

²³ Période de référence choisie par l'EIOPA dans son document de référence.

3.2.4 Résultats du calibrage

Les méthodes de calibrage nous ont permis d'obtenir les résultats suivants pour les paramètres :

- $\sigma = 0.19$
- $\lambda_{eq} = 0.0147$

3.2.5 Simulations

A partir de ces paramètres et de l'équation de discrétisation préalablement obtenue, nous avons calculé les taux de rendements des actions de notre modèle.

Voici la représentation graphique (il s'agit ici d'un échantillon représentatif d'une centaine de projection parmi les mille projections réalisées) de nos résultats pour une projection sur 40 ans :

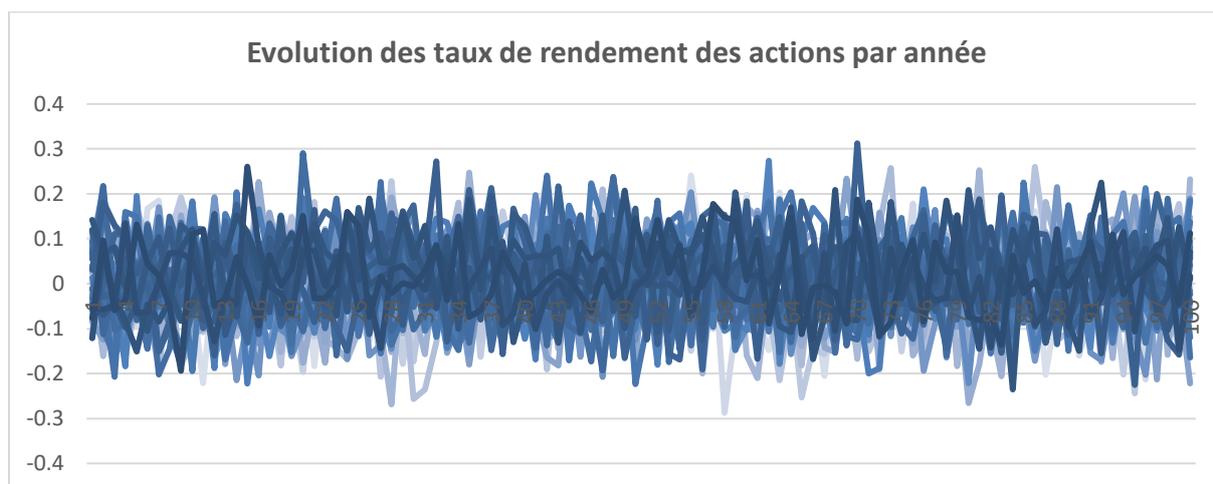
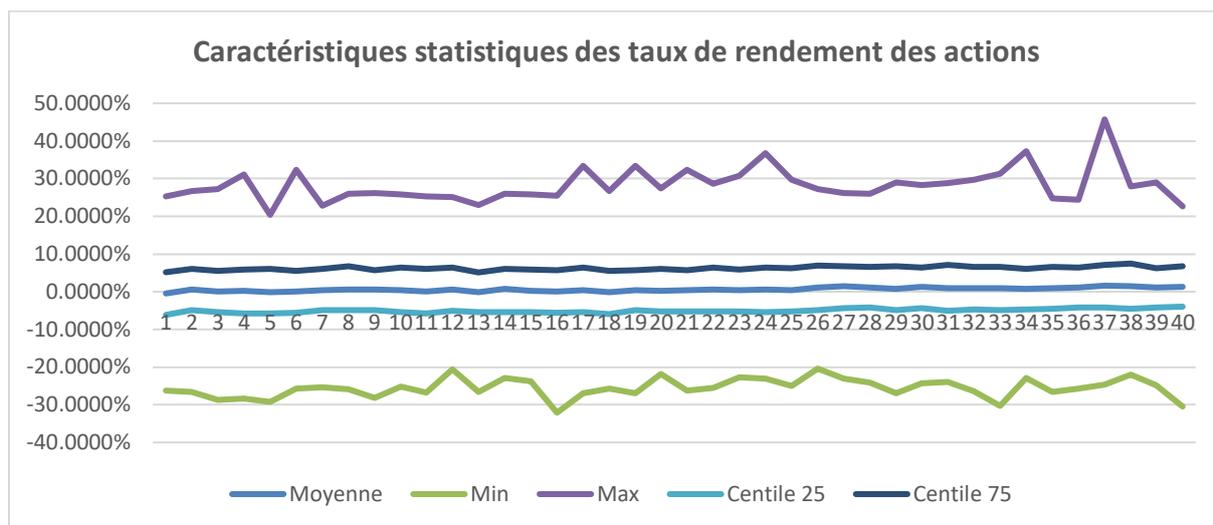


Figure 24 : Taux de rendement des actions selon l'indice S&P 500 Europe



Nous pouvons constater que sur des milliers de projection réalisées sur une période de 40 ans, les taux de rendements oscillent autour de l'intervalle d'indice [-30% ; 40%]. Cela voudrait dire qu'avec l'indice choisi pour le calcul des paramètres, les taux de rendement des actions sont en grande partie négatifs et ne dépassent pas 0,25%.

En prenant en compte les résultats obtenus par l'EIOPA et présentés ci-dessous comme dans le document de référence, on constate que les taux de rendement projetés sur une période de 40 ans se trouvent dans l'intervalle [-30% ; 70%].

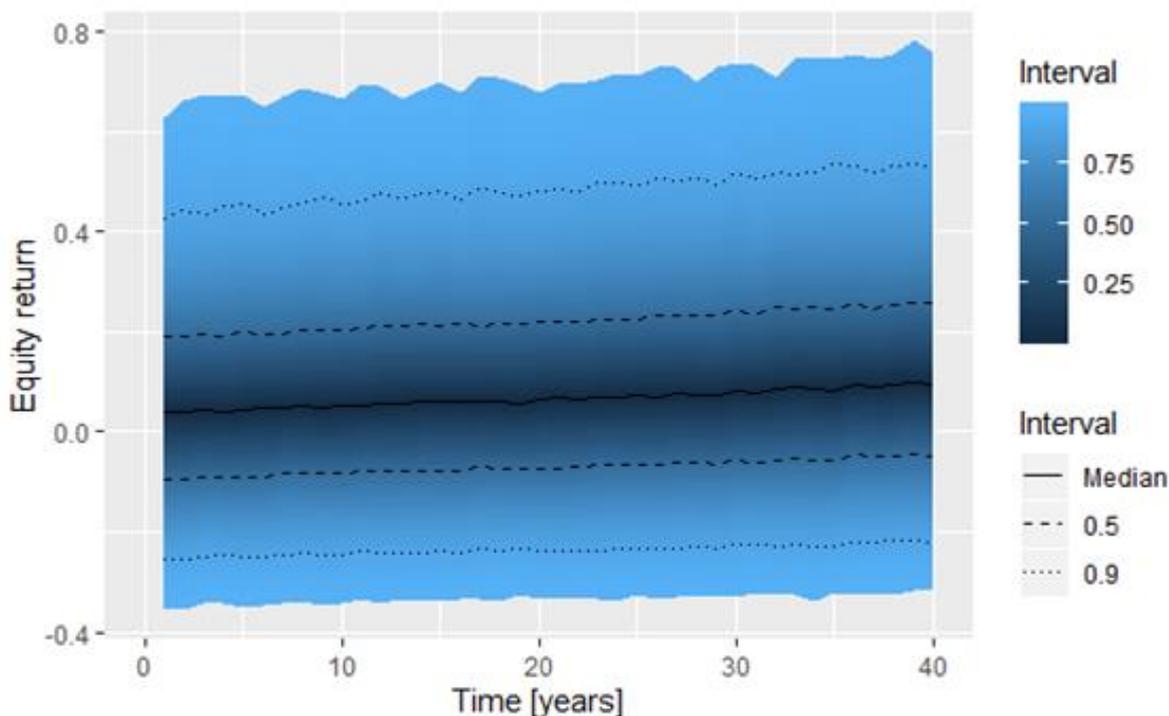


Figure 25 : Taux de rendement des actions selon l'indice STOXX Europe 500

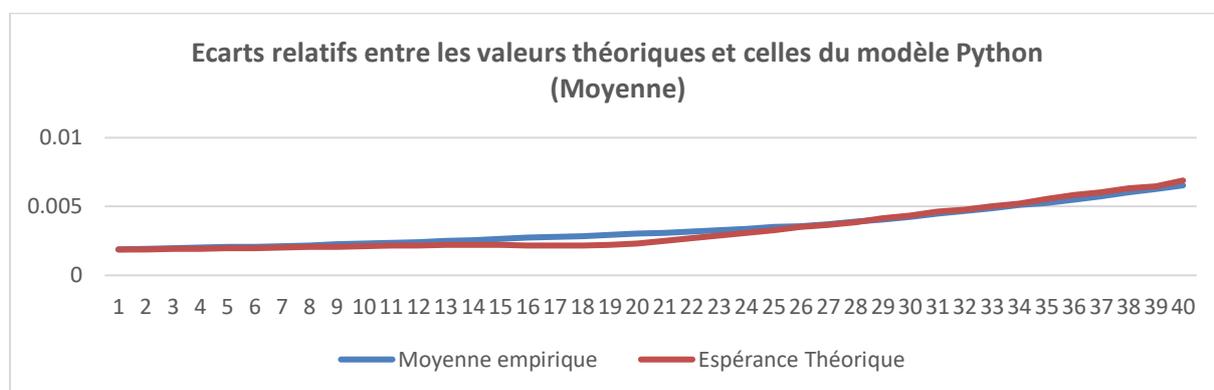
Ces différences de résultats entre ceux obtenus par l'EIOPA et nos résultats peuvent s'expliquer par le fait que les données utilisées diffèrent de celles utilisées par l'EIOPA. En effet, nous n'avons pas pu trouver des données sur l'indice financier « STOXX Europe 600 » utilisé par l'EIOPA. Nous avons utilisé l'indice « S&P 500 Europe ». Ces deux indices, bien que représentatifs du panorama européen, intègrent des entreprises distinctes, ce qui pourrait influencer sur les analyses.

De plus, nous supposons que pour la projection des taux nominaux, l'EIOPA a utilisé des taux forward antérieurs à la date d'août 2020 (date de publication du document de référence). Dans le cadre du mémoire, les taux forward utilisés sont ceux du 31 mars 2022. En prenant en considération le contexte de remontée des taux en 2022, il est aisé de s'attendre à des taux de rendements plus élevés avec les résultats de l'EIOPA qu'avec ceux de nos simulations.

Malgré ces quelques différences, les caractéristiques statistiques des résultats de l'EIOPA et ceux obtenus de nos projections sur Python sont du même ordre, à savoir :

- Une médiane se trouvant dans l'intervalle [5% ; 10%]
- Une moyenne se trouvant entre 1% et 10%
- Les valeurs extrêmes se trouvant dans l'intervalle [-30% ; 50%]

Afin de nous assurer de la qualité des simulations que nous avons obtenues, nous avons effectué des tests statistiques afin de comparer l'espérance théorique du modèle à la moyenne empirique des résultats de nos simulations.



3.3 Modèle du taux d'inflation

3.3.1 Présentation du modèle

Le modèle de taux retenu par l'EIOPA et dans le mémoire pour la simulation des taux d'inflation est le modèle Vasicek. La dynamique du taux d'inflation $i(t)$ est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$di(t) = k(\theta - i(t))dt + \sigma dW(t), \quad i(0) = i_0,$$

Avec

- $i(t)$ est le taux d'inflation au temps t ,
- k se réfère à la vitesse de retour à la moyenne,
- θ est le niveau moyen asymptotique,
- σ la volatilité.

3.3.2 Solution explicite et discrétisation

En prenant pour référence le livre Brigo et al. (2006), on obtient l'expression suivante, pour $s < t$:

$$i(t) = i(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u)$$

On en tire les caractéristiques :

- Espérance :

$$E\{i(t)|\mathcal{F}_s\} = i(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)})$$

- Variance :

$$Var\{i(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2k(t-s)}]$$

Il existe une discrétisation exacte du processus :

$$i(t + \Delta t) = i(t)e^{-k\Delta t} + \theta(1 - e^{-k\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2k\Delta t}}{2k}} \varepsilon$$

Où ε suit une loi normale centrée réduite.

3.3.3 Calibrage des paramètres du modèle

Les paramètres à calibrer sont donc k, θ, σ :

- Le niveau de retour à la moyenne θ , le paramètre a été fixé à 2%. Ce choix se base sur le niveau de retour à la moyenne choisi par l'EIOPA dans son document de référence et qui correspond au niveau d'inflation cible de la Banque Centrale Européenne.
- La volatilité σ , elle est déduite de l'écart-type de la série temporelle de l'indice des prix à la consommation harmonisé de la zone euro. Cette série temporelle regroupe l'ensemble des indices entre 2006 et 2022 pris mensuellement.
- La vitesse de réversion moyenne k est ensuite déterminée à partir des deux paramètres précédents en se basant sur un algorithme différentiel évolutif²⁴.

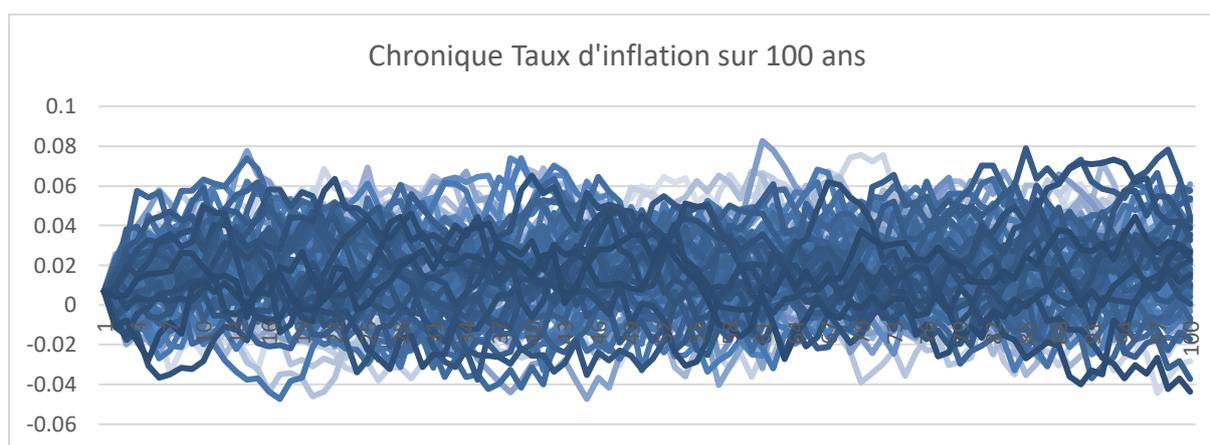
Résultats du calibrage

Les méthodes de calibrage nous ont permis d'obtenir les résultats suivants pour les paramètres :

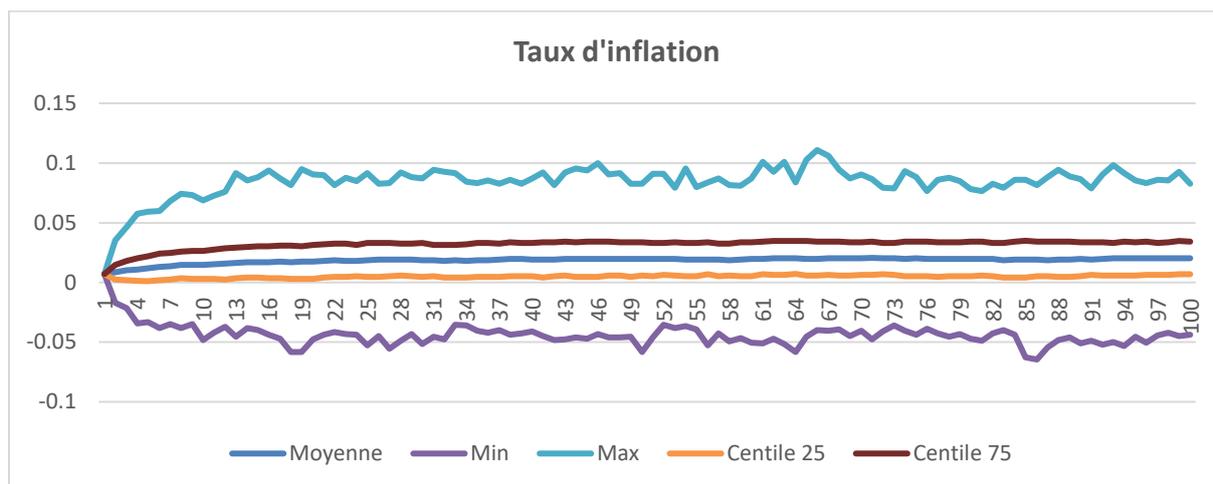
- $\sigma = 0.000176$
- $k = 0.1$
- $\theta = 0.02$

Simulations

Les résultats obtenus lors de la projection des taux sont les suivants :



²⁴ Il s'agit de l'algorithme différentiel évolutif défini en annexe



On constate que sur la période de projection, la moyenne des taux d'inflation obtenue se trouve autour de 2%. C'est ce que nous remarquons également sur les résultats présentés par l'EIOPA dans son document de référence.

Nous pouvons également constater que les taux dans nos simulations sont beaucoup plus aplatis que ceux de l'EIOPA. Cela peut s'expliquer par le fait que nous n'illustrons qu'un échantillon représentatif d'une centaine de simulations.

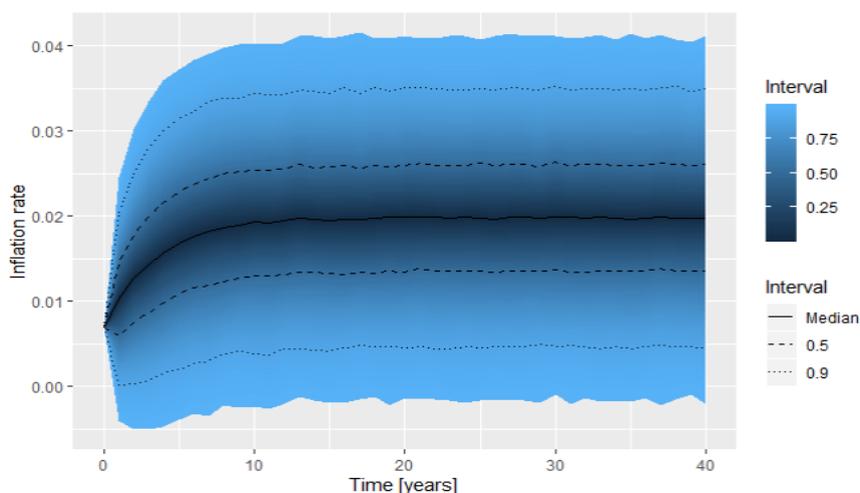
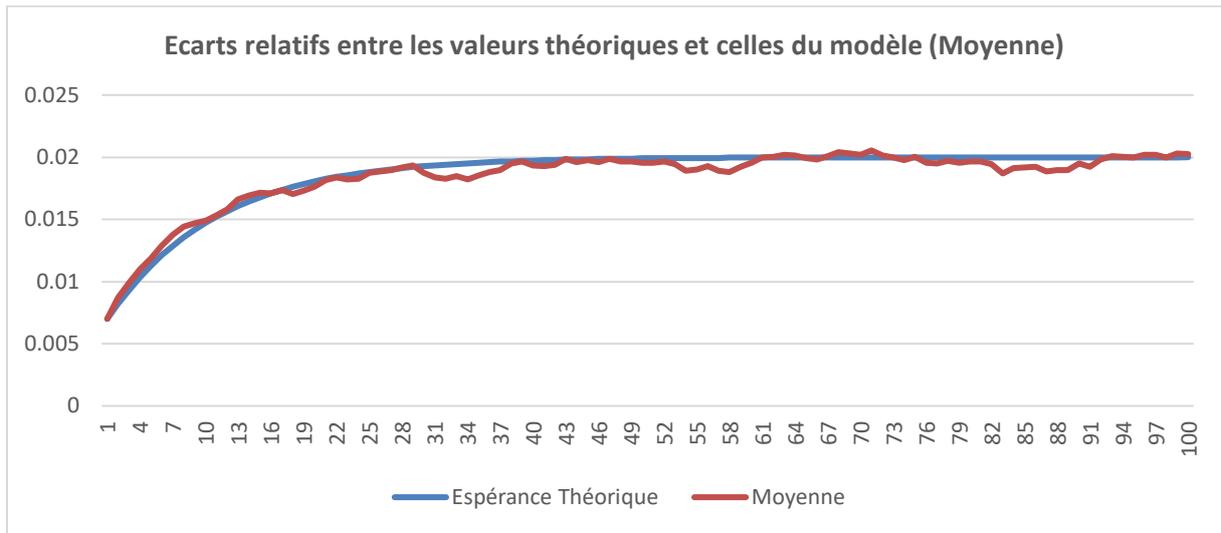


Figure 26 : Projection des taux d'inflation par l'EIOPA

Afin de nous assurer d'une validation des paramètres que nous avons obtenus, nous avons effectué des tests statistiques afin de comparer l'espérance théorique du modèle à la moyenne empirique des résultats de nos simulations.



3.4 Description de la modélisation des risques du marché du travail

Le modèle stochastique précédemment décrit nous a permis de modéliser les risques financiers potentiels associés au PEPP. Cependant, il est nécessaire de s'intéresser également aux divers scénarios qui peuvent être observés sur le marché du travail. En effet, les montants des cotisations des épargnants dépendent fortement de leurs salaires, de leurs potentielles périodes de chômage et de leur taux de cotisation. C'est dans cette optique que l'EIOPA a également proposé un modèle qui évalue les risques du marché du travail.

Pour chaque simulation, le modèle détermine dans un premier temps si l'individu pourrait souffrir d'une période de chômage et si oui, dans quelles mesures et sur quelles périodes. Dans un second temps, le modèle des salaires est mis en place pour générer les trajectoires aléatoires potentielles des salaires réels des épargnants. Cela permet d'obtenir un large éventail de profils, où les salaires peuvent être stables au cours de la carrière, croître et atteindre un plateau, ou croître dans les premières années et diminuer les années ultérieures.

3.4.1 Périodes de chômage

Le modèle permettant de simuler et projeter les périodes de chômage fonctionne en deux étapes. En effet, on suppose selon l'article « *Assessing the Labour, Financial and Demographic Risks to Retirement Income from Defined-Contribution Pension* » de Antolin & Payet (2011)²⁵ que sur une population choisie de manière aléatoire, il n'y a que 40% de cette dernière en moyenne qui souffrirait de chômage. Les 60% restants de la population aurait alors une carrière complète.

La première étape de la modélisation consiste à faire ressortir les 40% de la population souffrant de chômage. Quant à la deuxième étape, elle établit de manière stochastique, sur quelles périodes ces personnes pourraient être affectées en calculant le taux de chômage à l'échelle de l'économie. Ce dernier serait en effet le meilleur indicateur de probabilité pour évaluer la fréquence à laquelle un individu pourrait souffrir de chômage sur une année donnée. Le taux de chômage tient compte de l'âge et varie avec celui-ci. Ainsi, les personnes les plus jeunes connaissent plus de périodes de chômage que les personnes des autres groupes. De même, le taux de chômage montre un degré de persistance élevé, dans les pays européens en particulier. Une personne au chômage au cours d'une année donnée a donc plus de chance d'être au chômage l'année d'après.

En se basant sur les données d'Eurostat sur le taux de chômage datant de 2022, on constate que dans l'Union Européenne (UE-27), le taux de chômage diminue avec l'âge jusqu'à environ 40 ans et reste assez constant autour de 7% par la suite. Les données sont des taux de

²⁵Lien source: [Assessing Default Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans \(oecd.org\)](https://www.oecd.org/fr/assessing-default-investment-strategies-in-defined-contribution-pension-plans/)

chômage observés sur la période 2002-2018 pour différents groupes d'âge dans l'Union Européenne.

La figure suivante issue du document de référence de l'EIOPA, présente le taux de chômage observé entre 2002 et 2018 et classé par groupe d'âge.

Figure 19. EU-27 average unemployment rates by age groups over 2002-2018

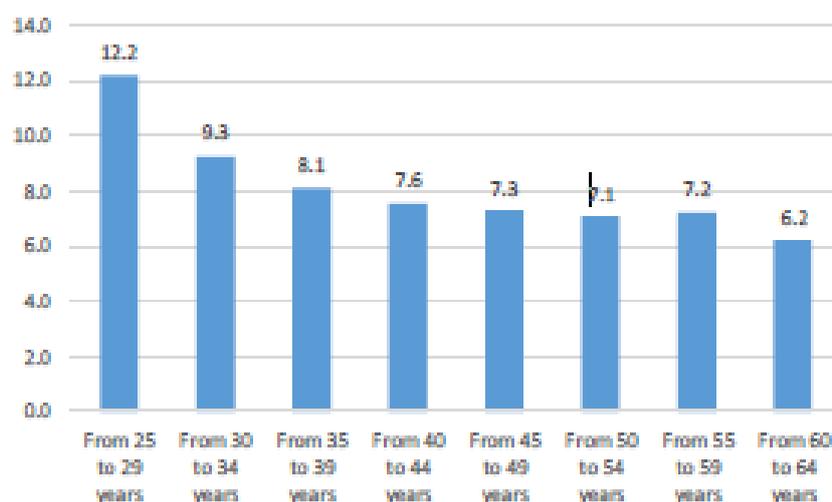


Figure 27 : Taux de chômage entre 2002 et 2018

Pour chacune des simulations où l'individu souffre de chômage, le modèle évalue le taux de chômage en faisant un tirage aléatoire d'une distribution normale $\mathcal{N} \sim (7,19\% ; 0,92\%)$ telle que 7,19% corresponde à la moyenne des taux de chômage observée sur la période 2002-2018 sur le groupe d'âge des 40-64 ans et 0,92% leur écart-type. Pour les personnes âgées de 25 à 40 ans, une autre composante est ajoutée. Cette composante diminue linéairement à 0 et commence par un tirage d'une distribution normale $\mathcal{N} \sim (4,99\% ; 1,07\%)$. Cela correspond à la moyenne et à l'écart-type observés sur la période 2002-2018 de la différence des taux de chômage entre les groupes d'âge 25-29 ans et 40-64 ans dans l'UE-27.

La détermination des périodes de chômage sur une année se fait en puisant dans une distribution binomiale ayant pour probabilité le taux de chômage de ladite année. En outre, le modèle tient compte de la persistance du chômage. Une fois que le modèle a déterminé les périodes de chômage selon la méthodologie ci-dessus, des périodes supplémentaires peuvent être ajoutées pour refléter le fait qu'une personne au chômage dans une année a un risque plus élevé de rester au chômage l'année suivante. Selon la méthodologie d'Antolin et Payet (2011), une personne sans emploi de l'année t aura une probabilité de 75 % d'être au chômage de l'année $t + 1$ si le taux de chômage déterminé précédemment a augmenté entre t et $t + 1$. La probabilité tombe à 50% si le taux de chômage tel que déterminé précédemment a diminué entre t et $t + 1$.

3.4.2 Trajectoires réelles des salaires

Un autre risque lié au marché du travail est l'évolution des salaires perçus. Les salaires réels perçus par un individu au cours de sa carrière varient en fonction de sa situation économique, de son niveau d'éducation, de sa profession, etc...

Les diverses études du marché du travail montrent qu'il existe trois évolutions possibles. Pour certaines personnes, les salaires réels atteignent un plateau à la fin de la carrière professionnelle, pour d'autres ils plafonnent plus tôt vers 45-55 ans et diminuent par la suite, et pour d'autres, surtout pour une minorité, les salaires restent stables tout au long de la vie professionnelle. Ceci s'explique par le fait qu'en général, les salaires réels connaissent les gains les plus importants au début de la carrière d'une personne, avec des gains plus faibles, voire négatifs, dans la dernière partie.

Pour refléter un large éventail de chemins possibles, le modèle suppose que l'indice des salaires réels suit une équation quadratique avec l'âge :

$$\text{ salaire } = a(\text{max} - \text{âge})^2 + b$$

- Le coefficient a est tiré d'une distribution uniforme comprise entre -0,15 et 0,011 ;
- max est tiré d'une distribution uniforme entre 47 et 64 ans et correspond à l'âge auquel les salaires réels sont à leur valeur maximale ;
- Le coefficient b est résolu de sorte que l'indice des salaires commence à 100 à l'âge de 25 ans.

Les salaires nominaux tiennent alors compte de l'inflation et de l'impact du chômage. Dans la modélisation, on suppose que les individus ayant connu des périodes de chômage réintègrent le marché du travail avec le même salaire de leur dernier travail (c'est-à-dire qu'ils n'obtiennent pas d'inflation ni de croissance des salaires réels).

3.5 Modélisation des stratégies d'investissements

Les stratégies d'investissement présentées en paragraphe 2.2, ont été implémentées dans une maquette Excel afin de projeter l'évolution du capital accumulé par l'épargnant.

L'ensemble des distributions des capitaux sont ensuite utilisées pour évaluer les indicateurs de risque et de performance, décrits dans la section 2.3 à 2.5.

Cette maquette a été construite sur la base de trois modules : le module hypothèses, le module actifs et le module indicateurs.

3.5.1 Module Hypothèses

L'objectif de ce module est de couvrir l'ensemble des hypothèses à prendre en compte dans le cadre de la projection de l'évolution du capital accumulé par un épargnant à savoir :

- L'âge à la date d'évaluation ou de projection
- L'âge de départ à la retraite
- La durée de cotisation
- Le salaire annuel à la date de projection
- L'évolution annuelle du salaire
- Le taux de cotisation annuel
- Le type de stratégie d'investissement choisie
- Les proportions attribuées aux différents fonds (actions et obligations dans notre cas) selon la stratégie d'investissement à l'âge à la date de projection.
- Scénarios économiques : les taux d'intérêt nominaux et les taux de rendement des actions précédemment calculés en prenant en compte l'inflation

Sur la base de la stratégie d'investissement choisie, l'évolution des proportions de chaque fonds (actifs de type actions ou obligataires) est établie.

3.5.2 Module Actifs

Le module Actifs a pour fonction la projection des capitaux accumulés²⁶ par l'épargnant selon la stratégie d'investissement prise en compte et selon 1000 scénarios sur une durée de projection équivalente à la période de cotisation de l'épargnant.

3.5.3 Module Indicateurs

Le dernier module de la maquette permet de calculer les indicateurs de risques et de performance comme ils ont été précédemment décrits. Les indicateurs recueillis servent alors à la construction de l'indicateur de risque sommaire (SRI).

²⁶ Les capitaux accumulés ici sont équivalents à la part salariale mise à disposition pour la cotisation chaque année.

4 PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS

Dans cette partie du mémoire nous allons présenter les résultats permettant d'analyser les indicateurs de performance du PEPP. Ces résultats se fondent sur la modélisation stochastique que nous avons réalisée en nous basant sur le document de l'EIOPA.

Cette modélisation stochastique prend en compte l'évaluation :

- Des taux d'intérêt nominaux
- Des taux de rendements des actifs de type actions
- De l'inflation

Nous n'avons pas pu modéliser le spread de crédit par manque de temps et de ressources.

4.1 Indicateurs de risques

Concernant les divers indicateurs de risques proposés par l'EIOPA, nous présenterons les valeurs des indicateurs selon différentes stratégies d'investissements, puis nous analyserons ces dernières.

Il est à noter que nous avons fait un choix de stratégies d'investissement à savoir :

- Garanties
- LC Linear decline with age
- LC Step linear decline with age
- LC Step decline with age
- LC Step decline according to age and balance level.

Ce choix a été fait car ces stratégies sont mieux implémentées et permettent d'avoir rapidement des résultats.

Certaines stratégies comme celles dépendantes des réserves sur les capitaux accumulés et sur les rendements obtenus prennent du temps à implémenter.

4.1.1 Probabilité de récupérer le capital cotisé

La probabilité de récupérer le capital comme nous l'avons définie dans la section 2.3.2 permet d'évaluer le niveau de certitude avec lequel il est possible de récupérer le capital cotisé par un épargnant PEPP à la fin de la phase d'accumulation.

Le tableau ci-dessous nous montre pour chacune des stratégies d'investissements choisies, la probabilité de récupérer le capital cotisé en prenant en compte les frais sur une période de 40 ans.

Tableau 3 : Probabilité de récupérer le capital investi selon les différentes stratégies

Stratégies d'investissements	Probabilité de récupérer le capital cotisé
Guarantees 100%	100%
Guarantees 50%	100%
LC Linear decline with age	95%
LC Step linear decline with age from 45 and from 100%	99%
LC Step linear decline with age from 55 and from 90%	100%
LC Step linear decline with age from 45 and from 60%	98%
LC Step linear decline with age from 55 and from 70%	99%
LC Step decline with age	100%
LC Step decline according to age and balance level	100%

Les résultats ci-dessus nous montrent que toutes les stratégies d'investissement choisies pour notre étude permettent d'atteindre un niveau de certitude au-delà de 95%. Rappelons que dans son document de référence, l'EIOPA a établi un seuil de probabilité (99% pour une période d'investissement supérieur à 10 ans) à partir duquel une stratégie d'investissement serait qualifiée de valide. Cela signifie que pour la grande majorité des stratégies évaluées, l'épargnant PEPP a une quasi-certitude de récupérer l'ensemble de son capital.

La moindre performance des stratégies « LC Linear decline with age » et « LC Step linear decline with age from 45 and from 60% » peut être attribuée à leur moindre exposition aux actifs de type actions, qui généralement offrent des rendements plus élevés que les obligations. Bien que ces actifs puissent offrir de plus grands rendements, ils comportent également des risques plus élevés, ce qui peut expliquer la moindre probabilité de récupération du capital pour ces stratégies.

4.1.2 Déficit attendu

Comme défini à la section 2.3.2, le déficit attendu est un indicateur de risque en combinaison avec la probabilité de récupérer le capital cotisé, permettant d'évaluer le montant auquel pourrait être estimée la perte de l'épargnant PEPP s'il ne récupère pas la totalité du capital qu'il a cotisé.

Le tableau ci-dessous nous illustre ce manque à gagner en termes de pourcentage des capitaux cotisés pour l'ensemble des stratégies d'investissement choisies.

Tableau 4 : Manque à gagner en cas de non récupération totale du capital cotisé

Stratégies d'investissement	Déficit attendu
Guarantees 100%	0%
Guarantees 50%	1%
LC Linear decline with age	4%
LC Step linear decline with age from 45 and from 100%	2%
LC Step linear decline with age from 55 and from 90%	2%
LC Step linear decline with age from 45 and from 60%	3%
LC Step linear decline with age from 55 and from 70%	1%
LC Step decline with age	0%
LC Step decline according to age and balance level	0%

La majorité des stratégies présente un faible déficit attendu, allant de 0% à 4%. Cela signifie que le risque de perte pour l'épargnant est relativement limité pour ces stratégies d'investissement. Les stratégies "Guarantees 100%", "LC Step decline with age", et "LC Step decline according to age and balance level" n'entraînent aucun manque à gagner. Cela est dû à la nature garantie de ces stratégies, assurant à l'épargnant qu'il récupérera au moins son capital initial. Les stratégies "LC Linear decline with age" et "LC Step linear decline with age from 45 and from 60%" montrent le déficit le plus élevé de 4% et 3% respectivement. Ces stratégies pourraient avoir une allocation d'actifs plus volatile, ce qui pourrait expliquer le risque légèrement accru.

Dans l'ensemble, les stratégies présentées montrent un faible déficit attendu, ce qui pourrait rassurer les épargnants quant à la sécurité de leurs investissements.

4.1.3 Dispersion de la distribution des montants accumulés

Les résultats ci-dessous, nous montrent les indicateurs de mesure de la dispersion de la distribution des montants accumulés selon les stratégies d'investissement choisies.

Tableau 5 : Indicateurs de dispersion de la distributions des sommes accumulées

Stratégie d'investissement	Range	IQR	SD	Coefficient
Guarantees 100%	1356	6,8	10,15	120%
Guarantees 50%	1539	5,2	8,6	80%
LC Linear decline with age	558	3,1	4,34	104,9%
LC Step linear decline with age from 45 and from 100%	440	2,58	3,45	101,2%
LC Step linear decline with age from 55 and from 90%	1023	3	2,56	100%
LC Step linear decline with age from 45 and from 60%	1123	0,8	9,6	72,1%
LC Step linear decline with age from 55 and from 70%	685	4,82	7,85	130%
LC Step decline with age	605	5,1	6,18	72,7%
LC Step decline according to age and balance level	665	3,24	4,75	114,6%

Nous constatons que les stratégies qui ont une forte composante en actions montrent une dispersion élevée. Ces stratégies, tout en offrant la possibilité de rendements plus élevés, portent également un risque accru. Les valeurs des indicateurs de dispersion varient considérablement entre les stratégies. Par exemple, l'IQR de « LC Step linear decline with age from 45 and from 60% » est seulement de 0,8 tandis que celui de « Guarantees 100% » est de 6,8. Cela indique une distribution plus resserrée pour la première stratégie comparée à la seconde. Les stratégies « Guarantees 100% » et « LC Step linear decline with age from 55 and from 70% » ont des coefficients de variation supérieurs à 120%. Cela indique une grande volatilité relative par rapport à la moyenne des montants accumulés pour ces stratégies.

La dispersion des résultats selon les stratégies d'investissement illustre le compromis entre risque et rendement. Les stratégies axées sur les actions, bien qu'offrant le potentiel de rendements plus élevés, portent également un risque plus élevé, comme en témoignent les indicateurs de dispersion plus larges.

4.2 Indicateurs de performance

Concernant les divers indicateurs de performance proposés par l'EIOPA, nous présenterons les valeurs des indicateurs selon différentes stratégies d'investissements, puis nous analyserons ces dernières.

Il est à noter que nous avons fait le même choix de stratégies d'investissement pour l'évaluation des indicateurs de risque à savoir :

- Guarantees
- LC Linear decline with age
- LC Step linear decline with age
- LC Step decline with age
- LC Step decline according to age and balance level.

Ce choix permet également une meilleure construction de l'indicateur de risque sommaire (SRI) puisque les résultats se basent sur les mêmes stratégies d'investissement.

4.2.1 Somme attendue par l'épargnant à la fin de la phase d'accumulation

Nous avons évalué pour les stratégies d'investissement choisis le montant que l'épargnant PEPP peut espérer à la fin de la phase d'accumulation.

Tableau 6 : Somme attendue par l'épargnant

Stratégie	Indicator
Guarantees 100%	8,46
Guarantees 50%	6,7
LC Linear decline with age	4,14
LC Step linear decline with age from 45 and from 100%	3,44
LC Step linear decline with age from 55 and from 90%	4,1
LC Step linear decline with age from 45 and from 60%	1,34
LC Step linear decline with age from 55 and from 70%	6,04
LC Step decline with age	8,5
LC Step decline according to age and balance level	4,15

Les stratégies « Guarantees 100% » et « LC Step decline with age » offrent les rendements les plus élevés avec respectivement 8,46 et 8,5 fois le montant des cotisations. Cela montre la puissance des garanties d'investissement à long terme, même si ces garanties sont souvent accompagnées de frais plus élevés ou d'autres compromis. On note cependant une grande variabilité dans les rendements potentiels, allant de 1,34 pour la stratégie « LC Step linear decline with age from 45 and from 60% » à 8,5 pour la stratégie « LC Step decline with age ». Ceci montre bien l'importance pour les épargnants de comprendre les implications des différentes stratégies sur leurs rendements futurs. Les stratégies qui intègrent une composante d'actions significative ou qui réduisent le risque avec l'âge de l'épargnant (comme « LC Linear decline with age ») tendent à offrir des rendements intermédiaires.

4.2.2 Probabilité d'atteindre une certaine ambition

Comme nous l'avons expliqué, selon l'EIOPA, la probabilité d'atteindre un taux de rendement au-delà du taux UFR actuel (3,45% en 2022), est l'une des ambitions que doit atteindre le PEPP. Cela permettrait à l'épargnant PEPP de faire face à l'inflation.

Sur la base de nos calculs, nous avons estimé cette probabilité pour chacune des stratégies choisies. C'est ce qu'illustre le graphique ci-dessous :

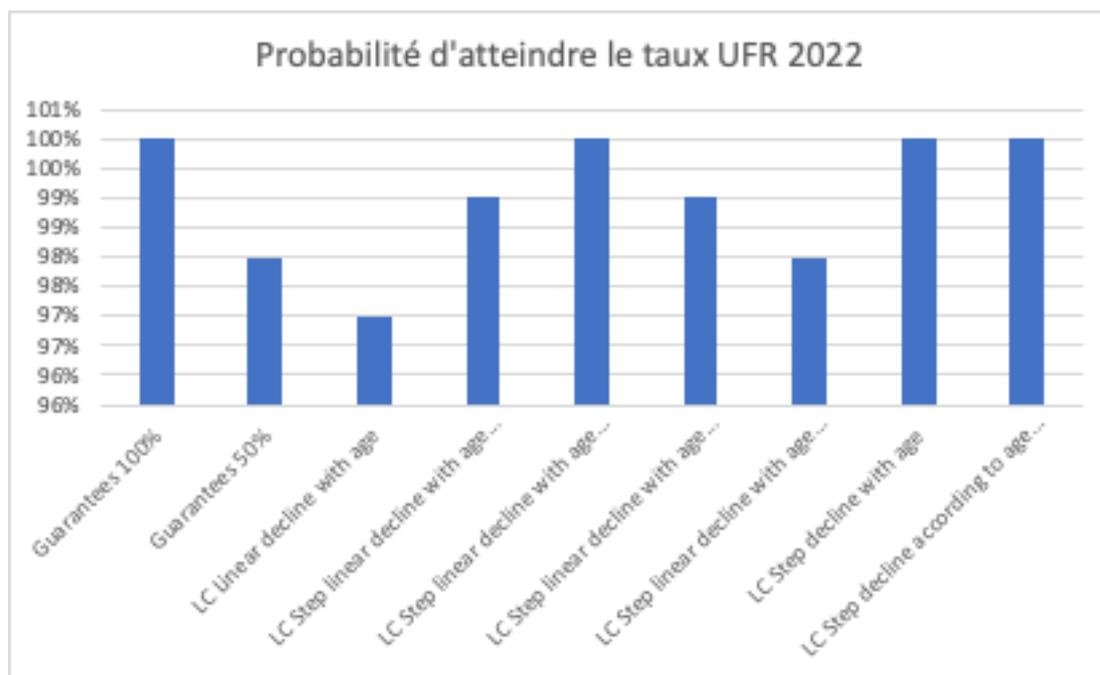


Figure 28 : Illustration de la probabilité d'atteindre un taux de rendement supérieur au taux UFR

Nous constatons que les stratégies axées sur les actions semblent offrir la meilleure chance d'atteindre cet objectif. Cependant, elles viennent également avec leur propre ensemble de risques. Les épargnants doivent donc s'engager dans une réflexion approfondie et, idéalement, consulter un conseiller financier pour choisir la stratégie la mieux adaptée à leurs besoins et préférences individuels.

4.3 Summary Risk Indicator

En nous basant sur la méthode décrite dans la section 2.5, nous avons construit un indicateur de risque sommaire. Ainsi,

- Nous avons sélectionné quatre portefeuilles de référence représentant le comportement des stratégies d'investissement que nous avons choisies :
 - o *Portefeuille 1 = {10% equity exposure ⇒ 10% d'actions et 90% d'obligations}*
 - o *Portefeuille 2 = {30% equity exposure ⇒ 30% d'actions et 70% d'obligations}*
 - o *Portefeuille 3 = {50% equity exposure ⇒ 50% d'actions et 50% d'obligations}*
 - o *Portefeuille 4 = {90% equity exposure ⇒ 90% d'actions et 10% d'obligations}*

- Les portefeuilles de références sont respectivement associés à une classe :
 - o CRC1 pour la notation 1
 - o CRC2 pour la notation 2
 - o CRC3 pour la notation 3
 - o CRC4 pour la notation 4

Il faut noter que la notation 1 correspond à une stratégie d'investissement avec un risque et un rendement faible et la notation 4 correspond à une stratégie d'investissement avec un risqué très élevé et une performance très élevée.

Nous avons ensuite choisi un couple (indicateur de risque / indicateur de performance) à savoir :

- o Probabilité de récupérer les montants cotisés / Somme attendue à la fin de la phase d'accumulation

Ce couple correspond au couple choisi par l'EIOPA pour la construction de l'indicateur de risque sommaire.

Pour le couple « Probabilité de récupérer le capital accumulé/Somme attendue à la fin de la phase d'accumulation », par exemple, nous obtenons les résultats suivants :

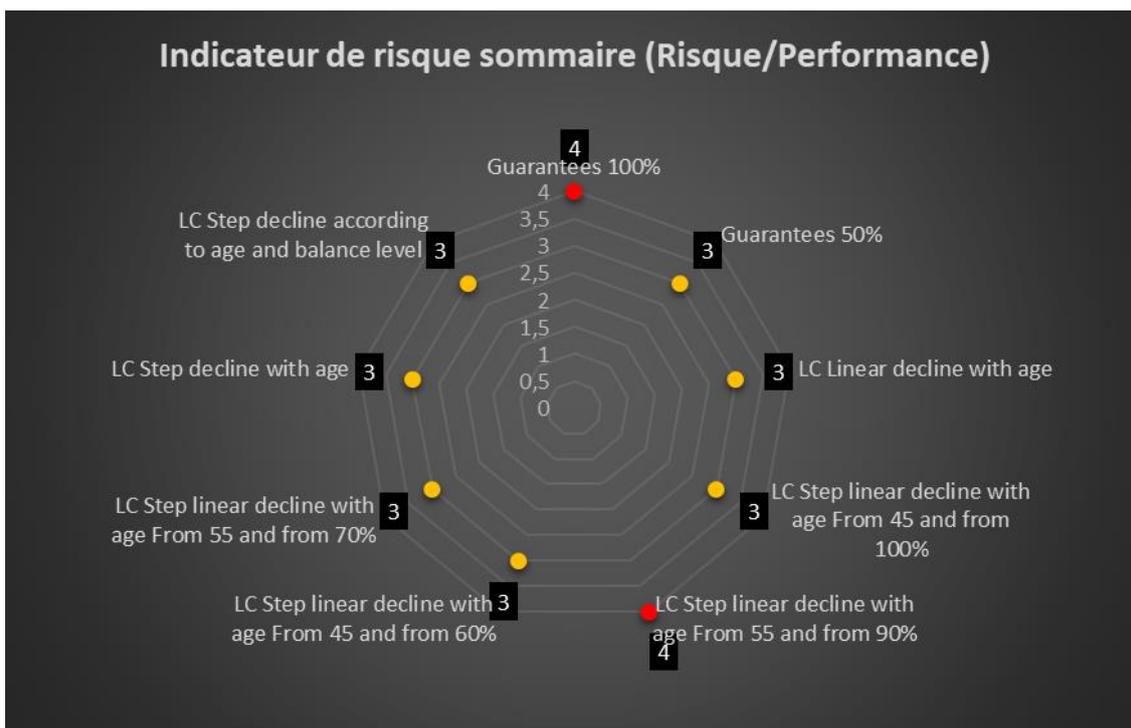


Figure 29 : Indicateur de risque sommaire construit sur la base de nos résultats

Cette illustration nous montre les classifications des différentes stratégies d’investissements que nous avons choisies.

Nous constatons que les stratégies « Garanties » et « LC Step linear decline with age from 55 and from 90% » sont celles ayant une notation de 4 sur une échelle de 4. Nous pouvons conclure que ces deux stratégies sont les meilleures pour l’épargnant souhaitant récupérer son capital et faire du profit sur ses investissements.

L’indicateur sommaire comme son nom l’indique est très synthétique et donc peut cacher la subtilité réelle qu’il y a dans la stratégie considérée. Par exemple la stratégie « LC Step linear decline with age from 55 and from 90% » apparait comme parmi les meilleurs en termes d’indicateur de risque sommaire mais elle pourrait ne pas convenir à un assuré qui souhaiterait bénéficier d’une garantie des montants cotisés.

4.4 Impact de la durée du contrat

La durée du contrat est la période pendant laquelle l'épargnant cotise chez l'assureur. C'est durant cette période que l'assureur investit les cotisations de l'épargnant en actifs afin que ce dernier puisse récupérer ses cotisations et des rendements sur ses cotisations au moment de sa retraite.

Les projections réalisées par l'EIOPA sur différentes durées de contrats ont permis de constater que la probabilité de récupérer le capital augmente avec la période d'investissement. Cela peut s'expliquer par le fait que les taux de rendement des actions sont plus élevés lorsque la durée de projection est plus grande. En effet, à long terme, les taux sans risques utilisés pour modéliser les taux de rendements augmentent et donc cela affecte directement les taux de rendement à la hausse.

Ainsi, à partir de nos propres résultats, nous avons comparé ceux de l'EIOPA. Nous remarquons que plus grande est la période de durée du contrat et donc la période d'investissement du capital cotisé et meilleures sont les performances des stratégies d'investissement. Cela peut s'expliquer par le fait qu'à long terme les rendements des actions soient plus élevés.

Ci-dessous, une illustration des résultats.

Tableau 7 : Probabilité de récupérer le capital accumulé selon la durée de l'investissement

Stratégie	40 ANS	30 ANS	20 ANS	10 ANS
Guarantees 100%	100%	95%	92%	90%
Guarantees 50%	100%	92%	90%	89%
LC Linear decline with age	95%	92%	86,5%	81%
LC Step linear decline with age from 45 and from 100%	99%	95%	82%	73%
LC Step linear decline with age from 55 and from 90%	100%	95%	92%	75%
LC Step linear decline with age from 45 and from 60%	99%	93%	78%	65%
LC Step linear decline with age from 55 and from 70%	98%	92%	89%	72%
LC Step decline with age	100%	97%	89%	76%
LC Step decline according to age and balance level	100%	95%	86%	68%

Nous pouvons conclure qu'augmenter la durée d'un contrat permet d'augmenter la rentabilité espérée pour l'assuré tout comme pour l'assureur. En effet, nous constatons que pour presque toutes les stratégies, la probabilité de récupérer au moins le capital investi est plus élevée pour des durées de contrat de 40 ans comparativement à des durées plus courtes, comme 10 ans.

4.5 Autres indicateurs intéressant l'assuré

Au-delà des indicateurs déjà nombreux proposés par l'EIOPA, il existe d'autres indicateurs classiques voire réglementaires. Il pourrait être intéressant d'étudier ces indicateurs pour les stratégies d'investissements décrites plus haut et envisagés par l'EIOPA.

Nous présentons dans cette section quelques-uns de ces autres indicateurs.

4.5.1 Les indicateurs de rentabilité

En assurance-vie, la perception de la rentabilité par l'assuré est essentielle. En effet, l'assuré cherche à maximiser le retour sur son investissement, tout en bénéficiant d'une protection adéquate. La rentabilité d'un produit d'assurance-vie du point de vue de l'assuré peut être évaluée à travers plusieurs indicateurs.

4.5.1.1 Taux de Rentabilité Interne (TRI)

Le Taux de Rendement Interne (TRI) se définit comme le taux d'actualisation pour lequel la valeur actuelle nette des flux de résultats distribuables est nulle. En effet, il s'agit du rendement que doit avoir l'activité pour compenser l'investissement initial. Par conséquent, plus le TRI est élevé et meilleur est le rendement du portefeuille de l'activité. Ainsi, du point de vue de l'assuré, il serait judicieux d'investir sur un produit dont le taux de rendement interne est meilleur qu'un autre.

Numériquement, le TRI vérifie l'équation suivante :

$$\sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1 + TRI)^t} = 0$$

Avec CF_t les flux de chaque année.

Le TRI peut ainsi permettre de comparer le taux de rendement de plusieurs produits mais il possède quelques inconvénients :

- Le coût des options et des garanties n'est pas pris en compte dans le calcul
- Il est sensible à l'ordre des flux de résultats, c'est la raison pour laquelle un portefeuille ayant un TRI supérieur à un autre peut en même temps avoir une valeur actuelle nette (VAN) inférieure²⁷;
- Dans la même idée, le TRI est très pénalisé par un strain²⁸ élevé.

²⁷Valeur Actuelle Nette : Il s'agit de la somme actualisée des flux engendrés par ce dernier.

²⁸Strain : il correspond au résultat statutaire de l'année 0

Le TRI possède cependant l'avantage de prendre en compte l'impact du capital immobilisé. De plus, une caractéristique majeure du TRI est le scénario dans lequel il est calculé. En effet, le TRI se calcule dans un scénario dit *Management Case*.

Le Management Case est un scénario déterministe en monde-réel qui traduit la vision du Top Management de la compagnie. Le scénario prend en compte les primes de risques ²⁹en accordant un rendement plus élevé aux actifs plus risqués.

La différence entre les deux environnements risque neutre et Management Case vient de la génération des scénarios. Dans l'environnement risque neutre, en prenant la moyenne sur chaque scénario du prix d'un actif et en l'actualisant par le déflateur ³⁰correspondant, le résultat n'est autre que le montant initialement investi sur l'actif.

4.5.1.2 Sustainable Product Value (SPV)

La Sustainable Product Value (SPV) est un indicateur qui permet d'observer la part de rendement des investissements réalisés qui revient vraiment à l'assuré. On peut donc le qualifier de mesure de « fairness client ³¹».

En effet, il est important que l'assuré puisse obtenir un très bon rendement sur l'investissement qu'il a fait sans quoi il pourrait aller chez un autre assureur lui offrant de meilleurs rendements.

La SPV se calcule de la manière suivante :

- On calcule le rendement annualisé du fond
 - o La formule de la performance annualisée du fond est la suivante :

$$Performance_{fonds} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (1 + Part_{fonds\ euros} * Performance_{i,fonds\ euros} + Part_{UC} * Rendement\ brut_{i,UC})} - 1$$

Avec :

- N : horizon de projection

²⁹**Primes de risques** : Un investisseur préfère un gain faible avec une probabilité de paiement élevé que l'inverse. Il préférera selon son profil de risque investir dans un actif risqué (comme les actions) dont le rendement est plus élevé qu'un actif non risqué (comme les obligations) dont le rendement est plus faible. La différence entre un actif risqué et un actif non risqué (respectivement taux risqué et taux sans risque) est la prime de risque.

³⁰**Déflateur** : Indicateur permettant d'évaluer la variation des prix d'un indice en faisant la différence entre la grandeur en valeur courante et la grandeur en valeur constante

³¹**Fairness client** : Equité vis-à-vis du client

- Part_fonds_euros : Part du fond investie en Fonds Euros ³²
- Performance_fonds_euros : Performance du Fond Euros
- Part_UC : Part du fond investie en UC³³
- Rendement_brut_UC : Rendement des actifs du fond UC

- La performance du client s'obtient quant à elle comme suit :

$$Performance_{client} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (1 + Part_{fonds\ euros} * Taux\ net\ servi_i + Part_{UC} * Rendement\ net_{i,UC})} - 1$$

Avec :

- Taux net servi : Le taux de profit servi à l'investisseur

- On rapporte ensuite ce rendement au rendement annuel réellement perçu par le client.

$$Sustainable\ Product\ Value = \frac{Performance\ annualisée\ du\ client}{Performance\ annualisée\ du\ fonds}$$

La SPV a pour avantage de rendre compte de la profitabilité d'un produit à un assuré. Cependant, elle peut être volatile en fonction de la performance que réalisent les fonds investis en unités de compte.

³² Fonds Euro : il s'agit du support financier d'un contrat d'assurance vie sur lequel est investi le capital de l'assuré. Ce support lui garantit la récupération du capital investi. Il est majoritairement composé d'obligations d'États et d'obligations d'entreprises.

³³ UC : il s'agit d'un support financier principalement composé d'actifs mobiliers (SICAV, actions, obligations) et d'actifs immobiliers (fonds immobiliers, part d'OPCI, etc...). L'investissement sur ce support ne garantit pas à l'assuré de récupérer son capital.

4.5.2 Les indicateurs de risques

Lorsqu'un individu opte pour un contrat d'assurance-vie, il s'engage dans une forme d'investissement, avec l'anticipation d'un rendement spécifique et le besoin d'être sécurisé concernant cet engagement.

Pour consolider la protection de tels investisseurs, la réglementation européenne PRIIPs (Packaged Retail Investment and Insurance-based Products) a été mise en œuvre en janvier 2018. Elle stipule que chaque investisseur doit avoir accès à un Document d'Informations Clés (DIC), ou Key Information Document (KID) en anglais, avant toute souscription.

Le KID est un document concis, limité à trois pages, visant à éclairer l'assuré sur les spécificités du produit choisi. Il est conçu pour être aisément compréhensible, offrant un aperçu des risques et des rendements potentiels associés au produit, ainsi que le seuil de perte maximale envisageable, la période de détention conseillée du contrat et quatre scénarios de performance.

Dans ce contexte, la mise en place d'un indicateur de risque, le SRRI (Synthetic Risk and Reward Indicator), est primordiale. Le SRRI offre une vue consolidée du risque et du rendement. Il se décline sur une échelle de risque allant de "1" (faible risque) à "7" (risque élevé), permettant d'évaluer la volatilité des rendements d'un investissement sur une période définie. Il est essentiel que le SRRI dépeigne fidèlement le risque et le rendement, sans les exagérer ou les minimiser.

L'épargnant, grâce à cette échelle numérique, peut ainsi appréhender le niveau de risque de son placement. La conception du SRRI est encadrée par la réglementation PRIIPs et varie selon la nature du produit.

Avant toute souscription, l'assuré peut s'appuyer sur le KID pour prendre une décision éclairée.

4.6 Indicateurs pour l'assureur

L'étude de l'EIOPA se concentre sur une analyse des performances et des risques liés à différentes stratégies du point de vue de l'assuré. Un assureur envisageant de distribuer un produit s'inscrivant dans le cadre du PEPP devrait également procéder à une analyse de l'impact de ce produit sur ses performances et ses risques propres.

Quelques-uns des indicateurs de performance et de risque pour l'assureur sont rappelés ci-après.

4.6.1 Indicateur de performance

MCEV

La Market Consistent Embedded Value (MCEV) est un indicateur qui permet d'évaluer la valeur économique du portefeuille de l'assureur. En effet, il s'agit de la valeur actuelle des revenus futurs et distribuables tout au long de la vie du portefeuille.

$$MCEV = VIF + NAV$$

Où

- La NAV (Net Asset value) représente l'écart entre la valeur de marché de l'actif à une date donnée et la meilleure estimation (Best Estimate ou BE en anglais)³⁴ du passif sur la même période.
- La VIF est la mesure de la rentabilité réelle de l'activité. Elle se définit comme la valeur actuelle probable des profits futurs qui peuvent être distribués aux actionnaires. Elle se présente comme la somme des composantes suivantes :
 - Present Value of Future profits (PVFP) : valeur actuelle des profits futurs générés par le portefeuille de contrats calculée dans un scénario déterministe sans prime de risque.
 - Time Value of Financial Options and Guarantees (TVFOG) : Valeur temps des options et des garanties financières.
 - Frictional costs of required capital (FCRC) : coût d'immobilisation du capital requis.
 - Cost of residual non hedgeablerisks (CRNHR) : coût des risques résiduels non répliquables, non pris en compte via la TVFOG, comme le risque opérationnel

³⁴Meilleure estimation du passif ou Best Estimate (BE) : Il s'agit d'après la directive Solvabilité II, de « la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésoreries futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésoreries futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents »

(panne informatique par exemple), le risque d'assurance (mortalité, morbidité, catastrophe, etc...) ou le risque comportemental (réaction non rationnelle des assurés face à une variation des taux du marché).

La MCEV a pour avantages la prise en compte de la valeur temps des options et des garanties financières ainsi que le caractère incertain de ces dernières. Ceci permet de mieux appréhender la rentabilité d'un contrat en modélisant la meilleure estimation des flux de prestations futures (BE). Cependant, elle ne prend pas en compte les risques dont la probabilité d'occurrence ne peut être calculée.

4.6.2 Indicateur de risques

Perte Nette Potentielle (PNP)

La Perte Nette Potentielle est la perte qui pourrait être subie par un investisseur qui possède un portefeuille d'actifs, compte tenu du type de risque pris et la durée de détention prévue de ce portefeuille.

C'est l'équivalent de la Value at Risk (VaR). La VaR est la valeur à partir de laquelle un investisseur peut prendre une décision sur l'allocation de son portefeuille d'actifs, en d'autres termes sur ses stratégies d'investissement. Si la VaR est trop grande par rapport à son appétit pour le risque ou ses capacités à y faire face, il peut soit vendre des actifs pour diminuer sa VaR ou prendre des mesures de couverture pour réduire le risque global de son portefeuille.

La VaR constitue donc un outil qui aide à la gestion et la quantification du risque pour un investisseur et donc pour un assureur.

Elle se calcule de la manière suivante :

- Soit un portefeuille d'actif P entre les périodes 0 et T ;
On a pour un processus stochastique $P : P = (P(t); 0 \leq t \leq T)$.
- $P(0) = P_0$ La valeur du portefeuille à l'instant 0 et $P(T) = P_T$ à l'instant T .
- Sur un horizon de longueur T , le gain ou la perte est donné par $P_T - P_0$. Si ce nombre est positif, alors le portefeuille a pris de la valeur. Si en revanche la valeur est négative, le portefeuille se déprécie.
- Avec un seuil de confiance donné α , la Value at Risk se formalise par :
$$P[P_T - P_0 \leq VaR_\alpha] = 1 - \alpha$$
- La VaR est donc un quantile de la distribution au niveau α des gains/pertes du portefeuille sur un horizon de temps T .

La VaR a pour avantage de donner une vision de l'envergure des pertes possibles, sur un horizon donné, avec une probabilité associée à ces pertes, quand les mesures traditionnelles du risque, telles que la variance ou la déviation standard et le degré de sensibilité, communiquent simplement une information sur le pourcentage de la déviation du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne, ou le degré de sensibilité du rendement par rapport aux fluctuations du marché.

Cependant, puisqu'il s'agit d'un quantile, la VaR ne fait pas apparaître les différentes subtilités de la distribution des pertes. Cela veut dire que pour différentes distributions, on pourrait avoir la même VaR alors que les risques pourraient être différents.

Solvency Capital Requirement (SCR) de la directive Solvabilité II³⁵

Le SCR représente le niveau de capital requis pour que l'assureur puisse faire face à ses obligations de prestations envers l'assuré pendant un horizon de temps spécifié et suivant un horizon de temps donné. Afin de calculer le SCR, il faut calculer la Value at Risk pour un seuil de confiance de 99,5% à l'horizon d'un an, à partir de la distribution des fonds propres futurs.

³⁵Selon l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), Il s'agit « d'un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicables aux entreprises d'assurances dans l'Union Européenne, entré en application le 1^{er} janvier 2016 »

4.7 Conclusions générales sur l'étude

L'étude des indicateurs de performance du PEPP avait pour objectif de décrire et d'étudier le modèle stochastique décrit par l'EIOPA. Au cours de nos travaux, nous avons été confrontés à la complexité des méthodes utilisées. En effet, dans son document de référence, l'EIOPA a décrit quatre modèles d'actifs, à savoir le modèle de taux d'intérêt nominal, le modèle des taux de rendement des actions, le modèle du taux de spread de crédit et le modèle du taux d'inflation.

L'implémentation du modèle de taux d'intérêt nominal a nécessité l'utilisation d'une méthode de calibrage des paramètres associés au modèle assez complexe à mettre en œuvre : le filtre de Kalman. Le modèle des taux de rendements des actions nécessitait pour le calcul de ses paramètres l'utilisation d'indices de marché. Nous n'avons pas pu utiliser ceux de l'EIOPA. De plus, nous n'avons pas développé le modèle du taux de spread de crédit du fait de sa complexité et par manque de temps.

L'ensemble des stratégies d'investissements étudiées apparaissent susceptibles de répondre aux objectifs des épargnants selon leur priorité en matière de performance et de risque. En effet, pour la majeure partie des stratégies d'investissements, nous avons constaté une probabilité de récupérer le capital cotisé supérieure au seuil de 99% défini par l'EIOPA dans son document de référence. Ce niveau de probabilité était conjointement associé à un niveau élevé de capital récupéré à la fin de la phase d'accumulation et un faible pourcentage de perte attendu sur ce capital. La majeure partie des stratégies réalisant ces performances sont celles ayant de fortes composantes en actifs de type actions.

D'autre part, l'étude des indicateurs de performance du PEPP nous a permis de conclure que ce dernier est d'autant plus bénéfique pour l'épargnant s'il le détient sur une longue période. En effet, nos évaluations avec des durées d'investissement de 10ans, 30ans, 40ans, nous montrent que les performances s'améliorent avec la durée de l'investissement. Il faut principalement retenir que plus le temps de cotisation de l'épargnant est élevé et plus il pourra bénéficier d'une meilleure rentabilité.

CONCLUSION

Pour faire suite à la volonté de la commission européenne de mutualiser les capitaux européens sur un grand marché et permettre aux populations membres de l'Union Européenne d'obtenir une meilleure retraite peu importe leurs situations, le PEPP, qui s'inspire des produits d'épargne retraite existants, a vu le jour en mars 2022.

L'objectif de ce mémoire était d'évaluer les indicateurs de risques et de performance associés à ce produit. Dans un premier temps, cette étude avait pour but de reprendre les travaux réalisés par l'EIOPA et d'y apporter un point de vue critique. Dans un second temps, nous avons pour objectif d'éclairer un épargnant PEPP sur son positionnement par rapport aux stratégies d'investissement liées à ce produit et qui ont été évoquées par l'EIOPA dans son document.

Pour ce faire, nous avons remis en place le contexte de la création du PEPP en présentant l'état de l'épargne retraite en Europe à nos jours puis en définissant les différentes caractéristiques associées au PEPP. Nous avons ensuite présenté le modèle stochastique de l'EIOPA qui a permis de simuler et de projeter les taux d'intérêts nominaux, les taux de rendements des actions, les taux d'inflation. Au cours de cette présentation, nous avons expliqué de quelle manière ces taux ont été modélisés et les difficultés rencontrées lors de cette modélisation notamment pour l'implémentation du Filtre de Kalman et l'algorithme d'évolution différentielle. En nous basant sur les stratégies d'investissements et les résultats des modèles stochastiques, nous avons ensuite calculé certains indicateurs de risques et de performance évoqués par l'EIOPA.

A l'issue des calculs, nous avons pu constater que le PEPP, tout comme n'importe quel produit d'investissement, est assez performant tout en étant risqué. En effet, la probabilité de récupérer les capitaux cotisés ou l'espérance d'un rendement assez élevé sur les investissements est assez grande lorsque les stratégies d'investissement ont des allocations en actifs de type actions assez élevées. Cela s'explique par le fait que les taux de rendements des actions sont relativement élevés par rapport aux taux d'intérêts nominaux surtout lorsque la durée de projection est grande. Cela nous a également conduits à conclure que pour une meilleure performance du PEPP, il faudrait une durée de cotisation élevée. Il s'agit donc d'un produit rentable pour les jeunes actifs. Il l'est moins pour d'autres classes d'âge. C'est ce qu'affirme Mairead McGuinness, commissaire chargée de la stabilité financière des services financiers et de l'Union des marchés des capitaux : « *Ce nouveau cadre du produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle (PEPP) élargira le choix offert aux épargnants-retraite qui jouiront d'une protection des consommateurs accrue. Aux côtés des pensions de retraite publiques, le PEPP répond aux besoins de la jeune génération actuelle et permet de mieux planifier l'avenir et de faire des projets.* »³⁶

Une des limites principales de cette étude est que nous n'avons pas eu le temps de réaliser la modélisation du spread de crédit, la mise en place de la méthode de calibrage aurait nécessité

³⁶ Source : <https://betterfinance.eu/publication/commissioner-mcguinness-putting-people-at-the-heart-of-the-financial-system-is-part-of-my-vision/>

plus de temps de travail. Les paramètres obtenus auraient permis de meilleurs résultats et de meilleures conclusions. De plus, il aurait été intéressant de faire une sensibilité sur les méthodes de calibrage notamment en implémentant une méthode moins complexe que l'algorithme différentiel et le filtre de Kalman comme la méthode des moindres carrés ordinaires. L'objectif de cette sensibilité serait de regarder l'impact d'un changement de méthodologie sur les indicateurs.

Les indicateurs étudiés dans ce mémoire sont très intéressants et compréhensifs pour l'assuré. Cependant, pour l'émetteur (l'assureur) de ce produit, il faudrait également faire une étude afin d'observer l'incidence d'un tel produit sur le portefeuille de l'assureur. On pourrait par exemple regarder le TRI (Taux de Rendement Interne) ou la VaR (Value at Risk).

Enfin, dans un monde où l'inflation est une réalité, la prise en compte de son impact est cruciale. Les épargnants, en particulier ceux qui sont plus âgés, peuvent hésiter à s'engager dans le PEPP en raison des préoccupations inflationnistes. Une communication claire et transparente sur les risques et les bénéfices associés est donc essentielle pour garantir le succès du PEPP. En somme, le PEPP représente une opportunité significative pour les citoyens de l'UE, mais sa mise en œuvre nécessite une attention et une coordination considérables pour réaliser pleinement son potentiel.

Un sujet qui n'a pas été abordé dans l'étude est la fiscalité et notamment les différents taux qui s'appliquent dans les pays de l'Union Européenne. Ces derniers n'ont pas été pris en compte dans les calculs, mais c'est un facteur qui pourrait fortement impacter les indicateurs de risques et de performance du PEPP. Une fiscalité trop importante engendre une réduction des rendements auxquels pourraient s'attendre les épargnants et donc rend retissant les épargnants PEPP. La fiscalité associée au PEPP devrait donc être conjointement définie pour l'Union Européenne peu importe le pays dans lequel le transfert du produit est effectué.

BIBLIOGRAPHIE

Livres

- Brigo, D., & Mercurio, F. (s.d.). *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance.
- Korn, R., & Wagner, A. (s.d.). Chance-Risk Classification of Pension Products : Scientific Concepts and Challenges. Dans K. Glau, D. Linders, A. Min, M. Scherer, L. Schneider, & R. Zagst, *Innovations in Insurance, Risk and Asset Management* (pp. 381-398).

Articles

- EIOPA. (2020). *Pan-European Personal Pension produit (PEPP) : EIOPA's stochastic model for a holistic assessment of the risk profile and potential performance*.

RÈGLEMENT (UE) 2019/1238 DU PARLEMENT EUROPÉEN

- Alazard. (2006). *Introduction au filtre de Kalman*.
- Laaraiedh, M. (s.d.). *Implementation of Kalman Filter with Python Language*. Rennes.
- Lafarge, F. (2009). *Introcution au filtrage de Kalman*.
- Le Gland, F. (2017). *Filtrage de Kalman et Modèles de Markov Cachés*. Rennes.
- Racicot, F.-E., & Théoret, R. (s.d.). *Quelques applications du filtre de Kalman en finance : estimation et prévision de la volatilité stochastique et du rapport cours-bénéfices*. Québec.
- Antolin, P., Payet, S., & Yermo, J. (2011). *Assessing Default Investment Strateies in Defined Contribution Pension Plans*.

Mémoires

- Yackson, N. (2021). *Modélisation et calcul des indicateurs de performance sur le nouveau produit euro-croissance*.
- Martin, C. (2007). *Optimisation de l'allocation stratégique d'actifs d'une compagnie d'assurance vie*.

Sites

- Chatignoux, C. (2021). *Les Euopéens ont acumulé 600 milliards d'éoargne supplémentaire pendant la crise*. Les Echos.
- Eurostat.(s.d.). Récupérésur <https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tipsun20/default/table?lang=fr>
- Fréquence Retraite. (2021). *Le PEPP : Produit Paneuropéen d'Epargne-Retraite Individuelle*. Fréquence Retraite.

TABLE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1 : Évolution de la proportion d'actifs selon les stratégies dépendant de l'âge de l'épargnant (Source EIOPA)	22
Figure 2 : Évolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)	23
Figure 3 : Evolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)	23
Figure 4 : Évolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)	24
Figure 5 : Evolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)	25
Figure 6 : Evolution de la proportion d'actifs (source EIOPA)	26
Figure 7 : Probabilité de récupérer le capital avec prise en compte des frais (source EIOPA)	28
Figure 8 : Probabilité de récupérer le capital sans prise en compte des frais (source EIOPA)	29
Figure 9 : Déficit attendu par l'épargnant en cas de non-récupération du capital accumulé (source EIOPA)	30
Figure 10 : Illustration du 5eme centile de la distribution pour toutes les stratégies d'investissement (source EIOPA)	31
Figure 11 : L'étendue (range) pour chacune des stratégies (source EIOPA)	33
Figure 12 : L'étendue interquartile de chaque stratégie d'investissement (source EIOPA)	33
Figure 13 : L'écart type de la distribution de chacune des stratégies (source EIOPA)	34
Figure 14 : Coefficient de variation de la distribution des stratégies (source EIOPA)	35
Figure 15 : Somme médiane attendue après investissement pour chacune des stratégies (source EIOPA)	36
Figure 16 : Somme moyenne attendue après investissement pour chacune des stratégies (source EIOPA)	37
Figure 17 : Probabilité de récupérer la totalité des montants cotisés et investis pour l'ensemble des stratégies d'investissement (source EIOPA)	39
Figure 18 : Probabilité d'obtenir un rendement moyen équivalent au taux sans risque de l'EIOPA (UFR) pour l'ensemble des stratégies d'investissement (source EIOPA)	40
Figure 19 : Graphique de classification de l'EIOPA utilisant l'écart-type et la moyenne du 20e centile des distributions pour l'ensemble des stratégies d'investissement. (source EIOPA)	43
Figure 20 : Indicateur risque-performance utilisant le 5e centile et la moyenne (source EIOPA)	44
Figure 21 : Taux historiques de rendements sans risques de la BCE	52
Figure 22 : Evolution des taux nominaux obtenus sur une période de 40 ans	54
Figure 23 : Résultats obtenus par l'EIOPA sur l'évolution des taux nominaux	Erreur ! Signet non défini.
Figure 24 : Ecarts relatifs entre l'espérance et la moyenne empirique	55
Figure 26 : Taux de rendement des actions selon l'indice S&P 500 Europe	59
Figure 27 : Taux de rendement des actions selon l'indice STOXX Europe 500	60
Figure 28 : Projection des taux d'inflation par l'EIOPA	64
Figure 29 : Taux de chômage entre 2002 et 2018	67
Figure 30 : Illustration de la probabilité d'atteindre un taux de rendement supérieur au taux UFR	75
Figure 31 : Indicateur de risque sommaire construit sur la base de nos résultats	77

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: Classification de certaines stratégies d'investissement selon un indicateur de risque sommaire (source EIOPA)	45
Tableau 2 Classification de certaines stratégies d'investissement selon la période d'investissement (source EIOPA)	46
Tableau 3 : Probabilité de récupérer le capital investi selon les différentes stratégies	71
Tableau 4 : Manque à gagner en cas de non récupération totale du capital cotisé	72
Tableau 5 : Indicateurs de dispersion de la distributions des sommes accumulées	73
Tableau 6 : Somme attendue par l'épargnant	74
Tableau 7 : Probabilité de récupérer le capital accumulé selon la durée de l'investissement	78
Tableau 8 : Classification des variables	104

NOTE DE SYNTHÈSE

Le marché de l'épargne-retraite représente un ensemble de produits d'investissements financiers permettant la constitution d'une épargne lors de la vie active et qui permettra à la retraite, de disposer d'un capital ou d'une rente.

Dans la dynamique de réunir les marchés des capitaux européens et de faciliter l'épargne-retraite individuelle dans l'Union Européenne, la Commission européenne a annoncé le 29 juin 2017, une proposition législative relative à un produit d'épargne retraite individuel, le Pan-European Personal Product (PEPP)³⁷.

Le PEPP est un produit d'épargne ou d'investissement disponible pour toute personne désireuse d'épargner quelle que soit sa situation financière, professionnelle et géographique en Europe. Il se veut transparent, transférable et à faible coût pour l'épargnant.

L'EIOPA, qui se charge entre autres de protéger l'épargne pour la retraite des professionnels, a étudié les indicateurs de risques et de performance associés à ce produit en se basant sur des modèles de taux et des stratégies d'investissement. En effet, l'entrée sur le marché d'un produit comme le PEPP nécessite l'étude des risques et des rentabilités qui lui sont associés afin de mieux informer l'épargnant sur celui-ci. Les résultats de cette étude sont présentés dans un document de référence « **EIOPA'S STOCHASTIC MODEL FOR A HOLISTIC ASSESSMENT OF THE RISK PROFILE AND POTENTIAL PERFORMANCE** »³⁸ publié en Août 2020. Ce document décrit l'ensemble des modèles de taux, les stratégies d'allocations d'actifs et les indicateurs utilisés pour évaluer la performance du PEPP.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les indicateurs de risques et de performance du PEPP en se basant sur le modèle stochastique développé par l'EIOPA. Les résultats obtenus feront l'objet de discussions, d'analyses et de critiques.

Le modèle stochastique décrit dans le document de l'EIOPA, met en avant la modélisation du taux d'intérêt nominal, du taux d'inflation, des taux de rendements des actions et le spread de crédit en se basant sur des méthodes de calibrage peu utilisées sur le marché à l'heure actuelle comme le Filtre de Kalman³⁹ et l'algorithme d'évolution différentiel.

³⁷[Règlement \(UE\) 2019/ du Parlement européen et du Conseil du 20 juin 2019 relatif à un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle \(PEPP\) \(europa.eu\)](#)

³⁸https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/publications/eiopa-20-505_pepp_stochastic_model.pdf

³⁹Le filtre de Kalman peut se définir comme un algorithme à réponse impulsionnelle infinie permettant une certaine estimation des états d'un système dynamique à partir de séries de mesures réelles, non complètes ou bruitées. Ainsi, les sorties sont basées sur les signaux aléatoires d'entrée et des valeurs antérieures des sorties (prédictions).

L'ensemble des taux modélisés est ensuite utilisé pour projeter dans le temps les capitaux obtenus par les épargnants à la fin de leurs contrats selon les stratégies d'investissement choisies par ceux-ci.

Les stratégies d'investissements ont été choisies par l'EIOPA et présentent cinq grandes catégories à savoir :

- **Life cycle investment** : stratégie dont l'investissement en actifs de type obligations ou actions dépend de l'âge de l'épargnant.
- **Strategies establishing reserves from contributions and/or investment returns** : stratégie dont l'investissement en actifs de type obligations ou actions dépend des rendements et des capitaux accumulés au cours des années précédentes
- **Fixed portfolio strategies** : stratégie dont le poids en actifs de type actions est fixé au fil du temps avec un rééquilibrage annuel
- **Guarantees** : stratégie assurant à l'épargnant de récupérer au moins la somme nominale de ses cotisations, avant tout frais et primes, à l'âge de sa retraite, la prime de la garantie étant prélevée sur les cotisations.
- **Buy-and-Hold stratégies** : stratégie dont les cotisations annuelles sont investies dans des actions et des obligations avec une division fixe. Cependant, le portefeuille n'est jamais rééquilibré.

Les projections des cotisations obtenues sont utilisées pour évaluer les indicateurs de risques et de performance choisis par l'EIOPA :

- Indicateurs de risques
 - Probabilité de récupérer le capital cotisé
 - Déficit attendu
 - Montants les plus faibles attendus
 - Dispersion de la distribution des montants cotisés par l'épargnant
- Indicateurs de performance
 - Gain potentiel d'une stratégie d'investissement
 - Probabilité d'atteindre un certain niveau d'ambition

Ces indicateurs de risques et de performance pris individuellement ne permettent que partiellement d'expliquer l'impact des stratégies d'investissements sur le rendement attendu par le cotisant à son départ à la retraite. Il est donc nécessaire de construire un indicateur de risque sommaire qui permettrait à l'épargnant de classer chacune des stratégies d'investissement et de choisir celles qui lui conviennent. L'indicateur sommaire de risque ou Summary Risk Indicator (SRI) en anglais, est construit selon les stratégies de risques et de

performance précédemment définies. La construction du SRI se base sur une approche utilisée par Korn et Wagner (2018) ⁴⁰

Dans le cadre des études réalisées dans ce mémoire, nous avons été confrontés à la complexité des méthodes utilisées à savoir entre autres la construction du filtre de Kalman et l'utilisation d'indices de marché auxquels nous n'avons pas pu avoir accès.

Cependant, à l'issue des calculs, nous avons pu constater que le PEPP, tout comme n'importe quel produit d'investissement, est assez performant tout en étant risqué. En effet, la probabilité de récupérer les capitaux cotisés ou l'espérance d'un rendement assez élevé sur les investissements est assez grande lorsque les stratégies d'investissement ont des allocations en actifs de type actions assez élevées. Cela s'explique par le fait que les taux de rendements des actions sont relativement élevés par rapport aux taux d'intérêts nominaux, surtout lorsque la durée de projection est grande. Cela nous a également conduit à conclure que pour une meilleure performance du PEPP, il faudrait une durée de cotisation élevée. Il s'agit donc d'un produit rentable pour les jeunes actifs. Il l'est moins pour d'autres classes d'âge.

⁴⁰[Innovations in Insurance, Risk- and Asset Management \(468 Pages\) \(worldscientific.com\)](https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/9789814680000_0004)

EXECUTIVE SUMMARY

The retirement savings market represents a set of financial investment products allowing the constitution of savings during working life and which will allow retirement, to have a capital or an annuity.

To bring together European capital markets and facilitate personal pension savings in the European Union, the European Commission announced on 29 June 2017 a legislative proposal for a personal pension product, the Pan-European Personal Product (PEPP)⁴¹.

The PEPP is a savings or investment product available to anyone wishing to save regardless of their financial, professional, and geographical situation in Europe. It is intended to be transparent, transferable and at low cost for the investor.

EIOPA, which is responsible, among other things, for protecting professionals' retirement savings, studied the risk and performance indicators associated with this product based on interest rate models and investment strategies. Indeed, the entry into the market of a product such as the PEPP requires the study of the risks and profitability associated with it to better inform the saver about it. The results of this study are presented in a reference document **"EIOPA'S STOCHASTIC MODEL FOR A HOLISTIC ASSESSMENT OF THE RISK PROFILE AND POTENTIAL PERFORMANCE"**⁴² published in August 2020. This document describes the set of interest rate models, asset allocation strategies and indicators used to assess the performance of the PEPP.

The objective of this thesis is to study the risk and performance indicators of the PEPP based on the stochastic model developed by EIOPA. The results obtained will be discussed, analyzed, and criticized.

The stochastic model described in the EIOPA paper highlights the modelling of nominal interest rate, inflation rate, equity rates of return and credit spread based on calibration methods that are currently rarely used in the market such as the Kalman Filter ⁴³ and the differential evolution algorithm.

All modelled rates are then used to project over time the amounts of contributions obtained by savers at the end of their contracts according to the investment strategies chosen by them.

⁴¹[Règlement \(UE\) 2019/ du Parlement européen et du Conseil du 20 juin 2019 relatif à un produit paneuropéen d'épargne-retraite individuelle \(PEPP\) \(europa.eu\)](#)

⁴²https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/publications/eiopa-20-505_pepp_stochastic_model.pdf

⁴³ The Kalman filter can be defined as an infinite impulse response algorithm allowing some estimation of the states of a dynamical system from series of real, incomplete, or noisy measurements. Thus, outputs are based on random input signals and previous output values (predictions).

The investment strategies have been chosen by EIOPA and have five main categories:

- **Life cycle investment:** a strategy in which the investment in bond or equity assets depends on the age of the saver.
- **Strategies establishing reserves from contributions and/or investment returns:** a strategy in which the investment in bond or equity assets depends on the returns and capital accumulated in previous years
- **Fixed portfolio strategies:** strategy whose weight in equity-type assets is fixed over time with an annual rebalancing
- **Guarantees:** strategy ensuring that the saver recovers at least the nominal amount of his contributions, before any costs and premiums, at retirement age, the premium of the guarantee being deducted from the contributions.
- **Buy-and-Hold strategies:** strategy whose annual dues are invested in stocks and bonds with a fixed division. However, the portfolio is never rebalanced.

The projections of the contributions obtained are used to evaluate the risk and performance indicators chosen by EIOPA:

- Risk indicators
 - Probability of recovering the contributed capital
 - Expected deficit
 - Lowest amounts expected
 - Dispersion of the distribution of the amounts contributed by the saver
- Performance indicators
 - Potential gain from an investment strategy
 - Probability of achieving a certain level of ambition

These individual risk and performance indicators only partially explain the impact of investment strategies on the return expected by the contributor upon retirement. It is therefore necessary to construct a summary risk indicator that would allow the investor to rank each of the investment strategies and choose the ones that suit him. The Summary Risk Indicator (SRI) is built according to the risk and performance strategies previously defined. The construction of the SRI is based on an approach used by Korn and Wagner (2018).⁴⁴

As part of the studies carried out in this thesis, we were confronted with the complexity of the methods used, namely the construction of the Kalman filter and the use of market indices to which we could not have access.

⁴⁴[Innovations in Insurance, Risk- and Asset Management \(468 Pages\) \(worldscientific.com\)](https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/9789814614614_0004)

However, after the calculations, we could see that the PEPP just like any investment product is quite efficient while being risky. Indeed, the probability of recovering the contributed capital or the expectation of a high return on investments is quite high when investment strategies have high equity-type asset allocations. This is because equity rates of return are relatively high compared to nominal interest rates, especially when the projection period is longer. This also led us to conclude that better performance of the PEPP would require a long contribution period. It is therefore a profitable product for young workers. It is less so for other age groups.

ANNEXE

Filtre de Kalman

Un filtrage consiste à estimer un signal (une information recherchée ou utile) qui est polluée par un bruit. Le filtre de Kalman peut se définir comme un algorithme permettant d'estimer de manière optimale cette information qui correspond à l'état d'un système linéaire⁴⁵. C'est un algorithme à réponse impulsionnelle⁴⁶ infinie permettant une certaine estimation des états d'un système dynamique à partir de séries de mesures réelles, non complètes ou bruitées. Ainsi, les sorties sont basées sur les signaux aléatoires d'entrée et des valeurs antérieures des dites sorties (prédictions).

Ces signaux d'entrée aléatoires sont supposés ici être des bruits qui polluent les sorties des estimations ou mesures. Ces mesures peuvent être des trajectoires de mobiles, des vitesses ou positions d'objets, des taux sur le marché ou des paramètres de modèles. Le but du filtre est donc de suivre l'évolution dans le temps des signaux d'entrée en éliminant les bruits ou aléas associés à ces derniers afin de calculer ou prédire de meilleurs signaux de sortie qui seront ensuite réutilisés par le filtre.

De nos jours, il existe une multitude de filtres de Kalman. Pour notre étude, nous nous concentrerons sur le filtre de Kalman en contexte discret. Ainsi, l'estimation des sorties ne nécessitera que les signaux d'entrée et les estimations antérieures obtenues.

Le Filtre de Kalman peut être modélisé par un modèle appelé le modèle de Kalman. Ce modèle présente deux équations communes à savoir une équation d'état et une équation de mesure ou d'estimation. On a donc :

- Équation d'état

$$x(t + 1) = A_d x(t) + B_d u(t) + M_d \omega_d(t)$$

De sorte que $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\omega_d \in \mathbb{R}^q$

Avec :

- $x(t)$, le vecteur d'état du système
- $u(t)$, le vecteur des entrées connues

⁴⁵ Dans notre cas il s'agit de systèmes dynamiques linéaires comme les modèles de balistiques, de trajectographie ou de navigation par exemple.

⁴⁶ Signal de sortie obtenu lorsque le signal d'entrée est une variation soudaine et brève du dit signal.

- $\omega_d(t)$, le vecteur des signaux d'entrée aléatoires qui perturbent l'équation d'état du système dynamique directement à travers une certaine matrice d'entrée M_d . ($\omega_d(t)$ = bruits d'état)
 - A_d , la matrice reliant les observations de l'état t à l'état $t + 1$
 - B_d , la matrice reliant les entrées connues aux observations de l'état
 - M_d , la matrice d'entrée
- Équation de mesure ou d'estimation

$$y(t) = C_d x(t) + Du(t) + v_d(t)$$

Telle que $y \in \mathbb{R}^p$, $v_d \in \mathbb{R}^p$

Avec :

- $v_d(t)$, le vecteur des signaux d'entrée aléatoires qui perturbent l'équation de mesure
- $y(t)$, le vecteur des mesures (estimations)
- C_d , la matrice reliant l'estimation (mesure) à l'état du système à l'instant t
- D , la matrice reliant les entrées connues aux observations de la mesure

Sous les hypothèses :

- (A_d, C_d) est détectable c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système. Cela signifie que (A_d, C_d) est un signal aléatoire de spectre complexe.
- $\omega_d(t)$ et $v_d(t)$, sont des bruits blancs⁴⁷ gaussiens centrés de matrices de covariance finies⁴⁸ respectives W_d et V_d avec :
 - $E[\omega_d(t)\omega_d^{Transposée}(t + \Delta t)] = W_d\delta(\Delta t)$
 - $E[v_d(t)v_d^{Transposée}(t + \Delta t)] = V_d\delta(\Delta t)$
 - $E[\omega_d(t)v_d^{Transposée}(t + \Delta t)] = 0$

$$(avec \delta(\Delta t) = 1 \text{ et } \Delta t = 0 ; \delta(\Delta t) = 0 \text{ et } \Delta t \neq 0)$$

Cela traduit l'indépendance stochastique des bruits blancs $\omega_d(t)$ et $v_d(t)$

- V_d , est inversible c'est-à-dire que nous avons autant de bruits blancs indépendants que de sorties dans l'équation de mesure. (V_d est définie positive et W_d est semi-définie positive)

⁴⁷Bruit Blanc : un bruit blanc peut être défini comme un signal aléatoire qui varie de manière infinie ayant un spectre complexe sur toute la plage des fréquences.

⁴⁸ A contrario du filtre de Kalman continu où elles sont infinies (Matrices de Densité Spectrale de Puissance)

- Les matrices A_d, B_d, C_d, M_d, D sont supposées ici indépendantes du temps parce que le système et les bruits associés sont stationnaires.

L'objectif du filtre de Kalman étant d'estimer les valeurs de $x(t + 1)$ sachant les prédictions de $x(t)$ en éliminant les bruits associés à $x(t)$, il est important de déterminer la justesse de cette prédiction. Pour ce faire, le système se base sur un signal d'erreur de l'estimation appelé innovation et sur le gain de Kalman.

En effet, le gain de Kalman représente le critère de sélection optimal qui permet de combiner la prédiction a priori $x(t + 1|t)$ et l'estimation a posteriori $x(t + 1|t + 1)$. Calculer le gain de Kalman revient donc à minimiser la variance de l'erreur de l'estimation donc l'innovation. Notons que l'innovation représente la différence entre la valeur de l'estimation et la valeur de la prédiction.

Ainsi, le filtre de Kalman a deux grandes phases à savoir la phase de prédiction et la phase de mise à jour. Comme expliqué précédemment, le filtre va utiliser la phase de prédiction en s'appuyant sur un modèle déterministe (équation d'état) pour prédire les valeurs de $x(t + 1|t)$ et calculer la variance de l'erreur d'estimation (matrice d'estimation a priori de la covariance de l'erreur de l'estimation).

En se basant ensuite sur l'équation de mesure, il va estimer a posteriori les valeurs de $x(t + 1|t + 1)$, calculer l'innovation, le gain de Kalman et recalculer la variance de l'erreur d'estimation en la mettant à jour grâce au gain de Kalman.

En fait, la modélisation de chacune des phases se présente comme suit :

- Phase de Prédiction

- Estimation a priori

$$x_{t|t-1} = A_d x_{t-1|t-1} + B_d u_t + M_d \omega_t$$

- Calcul de la matrice d'estimation a priori de la covariance de l'erreur à l'instant t sachant l'état précédent t-1

$$\Omega_{t|t-1} = A_d \Omega_{t-1|t-1} A_d^{transposée} + Q_t$$

- Q_t , la matrice de covariance des bruits ω_t

- Phase de mise à jour

- Calcul de l'innovation

$$I_t = y_t - C_d x_{t|t-1} + v_t$$

- Calcul de la matrice de covariance associée à l'innovation

$$J_t = C_d \Omega_{t|t-1} C_d^{transposée} + H_t$$

- H_t , la matrice de covariance des bruits v_t
- Calcul du gain de Kalman
- Calcul de l'état de mise à jour
- Calcul de la matrice de covariance associée à l'équation de mise à jour

Application du Filtre de Kalman au modèle de taux d'intérêt nominal

Le filtre Kalman a été utilisé ici par le modèle G2++ afin de calculer le critère de sélection de l'algorithme d'optimisation current-to-p-best, ce critère étant le gain de Kalman.

Afin de déterminer les étapes filtre de Kalman associées au modèle décrit par l'EIOPA, une équation d'état et une équation de mesure ont été définies.

D'après le document on a :

- L'équation de mesure :

$$\begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \log A(t, t + \tau_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau_n} \log A(t, t + \tau_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} B(a, t, t + \tau_1) & \frac{1}{\tau_1} B(b, t, t + \tau_1) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\tau_n} B(a, t, t + \tau_n) & \frac{1}{\tau_n} B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \epsilon(t)$$

- L'équation d'état :

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-a\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-b\Delta t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 \sigma}{a} (1 - e^{-a\Delta t}) \\ \frac{\lambda_1 \eta \rho + \lambda_2 \eta \sqrt{1 - \rho^2}}{b} (1 - e^{-b\Delta t}) \end{pmatrix} + \eta(t)$$

Le tableau qui suit permet de récapituler les différentes variables du modèle de l'EIOPA qui s'identifient aux variables du filtre de Kalman :

Tableau 8 : Classification des variables

Variables Filtre de Kalman	Variables du modèle EIOPA
$x_{t t-1}$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
$x_{t t}$	$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \end{pmatrix}$
C_d	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} B(a, t, t + \tau_1) & \frac{1}{\tau_1} B(b, t, t + \tau_1) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\tau_n} B(a, t, t + \tau_n) & \frac{1}{\tau_n} B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">Avec :</p> $B(z, t, T) := \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}$
D	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \log A(t, t + \tau_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau_n} \log A(t, t + \tau_1) \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">Avec :</p> $A(t, T) := \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{\frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)]}$ <p style="text-align: center;">Et</p> $V(t, T) := \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} (e^{-a(T-t)}) - \frac{1}{2a} (e^{-2a(T-t)}) - \frac{3}{2a} \right]$ $+ \frac{\eta^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} (e^{-b(T-t)}) - \frac{1}{2b} (e^{-b(T-t)}) - \frac{3}{2b} \right]$ $+ 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a + b} \right]$
u_t	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ω_d	$\eta(t) \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$ <p>Avec :</p> $Q_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) & \frac{\sigma\eta\rho}{a+b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t}) \\ \frac{\sigma\eta\rho}{a+b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t}) & \frac{\eta^2}{2b}(1 - e^{-2b\Delta t}) \end{bmatrix}$
y_t	$\begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_n) \end{pmatrix}$
A_t	$\begin{bmatrix} e^{-a\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-b\Delta t} \end{bmatrix}$
B_t	$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1\sigma}{a}(1 - e^{-a\Delta t}) \\ \frac{\lambda_1\eta\rho + \lambda_2\eta\sqrt{1 - \rho^2}}{b}(1 - e^{-b\Delta t}) \end{pmatrix}$
v_t	$\epsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{H}_t)$ <p>Avec</p> $\mathcal{H}_t = \begin{bmatrix} [0.0001, 0.001] & \dots & [0.0001, 0.001] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0.0001, 0.001] & \dots & [0.0001, 0.001] \end{bmatrix}$

En appliquant le filtre de Kalman aux équations, on a :

- Phase de prédiction :
 - o Estimation à priori

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-a\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-b\Delta t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1\sigma}{a}(1 - e^{-a\Delta t}) \\ \frac{\lambda_1\eta\rho + \lambda_2\eta\sqrt{1 - \rho^2}}{b}(1 - e^{-b\Delta t}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \eta(t)$$

- o Calcul de la matrice d'estimation a priori de la covariance de l'erreur à l'instant t sachant l'état précédant $t - 1$

$$\Omega_{t|t-1} = \begin{bmatrix} e^{-a\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-b\Delta t} \end{bmatrix} \Omega_{t-1|t-1} \begin{bmatrix} e^{-a\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-b\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) & \frac{\sigma\eta\rho}{a+b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t}) \\ \frac{\sigma\eta\rho}{a+b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t}) & \frac{\eta^2}{2b}(1 - e^{-2b\Delta t}) \end{bmatrix}$$

- Phase de mise à jour :

- o Calcul de l'innovation I_t

$$I_t = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1}B(a, t, t + \tau_1) & \frac{1}{\tau_1}B(b, t, t + \tau_1) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\tau_n}B(a, t, t + \tau_n) & \frac{1}{\tau_n}B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \epsilon(t)$$

- o Calcul de la matrice de covariance associée à l'innovation J_t

$$J_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1}B(a, t, t + \tau_1) & \frac{1}{\tau_1}B(b, t, t + \tau_1) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\tau_n}B(a, t, t + \tau_n) & \frac{1}{\tau_n}B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix} \Omega_{t|t-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1}B(a, t, t + \tau_1) & \dots & \frac{1}{\tau_n}B(a, t, t + \tau_n) \\ \frac{1}{\tau_1}B(b, t, t + \tau_1) & \dots & \frac{1}{\tau_n}B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [0.0001, 0.001] & \dots & [0.0001, 0.001] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0.0001, 0.001] & \dots & [0.0001, 0.001] \end{bmatrix}$$

- o Calcul du gain de Kalman G_t

$$G_t = \Omega_{t|t-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1}B(a, t, t + \tau_1) & \dots & \frac{1}{\tau_n}B(a, t, t + \tau_n) \\ \frac{1}{\tau_1}B(b, t, t + \tau_1) & \dots & \frac{1}{\tau_n}B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix} J_t^{-1}$$

- o Calcul de l'état de mise à jour

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + G_t I_t$$

- o Calcul de la matrice de covariance associée à l'équation de mise à jour

$$\Omega_{t|t} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - G_t \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1}B(a, t, t + \tau_1) & \dots & \frac{1}{\tau_n}B(a, t, t + \tau_n) \\ \frac{1}{\tau_1}B(b, t, t + \tau_1) & \dots & \frac{1}{\tau_n}B(b, t, t + \tau_n) \end{pmatrix} \right) \Omega_{t|t-1}$$

Algorithme d'optimisation current-to-p-best

- Description de l'algorithme

L'algorithme current-to-p-best est un algorithme d'évolution différentielle c'est-à-dire qu'il soumet à plusieurs itérations de recombinaison, d'évaluation et de sélection, une certaine population de solutions de son processus d'optimisation.

En effet, la recombinaison à proprement dite fait intervenir la génération de nouvelles composantes (solutions candidates) qui se base sur une différence pondérée entre deux individus de la population préalablement sélectionnée au hasard.

On ajoute ensuite un troisième individu aux deux précédents, ce qui va venir perturber les individus de la population précédente.

Ainsi à l'étape de sélection, cet effet de perturbation engendre une réorganisation de la population de sorte que l'intervalle de sélection soit composé d'éléments préalablement reconnus par l'algorithme.

D'après le livre de Jingquo Zhang et Arthur C. Sanderson, Adaptive Differential Evolution⁴⁹, l'algorithme current-to-p-best est constitué de quatre étapes :

- Initialisation

Il s'agit de générer aléatoirement une population initiale $\{x_{i,0} = (x_{1,i,0}, x_{2,i,0}, \dots, x_{D,i,0})\}$, telle que :

- $i = 1, 2, \dots, NP$; avec NP la taille de la population initiale
- $x_j^{low} \leq x_{j,i,0} \leq x_j^{up}$, pour tout $j = 1, 2, \dots, D$;
 - D étant la dimension du problème
 - x_j^{low} , le vecteur des contraintes minimums associées au problème
 - x_j^{up} , le vecteur des contraintes maximums associées au problème

- Mutation

Pour la phase de mutation, à chaque génération g, une population mutante $u_{i,g}$ est créée en trois étapes :

⁴⁹ Zhang, J. and Sanderson, A.: Adaptive Differential Evolution, Springer-Verlag 2009.

- $u_{i,g} = x_{r0,g} + F_i(x_{r1,g} - x_{r2,g})$
 - $r0, r1, r2$ sont des indices choisis de manière aléatoire sur $\{1, 2, \dots, NP\} \setminus \{i\}$
 - F_i le facteur de mutation choisi. Il est pris dans l'intervalle $\{0, 1, \dots, +\infty\}$
 - $(x_{r1,g} - x_{r2,g})$ le vecteur permettant la mutation
- $u_{i,g} = x_{i,g} + F_i(x_{best,g} - x_{i,g}) + F_i(x_{r1,g} - x_{r2,g})$
 - $x_{best,g}$ la meilleure solution du problème à la génération g
- $u_{i,g} = x_{best,g} + F_i(x_{r1,g} - x_{r2,g})$

Afin de s'assurer du respect des contraintes, on pose :

$$u_{j,i,g} = \frac{x_j^{low} + x_{j,i,g}}{2} \quad \text{si } u_{j,i,g} < x_j^{low}$$

$$u_{j,i,g} = \frac{x_j^{up} + x_{j,i,g}}{2} \quad \text{si } u_{j,i,g} > x_j^{up}$$

Avec $u_{j,i,g}$ et $x_{j,i,g}$ les $j^{\text{ième}}$ composants respectifs de la population mutée $u_{i,g}$ et de la population parentale $x_{i,g}$.

○ Recombinaison

Pour la recombinaison, on fait un croisement entre la population mutée $(x_{1,i,0}, x_{2,i,0}, \dots, x_{D,i,0})$ et la population initiale $(x_{1,i,0}, x_{2,i,0}, \dots, x_{D,i,0})$. Cela se traduit par :

$$v_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g}, & \text{if } \text{rand}_j(0,1) \leq CR_i \text{ où } j = j_{rand} \\ x_{j,i,g}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

○ Sélection

Pour l'étape de sélection, l'algorithme sélectionne la meilleure solution du problème provenant du vecteur parent $x_{i,g}$ et du vecteur d'essai $v_{i,g}$ en fonction de leurs valeurs d'aptitude f . Cette population (meilleure sélection) est ensuite réutilisée à l'étape de mutation comme vecteur parent.

Cela se traduit par :

$$x_{i,g+1} = \begin{cases} v_{i,g}, & \text{if } f(v_{i,g}) < f(x_{i,g}) \\ x_{i,g}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Application de l'Algorithme d'optimisation current-to-p-best

Afin d'obtenir les paramètres du modèle de taux d'intérêt nominal, les différentes étapes de l'algorithme current-to-p-best ont été appliquées.

En effet, nous avons initié une population initiale de 1000 groupes. Chaque groupe représente une famille des sept paramètres $a, b, \sigma, \eta, \rho, \lambda_1, \lambda_2$. Nous avons ensuite calculé le gain de Kalman qui représente dans notre cas le critère de sélection de la meilleure famille de paramètres à retenir. Ce gain est calculé sur la base de la matrice de covariance associée à la phase de mise à jour et donc à l'équation de mesure. Pour chacune des familles, les simulations du filtre de Kalman nous permettent d'obtenir la matrice de covariance associée. La matrice obtenue étant un vecteur, nous calculons la norme associée à chacune d'elle. Nous minimisons ensuite l'ensemble des résultats afin d'obtenir le gain de Kalman.

Le critère de sélection étant obtenu, nous procédons à la mutation de la population initiale. Comme expliqué plus haut, nous appliquons la formule suivante pour obtenir la population mutée :

$$Population_{mutée} = Population_{initiale} + F * (Best - Population_{initiale})$$

Où $Best$ représente la meilleure famille sélectionnée jusqu'à présent et $F = 0,01$

A l'étape de croisement, nous mélangeons aléatoirement la population, puis nous calculons la proportion de familles de la population initiale ayant survécu à la mutation. Avec cette proportion, nous déterminons la population croisée en appliquant la formule :

$$Population_{croisée} = Proportion_{popinitiale} * Population_{initiale} + (1 - Proportion_{popinitiale})$$

A l'étape de sélection, nous calculons le gain de Kalman pour chaque famille de la population croisée, puis nous évaluons la proportion de familles croisées meilleures par rapport à la proportion de familles initiales. Nous sélectionnons ensuite une population selon la formule suivante :

$$Population = Proportion_{meilleure} * Population_{initiale} + (1 - Proportion_{meilleure}) * Population_{croisée}$$

La population obtenue est ensuite réutilisée comme population initiale.

Les calculs s'effectuent donc sur plusieurs générations pour un nombre de familles donné.

Les contraintes pour la génération de la population initiale sont les suivantes :

- Tous les paramètres ont pour contraintes minimales 0.0001
- Les vitesses de retour à la moyenne ont pour contraintes maximales 0.5
- Les volatilités ont pour contraintes maximales 0.2

- Le facteur de corrélation a été contraint à 0.9
- Les primes de risques ont pour contraintes maximales 0.02

Les contraintes ont été choisies après plusieurs tests effectués sur le modèle. Les différents tests nous ont permis d'établir les paramètres qui faisaient concorder la courbe des taux obtenue à la courbe des taux historiques.

Tous les paramètres se retrouvent dans des intervalles de contraintes qui ont été indiqués dans le document de l'EIOPA à savoir les vitesses et les volatilités qui doivent être positives et avoir pour contraintes maximales 1, les primes de risques qui doivent avoir pour contraintes maximales 0.02.