

**100% ACTUAIRES &
100% DATA SCIENCE**

INSTITUT DES
ACTUAIRES



29 / NOV / 2019

Hôtel Marriott Rive Gauche
Paris 14ème

Détermination des seuils de sinistres graves et optimisation de la réassurance

Introduction

Xavier Laureille
Pascale Quennelle
Mickael Ittah

Introduction

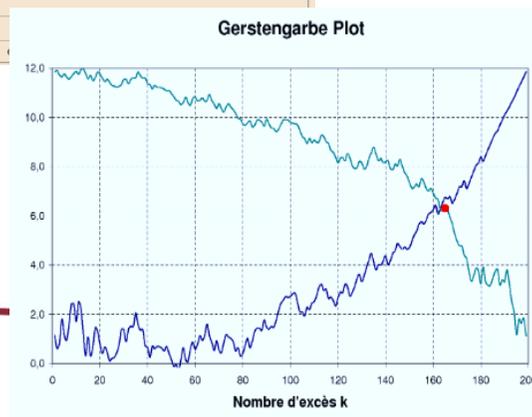
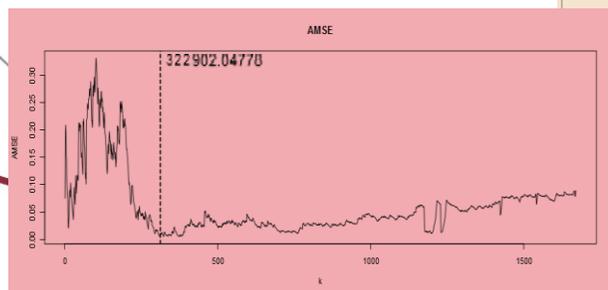
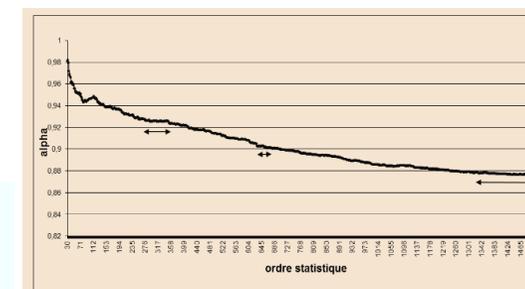
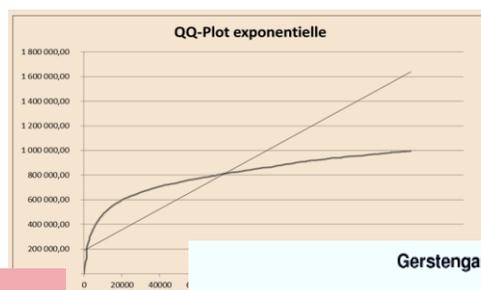
Les sinistres graves ou exceptionnels sont caractérisés par l'association coût important & fréquence faible.

Le seuil à partir duquel un sinistre sera considéré grave dépend de plusieurs éléments à savoir la classe de risque, la taille de cette dernière ou le niveau de prise de risque souhaité.

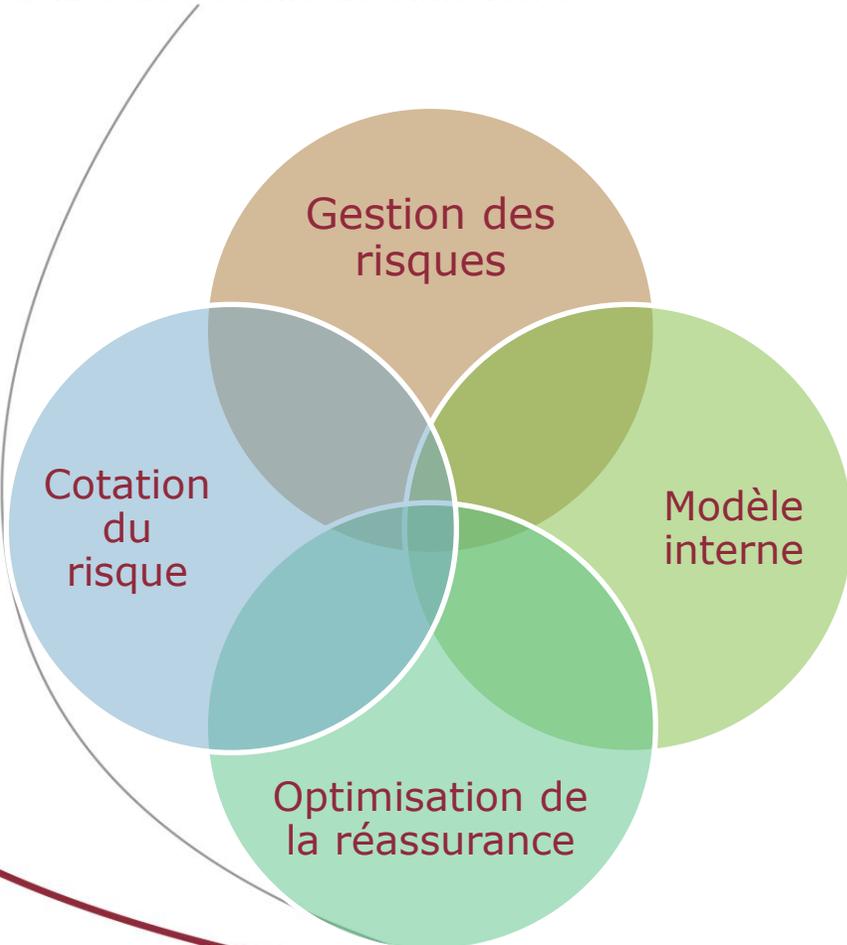
Méthodes statistiques

De nombreuses méthodes statistiques existent pour segmenter les sinistres par seuils d'importance et estimer les seuils des sinistres graves. Ces méthodes, relevant principalement de la **théorie des valeurs extrêmes (TVE)**, permettent d'évaluer les événements exceptionnels ainsi que les pertes associées.

- QQ Plot,
- Méthode GertensGarbe,
- Estimateur de Hill,
- AMSE
- ...



Utilité des seuils de sinistralité



Méthode de détermination des seuils

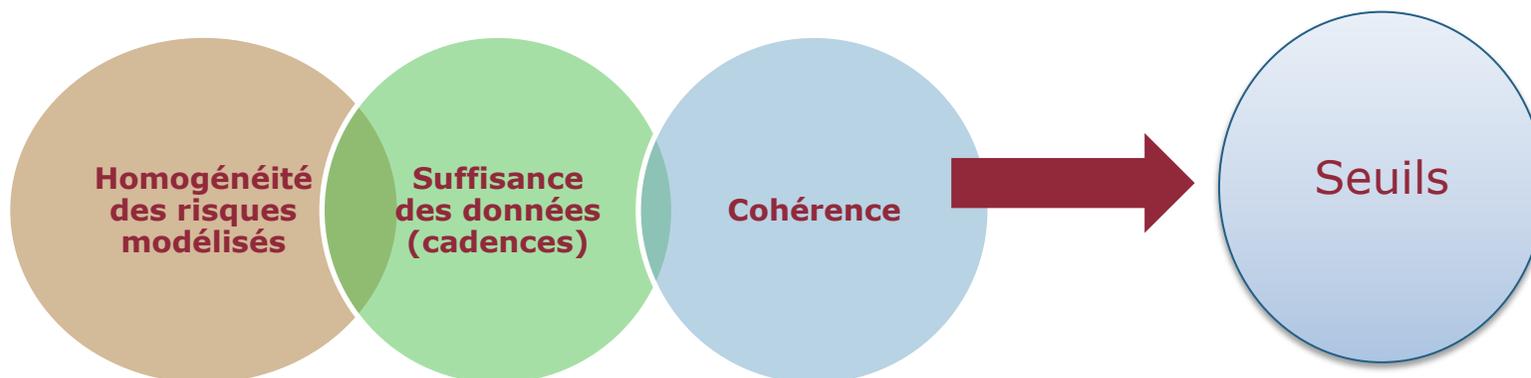
- Pourquoi développer une application ?
- Pourquoi utiliser shiny ?



Extrait du règlement délégué 2015/035 CE – Article 34

- « ..., les entreprises d'assurance et de réassurance veillent à ce que le regroupement de contrats crée des **groupes de risques homogènes (GHR)**, qui reflètent de manière appropriée les risques de chacun des contrats inclus dans ces groupes. »

La notice ACPR dans ses orientations clarifie certaines notion de traitement des données



Norme actuarielle NPA03

Une segmentation par seuil d'importance des sinistres permet de s'assurer de l'homogénéité du triangle de liquidation et donc le calcul en meilleure estimation.

L'ACPR peut demander à l'organisme d'assurance de justifier les seuils de graves

- **Seuils des Graves et BE de Sinistre** : à mesurer par rapport à l'homogénéité des triangles produits notamment en analysant à partir de quel(s) montant(s) de grave les cadences sont différentes (le cas échéant).
- **Seuils des Graves et BE de primes** : à caler sur la tarification en utilisant la théorie des valeurs extrêmes (mean excess plot,...).

Méthodologie de choix des seuils

➔ **DÉTERMINATION DES SEUILS**
STRUCTURE DE L'OUTIL FORSIDES

Détermination des seuils

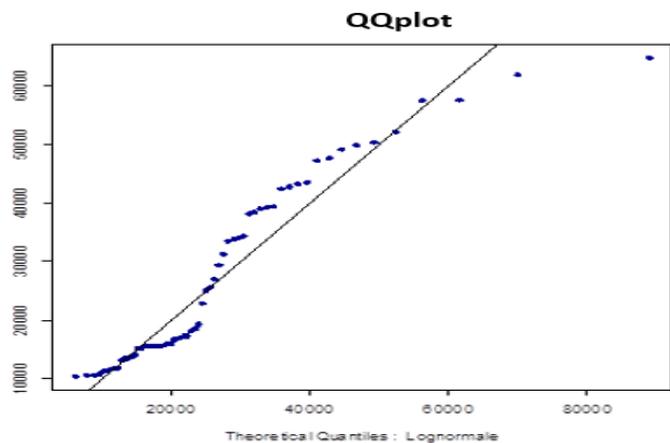
Quelques éléments théoriques (1/3)

Des méthodes « visuelles » dédiées à :

- l'étude des sinistres graves,
- des queues de distribution,
- et à la détermination du seuil des sinistres extrêmes.

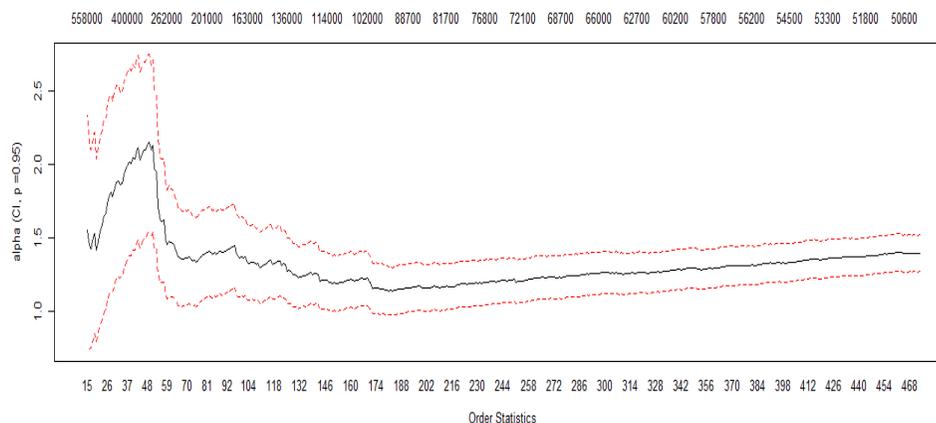
QQ-plot (adéquation) des lois

Le Quantile-Quantile Plot est un outil graphique permettant d'évaluer la pertinence de l'ajustement d'une distribution donnée à un modèle théorique.



Estimateur de Hill

Cette méthode graphique de détermination du seuil repose sur la propriété de stabilité de la loi de Pareto généralisée.



Détermination des seuils

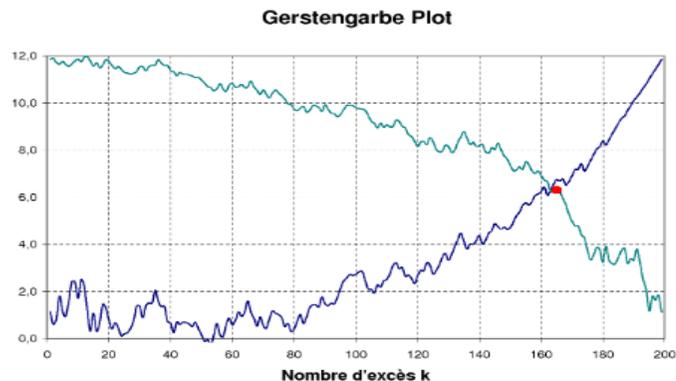
Quelques éléments théoriques (2/3)

Des méthodes « visuelles » dédiées à :

- l'étude des sinistres graves,
- des queues de distribution,
- et à la détermination du seuil des sinistres extrêmes.

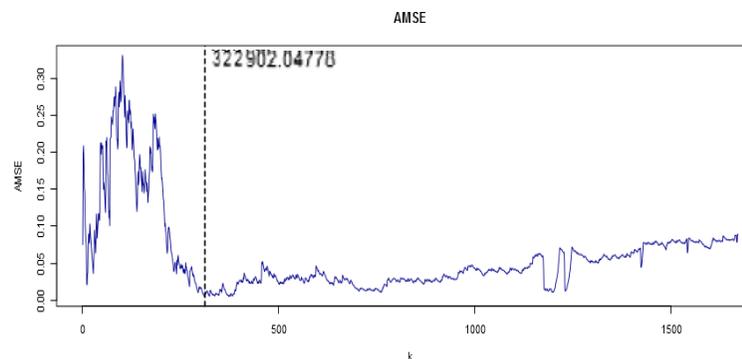
Méthode de Gertensgarbe

Cette méthode est une procédure qui permet de déterminer le point de départ de la région extrême et fournit une estimation du seuil optimal.



AMSE - asymptotic mean squared error

Méthode permettant de déterminer le niveau qui minimise l'erreur quadratique moyenne



Détermination des seuils

Quelques éléments théoriques (3/3)

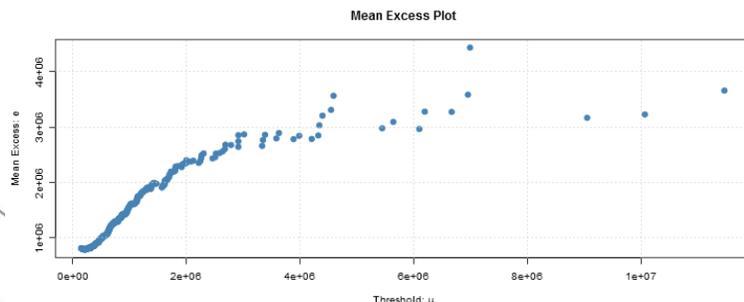
Des méthodes « visuelles » dédiées à :

- l'étude des sinistres graves,
- des queues de distribution,
- et à la détermination du seuil des sinistres extrêmes.

Mean Excess Plot

Cette méthode permet de visualiser la fonction moyenne des excès (ou *Mean Excess plot*). Pour une loi de Pareto Généralisée (GPD), cette fonction est linéaire à partir du seuil.

Graphique Mean Excess Plot



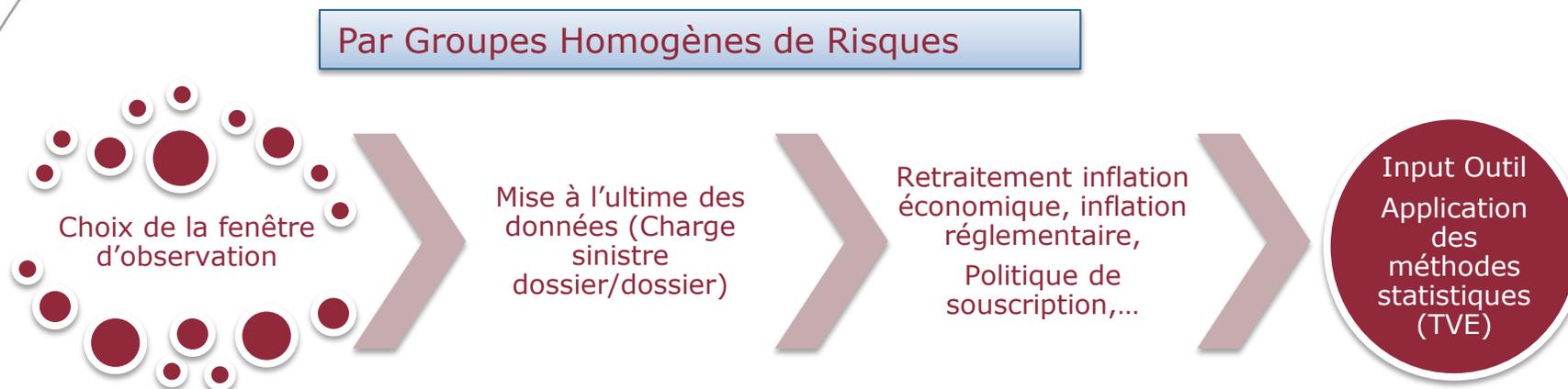
Théorème de Pickands-Balkema-de

Ce théorème suggère que pour un seuil « assez grand », la loi de Pareto Généralisée (GPD) est une bonne approximation de la loi des excès.

En choisissant un seuil convenable, une loi de Pareto Généralisée pourra être ajustée aux données, par exemple aux montants des sinistres dépassant ce seuil.

Détermination des seuils

Généralités



Etapes

- Choix de l'historique à conserver
- Construction d'une base des paiements annuels successifs
- Retraitement mise à l'ultime et « As If »
- Import des données sur l'outil « Seuil » - Application des méthodes statistiques (Théorie des Valeurs Extrêmes - TVE)

- Visualisation de l'allure du mean excess Plot : linéarité ?
- Cohérence des seuils obtenus par les méthodes
- Vérifications de la stabilité du Hill Plot et des estimateurs GPD
- Sensibilités et analyses (ordre ultimes - inflation, stabilité, 5 plus gros sinistres...)

Détermination des seuils

Retraitement des données - Illustration

- Choix de l'historique à conserver : **2006 à 2017**
- Construction d'une base avec les **paiements annuels successifs**



Vision 2017
Avec paiements annuels successifs
depuis la survenance de chaque sinistre

- **Mise à l'ultime (Charge sinistre dossier/dossier)** de la nouvelle base « Vision 2017 » en fonction de l'année de survenance
- **Correction de l'inflation** en fonction de la date des paiements

Survenance	Charge d/d observée	Charge d/d vieillie	Variation (%)
2006	79,52 M€	83,72 M€	5,3%
2007	71,47 M€	75,62 M€	5,8%
2008	63,28 M€	67,45 M€	6,6%
2009	111,35 M€	119,04 M€	6,9%
2010	68,08 M€	72,50 M€	6,5%
2011	93,12 M€	98,70 M€	6,0%
2012	98,47 M€	105,37 M€	7,0%
2013	73,33 M€	78,40 M€	6,9%
2014	94,97 M€	102,10 M€	7,5%
2015	135,91 M€	142,28 M€	4,7%
2016	84,77 M€	90,79 M€	6,5%
2017	59,27 M€	83,69 M€	40,1%

Survenance	Charge d/d vieillie	Charge d/d vieillie	Variation (%)
2006	83,72 M€	106,02 M€	26,6%
2007	75,62 M€	93,28 M€	23,4%
2008	67,45 M€	79,64 M€	18,1%
2009	119,04 M€	132,98 M€	11,7%
2010	72,50 M€	82,18 M€	13,3%
2011	98,70 M€	107,01 M€	8,4%
2012	105,37 M€	111,13 M€	5,5%
2013	78,40 M€	82,48 M€	5,2%
2014	102,10 M€	104,91 M€	2,8%
2015	142,28 M€	143,45 M€	0,8%
2016	90,79 M€	91,11 M€	0,3%
2017	83,69 M€	83,69 M€	0,0%

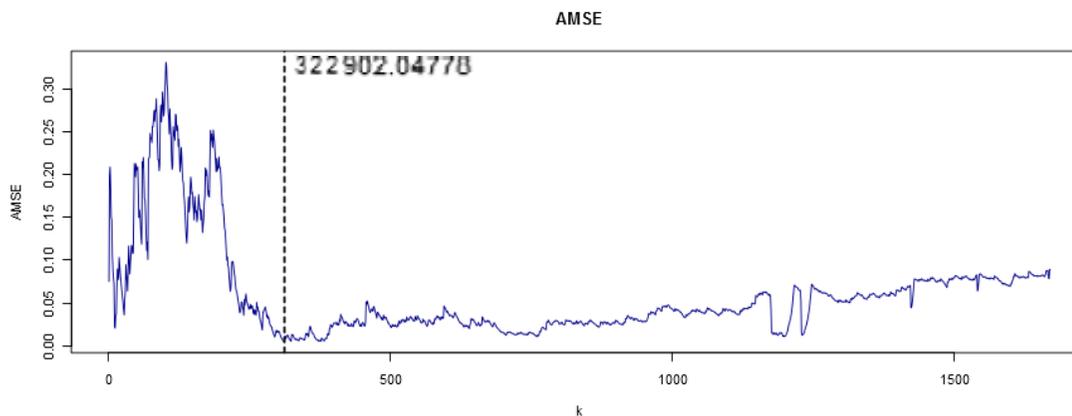
Indice adapté au GHR : *exemple*
Indice des prix à la consommation -
Réparation de véhicules personnels

Détermination des seuils

Algorithmes seuil optimal - illustration

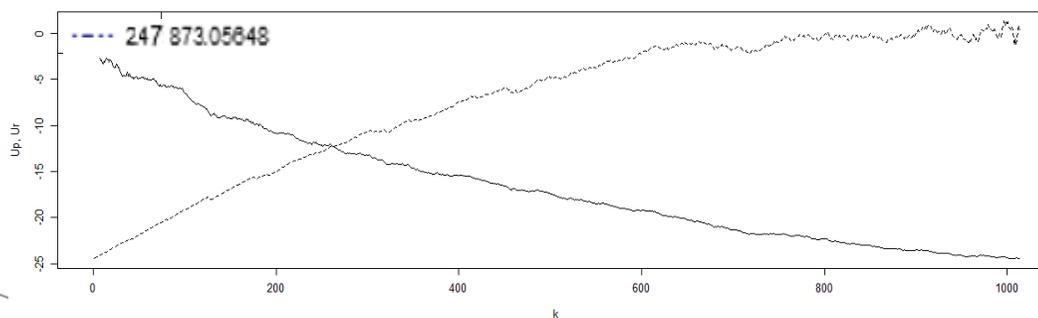
AMSE – minimisation erreur quadratique & Gerstengarbe Plot

AMSE



325 K

Gertensgarbe

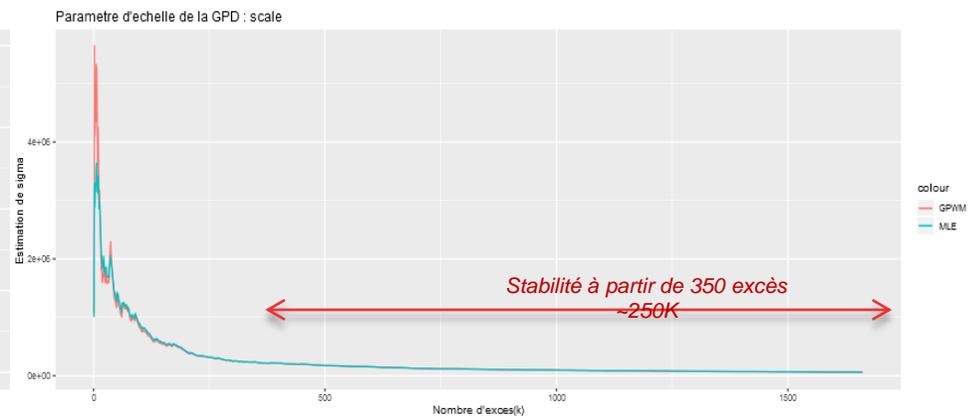
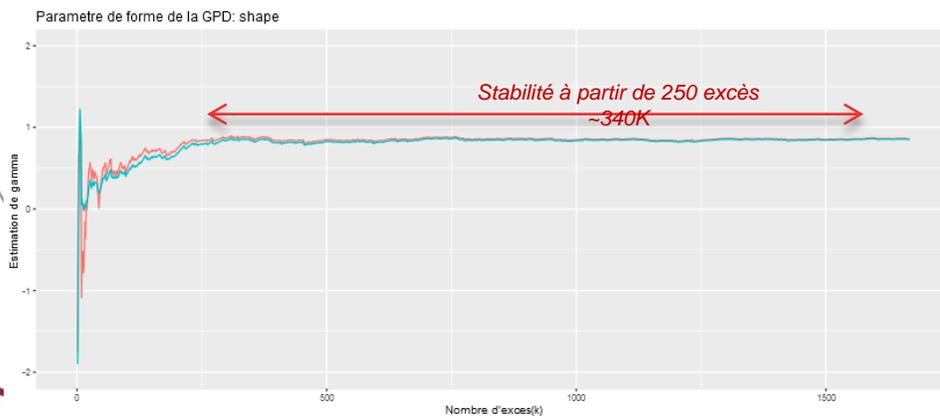
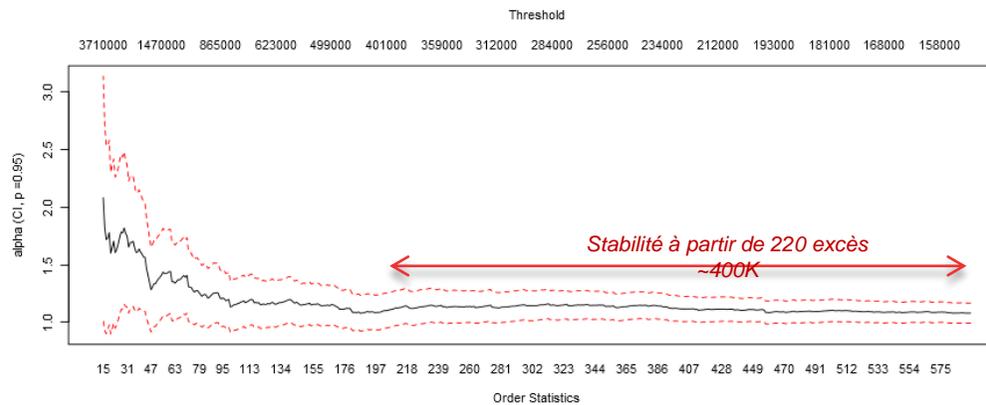


250 K€

Détermination des seuils

Algorithmes seuil optimal - illustration

Estimateur de Hill



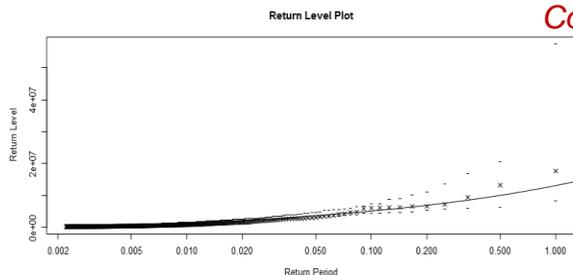
Stabilité des estimateurs en fonction du nombre d'exces

Détermination des seuils

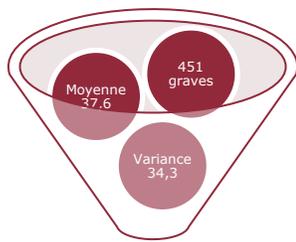
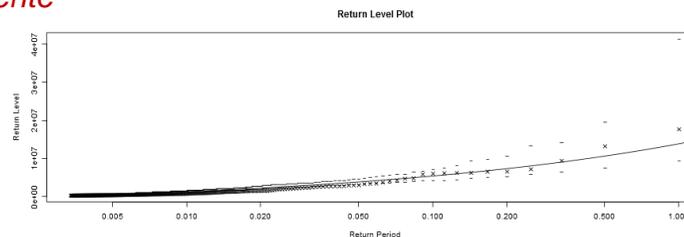
Analyse & prise de décision

Seuil à 250K

SEUIL à 325K

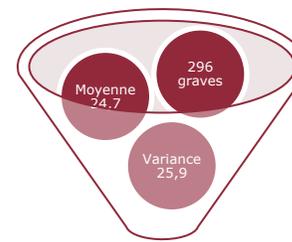


Comparaison Calibrage sévérité



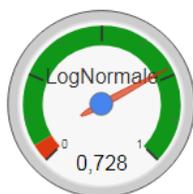
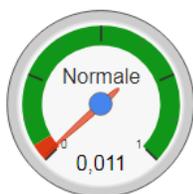
Erreur ajustement
Poisson 1,77

Comparaison Calibrage fréquence

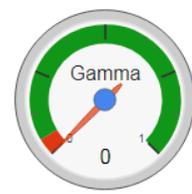
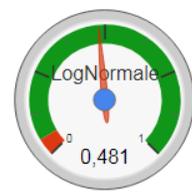
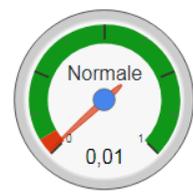


Erreur ajustement
Poisson 1,43

Comparaison Calibrage charge
attritionnelle



**P-value –
Attention, la
comparaison n’est pas
immédiate !**



Méthodologie de choix des seuils

➔ DÉTERMINATION DES SEUILS
STRUCTURE DE L'OUTIL FORSIDES

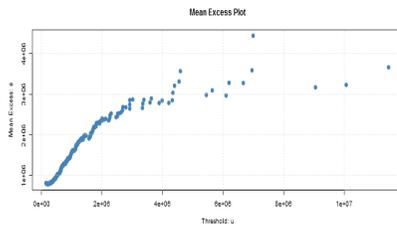
Cadre d'utilisation (1/2)

- Cet outil sert à modéliser les distributions de sinistralité des produits d'assurance IARD, optimiser la réassurance non-proportionnelle, effectuer des simulations et les agréger.
- Il peut être utilisé dans différents cas de figure (gestion des risques, optimisation de la réassurance, modèle interne)
- Les données et les hypothèses de calcul sont à renseigner dans des tableaux Excel ou dans une application
- Les sorties, au format Excel ou pdf, permettent de disposer des scénarios des différentes branches et après agrégation et prise en compte de la réassurance ainsi que des rapports imprimables
- Les exécutables permettent de :
 - renseigner facilement les fichiers d'entrée et de lancer les calculs ;
 - générer des rapports de calibrage et d'agrégation en prenant en compte la réassurance.
- **Dans cette présentation : focus sur la partie Seuil des graves et Calibrage**

Cadre d'utilisation (2/2)

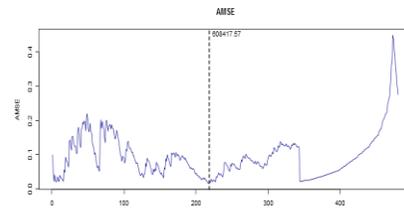
CHOIX DU SEUIL DES SINISTRES GRAVES

- Plusieurs méthodes de détermination du seuil des sinistres graves : *Mean Excess Plot*, observation des densités conditionnelles, Estimateur de Hill, stabilité des estimateurs de la distribution Pareto Généralisée, critère de minimisation de l'erreur quadratique.
Graphique Mean Excess Plot



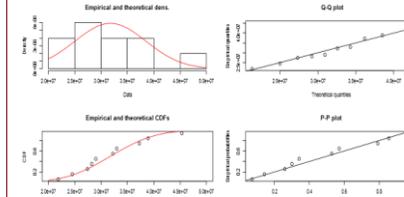
Select optimal threshold for Hill estimator

Select optimal threshold for the Hill estimator by minimizing the Asymptotic Mean Squared Error (AMSE)

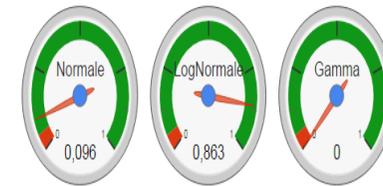


CALIBRAGE DES DIFFÉRENTS SEGMENTS

- Suite au choix de modélisation, calibrage d'une part de la sinistralité attritionnelle par la charge agrégée ou grâce aux S/P et d'autre part de la sinistralité grave par une approche fréquence coût . Plusieurs critères de choix : courbes d'ajustement, P valeur . . .
Graphiques Ajustement



Récapitulatif



SIMULATION DES SCÉNARIOS ET PRISE EN COMPTE DE LA RÉASSURANCE

- L'outil permet de générer un grand nombre de simulations de scénarios des sinistralités pour chaque segment. Ensuite la structure de réassurance testée sera appliquée sur les sinistres générés. Plusieurs types de réassurance non proportionnelle peut être testé : XL, Aggregate XL, MAXL. La consommation moyenne des traités permettent de calculer la prime pure de réassurance

Quantités des traités	traité_n_1	traité_n_2	traité_n_3
Moyenne	1133933.3	445233.1	345230.1
50%	796929.9	429772.8	0.0
90%	234954.9	68478.4	2000000.0
95%	325783.0	76700.4	2000000.0
99%	606495.2	923482.2	4000000.0
99.5%	782361.2	997422.5	4000000.0

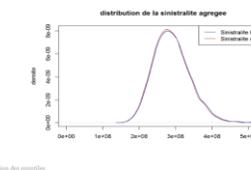
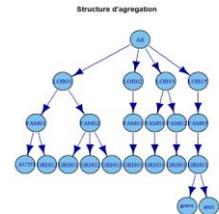
Consommation par traité

Quantités des traités	traité_n_1	traité_n_2	traité_n_3
Moyenne	1133933.3	445233.1	345230.1
50%	796929.9	429772.8	0.0
90%	234954.9	68478.4	2000000.0
95%	325783.0	76700.4	2000000.0
99%	606495.2	923482.2	4000000.0
99.5%	782361.2	997422.5	4000000.0

AGRÉGATION DES SCÉNARIOS SELON UNE STRUCTURE DÉFINIE : ARBRE D'AGRÉGATION ET COPULES

- Suite à la simulation des scénarios, l'outil permet d'agréger selon une structure défini en Input (arbre et paramètres) et permet l'ajout de scénarios CAT provenant d'une source externe. La comparaison des scénarios agrégés avant et après réassurance permet d'étudier le gain en risque de la mise en place de celle-ci.

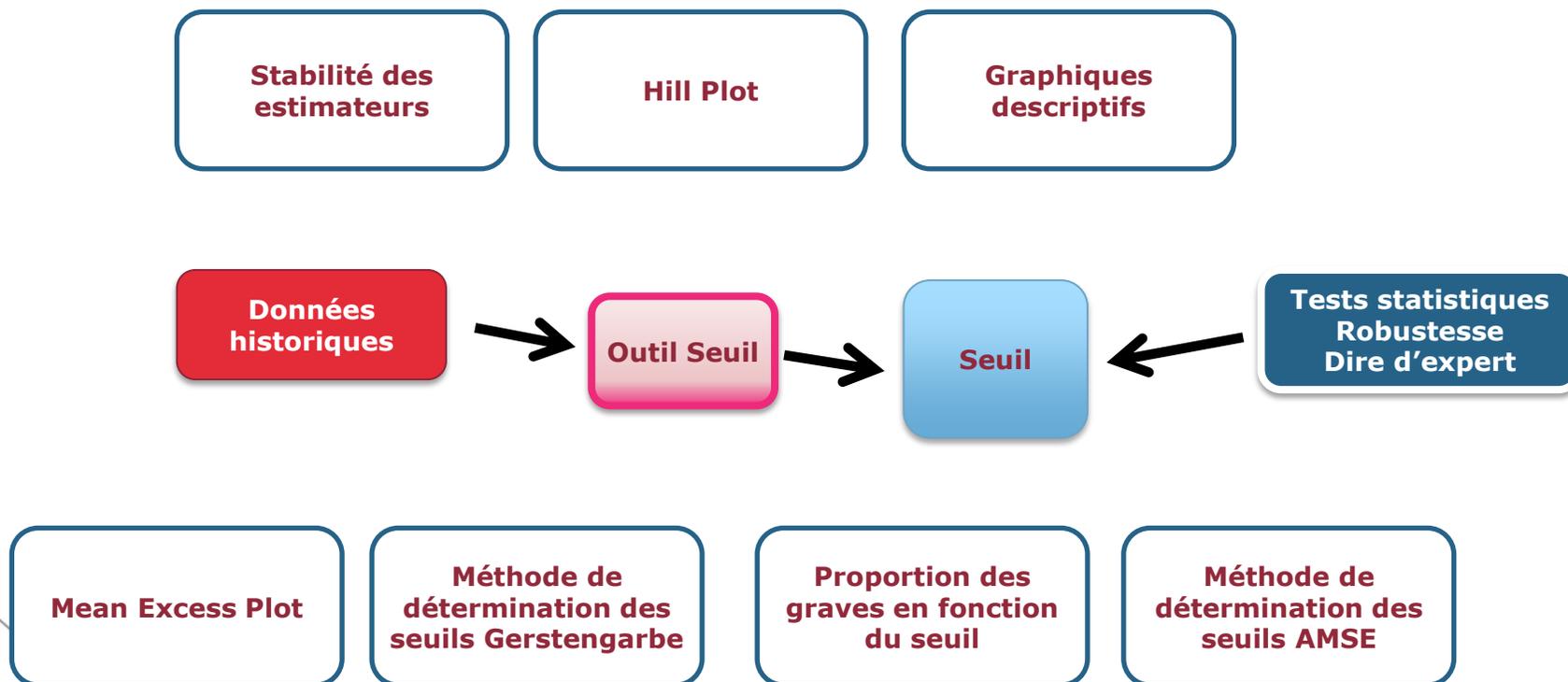
Agrégation selon la structure retenue



Validation des quantiles	Sinistralité avant Réassurance	Sinistralité après Réassurance	Erreur relatif (%)
50%	1133933.3	1133933.3	-0.000000
90%	234954.9	234954.9	-0.000000
95%	325783.0	325783.0	-0.000000
99%	606495.2	606495.2	-0.000000
99.5%	782361.2	782361.2	-0.000000

Structure de l'application

Schéma de fonctionnement de l'outil Seuil

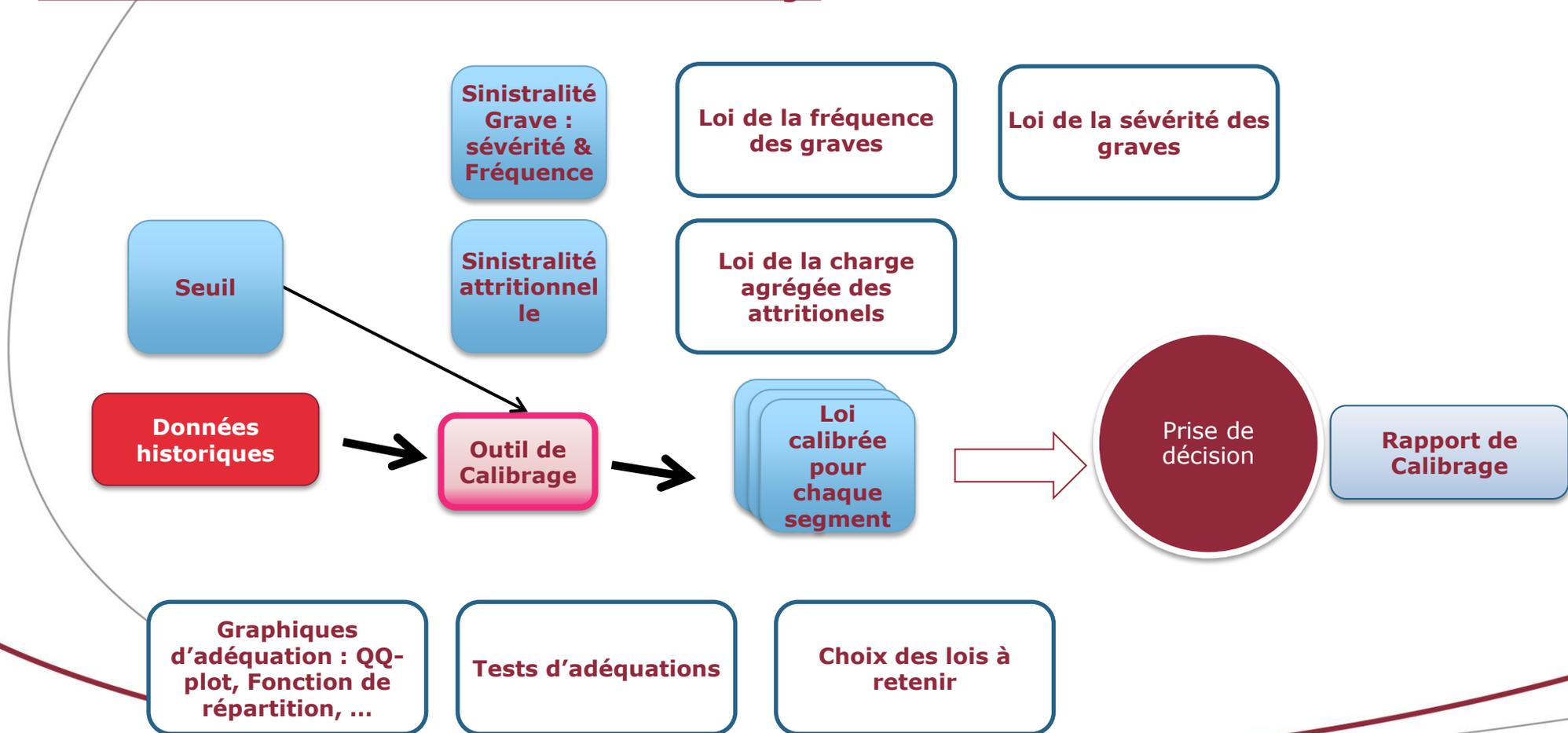


Calibrage (Ajustement à des lois statistiques)

- **Calibrage sévérité des graves (Coût)**
 - Ajuster les sinistres historiques dont le montant est au delà du seuil par un nombre de lois retenu afin d'en retenir la meilleure
 - Tester la qualité d'ajustement de chacune des lois : Q/Q plot, densité théorique vs empirique, tests d'adéquation
 - Impact du choix de la méthode d'estimation : maximum de vraisemblance, méthodes des moments, moments pondérés, GPWM,
 - **Sensibilité en supprimant les 5 plus grands sinistres, sensibilité en splittant l'échantillon en deux,...**
 - Prise de décision : Loi retenue + paramètres de la loi
- **Calibrage nombre des graves (Fréquence)**
 - Ajuster les nombres historiques de sinistres dont le montant est au delà du seuil
 - Lois usuelles : Poisson, Binomiale Négative
 - Mesure de la qualité d'ajustement
 - Prise de décision : Loi retenue + paramètres de la loi
- **Calibrage charge des attritionnelles**
 - Ajuster les sinistralités historiques annuelles de l'aggrégat des sinistres en dessous du seuil
 - Lois usuelles : Lognormales, Normales, Gamma
 - Mesure de la qualité d'ajustement
 - Prise de décision : Loi retenue + paramètres de la loi

Structure de l'application

Schéma de fonctionnement de l'outil Calibrage

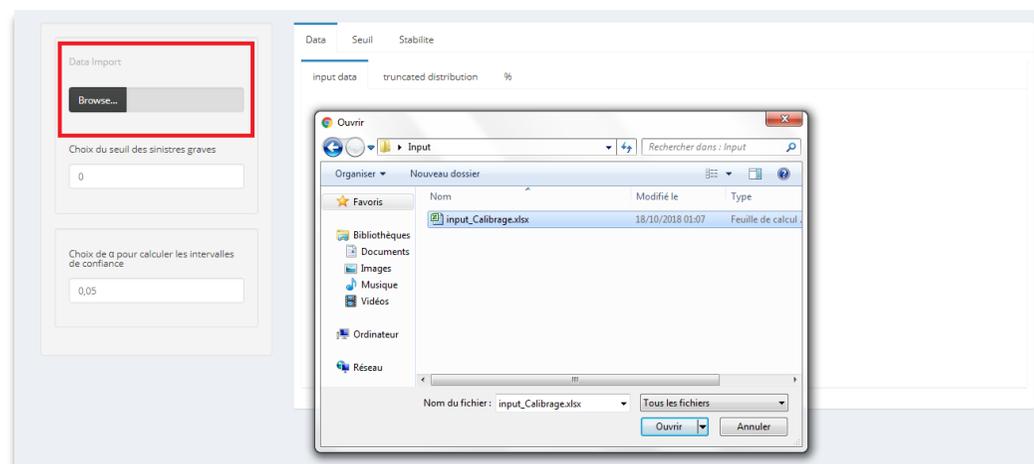
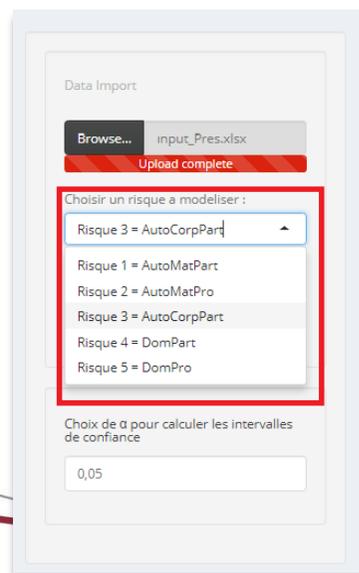


Structure de l'application

Fonctionnement de l'outil Seuil – Import des données

Afin d'importer des données :

- Cliquer sur « Browse »
- Sélectionner le fichier d'input
- Ce fichier d'input doit respecter le format suivant :
 - Un onglet concernant la sinistralité ligne à ligne
 - Un onglet concernant la sinistralité globale
 - Possibilité d'importer plusieurs classes à la fois
 - Dans ce cas le choix de la classe à utiliser se fait sous « Choisir un risque à modéliser »



**Gestion
multirisques**

Structure de l'application

Fonctionnement de l'outil Seuil – Tronquer les données

Afin de tronquer les données :

- Indiquer un montant dans la case « Choix du seuil des sinistres graves »
- L'ensemble des graphiques ne prendront uniquement les données supérieures au montant indiqué
- Exemple : pour un seuil à 250.000



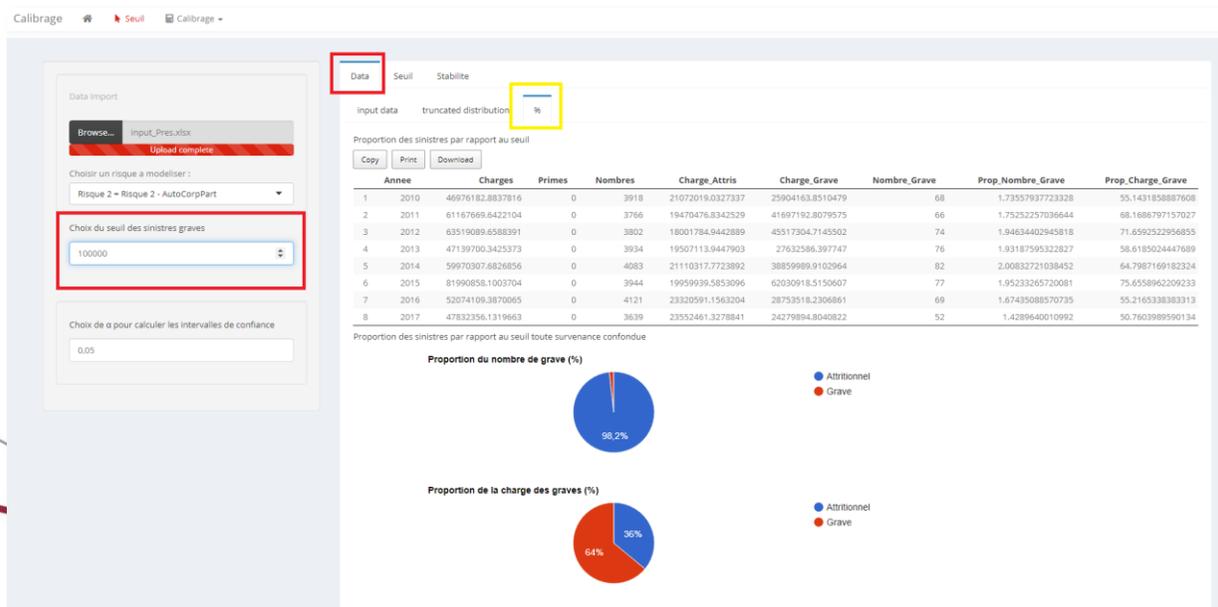
Structure de l'application

Fonctionnement de l'outil Seuil – Proportion de la charge et nombre en fonction du seuil

Afin d'observer la proportion de la fréquence et de la charge en fonction d'un seuil:

- Onglet **Data** - sous onglet « % »
- **Renseigner un seuil** dans « choix du seuil des sinistres graves »
- Le tableau différencie alors les sinistres au dessus du seuil indiqué du reste de la sinistralité par survenance:
- Le graphique indique la proportion des nombres et de la charge **toute survenance confondue**

1. *Annee* : année de survenance des sinistres;
2. *Charge* : charge totale des sinistres de la survenance;
3. *Nombre* : nombre total de sinistres de la survenance;
4. *Charge_Attris* : agrégat de charge des sinistres sous le seuil;
5. *Charge_Grave* : agrégat de charge des sinistres au dessus du seuil;
6. *Nombre Graves* : nombre de sinistres au-delà du seuil indiqué;
7. *Prop_Nombre_Graves* (en %): $\text{Nombre Graves} / \text{Nombre}$;
8. *Prop_Charge_Graves* (en %): $\text{Charge_Graves} / \text{Charge}$;



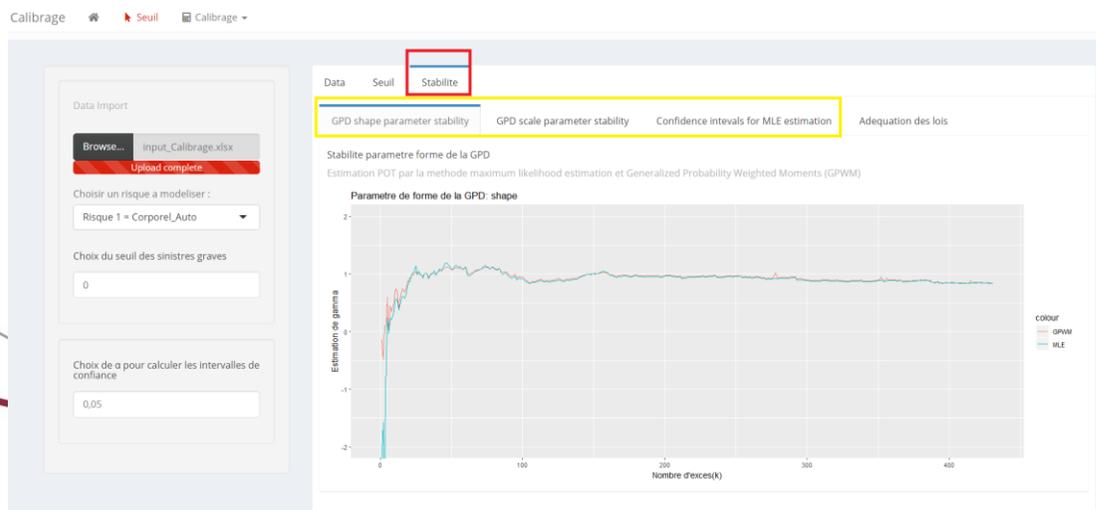
Structure de l'application

Fonctionnement de l'outil Seuil – Stabilité des estimateurs

Le calcul des estimateurs en fonction du seuil (et donc d'observations restantes) permet d'apprécier la stabilité de ces estimateurs et de retenir une région où les estimateurs ne sont pas trop volatiles.

Les estimateurs étudiés sont les suivants :

- Estimateur de Hill [onglet Seuil – Hill Plot]
- Estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) pour :
 - le paramètre **de forme** de la GPD [onglet stabilite – GPD shape parameter stability]
 - le paramètre **d'échelle** de la GPD [onglet stabilite – GPD scale parameter stability]
- Intervalles de confiance pour les estimateurs du maximum de vraisemblance (MLE) [onglet stabilite – Confidence intervals for MLE estimation]
- Estimateur des moments pondérés généralisés (GPWM) pour :
 - le paramètre **de forme** de la GPD [onglet stabilite – GPD shape parameter stability]
 - le paramètre **d'échelle** de la GPD [onglet stabilite – GPD scale parameter stability]



Structure de l'application

Fonctionnement de l'outil Seuil – Stabilité des estimateurs – Intervalles de confiance pour l'estimation MLE

Pour le calcul des intervalles de confiance autour des estimations du maximum de vraisemblance des paramètres de forme et d'échelle, le paramètre « alpha » permet de modifier le niveau de confiance.

« alpha » correspond au risque d'erreur et $1 - \text{« alpha »}$ au niveau de confiance.

Par défaut, « alpha » vaut 0,05 donc équivaut à un niveau de confiance de 95%.



Possibilité de régler le niveau d'intervalle de confiance → Niveau de risque de l'assureur

Retour d'expérience



Intervention de Xavier LAUREILLE
- Responsable technique APAC / LIGAP

Application à un portefeuille individuelle accident
Cotation et optimisation de la couverture de réassurance

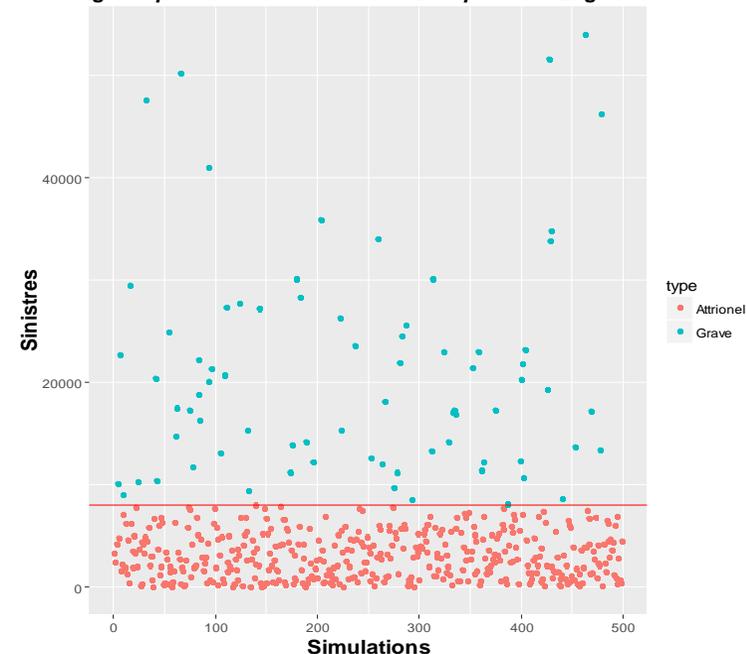
Contexte historique de la MAC

- Origines de la MAC son histoire commune avec la MAE
- Les liens avec le monde associatif culturel et sportif
- Inscription de la mutuelle dans une offre d'assurance globale pour le monde associatif Ligue de l'enseignement
 - RC couvert par la MAIF,
 - Individuelle accident portée par la MAC.
- Des garanties socles avec des augmentations de plafond optionnelles, des montants maximum statutaires...
- Distribution par le réseau associatif dans une logique affinitaire

Spécificité du risque technique

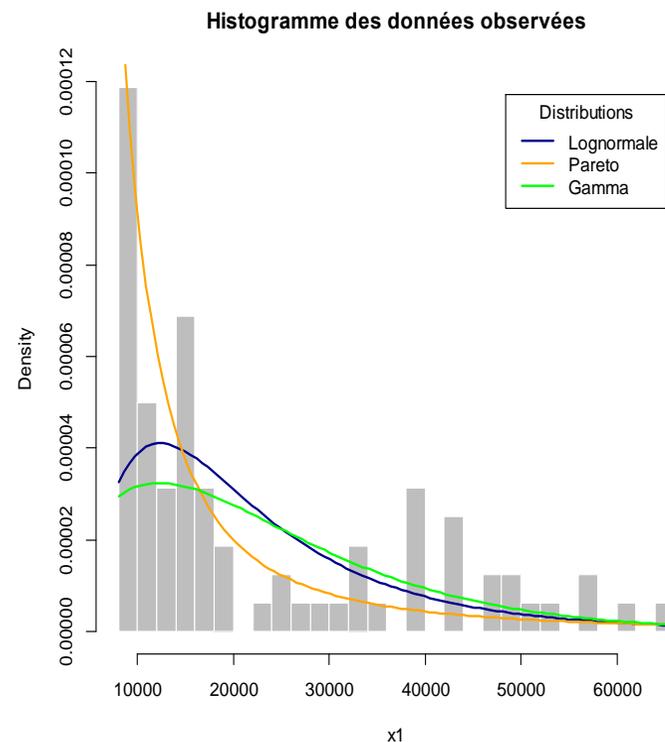
- Part des sinistres attritionnels et des sinistres graves
- Risque principal de la mutuelle au sens de ORSA
 - déformation du portefeuille vers le « mauvais risque » sportif
 - et antisélection par les couvertures optionnelles

Nuage de points des sinistres simulés par beta-Lognormale



La couverture de réassurance

Objectif couvrir les risques de pointe « le peloton de cycliste qui tombe dans le ravin sans que la RC d'un tiers ne puisse être invoquée ».



Garanties

Les garanties individuelles accident de la MAC

GARANTIES DE BASE	
NATURE DES PRESTATIONS	PLAFOND PAR SINISTRE
REMBOURSEMENT DES FRAIS DE SOINS MEDICAUX, PHARMACEUTIQUES, CHIRURGICAUX, DENTAIRES	7.623 €
PRESTATIONS COMPLEMENTAIRES (PERTES DE SALAIRE/FRAIS DE GARDE)	305 € ADHERENT CULTUREL 458 ADHERENT SPORTIF
LUNETTES ET LENTILLES	610 €
CAPITAL INVALIDITE PERMANENTE PARTIELLE	304,90 € LE POINT D'I.P.P AVEC TRIPLEMENT DU POINT POUR LES % SUPERIEURS A 50% EXEMPLES : 12.196 € POUR UNE I.P.P DE 40% 24.392 € POUR UNE I.P.P DE 60%
CAPITAL DECES PAR ACCIDENT	6.098 € ADHERENT CULTUREL 7.623 € ADHERENT SPORTIF

Garanties

GARANTIES RENFORCEES	
NATURE DES PRESTATIONS	PLAFOND PAR SINISTRE
REMBOURSEMENT DES FRAIS DE SOINS MEDICAUX, PHARMACEUTIQUES, CHIRURGICAUX, DENTAIRES	SANS AUGMENTATION
PRESTATIONS COMPLEMENTAIRES (PERTES DE SALAIRE/FRAIS DE GARDE)	1.525 €
LUNETTES ET LENTILLES	SANS AUGMENTATION
CAPITAL INVALIDITE PERMANENTE PARTIELLE	762,25 LE POINT D'I.P.P AVEC TRIPLEMENT DU POINT POUR LES % SUPERIEURS A 50% EXEMPLES : 30.490 € POUR UNE I.P.P DE 40% 60.980€ POUR UNE I.P.P DE 60%
CAPITAL DECES PAR ACCIDENT	DEUX OPTIONS 15.245 € OU 30.490 € + 7.623 € AU CONJOINT + 3.812 PAR ENFANT A CHARGE. CAPITAL MAXIMUM 60.980 €.

Les traités

TRAITE DE REASSURANCE INITIAL

REASSURANCE DES FRAIS MEDICAUX AU DELA DE 230 EUROS
REASSURANCE DES GARANTIES I.P.P ET DECES EN QUOTE PART 50%

NOUVEAU TRAITE DE REASSURANCE

ABANDON DE LA REASSURANCE DES FRAIS DE SOINS
REASSURANCE DU CAPITAL I.P.P AU DELA DE 8.000 €
REASSURANCE DU CAPITAL DECES AU DELA DE 15.000 €.

LES BENEFICES DU NOUVEAU TRAITE DE REASSURANCE

	TRAITE INITIAL		NOUVEAU TRAITE	
	2015	2016	2017	2018
COTISATIONS DE REASSURANCE	372.204 €	383.111 €	124.277 €	168.346 €
MONTANTS DES SINISTRES REASSURES	124.230 €	120.840 €	1.397 €	1.397 €
CHARGE DE LA REASSURANCE	247.974 €	262.271 €	122.800 €	166.949 €

Visualisation de l'impact d'un XS et mesure de la prime de réassurance

➔ Application à un portefeuille RC automobile et DAB

Application pour deux branches d'assurance

Branches « RC automobile » et « dommages aux biens des particuliers »

Démarche

- Simulation des scénarii pour chacune des deux branches
- Prise en compte de la structure de dépendance sur les sinistralités annuelles
- Vérification de l'optimalité des XS existants
- Cotation et prise en compte de ces traités afin d'obtenir la sinistralité réassurée
- Cotation et prise en compte d'un traité multi-branches en dessous des priorités individuelles

Réassurance et excédent de sinistre et excédent de sinistre multi-branches

- Traité XS « traditionnel »

Ce type de traité permet de céder les montants dépassant la priorité D au réassureur et dans la limite de la portée P .

Pour chaque sinistre X_i^{Gra} , le montant à la charge du réassureur est :

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } X_i^{Gra} < D \\ X_i^{Gra} - D & \text{si } D \leq X_i^{Gra} \leq P \\ P & \text{si } X_i^{Gra} > P \end{cases}$$

$$= \min[\max(X_i^{Gra} - D; 0); P]$$

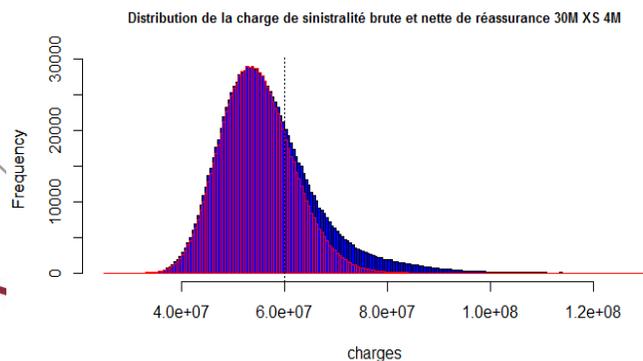


ILLUSTRATION DE L'IMPACT DU TRAITÉ XS SUR LA SINISTRALITÉ RC AUTOMOBILE (UNITÉ ABSCSSE=EURO)

- Traité XS multi-branches

- Couvre plusieurs branches d'assurance
- Paramètres : franchise et engagement maximale annuelle, priorité et portée de chaque branche
- Nécessité d'agréger les sinistralités de plusieurs branches
 - Hypothèse d'indépendance
 - Prise en compte de la dépendance

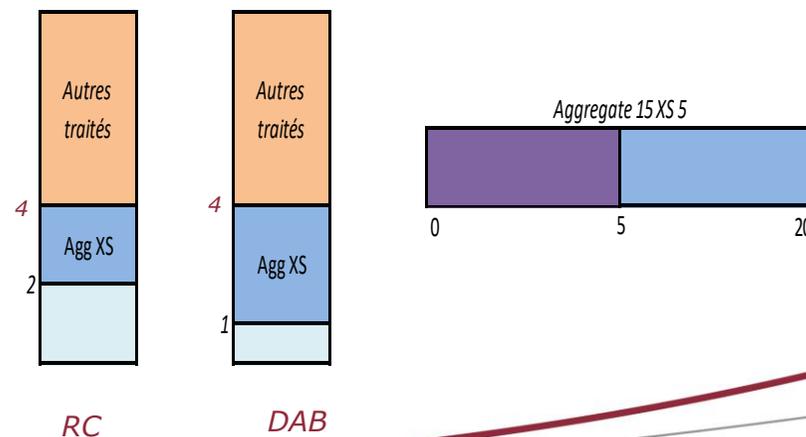


ILLUSTRATION TRAITÉ MULTI-BRANCHES

Réassurance et excédent de sinistre et excédent de sinistre multi-branches

Cotation des traités XS

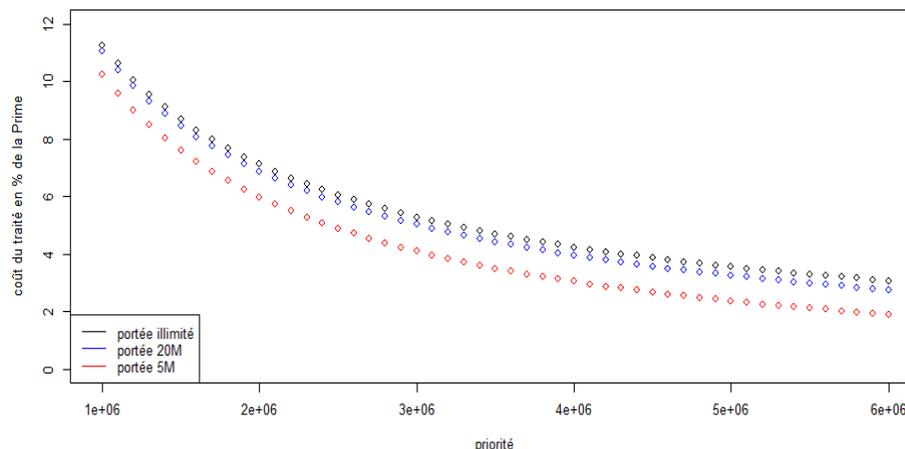
D : priorité; P : portée des traités XS; u : seuil des graves

$$\pi(D, \text{illimité}) = \mathbb{E}(S_{\text{cédée}}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N^{\text{Gra}}} Y_i\right) = \mathbb{E}(N^{\text{Gra}}) * \mathbb{E}(Y_i)$$

Si X_i^{Gra} est de loi Pareto Généralisée alors :

$$\hat{\pi}(D, \text{illimité}) = \hat{\lambda} * \frac{\hat{\sigma}}{1-\hat{\gamma}} \left(1 + \frac{\hat{\gamma}(D-u)}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{\hat{\gamma}-1}{\hat{\gamma}}}$$

$$\hat{\pi}(D, P) = \hat{\lambda} \left\{ \frac{\hat{\sigma}}{1-\hat{\gamma}} \left[\left(1 + \frac{\hat{\gamma}(D-u)}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{\hat{\gamma}-1}{\hat{\gamma}}} - \left(1 + \frac{\hat{\gamma}(P+D-u)}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{\hat{\gamma}-1}{\hat{\gamma}}} \right] \right\}$$



EXEMPLE DE COTATION DES TRAITÉS XS (BRANCHE RC AUTOMOBILE)

Cotation des traités multi-branches

Cotation par simulations

B scénarios; S_i : sinistralité agrégée éligible du scénario i

$$\hat{\mathbb{E}}(S_{\text{cédée}}^{MAAD, MAAL}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \min[\max(S_i - MAAD; 0) ; MAAL]$$

Hypothèse : Prime Commerciale = 1,25 * Prime Pure

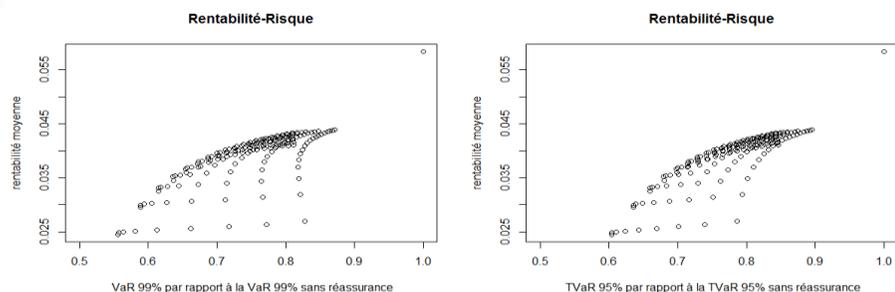
AAD annuel aggregate deductible

AAL annuel aggregate limite

Application pour deux branches d'assurance

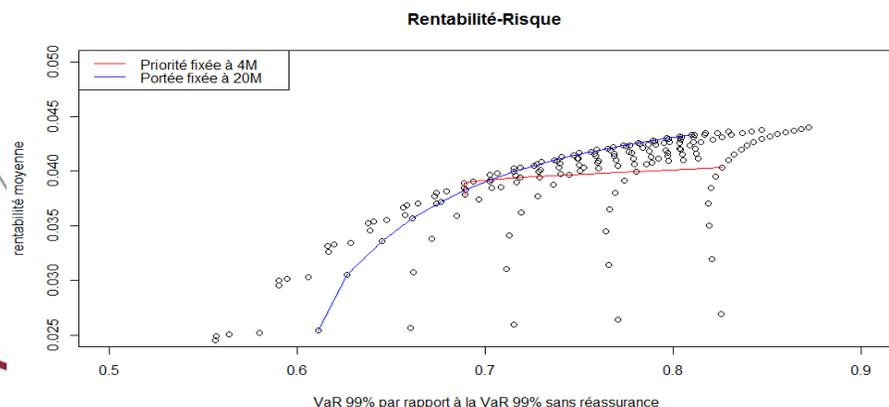
Structure de réassurance initiale RC automobile

- Structure initiale « illimité 30M XS 4M »



Rentabilité moyenne = résultat économique / prime annuelle attendue

$$\text{Protection moyenne} = \frac{\text{Var avec Réass}}{\text{Var sans Réass}}$$



- Chaque point du graphique correspond à un plan de réassurance XS
- Les priorités varient de 4 M€ à 10 M€ avec un pas de 0,5M€
- Les portées varient de 10M€ à 30M€
- Efficiency du plan actuel « 30M XS 4M »

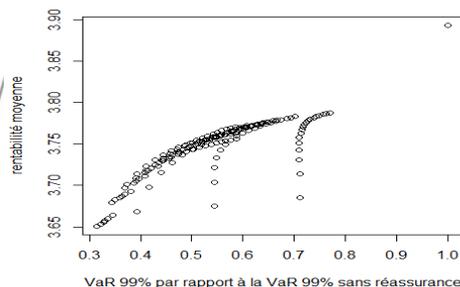
NUAGE DE POINTS RENTABILITÉ/RISQUE POUR LA BRANCHE RC AUTOMOBILE

Application pour deux branches d'assurance

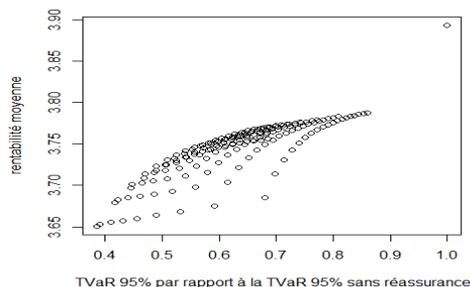
Structure de réassurance initiale DAB particuliers

- Structure initiale « illimité XS 4M »

Rentabilité-Risque



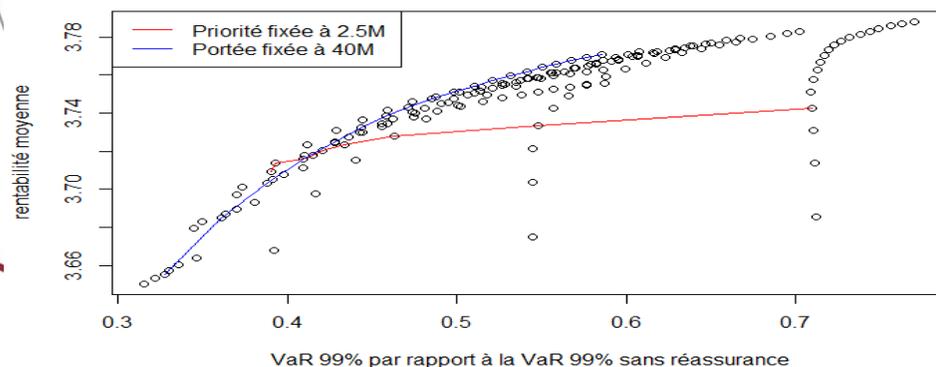
Rentabilité-Risque



Rentabilité moyenne = résultat économique / prime annuelle attendue

$$Protection\ moyenne = \frac{Var\ avec\ Réass}{Var\ sans\ Réass}$$

Rentabilité-Risque



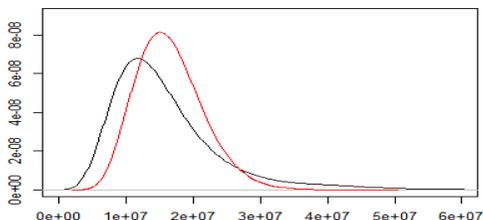
- Chaque point du graphique correspond à un plan de réassurance XS
- Les priorités varient de 1 M€ à 10 M€ avec un pas de 0,5M€
- Les portées varient de 10M€ à 30M€
- Efficience d'un plan 40M XS 4M »

NUAGE DE POINTS RENTABILITÉ/RISQUE POUR LA BRANCHE DAB DES PARTICULIERS

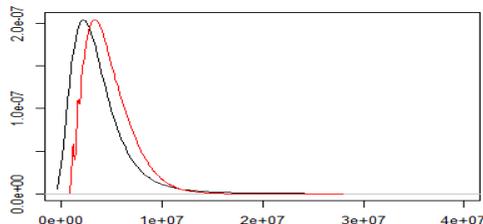
Application pour deux branches d'assurance

Résultat XS

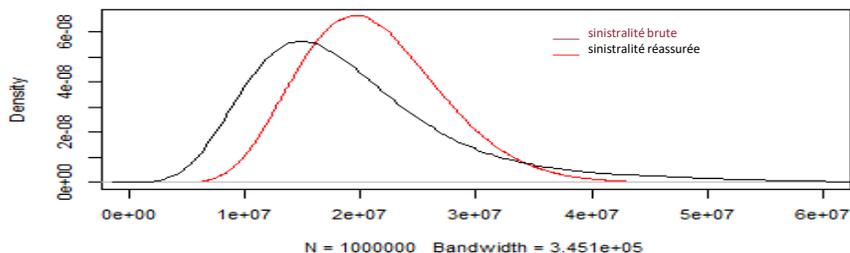
Application du traité XS sur la sinistralité grave RC



Application du traité XS sur la sinistralité grave DAB



Application des traités XS sur la sinistralité agrégée RC et DAB



$$\hat{E}(S_{cédée}^{RC}) = 2.831.814€$$

$$\hat{E}(S_{cédée}^{DAB}) = 1.145.275€$$

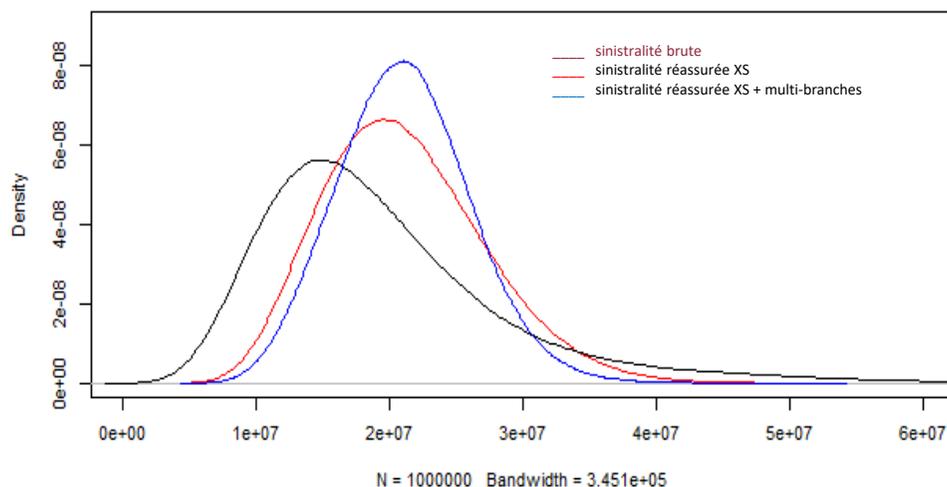
APPLICATION DES TRAITÉS XS

	Moyenne	VaR			TVaR		
		90 99	95	99	90 99	95	99
Somme dépendante	19.556.99 2	31.511.8 04	38.289.2 67	53.581.9 71	41.218.9 22	48.000.6 10	62.885.246
Sinistralité réassurée	21.119.15 3	29.223.7 93	31.924.7 73	37.239.1 92	32.818.7 33	35.191.4 31	40.021.286
Variation	+8%	-7,26%	-16,62%	-30,50%	-20,37%	-26,68%	-36,36%

Application pour deux branches d'assurance

Résultat traité multi-branches

Application des traités XS et du multibranche XS sur la sinistralité agrégée RC et DAB



Multi branche intervenant en dessous des priorités des traités XS

	Branche RC	Branche DAB
Priorité	2M	1M
Portée	2M	3M

• $\hat{\mathbb{E}}(S_{cédée}^{2M,6M}) = 1.162.242\text{€}$

IMPACT D'UN SECOND TRAITÉ MULTI-BRANCHES SUR LA SINISTRALITÉ AGRÉGÉE

	Moyenne	VaR			TVaR		
		90 99	90	95	90 99	95	95
Sinistralité réassurée XS	21.119.153	29.223.79 3	31.924.77 3	37.239.19 2	32.818.73 3	35.191.43 1	40.021.286
Multi-branches XS	21.409.713	27.770.68 3	29.754.97 8	33.805.46 8	30.465.04 9	32.262.72 7	36.153.987
Variation rapport XS par	+1,37%	-4,97%	-6,80%	-9,22%	-7,17%	-8,32%	-9,66%

- Perspectives et limites :
 - Tester d'autres indicateurs de risque et de rentabilité, notamment le gain en SCR,
 - Combiner avec d'autres traités de réassurance,
 - Risque de modèle,
 - Vision par année de survenance et non prise en compte de la cadence pour les branches longues.

Visualisation de l'impact d'un XS et mesure de la prime de réassurance

➔ Application à un portefeuille de prévoyance

Contexte

➤ **Contexte**

Société souhaitant développer une nouvelle gamme de produits prévoyance dont :

- l'offre de base de prévoyance,
- une nouvelle offre prévoyance complémentaire.

➤ **Programme de réassurance**

Besoin d'être réassuré avec une participation non seulement à la couverture du risque technique mais aussi du financement des frais de gestion et de lancement de la nouvelle offre. Le programme de réassurance doit traiter de l'ensemble des garanties prévoyance pour :

- Optimiser la mutualisation du risque,
- Favoriser une gestion homogène et cohérente du risque,

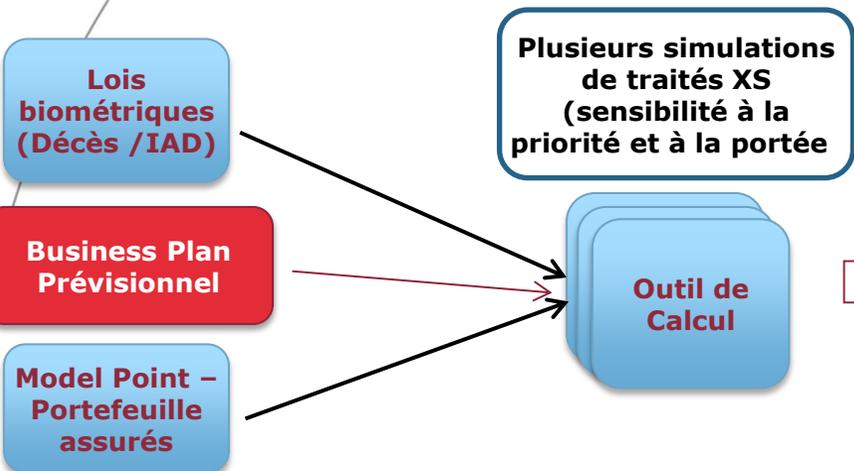
Capitaux DC/IAD accident très élevés → Réassurance en XS ?

Les montants garantis importants notamment pour les capitaux IAD accident de l'offre de prévoyance complémentaire nécessitent une couverture de réassurance en excédents de sinistres.

**Simulations pour calculer et visualiser la sensibilité aux probabilités de mortalité et d'invalidité
Vision par exercice de survenance et sur la durée du Business Plan jusqu'à maturité du
développement du New Business.**

Méthodologie

Méthodes



$$\text{Pourcentage cédé au réassureur} = \frac{\text{Somme des montants de sinistre entre la priorité et (priorité + portée)}}{\text{Somme de tous les sinistres}}$$

Indicateurs :
Pourcentage de sinistres cédés au réassureur
Pourcentage de primes cédées au réassureur

$$\text{Pourcentage cédé au réassureur rapporté aux primes} = \frac{\text{Somme des montants de sinistre entre la priorité et (priorité + portée)}}{\text{Primes perçues par la société (estimation BP)}}$$



Paramètres et hypothèses

1

Paramètres

Model Points

Choose CSV File

Browse... Input_MP.csv

Upload complete

Header

Hypothèses Société

Probabilité décès maladie: 0.18437%

Probabilité décès accident: 0.10957%

Probabilité décès accident de la circulation: 0.05761%

Probabilité IAD maladie: 0.016%

Probabilité IAD accident: 0.0019%

Probabilité IAD accident de la circulation: 0.0013%

**Lois biométriques
à renseigner selon
les données des
Model Points**

2

Hypothèses Réassurance

Priorité: 50000€

Portée: 1300000€

Nombre de simulations: 1000

Prime de réassurance

Pourcentage prime de reconstitution: 1

Nombre de reconstitutions gratuites: 0

Nombre de reconstitutions payantes: 4

3

Hypothèses Sensibilité

Année de simulation pour la sensibilité: 2020

Sauvegarder les résultats

**Choix des facteurs de la
réassurance XS**

**Détermination du
nombre de simulations à**

Synthèse des hypothèses

SYNTHÈSE DES HYPOTHÈSES

Paramètres

Choose CSV File
Browse... Input_MP.csv
Upload complete

Header

Hypothèses Société

Probabilité décès maladie: 0.18437%

Probabilité décès accident: 0.10957%

Probabilité décès accident de la circulation: 0.05761%

Probabilité IAD maladie: 0.016%

Probabilité IAD accident: 0.0019%

Probabilité IAD accident de la circulation: 0.0013%

Probabilité IPP maladie:

Résumé Graphique Résultats (moyennes des charges sinistres) Résultats (quantile à 99,5% des charges sinistres) Réassurance XS Sensibilités

Récapitulatif probabilités décès et IAD

Probabilité	Valeur
Probabilité décès maladie	0.0018437
Probabilité décès accident	0.0010957
Probabilité décès circulation	0.0005761
Probabilité IAD maladie	0.00016
Probabilité IAD accident	1.9e-05
Probabilité IAD circulation	1.3e-05
Probabilité IPP maladie	0
Probabilité IPP accident	0.000201
Probabilité IPP accident de la circulation	0.000117

Synthèse des
données en
input

Flux entrants adhérents

Show 10 entries

Search:

	Année_2018	Année_2019	Année_2020	Année_2021	Année_2022	Année_2023	Année_2024
Portefeuille 1 maladie	192	383	542	674	783	874	950
Portefeuille 1 accident	864	1725	2440	3033	3525	3934	4273
Portefeuille 1 accident de la circulation	864	1725	2440	3033	3525	3934	4273
Portefeuille 2 maladie	144	288	407	506	588	656	712
Portefeuille 2 accident	648	1294	1830	2275	2644	2951	3205
Portefeuille 2 accident de la circulation	648	1294	1830	2275	2644	2951	3205
Portefeuille 3 maladie	72	144	203	253	294	328	356
Portefeuille 3 accident	324	647	915	1137	1322	1475	1602
Portefeuille 3 accident de la circulation	324	647	915	1137	1322	1475	1602

Résultats (1/5)

MOYENNES DES CHARGES SINISTRES PAR PORTEFEUILLE

Moyennes des charges sinistres portefeuille adhérents entrants

Tous sinistres

Show 10 entries

Search:

	Année_2019	Année_2020	Année_2021	Année_2022	Année_2023	Année_2024	Année_2025
Portefeuille 1	42 022,0	87 626,5	117 984	153 278	170 545	194 544	217 607
Portefeuille 2	70 811,0	136 394,0	193 004	237 085	290 210	323 787	351 000
Portefeuille 3	45 532,5	90 180,0	131 636	151 161	184 940	222 842	249 369
Portefeuille 4	50 248,0	103 484,0	156 131	182 476	214 535	240 363	253 238

Showing 1 to 4 of 4 entries

Previous 1 Next

[Résumé](#)
[Graphique](#)
[Résultats \(moyennes des charges sinistres\)](#)
[Résultats \(quantile à 99,5% des charges sinistres\)](#)
[Réassurance XS](#)
[Sensibilités](#)

Quantile à 99,5%

Moyennes des charges sinistres portefeuille adhérents entrants

Show 10 entries

Search:

	Année_2019	Année_2020	Année_2021	Année_2022	Année_2023	Année_2024	Année_2025
Portefeuille 1	399 005	453 120	473 090	580 080	611 732	653 008	629 003
Portefeuille 2	1 170 048	1 268 040	1 373 230	1 420 225	1 482 065	1 451 145	1 905 060
Portefeuille 3	246 000	1 570 290	1 701 085	1 744 030	1 718 005	1 765 055	1 901 155
Portefeuille 4	272 035	1 600 150	1 698 035	1 744 370	1 834 035	1 902 370	1 834 035

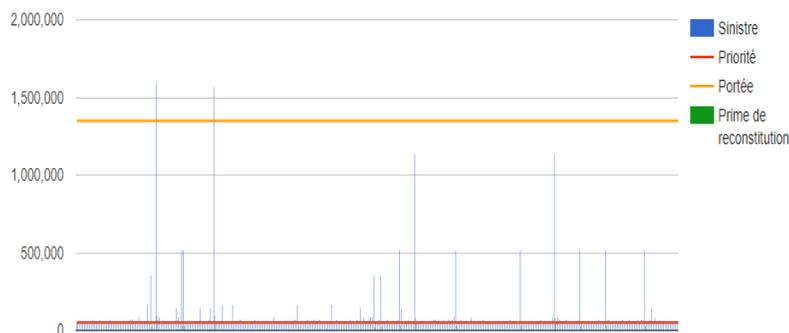
Showing 1 to 4 of 4 entries

Previous 1 Next

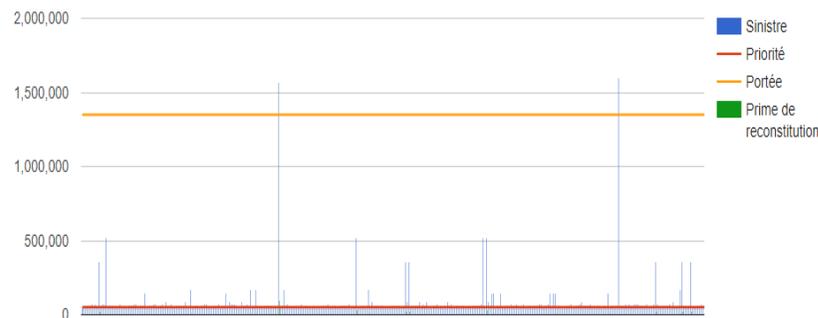
Résultats (2/5)

VISUALISATION DES SINISTRES DÉPASSANT LA PRIORITÉ

Pour l'ensemble des simulations réalisées de l'année 2020, nombre de dépassements et intensité



Pour l'ensemble des simulations réalisées de l'année 2021, nombre de dépassements et intensité



Indicateurs	Valeurs
Nombre de dépassements	3045.00
Pourcentage cédé au réassureur	25.19
Pourcentage cédé rapporté aux primes	16.69

2020

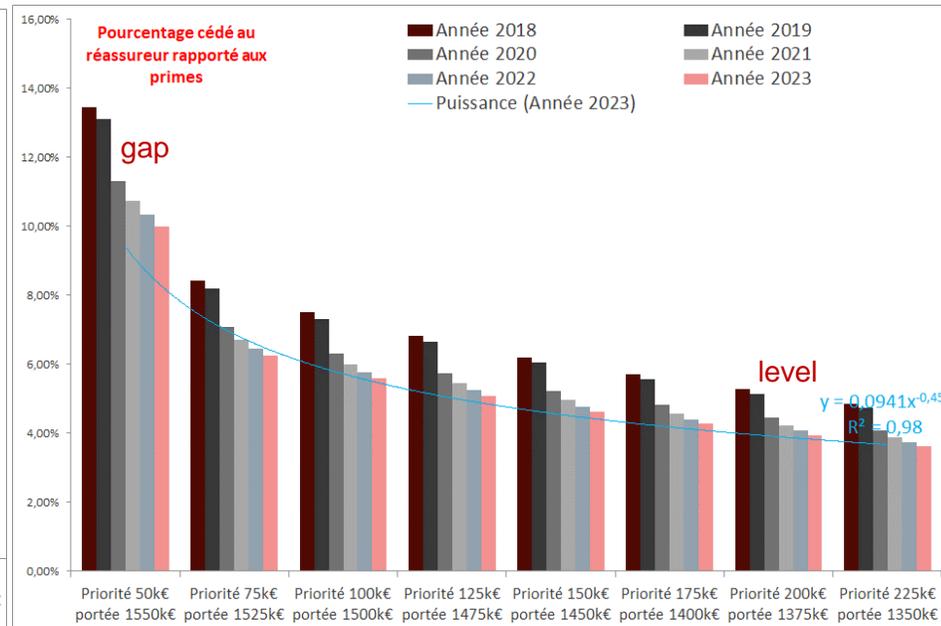
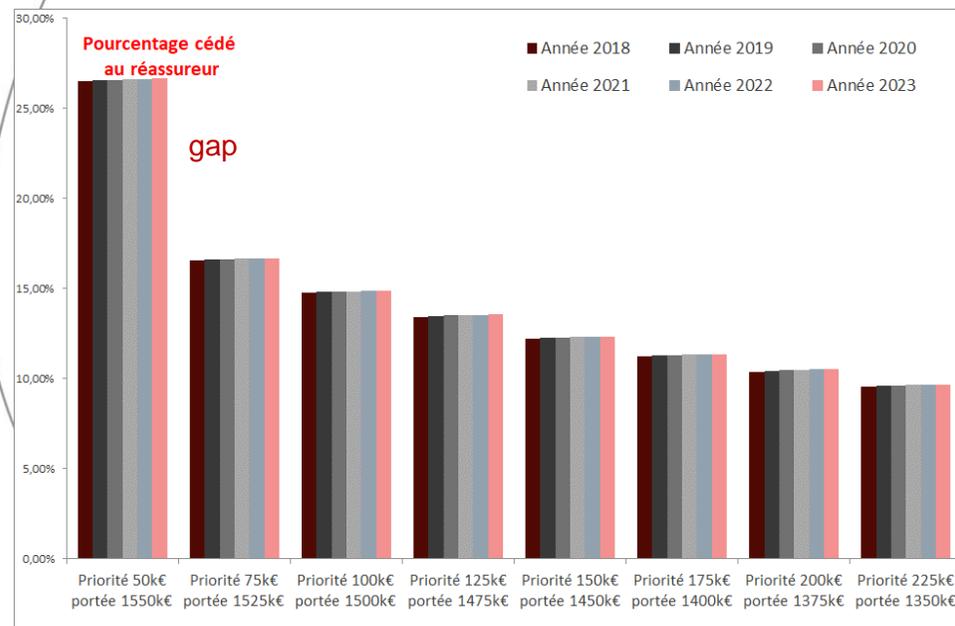
Indicateurs	Valeurs
Nombre de dépassements	4759.00
Pourcentage cédé au réassureur	26.14
Pourcentage cédé rapporté aux primes	17.14

2021

„, et pour les autres années de
projection

Résultats (3/5)

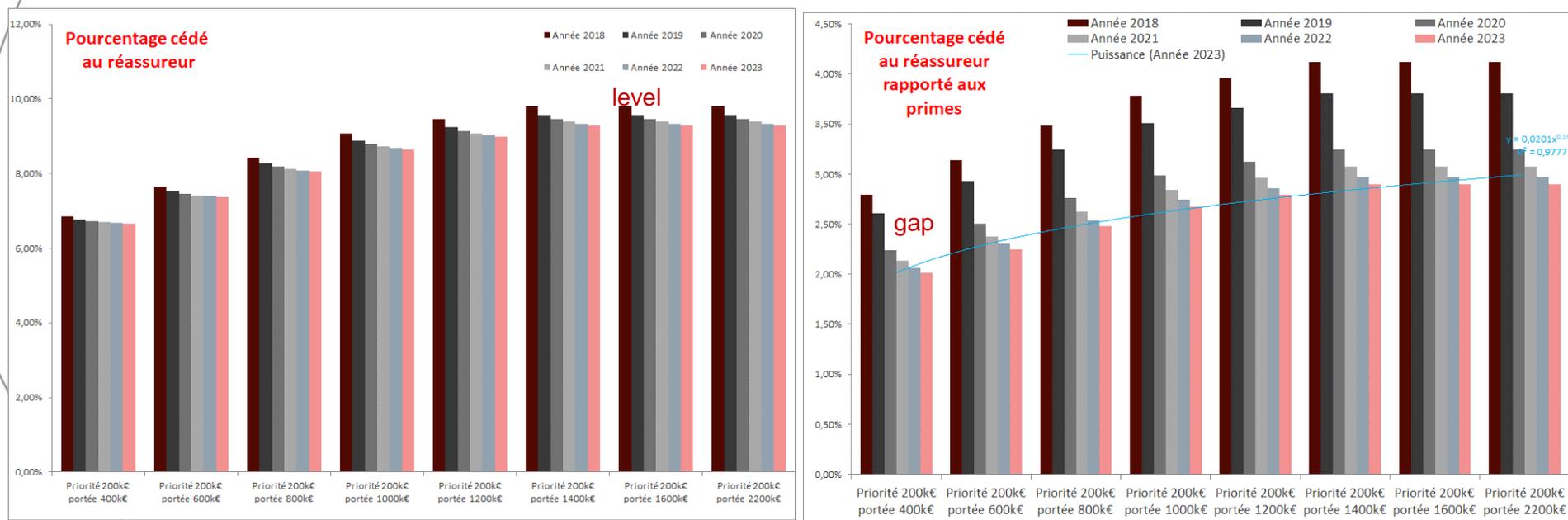
POURCENTAGES CÉDÉS – SENSIBILITÉ À LA PRIORITÉ



Le niveau de la priorité doit être optimisé en fonction des garanties souscrites de la modélisation de la survenance des sinistres en meilleure estimation et analysé sur toute la période de développement du new business jusqu'à maturité.

Résultats (4/5)

POURCENTAGES CÉDÉS – SENSIBILITÉ À LA PORTÉE

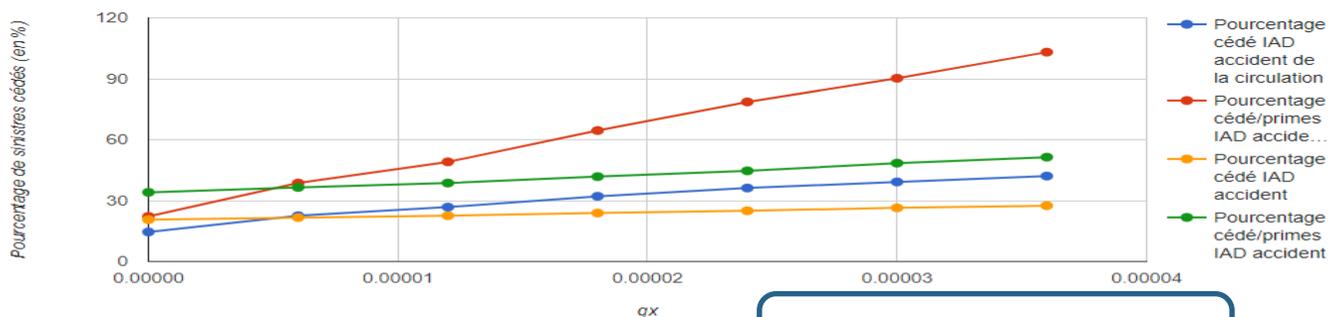


Le niveau de la portée est optimisé par la modélisation de la sinistralité grave et exceptionnel sur toute la période de développement du new business.

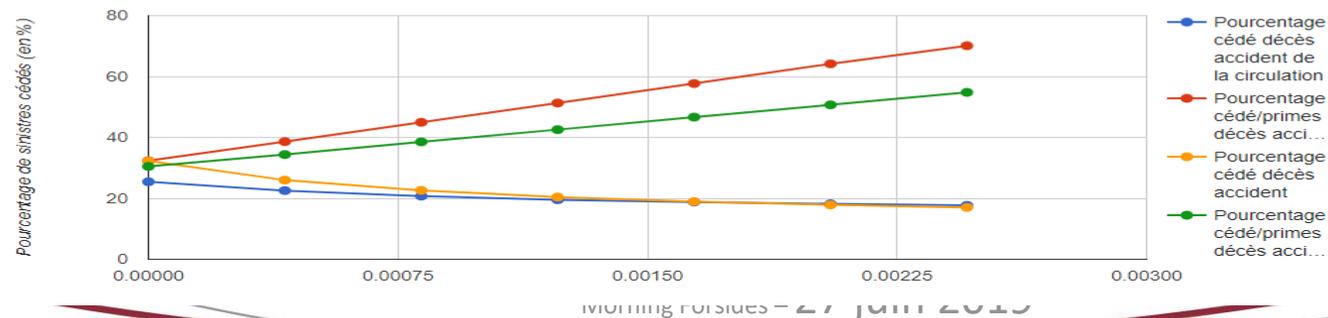
Résultats (5/5)

SENSIBILITÉ AU QX

Sensibilité au qx IAD accident de la circulation et accident



Sensibilité au qx décès accident de la circulation et accident



WORKING PAPER - 27 JUNE 2019

Annexes

Théorie des valeurs extrêmes (TVE – GEV)

La famille de distribution des valeurs extrêmes (GEV^δ) a pour fonction de répartition :

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \gamma x)_+^{-\frac{1}{\gamma}}\right) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

où $x_+ = \max(x, 0)$

Le paramètre γ est appelé l'indice des valeurs extrêmes. Selon son signe, on distingue trois lois :

- $\gamma < 0$, domaine d'attraction de Weibull, avec un point terminal fini ;
- $\gamma = 0$, domaine d'attraction de Gumbel, la fonction de survie décroît à vitesse exponentielle. Le point terminal est fini ou infini.
- $\gamma > 0$, domaine d'attraction de Fréchet, point terminal infini, la décroissance est lente. Le point terminal est infini.

Exemples de lois

Weibull	Gumbel	Fréchet
- Bêta - Burr inverse	- Normale - Exponentielle - Gamma - Weibull	- Pareto - Burr - Student - Loggamma

Seuil - Théorème et Mean Excess Plot

Théorème de Pickands-Balkema-de Haan

La fonction de répartition F de point terminal $x_F \leq \infty$ appartient au domaine d'attraction de H_γ avec $\gamma \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\gamma, a(u)}(x)| = 0 \text{ pour une fonction positive } a.$$

Ce théorème suggère que pour un seuil « assez grand », la loi de Pareto Généralisée (GPD) est une bonne approximation de la loi des excès. On peut alors approcher $F_u(x - u)$ par $G_{\gamma, \sigma, u}(x)$.

C'est la raison pour laquelle, en choisissant un seuil convenable, une loi de Pareto Généralisée pourra être ajustée aux données, par exemple aux montants des sinistres dépassant ce seuil.

Mean Excess Plot

La fonction des excès moyens empiriques est :

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}}$$

Le graphe de la fonction moyenne des excès (ou *Mean Excess plot*) est le graphe des points $\{(u, \hat{e}_n(u)), X_{1:n} < u < X_{n:n}\}$

Pour une loi GPD, la fonction des excès moyens est linéaire en u , il s'agira de chercher le seuil à partir duquel la fonction des excès moyens empiriques est linéaire.

Seuil - Méthodes de détermination AMSE et Gerstengarbe

Méthode AMSE

Définition : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F appartenant au domaine d'attraction de Fréchet. L'estimateur de Hill de γ est :

$$\hat{\gamma}_n^{(H)}(k_n) = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log(X_{n-i+1,n}) - \log(X_{n-k_n,n})$$

Le "Hill Plot" consiste à tracer le graphique des points $\{(k_n, \hat{\gamma}_n^{(H)}(k_n)), 1 < k_n < n\}$.

L'idée consiste à retenir le seuil k_{opt} qui minimise l'erreur quadratique moyenne :

$$AMSE(\hat{\gamma}_k^{(H)}) = \frac{\hat{\gamma}_k^{(ML)^2}}{k} + \left(\frac{b_{n,k}^{(ML)}}{1 + \beta_k^{(ML)}} \right)^2$$

Méthode Gerstengarbe

L'idée est d'observer les comportements des écarts consécutifs entre les coûts puis d'identifier le point de changement de comportement de la série des écarts.

Pour identifier ce point de changement, le test séquentiel est effectué deux fois, pour les différences du début à la fin du jeu de données et inversement.

Soient $x(1) < x(2) < \dots < x(n)$ un échantillon ordonné de taille n .

La série des écarts est : $\Delta_i = x(i) - x(i-1)$ pour $2 < i < n$ et $\Delta_1 = 0$ ($\Delta_j = x(j) - x(j+1)$ pour $1 < j < n-1$, $\Delta_n = 0$)

$$U_i = \frac{U_i^* - \frac{i(i-1)}{4}}{\sqrt{\frac{i(i-1)(i+5)}{72}}} \quad U_j = \frac{U_j^* - \frac{(n-j+1)(n-j+1-1)}{4}}{\sqrt{\frac{(n-j+1)(n-j+1-1)(n-j+1+5)}{72}}}$$

Avec $U_i^* = \sum_{k=2}^i \#\{\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}\} \leq \Delta_k$ et $U_j^* = \sum_{k=j}^{n-1} \#\{\Delta_{k+1}, \dots, \Delta_n\} \leq \Delta_k$

L'intersection du tracé des deux courbes $\{(U_i, i), 2 < i < n\}$ et $\{(U_j, i), 2 < i < n\}$ sur le même graphique indique le seuil optimal.

Calibrage – Sévérité – Lois continues

LOI NORMALE

La loi normale, de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est définie par la densité suivante :

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Les paramètres μ et σ^2 peuvent être estimés par la méthode des moments :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

LOI LOG-NORMALE

La loi log-normale, de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est définie par la densité suivante :

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)$$

Les paramètres μ et σ^2 peuvent être estimés par la méthode des moments :

$$\hat{\mu} = \ln(\bar{X}_n) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\bar{X}_n^2}\right) \quad \hat{\sigma}^2 = \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\bar{X}_n^2}\right)$$

LOI GAMMA

La loi Gamma, de paramètre de forme $\alpha > 0$ et de paramètre d'échelle $\beta > 0$ est définie par la densité suivante :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$

Les paramètres α et β peuvent être estimés par la méthode des moments :

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2} \quad \hat{\beta} = \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\bar{X}_n}$$

TEST AJUSTEMENT

- Kolmogorov Smirnov ,
- Anderson Darling,
- ...

Calibrage – Sévérité des graves – Lois continues – Exemples de lois à queue lourde

LOI GPD

La loi de Pareto Généralisée à deux paramètres $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est définie par la fonction de répartition :

$$G_{\gamma, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

où $x \geq 0$ si $\gamma \geq 0$ et $0 \leq x \leq -\frac{\sigma}{\gamma}$ si $\gamma < 0$

LOI LOG NORMALE TRONQUÉE

La fonction de répartition de la loi log-normale de paramètres (μ, σ) tronquée à gauche en u est

$$F_{X,u}(x) = \frac{F_Y(\ln(x)) - F_Y(\ln(u))}{1 - F_Y(\ln(u))} = \frac{\varphi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\ln(u) - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \varphi\left(\frac{\ln(u) - \mu}{\sigma}\right)}$$

où $\varphi(x)$ est la densité de la loi normale centrée réduite

MÉTHODE D'ESTIMATION

Maximum de vraisemblance [Hosking et Wallis (1987) & Smith (1984)]

Moments pondérés

Moments pondérés généralisés (GPWM)

MÉTHODE D'ESTIMATION

- Maximum de vraisemblance
- Méthode des moments

$$\text{Moment d'ordre } r : \mathbb{E}(X, u^r) = \frac{\exp\left\{r\mu + \frac{(\sigma r)^2}{2}\right\} \varphi\left(\sigma r - \frac{\ln(u) - \mu}{\sigma}\right)}{\varphi\left(\frac{-\ln(u) + \mu}{\sigma}\right)}$$

Calibrage – Fréquence – Lois discrètes

POISSON

$P(\lambda) : \lambda > 0$

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$$

Estimateur obtenu par la méthode des moments:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

La contrainte de l'égalité entre l'espérance et la variance n'est souvent pas observée sur les moments empiriques. C'est la raison pour laquelle, la distribution Binomiale Négative s'ajustera mieux aux données lorsque l'espérance empirique est inférieure à la variance empirique.

MESURE DE LA QUALITÉ D'AJUSTEMENT

Afin de mesurer la qualité d'ajustement de lois discrètes, une pratique courante est de procéder au test d'adéquation du khi-deux.

Attention, ce test ne fonctionne pas avec un nombre trop faible d'observations

BINOMIALE NÉGATIVE

$BN(r, p) : r > 0, p \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(N = k) = C_{r+k-1}^{r-1} (1-p)^k p^r$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\hat{r} = \frac{\bar{N}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \bar{N}_n}$$

$$\hat{p} = \frac{\bar{N}_n}{\hat{\sigma}_n^2}$$