

REVUE DE MODÈLES DE TAUX ET IMPLÉMENTATION DES MODÈLES LMM-SABR ET HULL-WHITE, DANS UN CONTEXTE DE FORTE REMONTÉE DES TAUX ET DES VOLATILITÉS

Liang GUO-FITOUSSI

27/03/2024

PLAN DE PRÉSENTATION

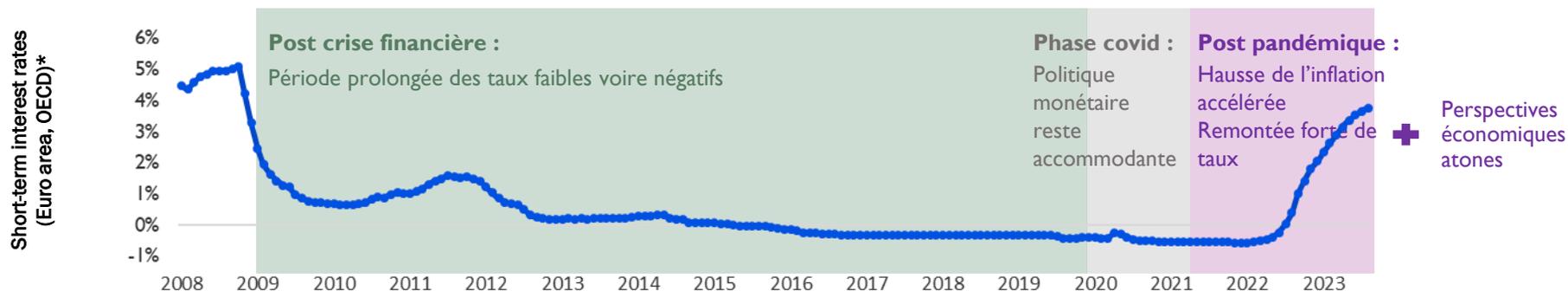
1. Contexte et motivation
2. Rappel des modèles de taux et choix du modèle : LMM-SABR
3. Implémentation des modèles et les résultats : processus d'estimation et calibration du modèle
4. Conclusion

1. Contexte et motivation

- 1 • Contexte et motivation

Constat I :

- L'évolution des taux d'intérêt de ces dernières années et les impacts importants de cet évolution sur différents aspects des activités des assureurs.



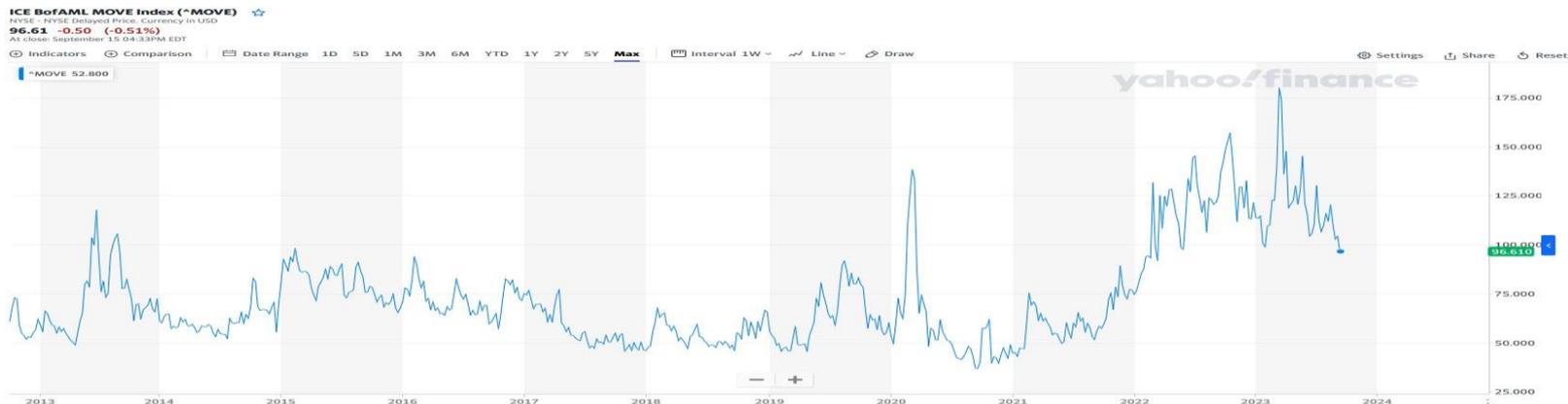
- Recherche des rendements supplémentaires : adaptation des stratégies d'investissement (actifs plus risqués, y compris actifs alternatifs).
- Développements des supports en Unités de Compte
- Croissance soutenue
- Effet positif en cas normal (ex. hausse des revenus des placements, amélioration de la solvabilité si le gap de duration négatif ...)
- Effet mitigé à court terme
- Risque de rachat et risque de liquidité (baisse de pouvoir d'achat, concurrence, modifications des comportement clients, actifs illiquides ...)

- 1 • Contexte et motivation

Constat II :

- Hausse de la volatilité des taux
 - ▶ A la différence des marchés d'actions, la volatilité des marchés de capitaux est moins directionnel. Elle est plus « événementiel » et dépend fortement des changements des politiques monétaires.
 - ▶ Les banques centrales étant dans une situation délicate, l'incertitude concernant leurs mesures ainsi que les impacts sur l'économie sont plus élevées.

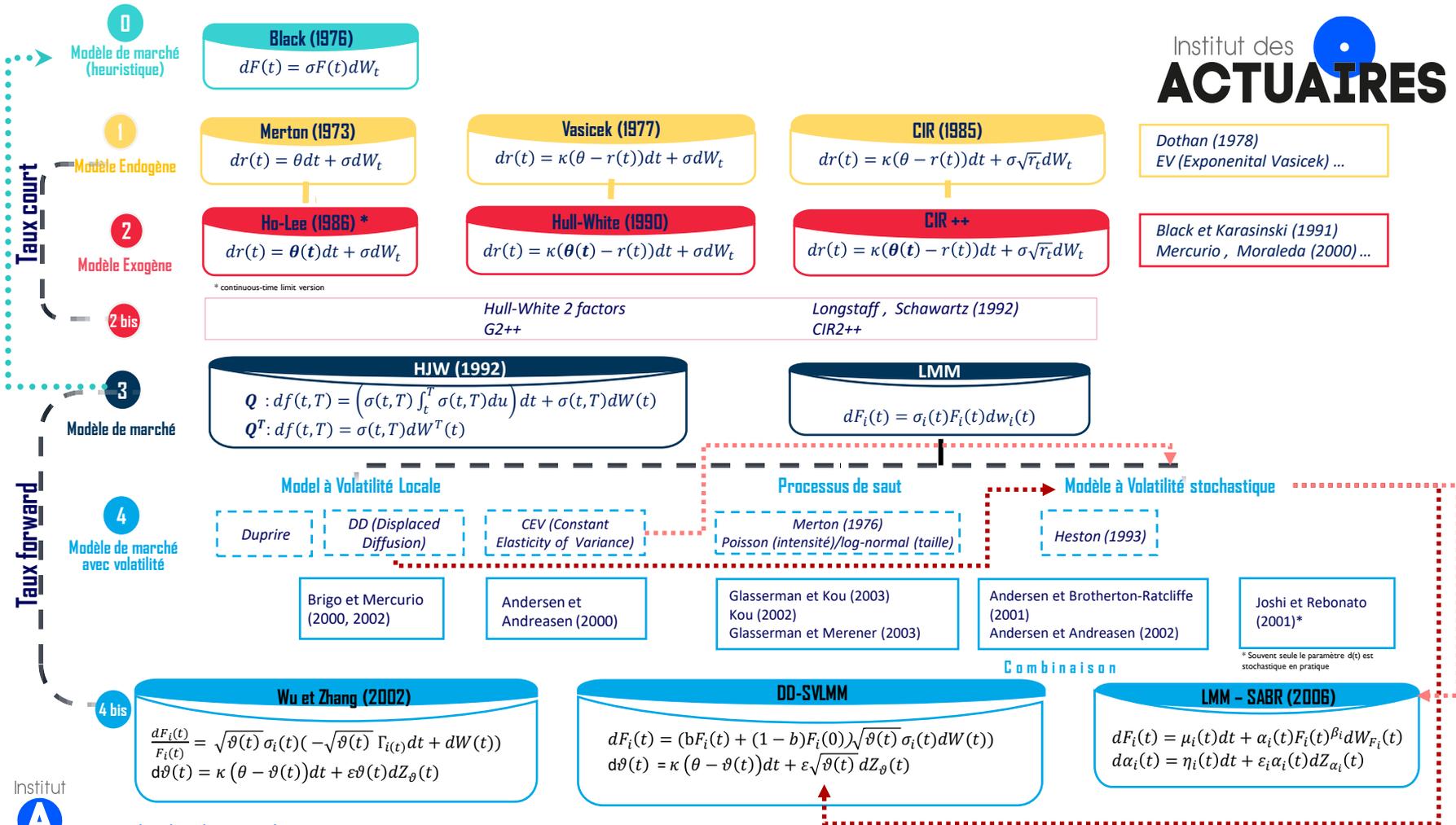
Evolution de l'indice MOVE
2013-2023



2. Revue des modèles et choix du modèle

Dothan (1978)
EV (Exponential Vasicek) ...

Black et Karasinski (1991)
Mercurio, Moraleda (2000) ...



- 2 • le choix du modèle : LMM-SABR

- Les avantages du modèle LMM-SABR :
 - ▶ Un cadre unifiant pour modéliser différents taux forwards.
 - ▶ Simplicité conceptuelle et des interprétations économiques explicites des paramètres tout en restant suffisamment flexible.
 - ▶ Les formules d'approximation pour valoriser les caps et les swaptions sont en général en mesure de fournir un très bon calibrage aux nappes des volatilités du marché.
 - ▶ Implémentation relativement facile.

3. Implémentation des modèles et les résultats

- 3.1 • Les étapes généraux

$$dF_i(t) = \mu_i(t)dt + \alpha_i(t)F_i(t)^\beta dW_{F_i}(t)$$

$$d\alpha_i(t) = \eta_i(t)dt + \varepsilon_i\alpha_i(t)dZ_{\alpha_i}(t)$$

avec

$$\begin{aligned}\langle dW_{F_i}, dW_{F_j} \rangle &= r_{ij}dt \\ \langle dZ_{\alpha_i}, dZ_{\alpha_j} \rangle &= \varphi_{ij}dt \\ \langle dW_{F_i}, dZ_{\alpha_j} \rangle &= \rho_{ij}dt\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} r & \rho \\ \rho' & \varphi \end{bmatrix}$$

- 1) Construction de la courbe de taux initiale
- 2) Estimation des corrélations des taux forward - forward
- 3) Calibrage des (surfaces des) volatilités instantanées des taux forwards
- 4) Estimation des volatilités historiques avec les modèles du type GARCH et Calibrage des corrélation volatilité - volatilité
- 5) Calibrage des corrélations forward - volatilité
- 6) Calibrage des volol instantanées

- 3.2 • Les données

- Pour tester la robustesse : 2 ensembles de données (le 31/12/2019 (31/12/2018-31/12/2019) et le 31/12/2022 (31/12/2021-31/12/2022))
- Pour reconstruire les courbes de taux initiales : taux swaps Euribor 6 mois :
 - ▶ Hull-White : taux swaps de marché des maturités 1-30 ans (31/12/2019, 31/12/2022, Bloomberg)
 - ▶ LMM-SABR : strikes des caps ATM (31/12/2019, 31/12/2022, Bloomberg)
- Pour estimer les corrélations historiques dans le modèle LMM-SABR :
 - ▶ taux swaps de marché historiques recueillies pour les périodes 31/12/2018 - 31/12/2019 et 31/12/2021 - 31/12/2022 (262 et 349 observations respectivement, source : Investing.fr) -> courbe des taux forwards historiques
- Pour calibrer les autres paramètres des modèles :
 - ▶ Hull-White : Prix des swaptions avec une date de maturité 1 an et des échéances 1-10, 15, 20 et 30 ans (straddle EUSP ATM du 31/12/2019 et du 31/12/2022, source : Bloomberg)
 - ▶ LMM-SABR :
 - Volatilités normales des caps Euribor 6 mois ATM (31/12/2019 et 31/12/2022, source : Bloomberg).
 - Nappes des volatilités des caps Euribor 6 mois avec des strikes différents (source : Bloomberg).
 - *Strikes 31/12/2019* : -0.015, -0.01, -0.005, 0, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03
 - *Strikes 31/12/2022* : 0, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03, 0.035, 0.04, 0.05, 0.06

- 3.3 • Étape 1 : Reconstruction des courbes de taux (1)

▪ Méthodes Courants :

▶ Bootstrapping

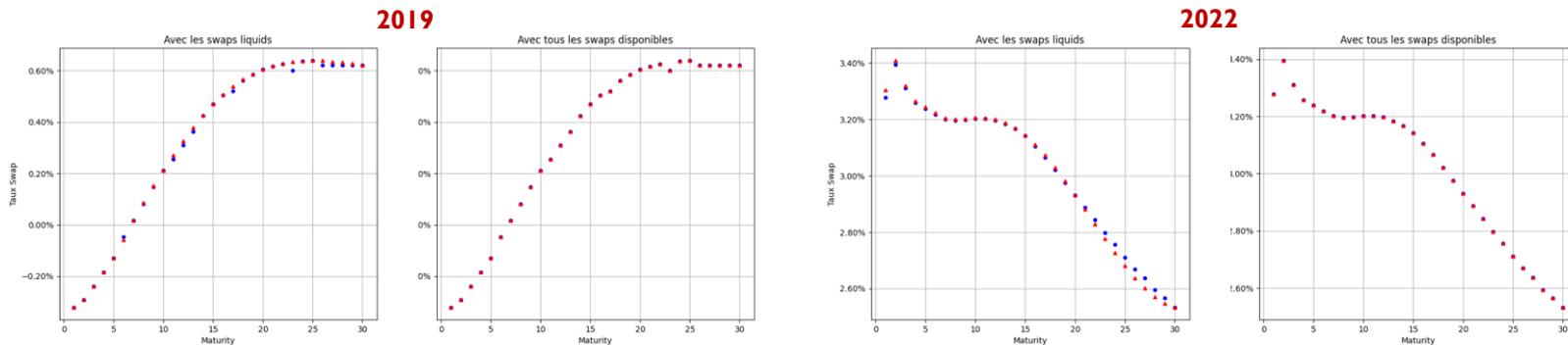
▶ Approximation à la fonction d'actualisation

- Modèles basés sur les splines (ex. McCulloch (1971, 1975), Vasicek et Fong (1982), Steeley (1991), Fisher et al. (1995), Waggoner (1997), Anderson et Sleath (2001) et etc.)
- Modèles avec des paramètres parcimonieux (ex. Nelson-Siegel (1987), Nelson-Siegel-Svensson (1994))

- 3.3. • Étape 1 : Reconstruction des courbes de taux zéro-coupon (HW) (2)

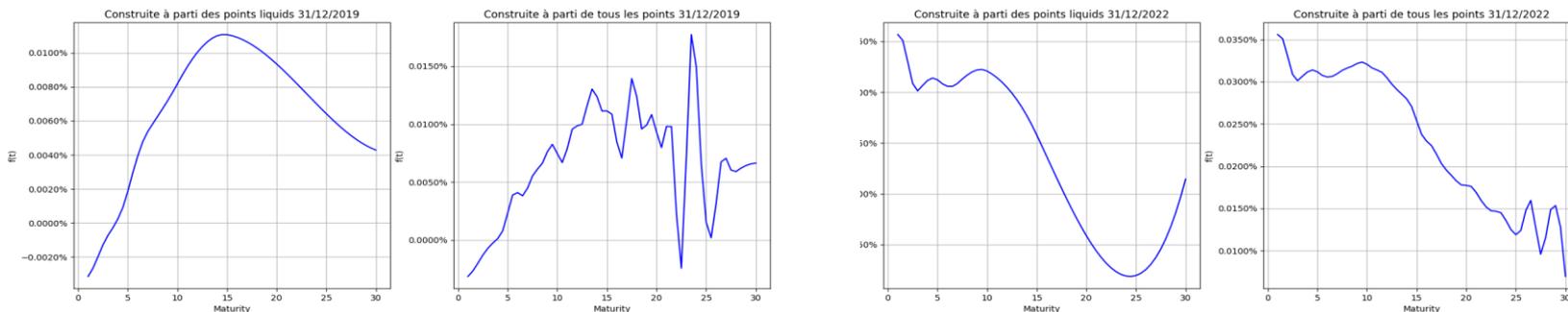
- Déterminer les points de splines par optimisation et construire la courbe initiale avec interpolation par B-spline.

Courbe zéro-coupon reconstruite par optimisation



- Les courbes des taux forwards reconstruites avec l'ensemble des taux swap disponibles présente beaucoup plus d'oscillations.

Courbe des taux forwards reconstruite

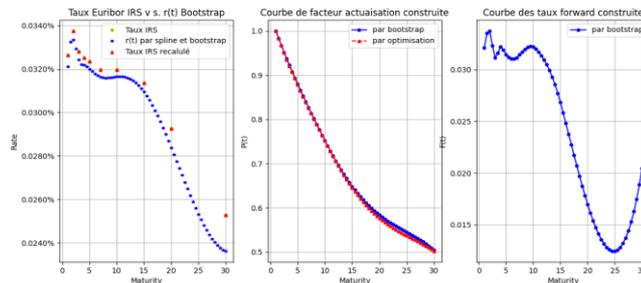
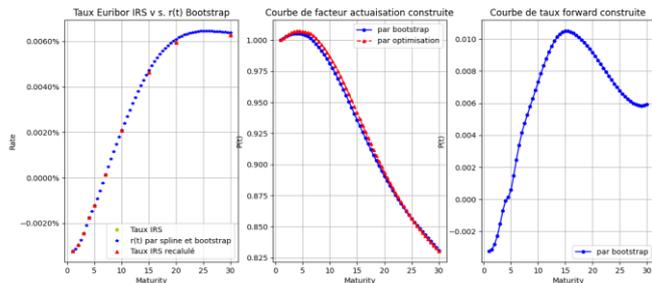


- 3.3. Étape 1 : Reconstruction des courbes de taux forward (LMM-SABR, initiales et historiques) (3)

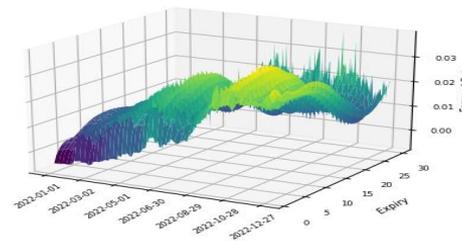
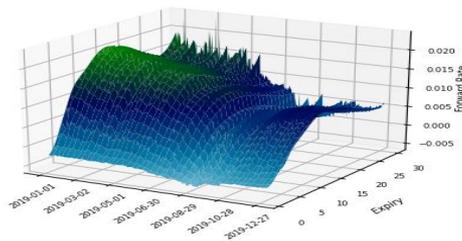
- Combinaison de splines cubiques et la méthode de bootstrap: Courbes de taux forwards d'1 an à 30 ans, tenor de 6 mois (59 maturités différentes)

2019

2022



- Construction des courbe des taux forwards historiques: Les taux IRS d'historiques du 31/12/N-1 au 31/12/N : matrice des taux de forward d'environ 300*59 (voir annexe A.2 pour des exemples de courbes de taux des certaines dates).



Courbes des taux initiales reconstruites

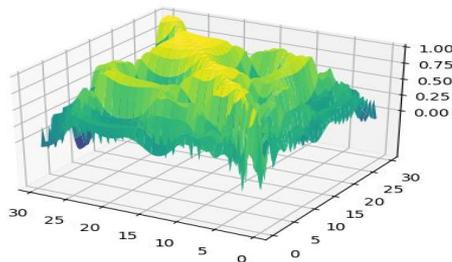
L'ensemble des courbe des taux forwards historiques

- 3.4. Étape 2 : Estimation des corrélations forward-forward (1)

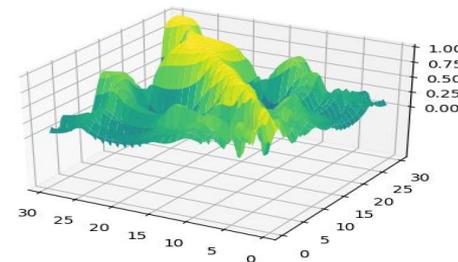
$$\begin{bmatrix} r & \rho \\ \rho' & \varphi \end{bmatrix}$$

- Des corrélations factices et irrégulières sont observées dans les matrices de corrélations brutes.

2019

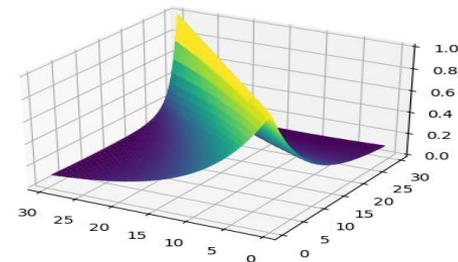
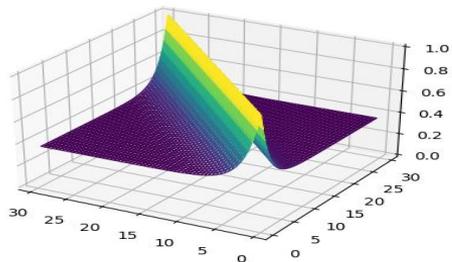


2022



- Des lissages effectués à l'aide de la fonction de corrélation paramétrique :

- ▶ 4 formes paramétriques testées et la forme double exponentielle à 3 paramètres retenue

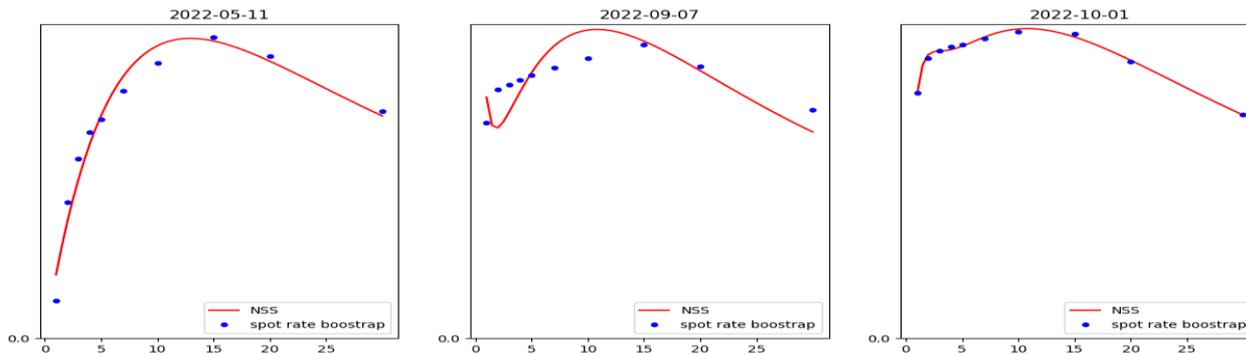


- 3.4. • Étape 2 : Alternative ajustement préalable par Nelson-Siegel-Svensson (2) (non retenu)

- La sélection des valeurs initiales des paramètres une par une est coûteux en temps.

Paramètres	β_0	β_1	β_2	β_3	α_1	α_2
Valeur initiale	r_{30}	$r_{30} - r_1$	0.1	0.1	3	25

- Crispoldi et al. (2015) : dans certains cas la paramétrisation NSS s'avère trop simpliste.



- 3.5. • Étape 3 : calibrage des volatilités instantanées (1)

- Stripping : recouvrir les volatilités de chaque caplet à partir de celles de caps.
 - ▶ Interpolation linéaire pour les tenors manquants
 - ▶ Bootstrapping (l'algorithme Gatarek et al. (2007), section 7.3)
- Calibration des structures des volatilités instantanées : différentes formes de spécification
 - ▶ *Controllability* : la dépendance de la maturité résiduelle permet de préserver la forme de la structure par terme des volatilités au fil du temps
 - ▶ Constante par morceau

$$\sigma_{i,j} = \psi_{M-j+1} \quad (\text{forme 2 BM})$$

$$\sigma_{i,j} = \Phi_i \psi_{M-j+1} \quad (\text{forme 5 BM})$$

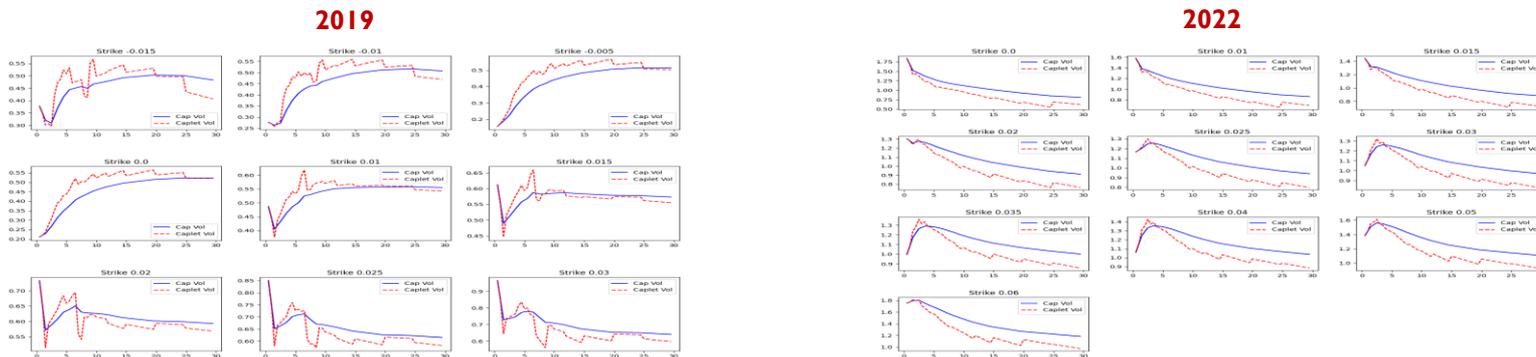
- ▶ Forme paramétrique

$$\sigma_i = [(a (T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1} - t)} + c \quad (\text{forme 6 BM})$$

$$\sigma_i = \Phi_i [(a (T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1} - t)} + c \quad (\text{forme 7 BM})$$

• 3.5. • Étape 3 : calibrage des volatilités instantanées (2)

- Les surfaces des volatilités des caplets obtenues à partir de celles des caps avec la méthode stripping.



- Différentes formes de spécification des volatilités testées et la forme 7 est retenue (calibrage volatilités SABR).

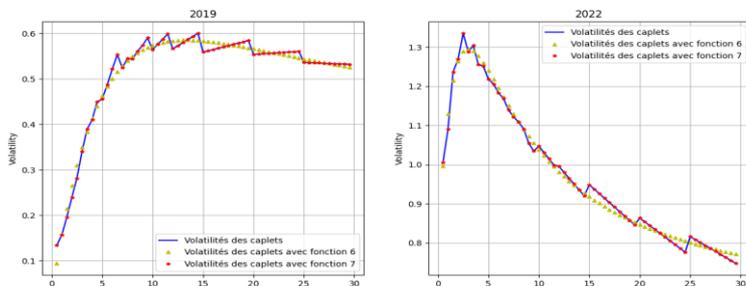


Table 4.2: Calibrage avec la forme 7 : valeur des paramètres ϕ (2019)

1.4182	0.9889	0.9095	0.9013	0.9076	0.9731	1.0142	0.9895	1.0204	0.9832
1.0068	1.0410	1.0726	0.9907	1.0089	0.9891	1.0061	1.0167	1.0364	0.9834
0.9971	1.0120	1.0280	0.9693	0.9795	0.9904	1.0020	1.0143	1.0272	0.9579
0.9646	0.9716	0.9790	0.9867	0.9947	1.0028	1.0112	1.0198	1.0285	0.9784
0.9835	0.9887	0.9939	0.9992	1.0046	1.0099	1.0153	1.0207	1.0262	0.9852
0.9882	0.9911	0.9941	0.9970	0.9999	1.0028	1.0056	1.0084	1.0112	

- 3.6. • Étape 4 : calibrage des corrélations volatilité- volatilité (1)

$$\begin{bmatrix} r & \rho \\ \rho' & \varphi \end{bmatrix}$$

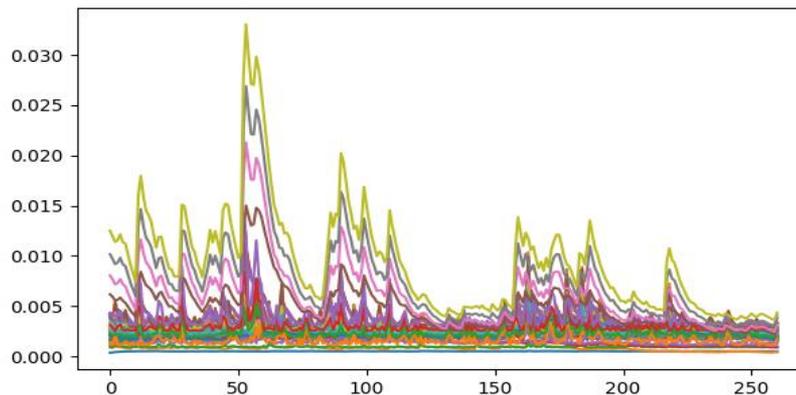
- Indisponibilité des produits dérivés pour déduire les corrélations volatilité-volatilité sur le marché : recours aux données historiques :
 - ▶ Des volatilités des caplets ATM historiques;
 - ▶ Des taux forwards historiques : approcher le processus des volatilités à l'aide des modèles séries temporelles.
- Choix des modèles du famille ARCH (plus de détails voir annexe A.4) :
 - ▶ ARCH, GARCH(1,1)
 - ▶ TGARCH(1, 1, 1), GJR-ARCH(1,1,1) (Glosten-Jagannathan-Runkle) : impacts asymétriques des nouvelles positives et des nouvelles négatives sur la volatilité
 - ▶ Test de la stationnarité (ADF) et de la normalité des séries (Jarque-Bera).
 - ▶ 3 critères de sélection : LL (la log-vraisemblance à l'optimum), AIC (Critères d'Information d'Akaike) et BIC (Critères d'Information de Bayesian)

- 3.6. • Étape 4 : calibrage des corrélations volatilité- volatilité (2)

Modèles sélectionnés par ténor

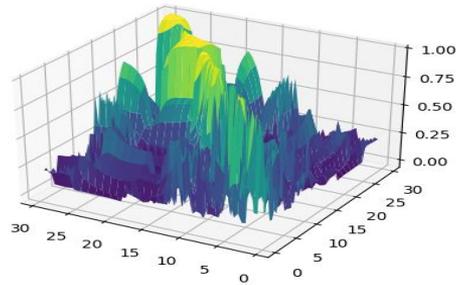
Forward	Model_selected	Forward	Model_selected	Forward	Model_selected
Fwd_0.5_1.0Y	TGARCH	Fwd_10.5_11.0Y	TGARCH	Fwd_20.5_21.0Y	ARCH
Fwd_1.0_1.5Y	TGARCH	Fwd_11.0_11.5Y	GJR_GARCH	Fwd_21.0_21.5Y	ARCH
Fwd_1.5_2.0Y	TGARCH	Fwd_11.5_12.0Y	TGARCH	Fwd_21.5_22.0Y	GARCH
Fwd_2.0_2.5Y	TGARCH	Fwd_12.0_12.5Y	GARCH	Fwd_22.0_22.5Y	GARCH
Fwd_2.5_3.0Y	TGARCH	Fwd_12.5_13.0Y	GARCH	Fwd_22.5_23.0Y	GARCH
Fwd_3.0_3.5Y	ARCH	Fwd_13.0_13.5Y	GARCH	Fwd_23.0_23.5Y	ARCH
Fwd_3.5_4.0Y	GARCH	Fwd_13.5_14.0Y	GARCH	Fwd_23.5_24.0Y	ARCH
Fwd_4.0_4.5Y	GARCH	Fwd_14.0_14.5Y	GARCH	Fwd_24.0_24.5Y	GARCH
Fwd_4.5_5.0Y	GJR_GARCH	Fwd_14.5_15.0Y	TGARCH	Fwd_24.5_25.0Y	ARCH
Fwd_5.0_5.5Y	TGARCH	Fwd_15.0_15.5Y	TGARCH	Fwd_25.0_25.5Y	GJR_GARCH
Fwd_5.5_6.0Y	TGARCH	Fwd_15.5_16.0Y	TGARCH	Fwd_25.5_26.0Y	GJR_GARCH
Fwd_6.0_6.5Y	GARCH	Fwd_16.0_16.5Y	TGARCH	Fwd_26.0_26.5Y	ARCH
Fwd_6.5_7.0Y	GARCH	Fwd_16.5_17.0Y	GARCH	Fwd_26.5_27.0Y	ARCH
Fwd_7.0_7.5Y	TGARCH	Fwd_17.0_17.5Y	ARCH	Fwd_27.0_27.5Y	ARCH
Fwd_7.5_8.0Y	GJR_GARCH	Fwd_17.5_18.0Y	ARCH	Fwd_27.5_28.0Y	ARCH
Fwd_8.0_8.5Y	GJR_GARCH	Fwd_18.0_18.5Y	ARCH	Fwd_28.0_28.5Y	GARCH
Fwd_8.5_9.0Y	GJR_GARCH	Fwd_18.5_19.0Y	ARCH	Fwd_28.5_29.0Y	GARCH
Fwd_9.0_9.5Y	GJR_GARCH	Fwd_19.0_19.5Y	ARCH	Fwd_29.0_29.5Y	GARCH
Fwd_9.5_10.0Y	GJR_GARCH	Fwd_19.5_20.0Y	ARCH	Fwd_29.5_30.0Y	GARCH

Volatilités historiques estimées

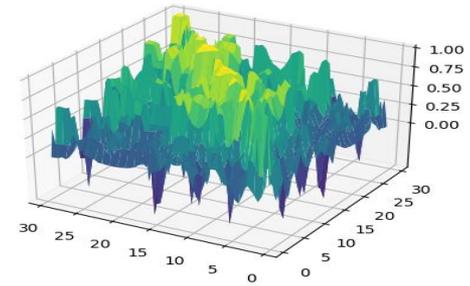


- 3.6. • Étape 4 : calibrage des corrélations volatilité- volatilité (3)

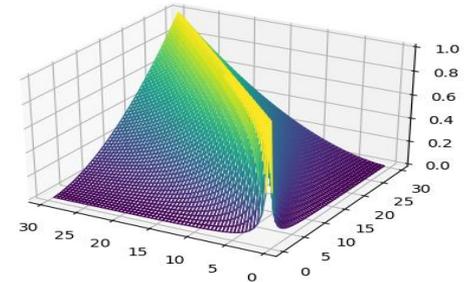
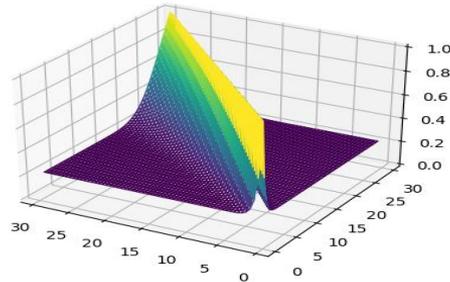
2019



2022



- La forme de corrélation multiplicative de Doust (2007)



$$\begin{bmatrix} r & \rho \\ \rho' & \varphi \end{bmatrix}$$

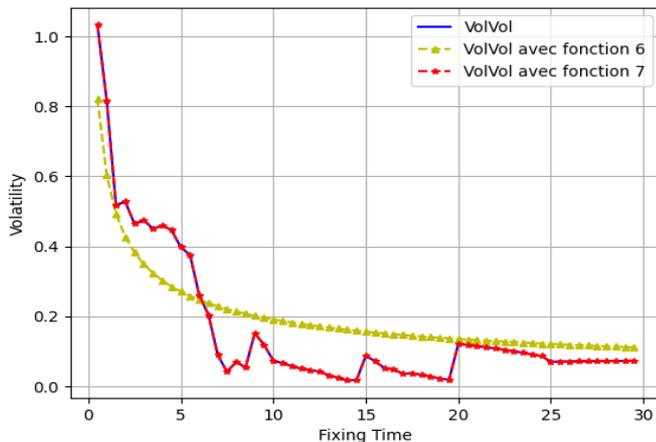
- Aucun produit négocié directement lié existe, ni des données historiques.
- Deux approches de calibrage :
 - ▶ L'approche diagonale consiste à pour chaque maturité i , fixer β_i et trouver les valeurs ρ_i par la calibration des modèles SABR, et définir les éléments diagonaux de $\boldsymbol{\rho}$ comme étant égal ρ_i .
 - La formule d'approximation de la volatilité normale SABR (2.70) (ou l'équation 2.65 avec la volatilité Black)
 - ▶ L'approche alternative consiste à la définir comme une matrice nulle.

où

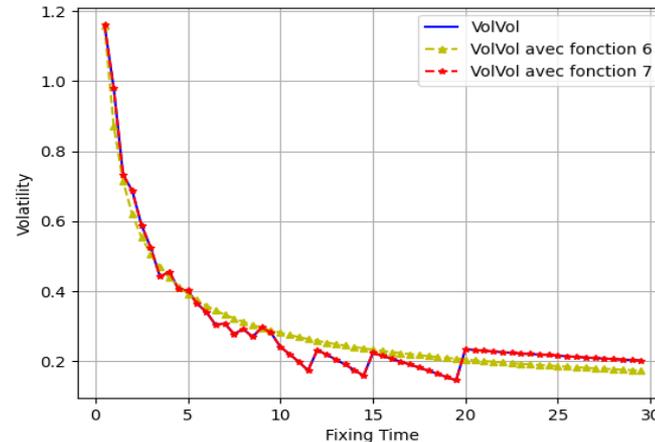
• 3.7. • Étape 6 : Calibrage des Vol-Vols

- Calibrer volvol (comme rho) avec la formule d'approximation de la volatilité normale (2.70) (ou l'équation 2.65 avec la volatilité Black) pour chaque modèle SABR.
- Ensuite, approcher les structures des volvols instantanées par formes paramétriques

2019



2022



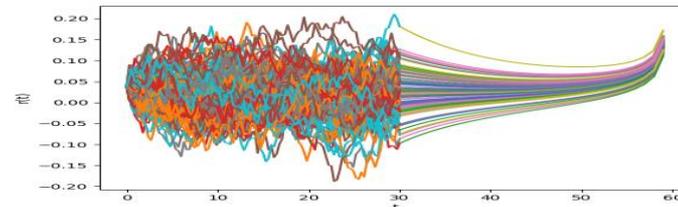
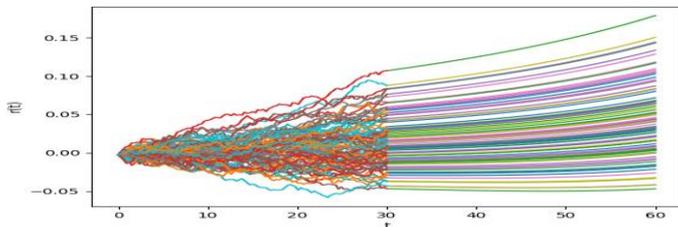
• 3.8. • Simulation

- Simulations (Schema Euler pour les 2 modèles):
 - ▶ Crispoldi et al. (2015) : gain de précision du schéma de Milstein limité et le temps de calcul beaucoup plus lourd (l'ordre de 70 à 90%).
- LMM-SABR : Réduction des dimensions par zeroing valeur propres (4 vecteurs propres retenus selon ACP (analyse en composantes principales))

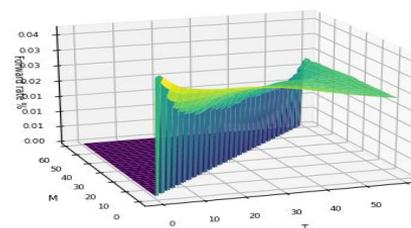
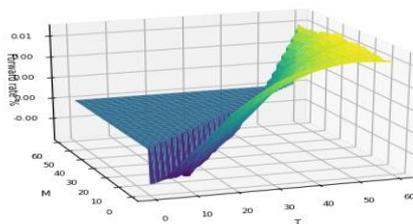
2019

2022

Hull-White



LMM-SABR



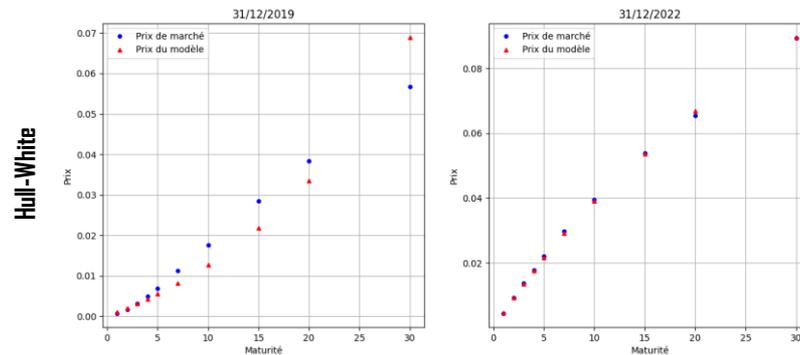
- 3.9. Comparaison des modèles en termes de market consistency

Table 4.5: Les écarts entre les prix ATM des swaptions côtés et celle du modèle HW

Mesure des écarts	2019	2022
RMSE	50.4085 bp	5.42587 bp
RMSE (relative)	22.6811%	2.49628%

Table 4.6: Les écarts entre la nappe de volatilités cotées et celle du modèle LMM-SABR

Mesure des écarts	2019	2022
RMSE	1.75718 bp	2.37058 bp
RMSE (relative)	3.52364%	2.68387%



2019

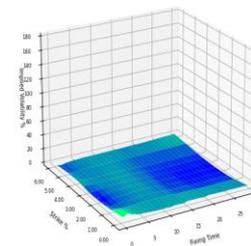
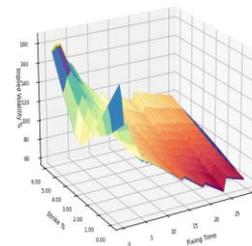
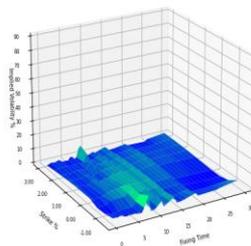
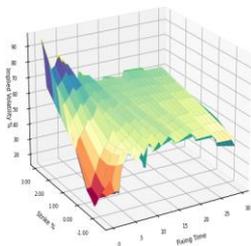
2022

Nappes des volatilités des caplets (marché & modèle)

Écarts des nappes des volatilités des caplets

Nappes des volatilités des caplets (marché & modèle)

Écarts des nappes des volatilités des caplets



LMM-SABR

4. Conclusion

- 4. • Conclusion

- Importance d'un modèle robuste :
 - ▶ Le risque de taux et le risque d'inflation sont identifiés comme les premiers risques par l'EBA, l'EIOPA et l'ESMA (2023).
 - ▶ Ralentissement de l'inflation depuis 2023 et baisses des taux directeurs anticipées par le marché en 2024.
- Importance de la prise en compte des volatilités :
 - ▶ La « normalisation » des politiques monétaires.
 - ▶ La fragilité liée à la dépendance du secteur privé à l'égard des liquidités fournies par les banques centrales dans le passé.
 - ▶ Les tensions géopolitiques persistantes entre les principales économies et les conflits au Moyen Orient.
 - ▶ Les changements structurels profonds : le changement climatique, la transformation numérique et le vieillissement de la population (Schanz & Treccani 2023, The Geneva Association).

- 4. • Conclusion

“... A more realistic goal for a good model is to offer the ability to reduce the uncertainty to an acceptable minimum by making as judicious a use as possible of the econometric information available.”

- Rebonato et al. (2011)