Etude du modèle de Black-Litterman et de son application dans le cadre de l'allocation stratégique d'un établissement financier

Mathys BALDACCHINO

29/04/2024

SOMMAIRE

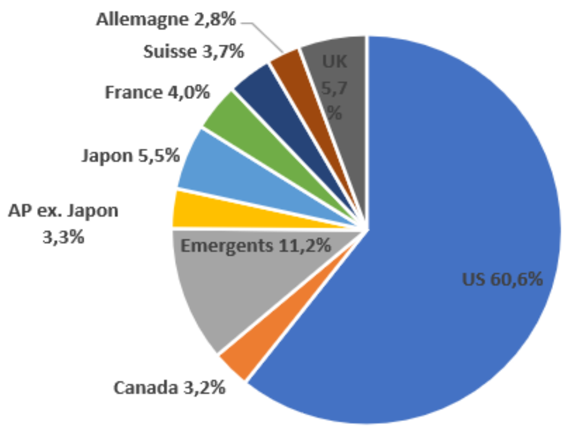
1. MOTIVATIONS

- Concrétiser les connaissances théoriques d'un modèle d'allocation d'actifs
- Comprendre en détail les mécanismes et paramètres de celui-ci
- Souligner ses limites puis proposer des extensions pertinentes basées sur la recherche disponible
- Apporter de nouvelles réponses en gardant un esprit critique
- Etudier l'applicabilité du modèle à des problématiques d'entreprise

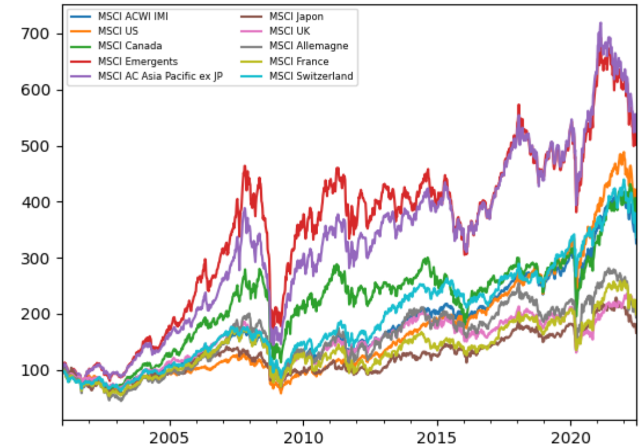
Institut des ACTUAIRES

2. DONNÉES UTILISÉES

- Données : indices *MSCI* (*Net Total Return*) représentant les Actions cotées par région ou pays
- Un indice de marché : *MSCI ACWI IMI*



Décomposition du portefeuille de marché (indice filtré)



Performance des indices (base 100)

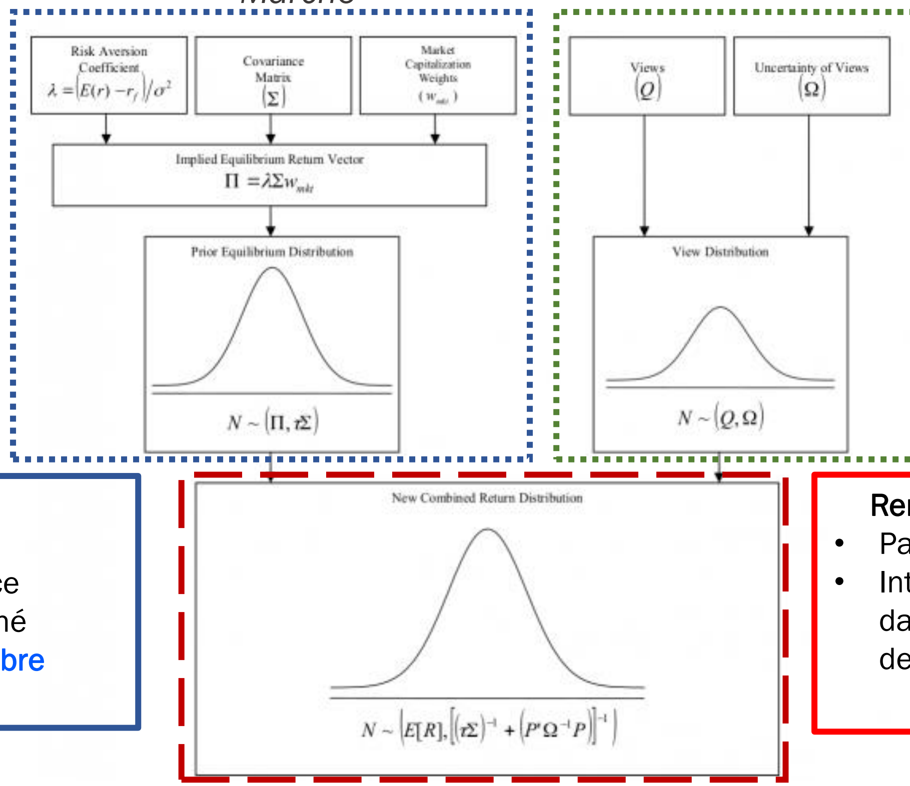
→ Tendance globale mais comportements hétérogènes : intérêt à diversifier
→ <u>Prendre en compte les anticipations de l'investisseur pour modifier le portefeuille d'*équilibre*</u>

Institut des ACTUAIRES

3. MODÈLE DE BLACK-LITTERMAN

Investisseur
- Rendements anticipés
- Portefeuille(s) de(s) vue(s)
- Incertitude(s)

Marché *Investisseur*



MEDAF
- Aversion au risque
- Matrice de covariance
- Portefeuille de marché

→ **Rendements d'équilibre**
A priori

Rendements moyens *a posteriori*:
- Par inférence bayésienne
- Intègrent la partie *Investisseur* dans l'estimation de la distribution des rendements

Institut des ACTUAIRES

3. MODÈLE DE BLACK-LITTERMAN

Explication dans un cas discret du théorème de Bayes

$$\mathrm{P}(\mu|Q;\Omega) = \frac{P(Q|\mu) * P(\mu)}{\sum P(Q|\mu) * P(\mu)}$$

- $\mathrm{P}(Q|\mu)$ est la vraisemblance i.e. la probabilité d'observer les rendements attendus (des vues) conditionnellement au paramètre μ
- $\mathrm{P}(\mu)$ est la probabilité *a priori* estimée à partir des données du marché
  - A partir du portefeuille de marché et des rendements historiques, le MEDAF permet d'obtenir des *rendements théoriques*
- Le dénominateur $\sum P(Q|\mu) * P(\mu)$ permet d'adjuster l'échelle du produit

Concernant le modèle de Black-Litterman

On suppose que les rendements sont aléatoires: $R \sim N(\mu, \Sigma)$ où μ est inconnue et Σ estimée empiriquement

- $q|\mu \sim N(P\mu, \Omega)$ – Q (le vecteur de rendements subjectifs) est considéré comme une observation de q, Ω la matrice d'incertitude et P le vecteur
- $\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$
- $\mu|Q;\Omega \sim N\left(\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^t\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^t\Omega^{-1}Q\right], \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^t\Omega^{-1}P\right]^{-1}\right)$

Institut des ACTUAIRES

3. MODÈLE DE BLACK-LITTERMAN

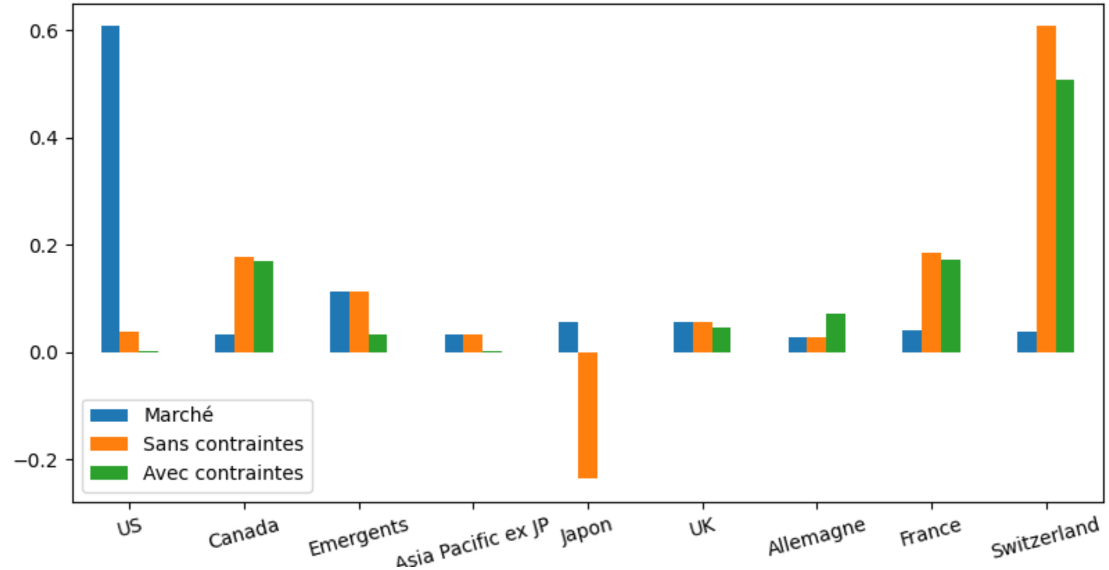
Hypothèses :

- Marché Suisse va sur-performer le Marché US de 0,1%
- Marchés Canada et France vont sur-performer Marché Japon de 0,2%

- Pas d'incertitude spécifiée
- Allocations avec et sans contraintes
- Horizon *une semaine*

Commentaires :

- Résultats pertinents
- Impact conséquent
- Perte de l'information de marché



Allocations proposées (avec et sans contraintes) par le modèle

Institut des ACTUAIRES

4. SENSIBILITÉ À LA CONFIANCE

Incertitude des vues dans le modèle de base : $\Omega = \tau * diag(P^t \Sigma P)$

Limite majeure du modèle de base :
Pas de spécification de l'incertitude

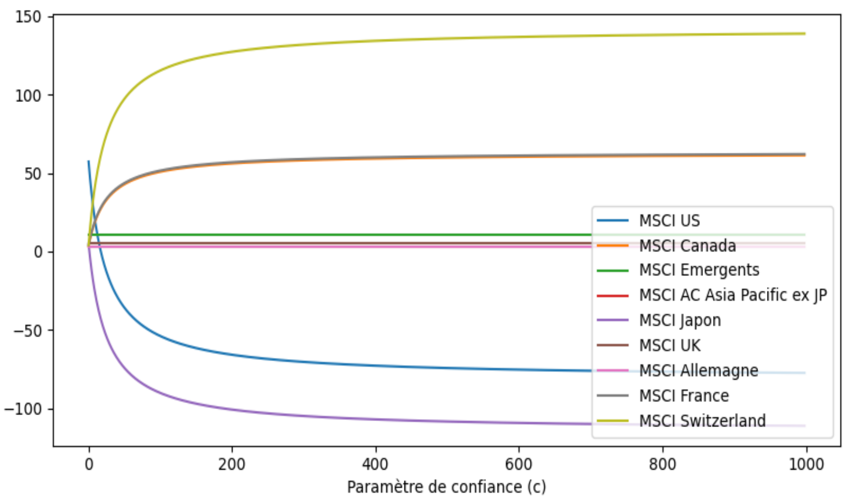
Solution : Intégration d'une variable de *confiance c*

$$\Omega = \frac{1}{c} diag(P^t \Sigma P)$$

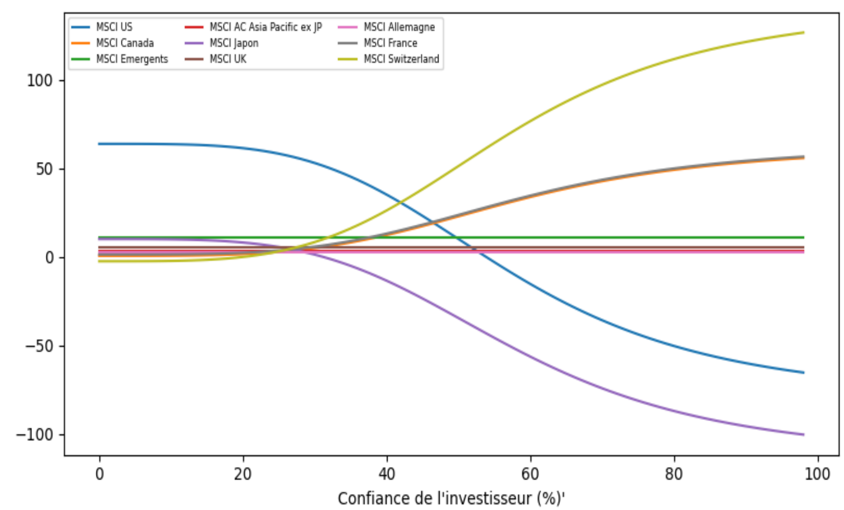
Limite majeure de la confiance c :
Trop de sensibilité à la confiance

Solution : Transformation de *c* par troncature et réduction en puissance pour lisser l'effet

$$\Omega = \frac{1}{c_d} diag(P^t \Sigma P) \text{ avec } c_d = \frac{c}{100} e^{\frac{\log(250)}{d}}$$



Sensibilité de l'allocation à la confiance c



Sensibilité de l'allocation à la confiance, le cas de la transformation puissance 4

Institut des ACTUAIRES

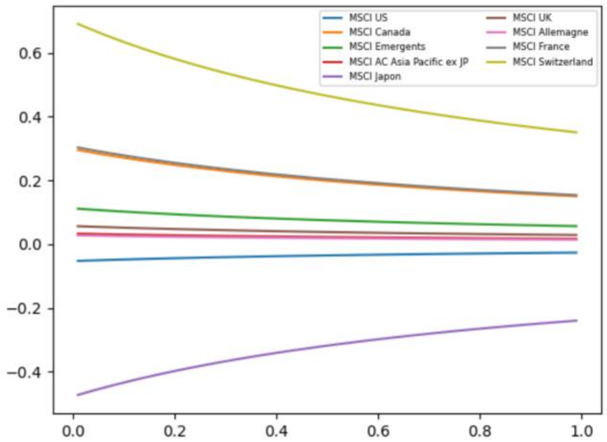
5. LE PARAMÈTRE τ

Dans le modèle de base, τ intervient dans:

- l'incertitude de l'espérance des rendements *a priori*
- L'incertitude des *vues* (Ω)

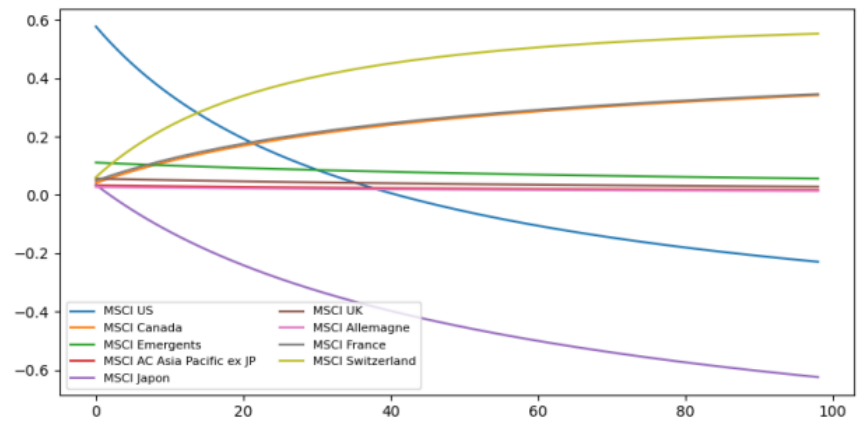
Double effet qui impacte l'allocation finale de façon homogène (par $\frac{1}{1+\tau}$)

➢ Souvent fixé dans la littérature (0,05; 0,25 ou 1)



Sensibilité des allocations par rapport à τ
(toutes choses étant égales par ailleurs et modèle de base)

En utilisant le paramètre *c* de confiance des vues, τ ne représente alors que l'incertitude de l'espérance des rendements *a priori* proportionnellement à la variance des rendements



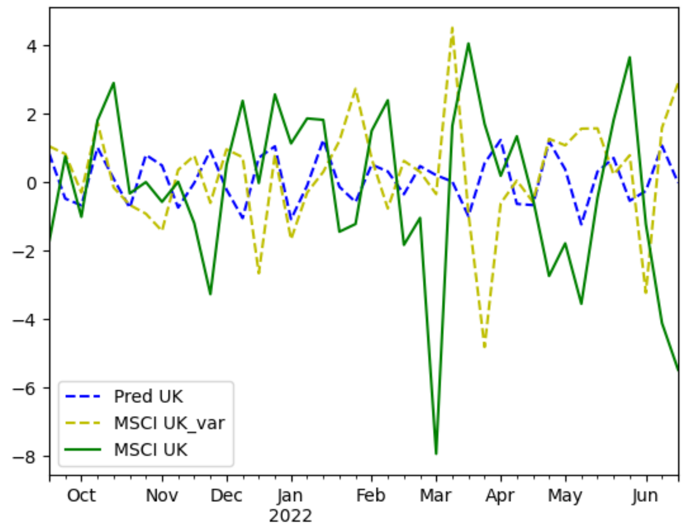
Sensibilité des allocations par rapport à τ
(toutes choses étant égales par ailleurs et modèle de Meucci)

Institut des ACTUAIRES

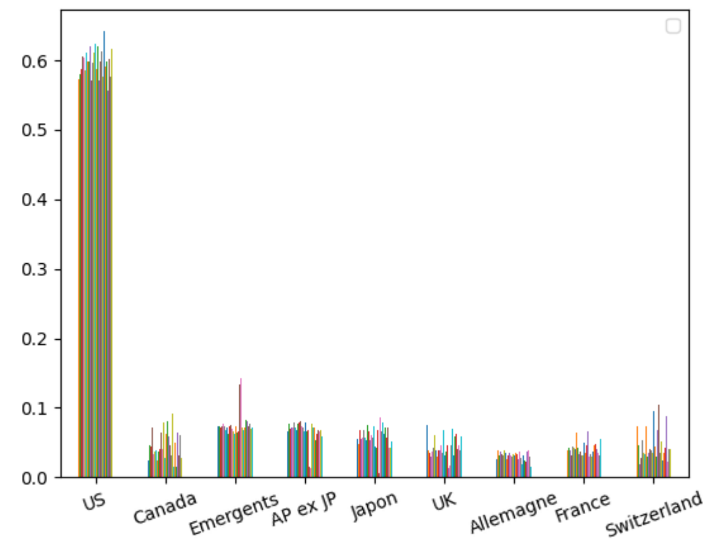
6. SÉRIES TEMPORELLES

Générer des anticipations de marché à partir des informations (passé et présent)

- Modèles ARIMA et VAR – simples à utiliser et interpréter
- Ne conserver que ceux qui sont statistiquement cohérents
- Intégrer ces vues et utiliser l'incertitude des projections



Comparatif visuel des prédictions (MSCI UK) issues de modèles ARIMA et VAR



Allocations avec Black-Litterman et utilisation d'un modèle VAR

Peu de mouvement des portefeuilles – Incertitudes augmentées par une confiance globale du modèle

Institut des ACTUAIRES

7. CHANGEMENT DE MESURE DE RISQUE

Limites du modèle de base :
- La *Variance* pénalise le *bon* risque
- Néglige l'aversion à la survenance d'évènements rares

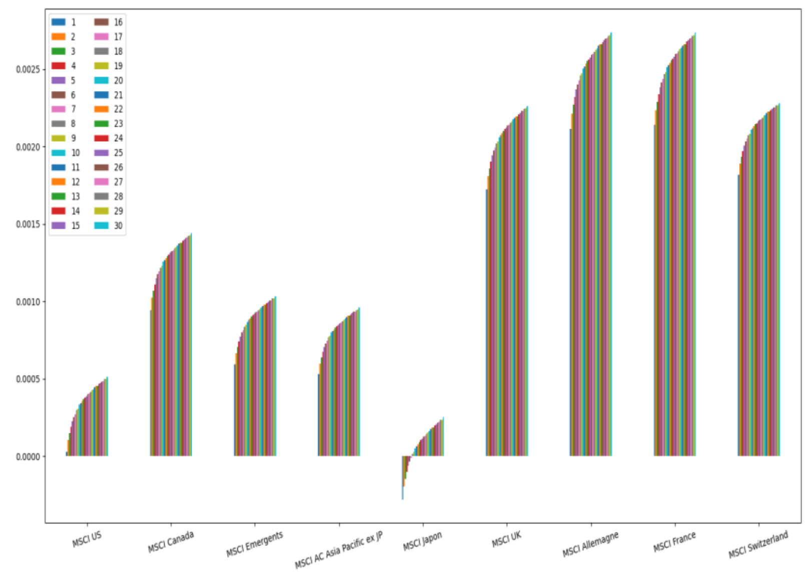
Solution :
Remplacement de la variance par la CVaR (espérance conditionnelle au-delà d'un seuil α)
- Mesure le *mauvais* risque uniquement
- Donne une information sur la répartition de celui-ci
- Est intégrable au modèle de Black-Litterman

Équations des rendements d'équilibre Π et aversion au risque λ

$$\Pi = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\left(\frac{\Sigma w_{mkt}}{\sqrt{w_{mkt}^t \Sigma w_{mkt}}} CVaR_\alpha\right) \qquad \lambda = -\frac{\mathbb{E}(r)^t w_{mkt} - r_f}{CVaR_\alpha(r^t w_{mkt})}$$

Portefeuilles optimaux par algorithme

$$\begin{aligned} w_{CVaR_\alpha} &= \arg\min \mu_{BL}^t w - \lambda * (-1) * (\sqrt{w^t \Sigma_{\mu_{BL}} w} CVaR_\alpha(Y) - \mu_{BL}^t w) \\ Avec \quad & \mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q) \\ & \Sigma_{\mu_{BL}} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1} \\ & Y \sim N(0,1) \end{aligned}$$



Rendements d'équilibre avec MEDAF modifié CVaR du portefeuille (α variant)

Institut des ACTUAIRES

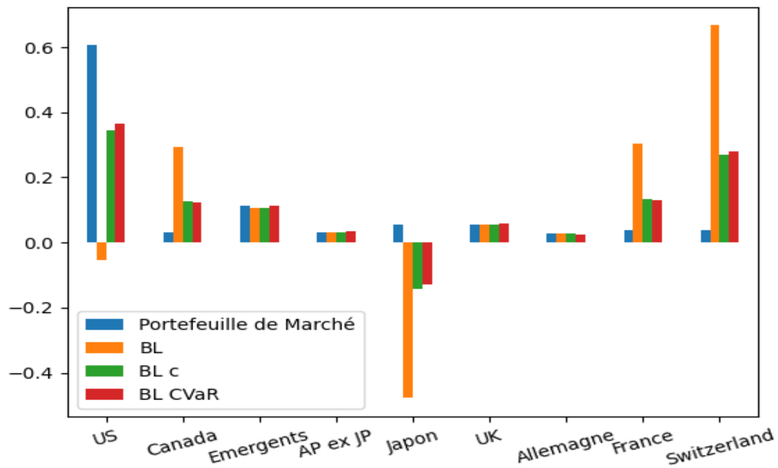
7. CHANGEMENT DE MESURE DE RISQUE

Résultats cohérents avec les attentes

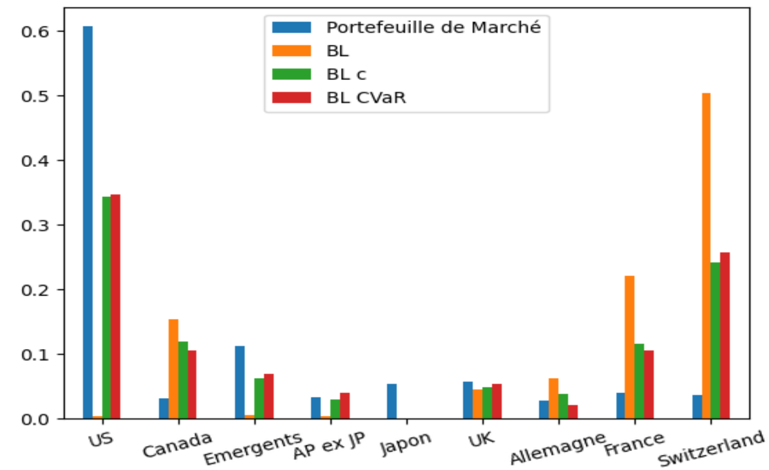
Allocations similaires à celles avec c pour des degrés de confiance moyens

Pour une confiance élevée, trop de réaction bien que fondamentalement logique

Limite majeure : La *CVaR* n'est pas adaptée pour des quantiles faibles avec une distribution gaussienne



Comparaison des variantes du modèle à celui de référence (α 20%, c 30%, sans contraintes)



Comparaison des variantes du modèle à celui de référence (α 20%, c 30%, avec contraintes)

Institut des ACTUAIRES

8. DISTRIBUTION α-STABLE

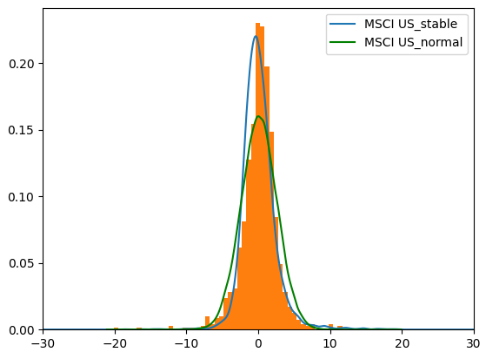
Changement de l'hypothèse des rendements

Afin de :

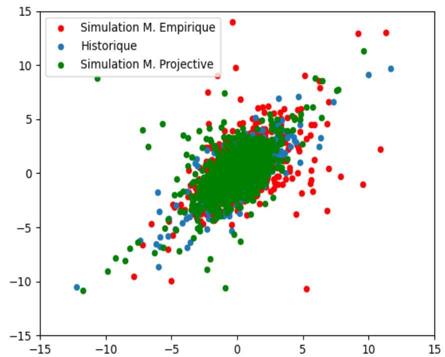
Calquer l'asymétrie
Mieux considérer l'épaisseur de queue

En conservant :

La stabilité par addition
Le principe d'autosimilarité



Comparaison empirique de la densité des rendements du MSCI US (10000 simulations)



Comparaison (tronquée) empirique de la distribution des rendements du couple MSCI US/MSCI Japan (1000 simulations)

Famille des lois α-stables - $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

- Comprend la loi normale
- En accord avec les exigences

Mais n'admet pas de densité et de variance (sauf cas particuliers)

- $\boldsymbol{\alpha}$ paramètre de queue
- $\boldsymbol{\beta}$ paramètre d'asymétrie
- $\boldsymbol{\gamma}$ paramètre d'échelle
- $\boldsymbol{\delta}$ paramètre de localisation

Estimation par des fonctions quantiles (McCulloch) ou Maximum de vraisemblance (univarié)

Plus complexe en dimension supérieure

Estimations en multivarié par projection et partitionnement d'une sphère

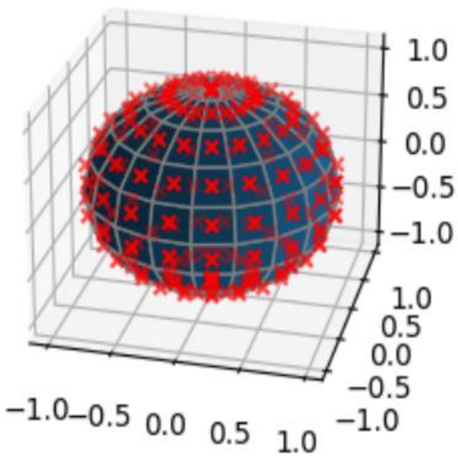
- **Résultats mitigés : précision et augmentation de dimension coûteuses**
- **En ligne avec les données**
- **Mise en avant d'asymétrie et aplatissement**

Institut des ACTUAIRES

8. DISTRIBUTION α-STABLE

Estimation en multivarié (dimension $d > 1$) - $S(\alpha, \mu, \Gamma)$

1. Tester l'ellipticité du vecteur des rendements
   - Si elliptique alors plus facile car propriétés arrangeantes
   - Si rejetée alors distribution normale rejetée
2. Estimation de μ – par estimation du même paramètre pour chacune des marginales
3. Estimation de α – moyenne des α_i de chaque marginale
4. Estimation de Γ – approche discrète $\Gamma(.) = \sum_1^m \gamma_j \delta_{s_j}(.)$
   - Utilisation de la fonction caractéristique empirique $\widehat{\Phi}_n(t) = \frac{1}{n} \sum \exp(i\langle t|X_i\rangle)$
   - Partitionnement de la sphère unitaire S^d
   - A chacun des centres s_j, associer un poids γ_j (obtenu en utilisant α et $\widehat{\Phi}_n$)



Partitionnement de la sphère unitaire (dimension 3, 200 points)

Pour contrôler les excès, les rendemets sont dans $[-30\%, 30\%]$:

- Une hausse de 30% sur un indice diversifié d'actions d'un pays est très peu imaginable en une semaine
- Une baisse de 30% est presque impossible : contrôle des marchés financiers et semble suffisamment être un scénario extrême pour notre étude

Institut des ACTUAIRES

8. DISTRIBUTION α-STABLE

Intégration au modèle de Black-Litterman

- Utiliser la mesure de risque *CVaR* (car n'admet pas de variance)
- Restructurer l'impact des vues sur la distribution *a posteriori*
- Retrouver les allocations optimales par algorithme d'optimisation en réutilisant les formules du couple Espérance-*CVaR*

	Modèle de base	Modèle proposé
Rendements	$R \sim N(\mu, \Sigma)$	$R \sim S(\alpha, \mu, \Gamma)$
Espérance μ	$\mu \sim N(\mu_{post}, \Sigma_{post})$	$\mu = \mu_{post}$

Est-ce que cela rime à quelque chose ?

- Perte de la variance liée au paramètre μ **mais** impact marginal
- Pas de solution claire pour appliquer un raisonnement bayésien à la mesure spectrale Γ
- Gain considérable en termes d'asymétrie et de queue

Institut des ACTUAIRES

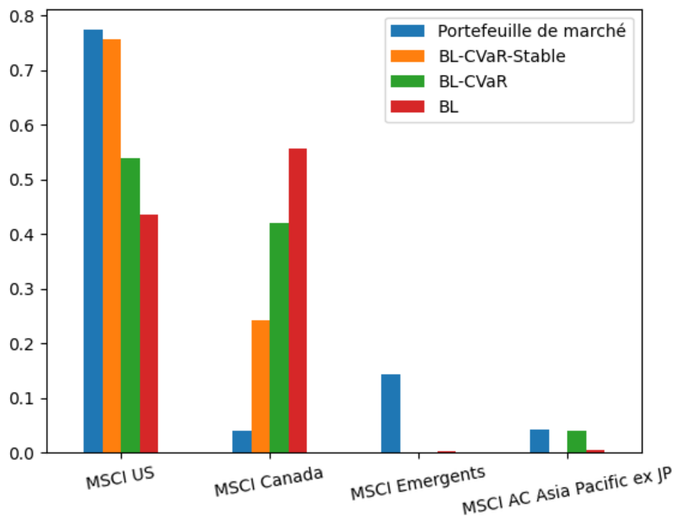
8. DISTRIBUTION α-STABLE

Résultats :

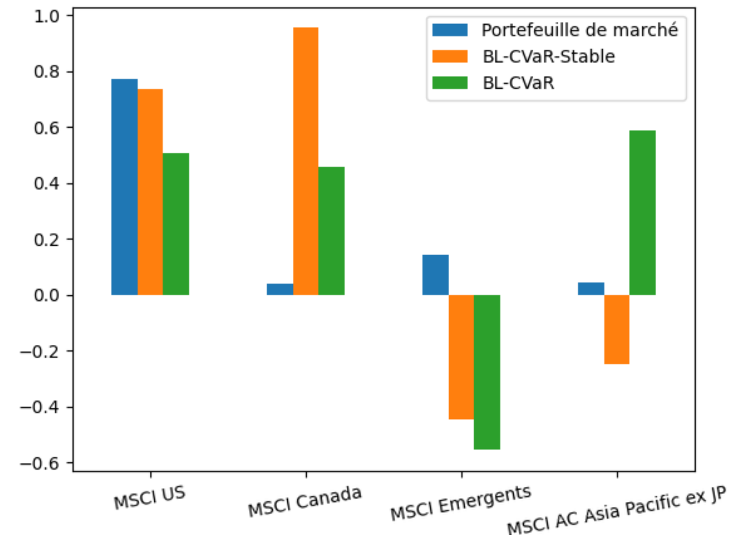
- Cohérents avec les résultats attendus
- Similaires à ceux sans changement de distribution **mais réactions différentes pour des degrés de confiance élevés ou faibles**

Critiques :

- Limites en taille du portefeuille
- Calculs allégés, structure de dépendance peu précise
- Difficile à calibrer le mécanisme de confiance

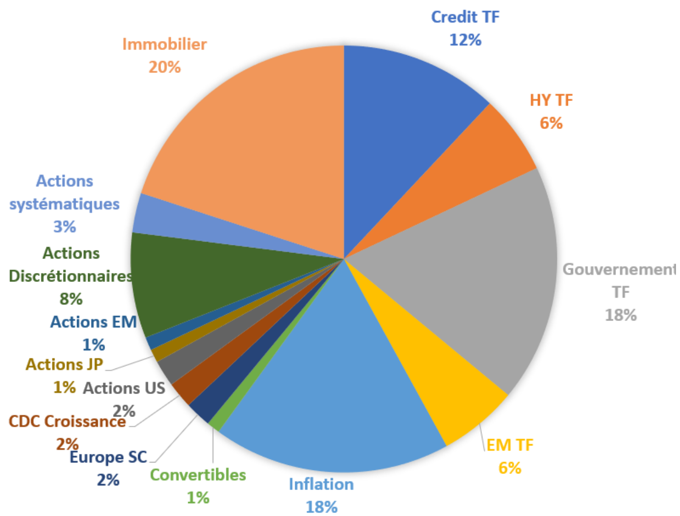


Comparaison des allocations issues des différentes variantes (avec contraintes)



Comparaison des allocations issues des différentes variantes (sans contraintes)

9. APPLICATION AU GROUPE CAISSE DES DÉPÔTS



- Portefeuille fictif de la Direction de la Gestion d'Actifs du groupe Caisse des Dépôts (avec la majeure partie des classes investies)
- Fonds d'épargne et Section générale regroupés
- Indices pour chaque classe avec un historique mensuel

Développement d'un outil d'aide à la décision

- Intégrant le modèle de Black-Litterman
- Générant des vues pour la période suivante et offrant le choix de préciser la confiance (si saisies manuellement)
- Prenant en compte les contraintes d'investissement
- Proposant différents portefeuilles pour aider dans la proposition d'une Allocation stratégique détaillée

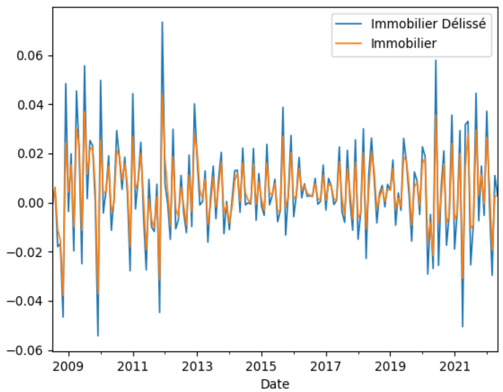
Institut des ACTUAIRES

9. APPLICATION AU GROUPE CAISSE DES DÉPÔTS

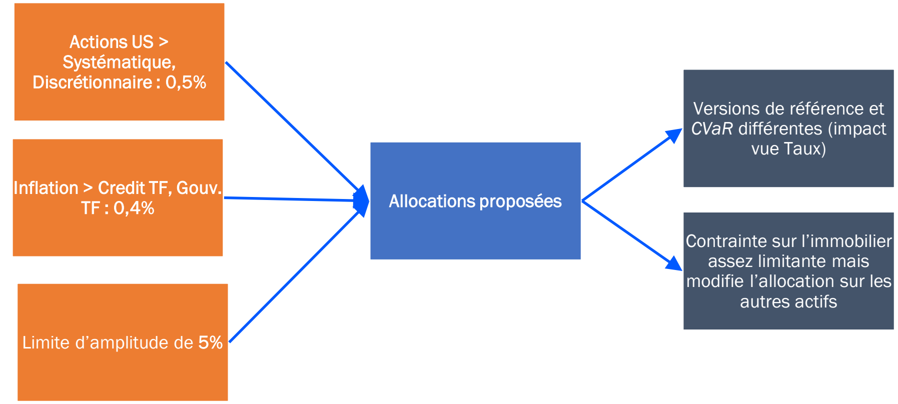
Délissage des séries (Private Equity et Immobilier)

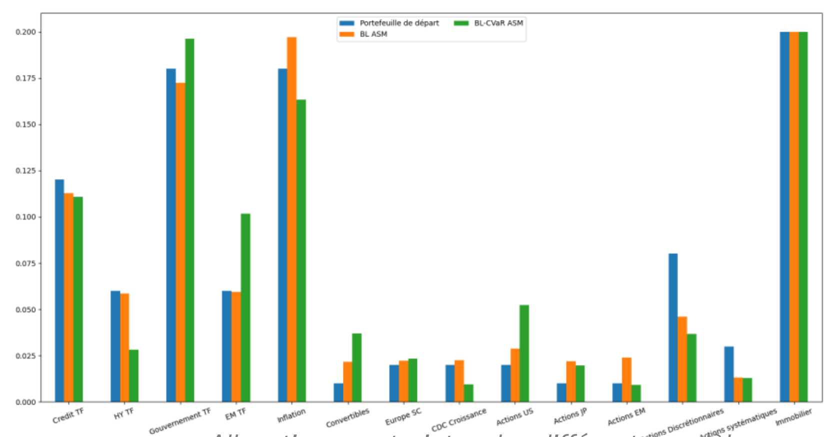
- Développé par Delfim et Hoesli en 2019
- Information partiellement inhibée
- Permet de refléter le vrai risque sous-jacent
- Utile pour problématique d'allocation (évite l'allocation complète en immobilier)

Résultat difficile d'interprétation, augmentation de la variance



Séries des rendements de l'indice immobilier (mensuel)





Allocations contraintes des différents modèles développées (25% confiance)

Institut des ACTUAIRES

CONCLUSION, LIMITES ET OUVERTURE

Bilan

Résultats **intéressants**, parfois expérimentaux

Application utile à la gestion des actifs du groupe, aide à la décision

Challenges

Le mélange d'outils et la complexité croissante faisant perdre pied

Une interprétation parfois difficile dans les allocations

Axe d'amélioration

Utiliser une fenêtre d'application plus longue (plusieurs périodes)

Institut des ACTUAIRES

Merci pour votre attention !