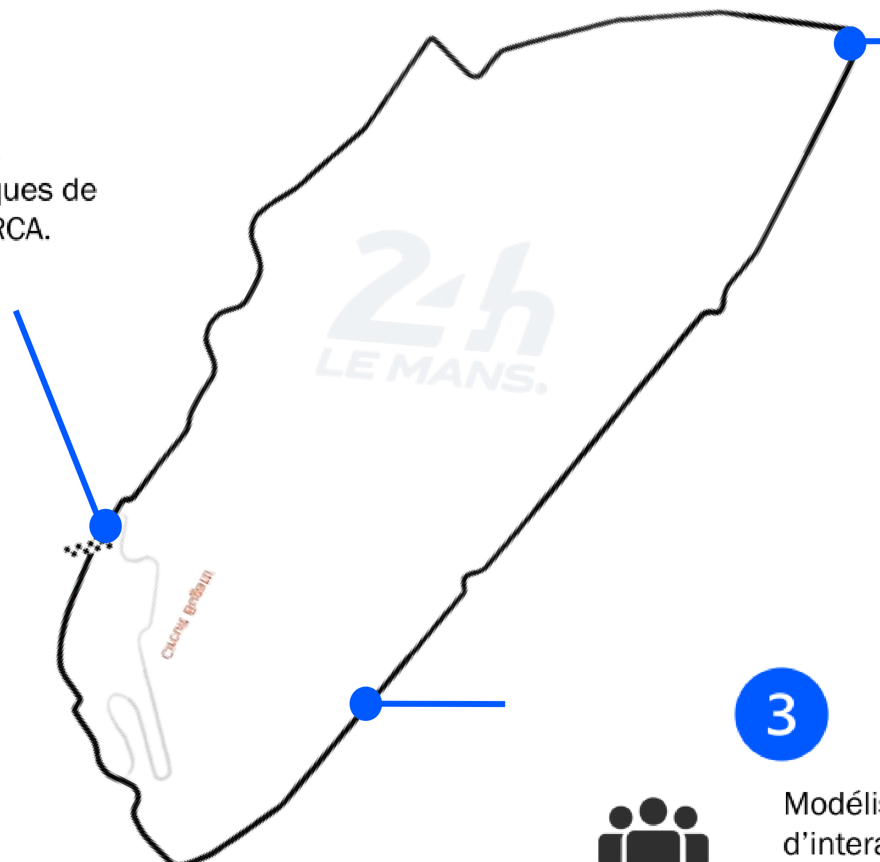
Application de la théorie des jeux à la réassurance RC Auto d'un groupe d'assureurs.

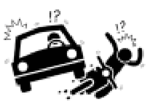
Clotaire Augereau

6 novembre 2024

• SOMMAIRE

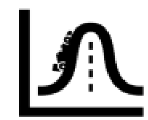


1



Définition et caractéristiques de la garantie RCA.

2



Modélisation de la sinistralité.

3

Modélisation d'interactions entre agents économiques.

1

Définition et caractéristiques de la garantie RCA.

1 Définitions et caractéristiques de la garantie RCA.

Particularité de la garantie :

- Des raccourcis multiples.
- Un cadre juridique particulier.
- Evolution temporelle vaste et évaluation complexe.

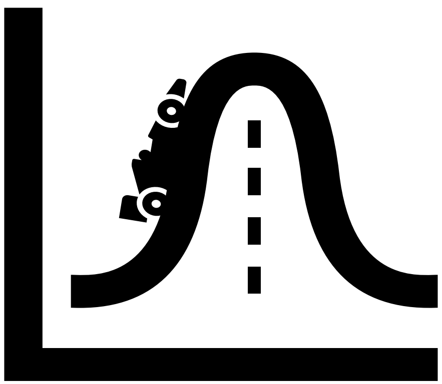
Caractéristiques de la base :

- Survenance 2007 - 2022.
- Sinistres retraités.
- Victime unique.

Sinistres RC Automobile – Exemple

Caractéristiques				2007		2008		2009		…	2022	
Entité	Survenance	N°	Etat	Payés	Suspens	Payés	Suspens	Payés	Suspens	…	Payés	Suspens
Entite1	2007	1	Clos	0	0	100	2 536	176	2 514	…	1 501	0
Entite2	2009	4	Clos	0	0	0	0	19	3 051	…	208	0
Entite1	2015	3	Ouvert	0	0	0	0	0	0	…	2028,32	96,91
Entite2	2020	5	Ouvert	0	0	0	0	0	0	…	78	2 634

2



Modélisation de la sinistralité.

Institut des ACTUAIRES

2 Modélisation de la sinistralité.

Mise en « As-If » :

- Actualisation.
- Redressement.
- Revalorisation.

Développement classique des sinistres

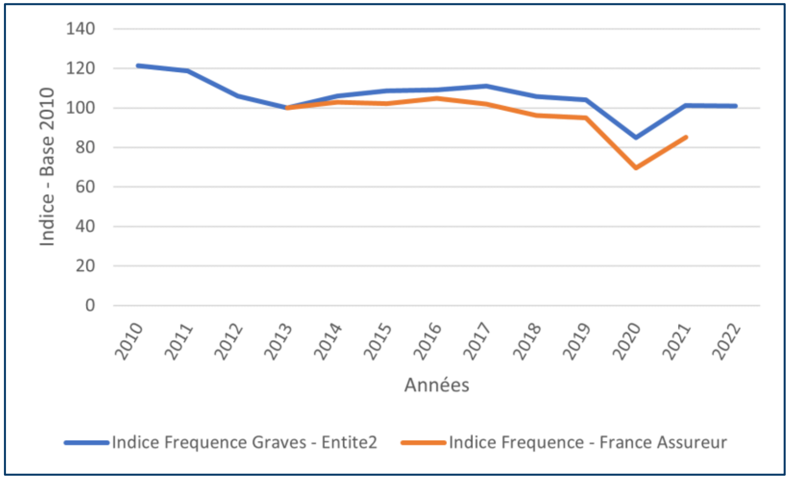
N° Sinistre	Entité	Survenance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	16
1	Entite1	2007	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	...	2022
4	Entite2	2009	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	...	2024
2	Entite1	2011	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	...	2026
3	Entite1	2015	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022			
5	Entite2	2020	2020	2021	2022								

Vision « As-If » construite du développement des sinistres

N° Sinistre	Entité	Survenance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	16
1	Entite1	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	...	2023
4	Entite2	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	...	2023
2	Entite1	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	...	2023
3	Entite1	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023			
5	Entite2	2023	2023	2023	2023								

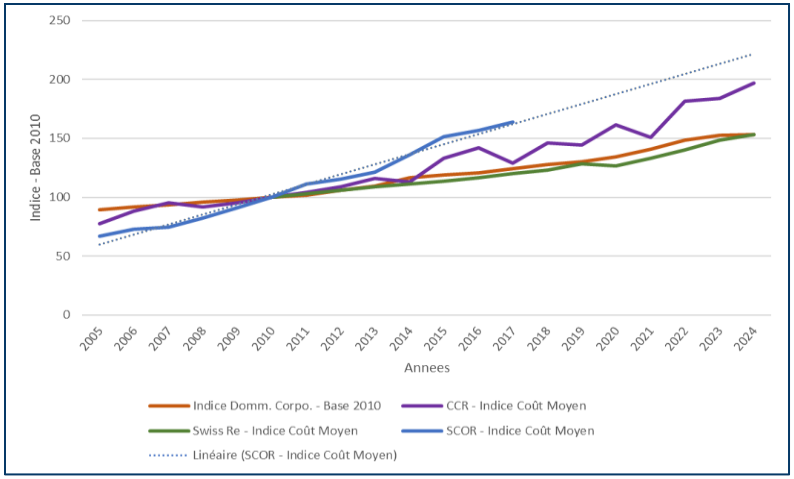
2 Modélisation de la sinistralité.

Indice des nombres de sinistres



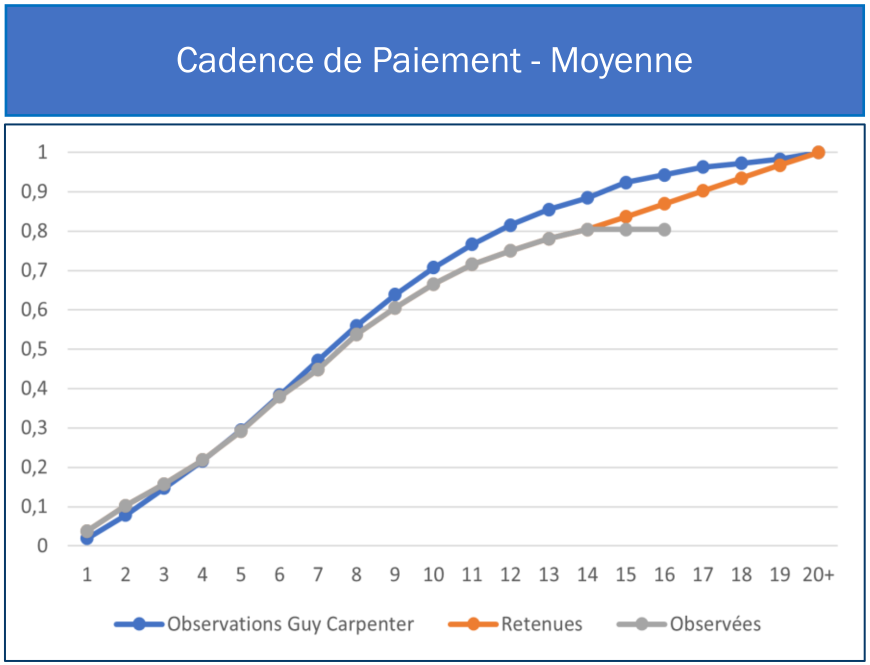
- Proportion du nombre de véhicules assurés dans le portefeuille de l'entité considérée par rapport au parc de véhicule français.
- Nombre d'accidents graves en France (*Source :* fichier BAAC - ONISR).

Indice des coûts



- Indice composite construit sur trois indices « super-inflatés » représentant les trois postes de préjudices les plus importants.
- Comparaison aux publications de « marché » (CCR, SCOR, SWISS RE).

2 Modélisation de la sinistralité.



Cadence de paiement individuelle :

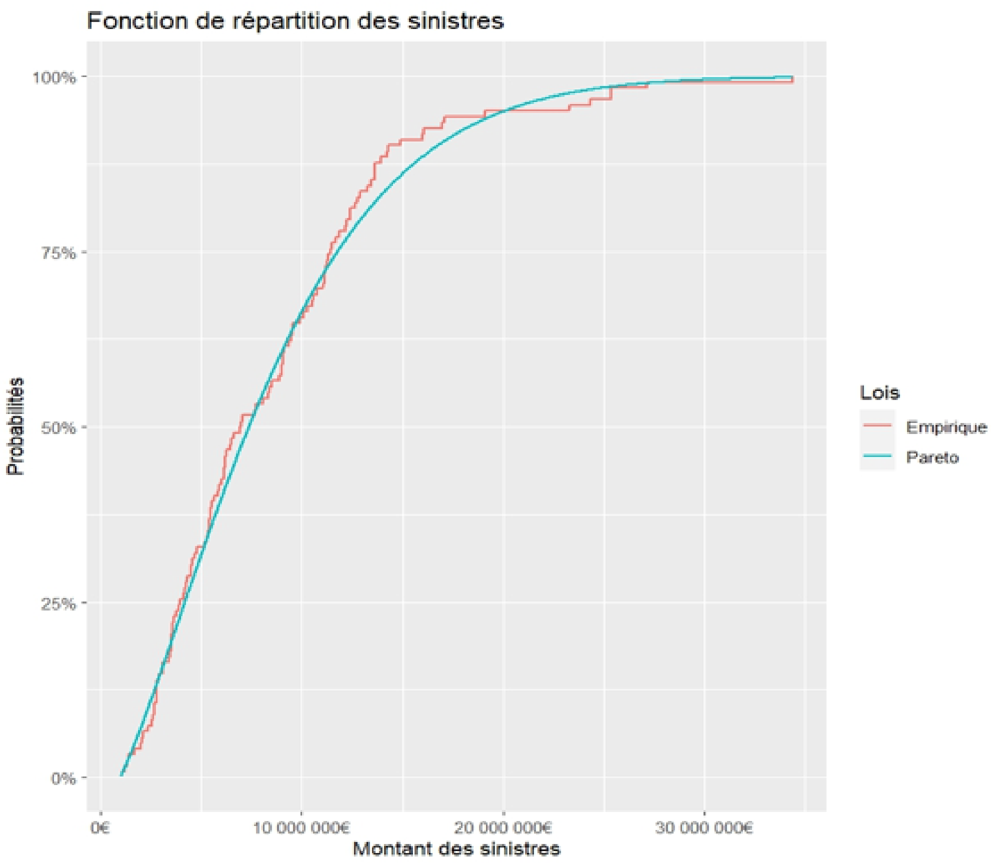
- Suppose un nombre d'années maximales, liquidation complète de tous les sinistres.
- Suppose une absence de paiement négatif.
- La cadence de paiement individuelle « historique » est prolongée par la moyenne observée.

Application d'inflation future :

- Suppose une inflation constante.
- Appliquée sur les paiements décumulés.
- Le cumul des paiements inflatés correspond à la valeur ultime.

2 Modélisation de la sinistralité.

Calibrage des coûts.



3

Modélisation d’interactions entre agents économiques.

Institut des ACTUAIRES

3 Modélisation d'interactions.

Un ensemble de joueurs.

Suppose deux joueurs : le premier accepte un risque supplémentaire, le second cède une partie du sien en échange d'une prime.

Un ensemble d'actions possibles, pour chaque joueur, supposé non-vides.

Une infinité de possibilités.

Une fonction caractéristique pour chaque joueur, attribuant une valeur réelle à chaque état du jeu.

Une fonction qui retranscrit l'appréciation du joueur des gains potentiels.

Institut des ACTUAIRES

Ensemble d'actions étudié :

- Uniquement les traités non-proportionnels.
- Tous les traités sont définis par un couple (franchise, chargement) noté (d, κ).
- Les ensembles de définition de ces paramètres doivent être discrétisés.
- La prime de réassurance est définie sur le principe de l'écart-type.

$$X_2^{re} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2,j} - d)^+ & \text{, si traité XS.} \\ \left(\left(\sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j} \right) - d \right)^+ & \text{, si traité Stop-Loss.} \end{cases}$$

Fonction CARA :

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \frac{1 - exp(-\rho \times x)}{\rho}$$

Engagement / Gain Potentiel	ρ
100 / 101	0,000099
100 / 105	0,000476
100 / 110	0,0009084
100 / 125	0,0019917
100 / 150	0,0032886
1 000 / 1 050	0,0000476
1 000 / 1 100	0,0000908
1 000 / 1 200	0,0001662
1 000 / 1 500	0,0003288
1 000 / 2 000	0,0004812
10 000 / 11 000	0,000009
10 000 / 12 000	0,0000166
10 000 / 15 000	0,0000328
10 000 / 20 000	0,0000481

Table de Rabin (2000).

Avantages :

- Aversion au risque exprimée très clairement (croissant selon le paramètre).
- Considère la situation de ruine.

Inconvénients :

- Plus le niveau de capital est élevé, plus l'aversion au risque est importante.
- Les variations d'utilité marginale sont minimes lorsque le capital est élevé.

Retenus :

- 0,00017 pour le joueur 1 et 0,00048 pour le joueur 2.

3 Modélisation d'interactions.

Fonction CRRA :

$$u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad u(x) := \begin{cases} \frac{x^{1-r}}{1-r}, & \text{si } r \neq 1 \\ ln(x), & \text{sinon} \end{cases}$$

Espace du paramètre relatif	Expression de l'appétit
r < -0,95	extrêmement amateur de risque
-0,95 < r < -0,49	très amateur de risque
-0,49 < r < -0,15	amateur de risque
-0,15 < r < 0,15	neutre au risque
0,15 < r < 0,41	légèrement averse au risque
0,41 < r < 0,68	averse au risque
0,68 < r < 0,97	très averse au risque
0,97 < r < 1,37	extrêmement averse au risque
r > 1,37	« *stay in bed* »

Table de Holt et Laury (2002).

Avantages :

- Plus le niveau de capital augmente, plus l'appétit au risque augmente aussi.
- Calibrage réalisé facilement.

Inconvénients :

- Pas de considération pour la situation de ruine, l'utilité est nulle, aucune vision de gravité.
- Vision moins intuitive de l'aversion.

Retenus :

- 0,3 pour le joueur 1 et 0,8 pour le joueur 2.

3 Modélisation d'interactions.

Au temps 0, avant la souscription, on définit :

- Une portion des primes perçues, nommée prime de grave du joueur i, $P_i(0) = \Pi_i \times (1-\eta)$
- La charge de sinistres graves du joueur i, $X_i(0) = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}$
- Considérant la richesse initiale du joueur, on obtient le surplus du joueur i, $S_i(0) = \omega_i + P_i(0) - X_i(0)$

Au temps 1, lorsque la souscription a lieu, les valeurs sont redéfinies :

- Primes, $P_i(1) = P_i(0) \pm P^{re}$
- Charges, $X_i(1) = X_i(0) \pm X_2^{re}$
- Surplus, $S_i(1) = \omega_i + P_i(1) - X_i(1)$

Fonction caractéristique du joueur i est définie comme la différence de l'utilité espérée, sous contrainte, du surplus de joueur entre le temps 1 et 0.

$$\forall i \in E,\ t \in \{0,1\},\ U_i(t) = \begin{cases} \mathbb{E}[u_i(\ S_i(t)\ )] \ \text{sinon} \\ \\ 0 \ \text{si } VaR_{99,5\%}(X_i(t)) > P_i(t) \times \frac{1}{1-\eta} \end{cases}$$

3 Modélisation d'interactions.

Paramètres choisis

Nombre de Simulations par calcul d'utilité	8000
Valeur de η	0,7
Dimension de K	31 (uniformément de 0 à 150%)
Dimension de D	301 (uniformément de EUR 0 à 30 M)

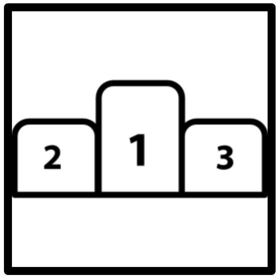
Utilités initiales des entités

Classe de fonction		Entite 1	Entite 2	Entite 3	Entite 4	Entite 5	Entite 6
Fonction utilité CARA	Utilité Initiale	0	71,2	93,5	0	0	112,5
	ρ	0,00048	0,00017	0,00017	0,00048	0,00048	0,00017
Fonction utilité CRRA	Utilité Initiale	0	27,7	34,4	0	0	39,1
	r	0,8	0,3	0,3	0,8	0,8	0,3

3 Modélisation d'interactions.

La circulation de l'information.

L'information entre les joueurs est toujours supposée complète.



L'ordre de choix d'action de chacun des joueurs.

Premier jeu statique, le second dynamique.

La possibilité de coopérer pour les joueurs implique de définir les objectifs de coalition et le partage des gains.

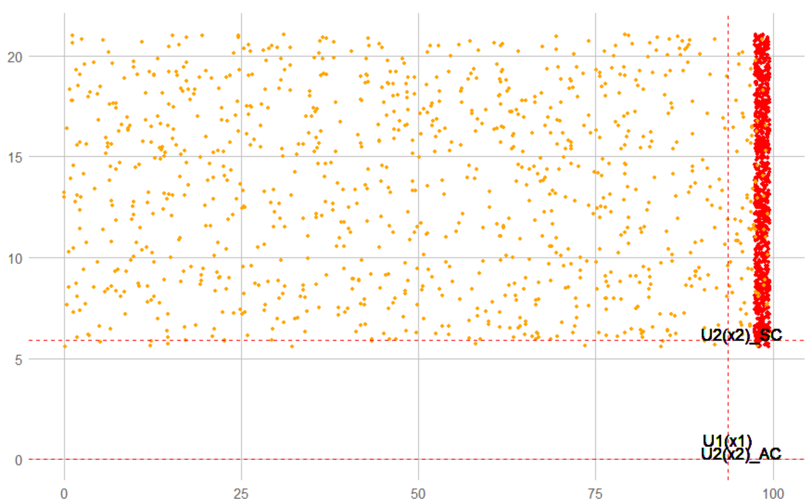
Premier jeu coopératif, le second non-coopératif.

Critère d'optimisation coopératif :

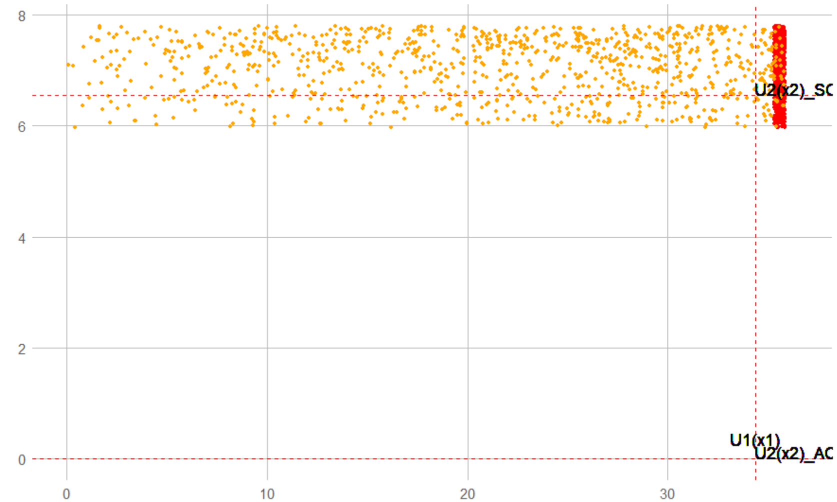
$$(d^*, \kappa^*) = \underset{\kappa \in K, d \in D}{\arg\max} \, (U_1(1) - U_1(0)) \times (U_2(1) - U_2(0))$$

Dans toutes les présentations de résultats, les entités 3 (joueur 1) et 5 (joueur 2) sont choisies.

Le Core – Entité 3 & 5 - Fonction CARA



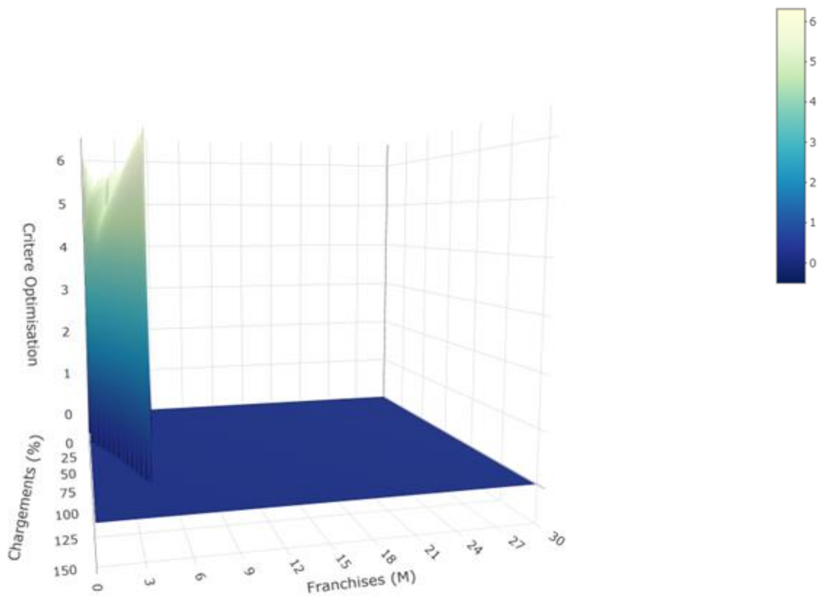
Le Core – Entité 3 & 5 - Fonction CRRA



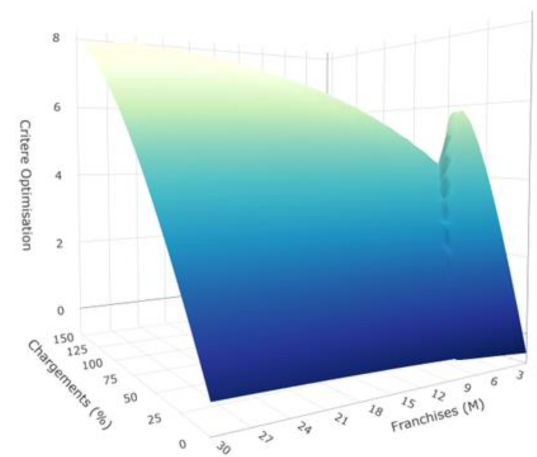
Institut des ACTUAIRES

3 Modélisation d’interactions.

Valeurs du Critère – Traité XS - Fonction CRRA

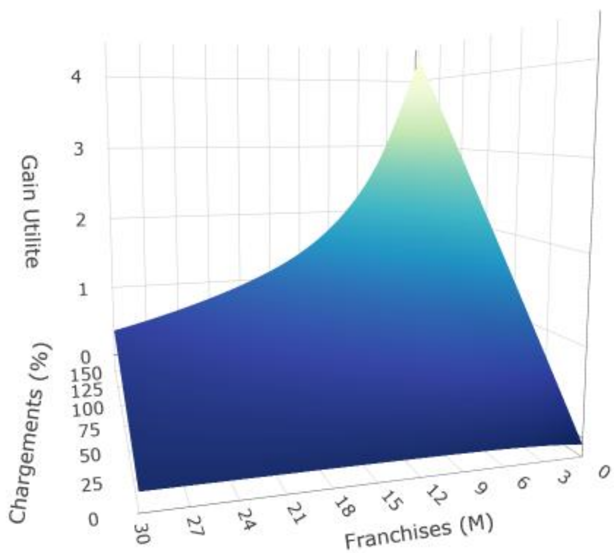


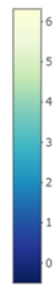
Valeurs du Critère – Traité SL - Fonction CRRA



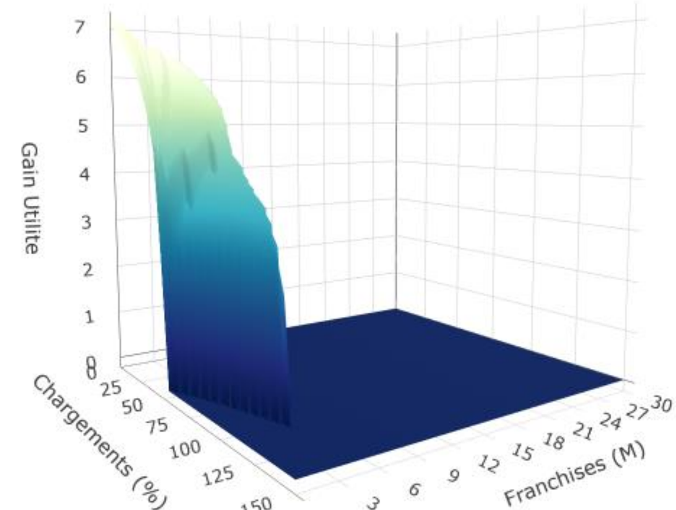
3 Modélisation d'interactions.

Gain d'utilité– Traité XS - Fonction CRRA – J1





Gain d'utilité– Traité XS - Fonction CRRA – J2



Institut des ACTUAIRES

3 Modélisation d'interactions.

Traités maximisant le critère :

Entités 3 et 5 - Fonctions CARA		
	XS	Stop Loss
(d^*, κ^*)	(2,6 , 4%)	(10, 4%)
Critère Optimisation	8,71	8,70
Niveau Utilité J_1	96,61	96,62
Niveau Utilité J_2	2,95	2,93

Valorisation en monnaie commune :

	Traité Optimal	Entite 3	Entite 5	Entite 3 et 5
Gains (EUR M)	XS	0	0	1,53 (dont 1,34 pour J_1)
	Stop Loss	0	0	2,01 (dont 1,77 pour J_1)

Solution atteinte : valeur de Shapley

Méthode	Gains J_1 (EUR M)	Gains J_2 (EUR M)
Valeur de Shapley - XS	0,767	0,767
Valeur de Shapley - Stop Loss	1,004	1,004

Vision binomiale du groupe.

	Entités 3 et 5		Entités 6 et 4		Entités 2 et 1	
Type de traité	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
Gains J_1 avant répartition (EUR M)	1,34	1,77	0,16	0,18	1,22	1,36
Gains J_1 (EUR M)	0,77	1,004	0,14	0,19	0,63	0,71
Gains J_2 (EUR M)	0,77	1,004	0,14	0,19	0,63	0,71
« Sur-Prime » (EUR M) [1]	0,57	0,77	0,02	-0,01	0,59	0,65

Le partage de gain n'est pas à sens unique ; parfois une transaction monétaire supplémentaire est nécessaire pour assurer la stabilité du transfert.

Définir le réassureur dans une vision marché : neutre au risque, implique une nouvelle fonction caractéristique du joueur 1.

$$v_i(\kappa, d) = \begin{cases} \kappa \times \sigma(X_2^{re}(d)) & \text{si } i = 1. \\ U_2(1) - U_2(0) & \text{si } i = 2. \end{cases}$$

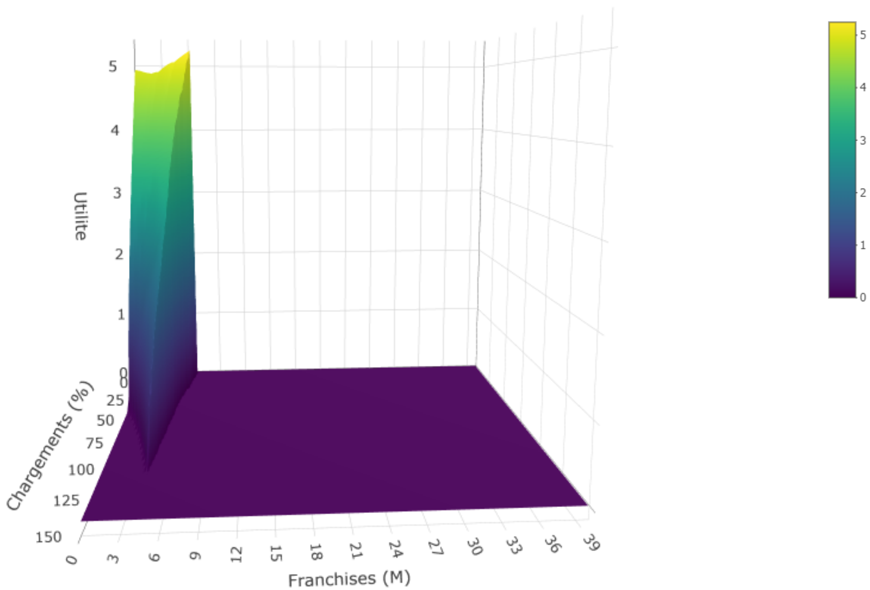
Jeu dynamique : le réassureur joue en premier pour fixer le niveau de chargement et l'assureur adapte sa stratégie en choisissant le niveau de franchise.

$$\kappa^\star = \sup_{\kappa \in K} \ \kappa \times \sigma(X_2^{re}(d)), \ d = \arg\max_{d \in D} \ \left[U_2^{CR}(1) - U_2^{CR}(0) \,|\, \kappa\right]$$

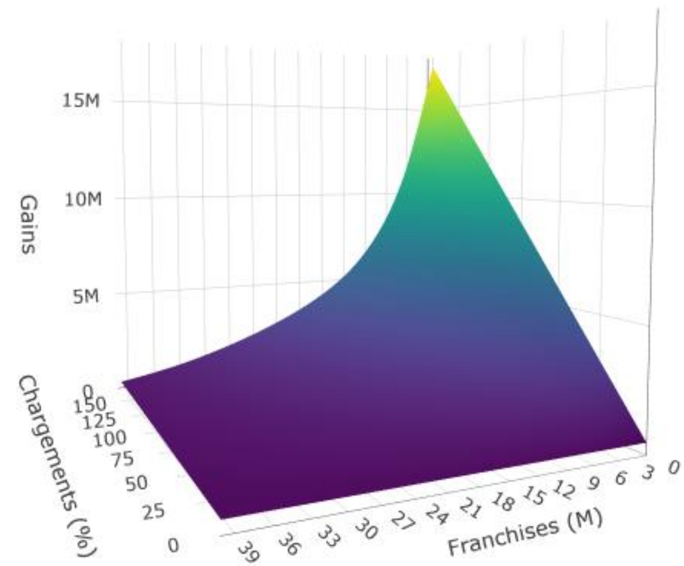
Institut des ACTUAIRES

3 Modélisation d’interactions.

Gain d’utilité – Assureur - Traité XS



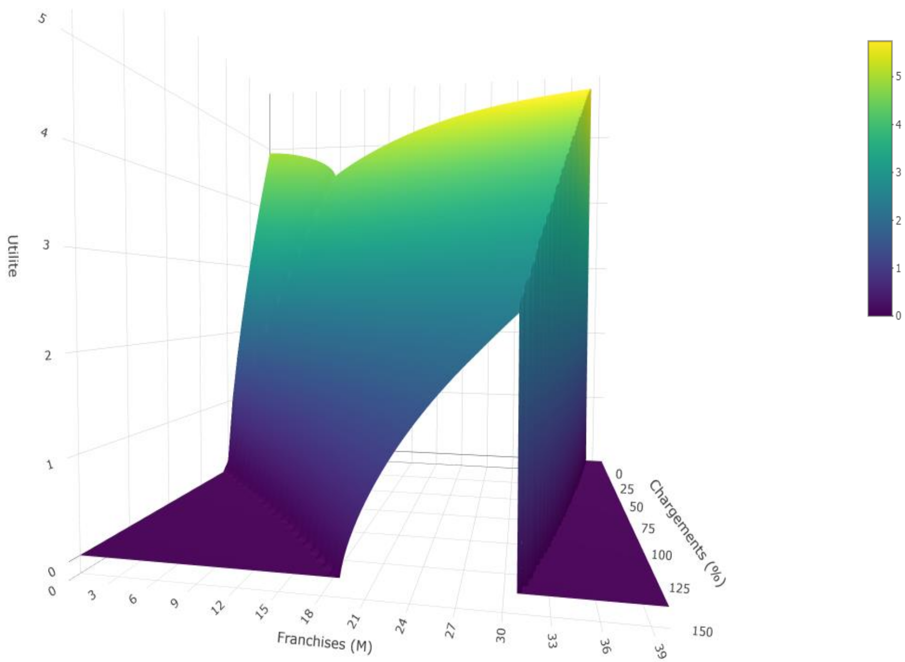
Gain d’utilité – Réassureur - Traité XS



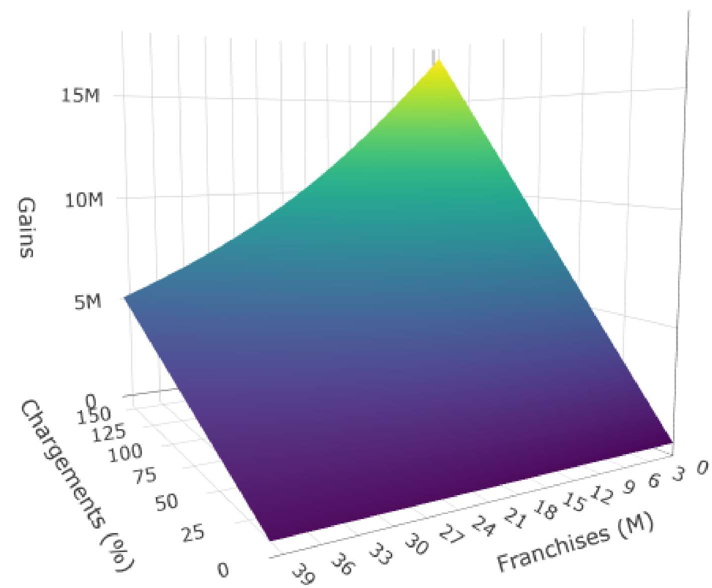
Institut des ACTUAIRES

3 Modélisation d'interactions.

Gain d'utilité – Assureur - Traité Stop-Loss



Gain d'utilité – Réassureur - Traité Stop-Loss



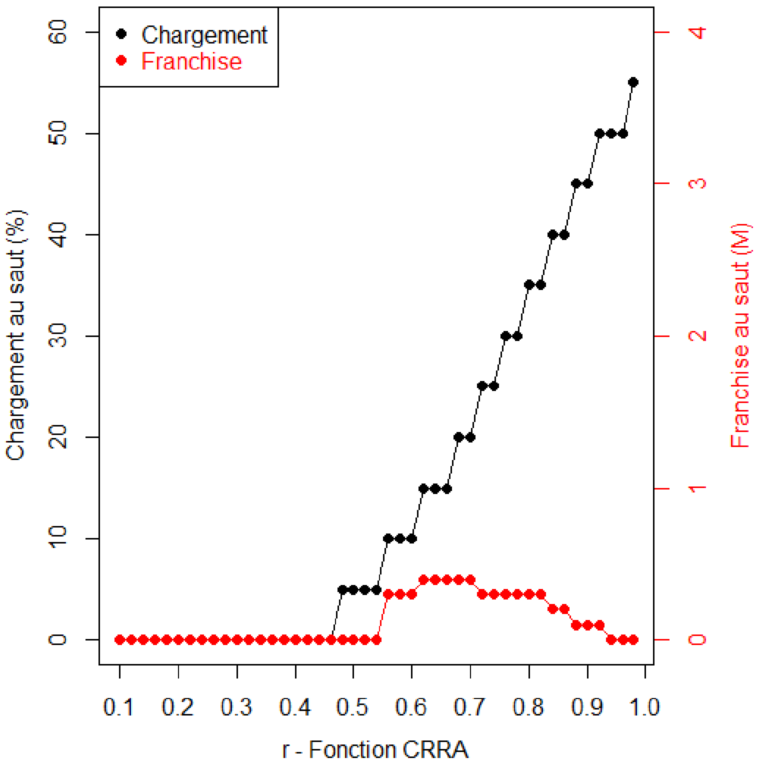
3 Modélisation d’interactions.

Solutions Atteintes – Equilibre de Stackelberg.

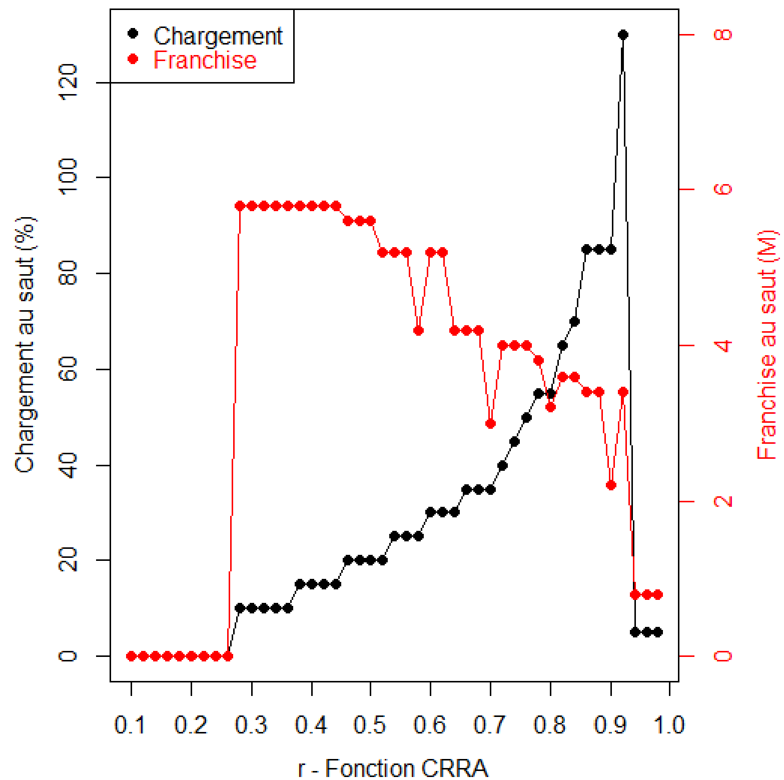
	Entité 1		Entité 2		Entité 3	
Type de traité	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(8,2 , 150%)	(38 , 150%)	(4,2 , 5%)	(42 , 5%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain utilité - cédante	1,27	3,88	0,22	0,19	-0,09	-0,09
	Entité 4		Entité 5		Entité 6	
Type de traité	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(3,2 , 55%)	(6,6 , 75%)	(4 , 105%)	(30 , 150%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain utilité - cédante	2,50	2,74	2,99	4,27	-0,10	-0,10

3 Modélisation d'interactions.

Jeu 2 – Entité 5 – Traité XS – Primes classiques

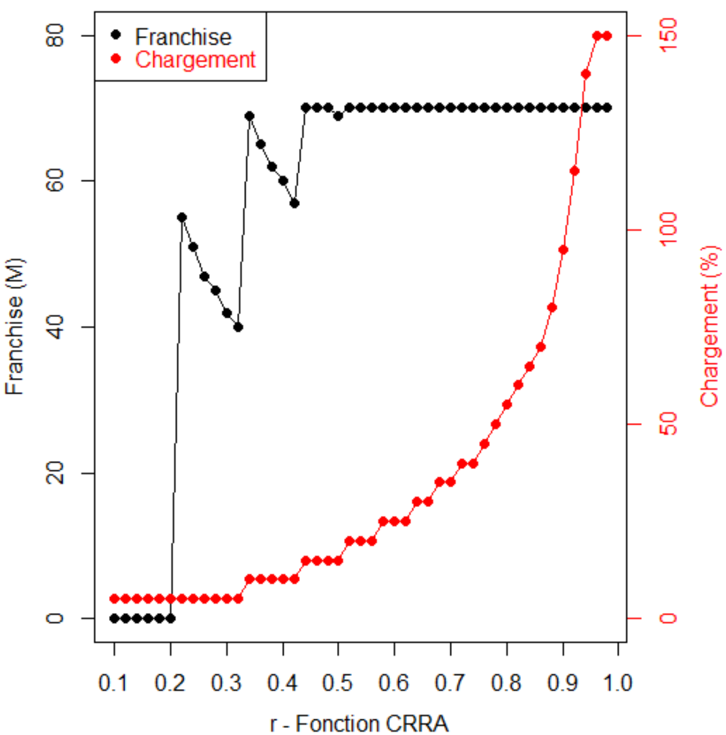


Jeu 2 – Entité 5 – Traité XS – Primes triples

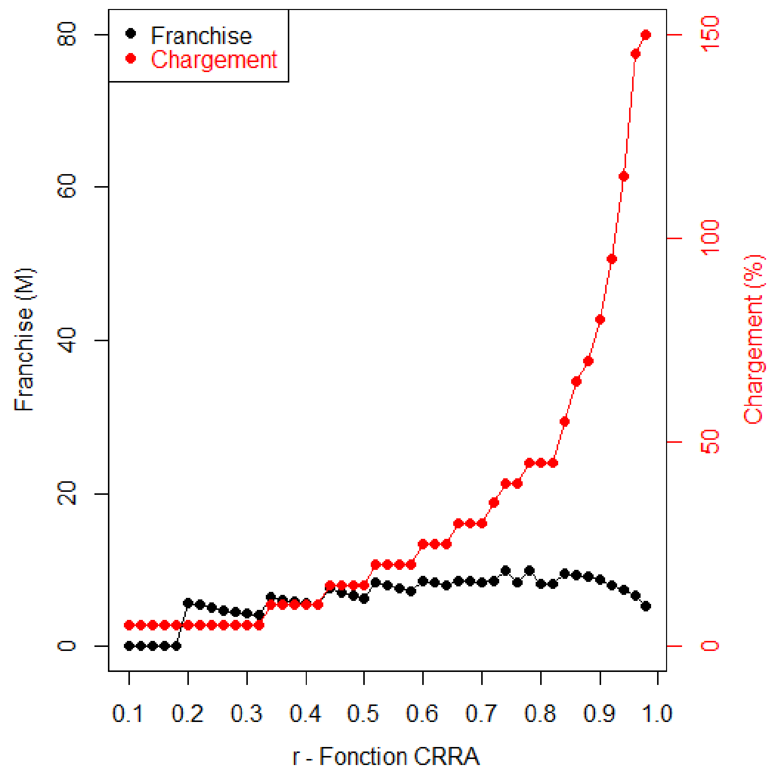


3 Modélisation d'interactions.

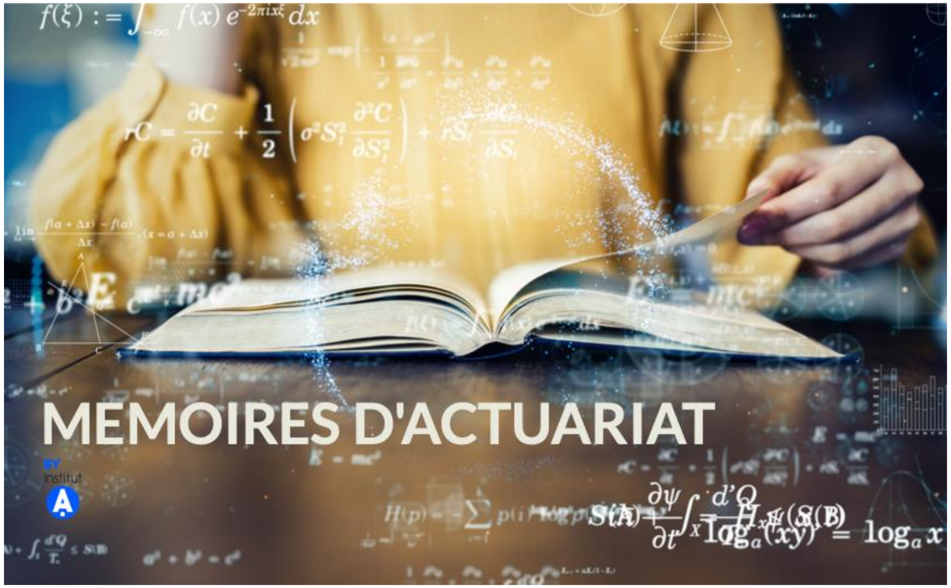
Jeu 2 – Entité 2 – Traité XS – Primes classiques



Jeu 2 – Entité 2 – Traité XS – Primes triples



Fin.

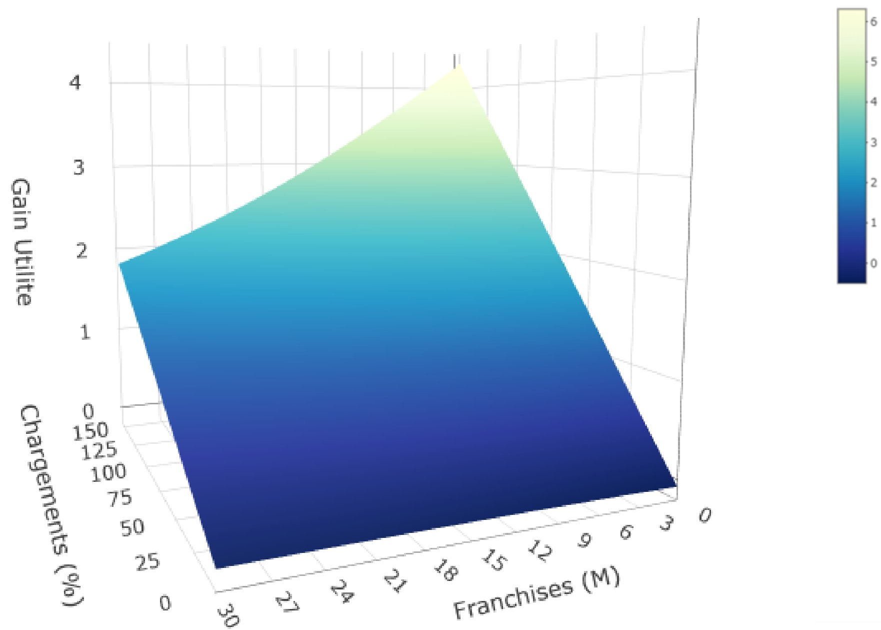


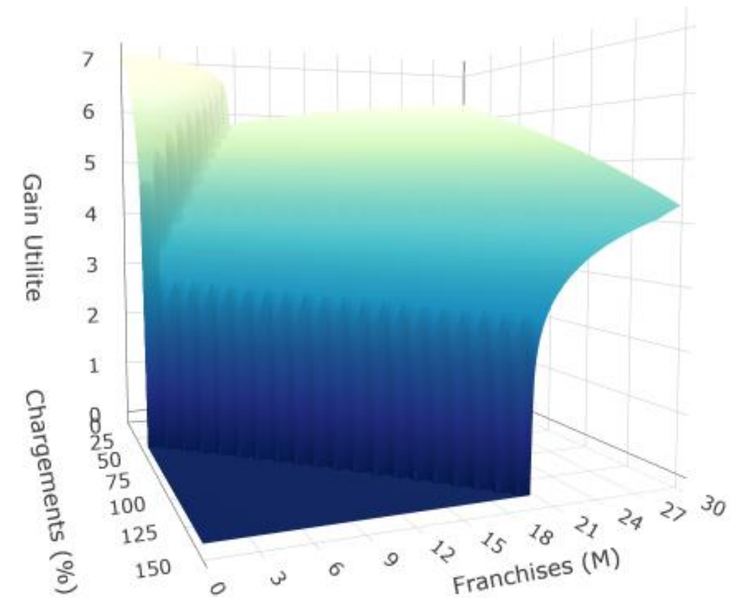
Merci à toutes et à tous.

3 Modélisation d'interactions.

Gain d'utilité– Traité SL - Fonction CARA – J1

Gain d'utilité– Traité SL - Fonction CARA – J2





Annexes

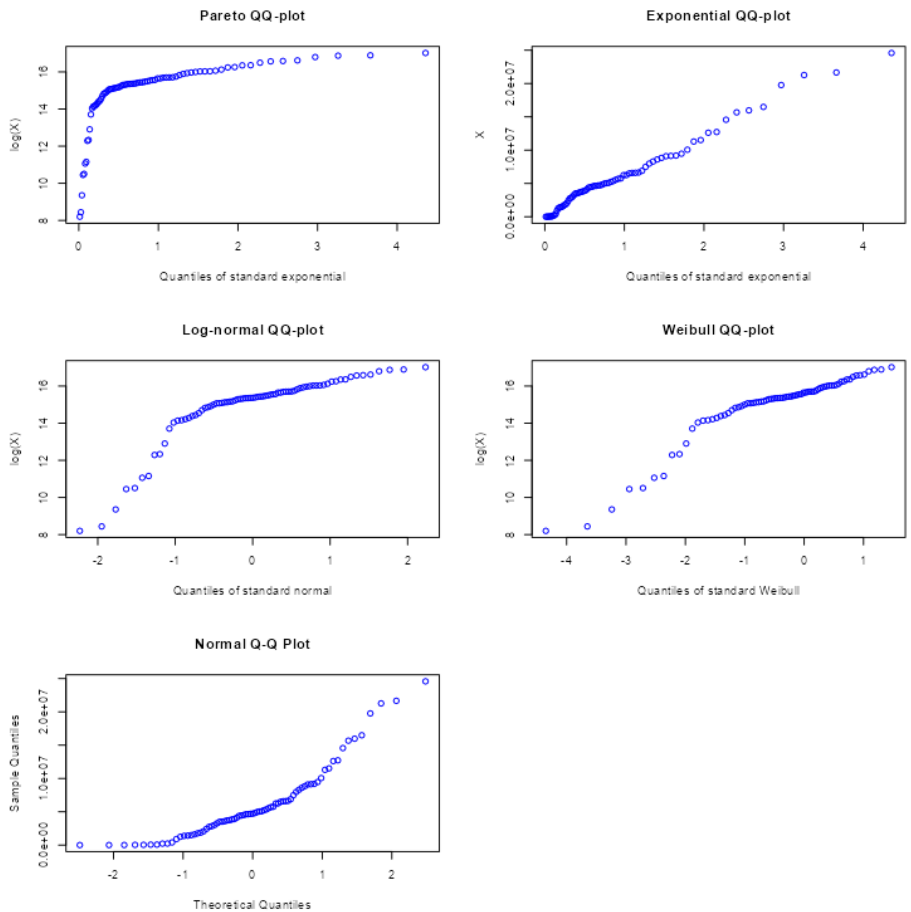
Jeu 1.

	Entités 3 et 5		Entités 6 et 4		Entités 2 et 1	
Type de traité	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(4,2 , 95%)	(25 , 150%)	(3,4 , 50%)	(7 , 65%)	(10 , 105%)	(28 , 150%)
Critère Optimisation	6,31	7,98	1,29	1,56	4,18	5,05
Gain utilité - cédante	3,60	3,74	3,29	3,60	2,55	2,85
« Sur-Prime » (EUR M) [2]	0,57	0,77	0,02	-0,01	0,59	0,65

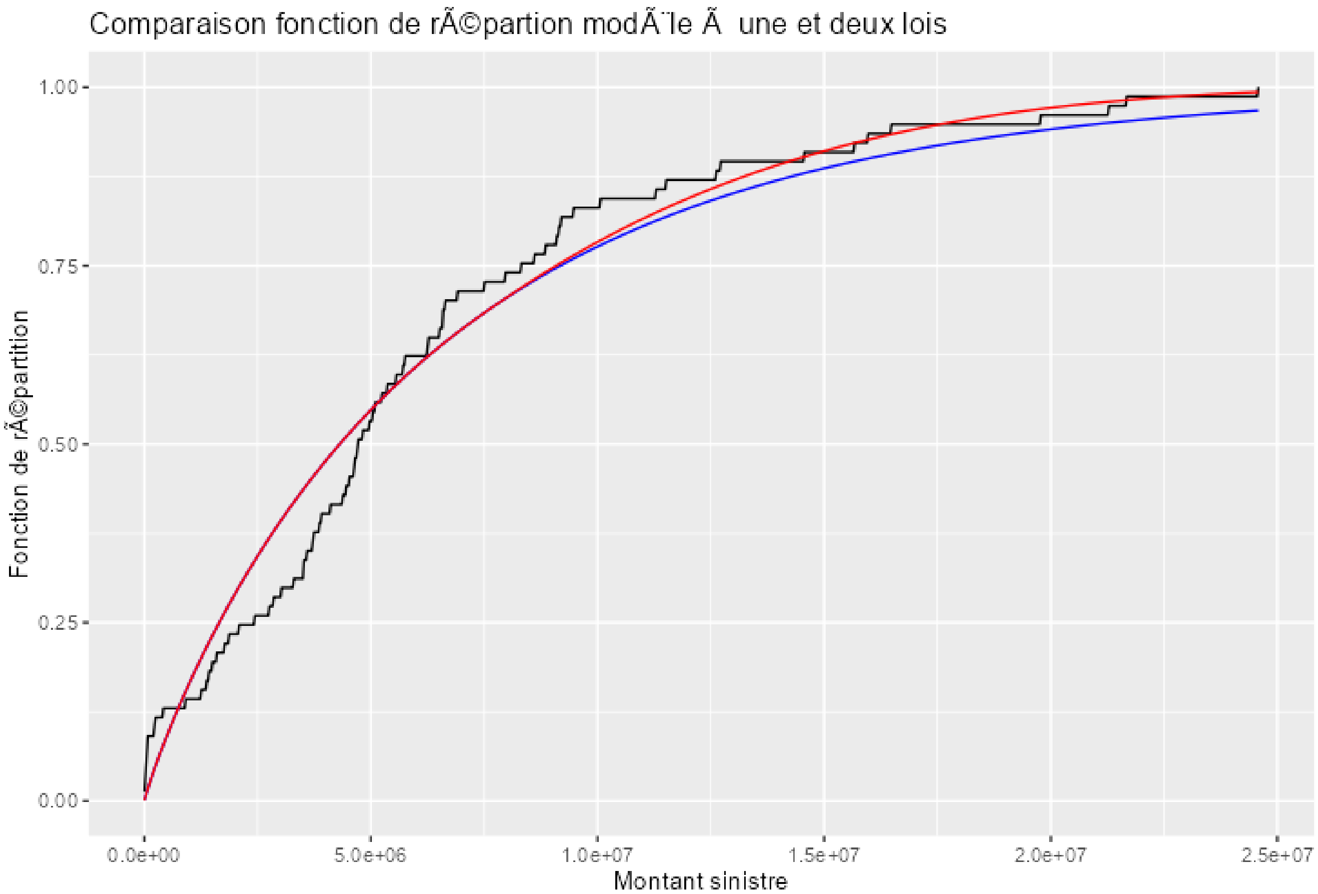
Jeu 2.

	Entité 1		Entité 2		Entité 3	
Type de traité	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(8,2 , 150%)	(38 , 150%)	(4,2 , 5%)	(42 , 5%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain utilité - cédante	1,27	3,88	0,22	0,19	-0,09	-0,09
	Entité 4		Entité 5		Entité 6	
Type de traité	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(3,2 , 55%)	(6,6 , 75%)	(4 , 105%)	(30 , 150%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain utilité - cédante	2,50	2,74	2,99	4,27	-0,10	-0,10

Annexes


Pareto QQ-plot
log(X)
Quantiles of standard exponential
Exponential QQ-plot
X
Quantiles of standard exponential
Log-normal QQ-plot
log(X)
Quantiles of standard normal
Weibull QQ-plot
log(X)
Quantiles of standard Weibull
Normal Q-Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles

Annexes


Comparaison fonction de rÃ©partition modÃ¨le Ã une et deux lois
Fonction de rÃ©partition
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0e+00
5.0e+06
1.0e+07
1.5e+07
2.0e+07
2.5e+07
Montant sinistre